Over *La Géométrie van René Descartes*

Fragment uit hoofdstuk 9 van ‘*Wat a is kun je niet weten*’[1]

9.5 Analyse en synthese, de lessen van Descartes

In 1637 publiceerde René Descartes (1596 – 1650) zijn *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*. Het Discours zelf werd gevolgd door drie essays: *La Dioptrique, Les Météores* en *La Géométrie* die de methode in verschillende gebieden demonstreerden.

Descartes’ *La Géométrie* uit 1637 is dus onderdeel van zijn algemene methode voor wetenschappelijke problemen. Uitgangspunt is dat alleen de wiskundige methode tot echte zekerheid leidt in de wetenschap. Dat levert hem een werkwijze op die eenvoudig gezegd hierop neer komt:

a. elk vraagstuk dat over grootheden gaat, kan worden teruggebracht tot een *meetkundig* probleem;
b. elk meetkundig probleem kan worden teruggebracht tot een *algebraïsch* probleem;
c. elk algebraïsch probleem kan worden teruggebracht tot het *oplossen* van een of meer *vergelijkingen* met één of meer onbekenden.

Wat de waarde van het filosofisch-methodische punt *a* ook is, de waarde van *b* en *c* zit in het aangeven van een methodiek die vanuit wiskundig standpunt beoordeeld en besproken kan worden. De eerste zin van Boek I van *La Géométrie* valt meteen met de deur in huis:

> TOus les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Elke meetkundige vraag kan vertaald worden in een vraag naar het vinden van bepaalde lijnstukken in de meetkundige figuur. Het laatste woord van de eerste zin van *La Géométrie* vertelt wat de wiskundige methode daarbij is: *construire*. Het belang daarvan mag niet onderschat worden: het gaat om het bepalen van de oplossing van problemen door expliciet construeren van de oplossingen; beredenerend bewijzen van stellingen over het oplossen van een probleem is in dit kader echt een zwaktebod. Zo geeft Descartes ook meetkundige constructies voor de oplossingen van vergelijkingen.

Voor het vertalen naar algebra van een meetkundig probleem geeft Descartes vervolgens een concreet werkplan. De eerste stap daarvan is belangrijk en vraagt nadere toelichting, omdat de stap de kern van de methode vormt:

a. doe alsof het probleem opgelost is;
b. geef alle lijnstukken in de figuur namen (letters), bekende zowel als onbekende;
c. probeer één grootheid op twee verschillende manieren uit te drukken in de aldus benoemde lijnstukken; die uitdrukkingen zijn gelijk, dat geeft een *vergelijking*;
d. los de onbekende uit de vergelijking op.

1 Drijvers, P. (Ed.). (2006). Wat a is, dat kun je niet weten. Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school. Utrecht: Freudenthal institute, Utrecht University.

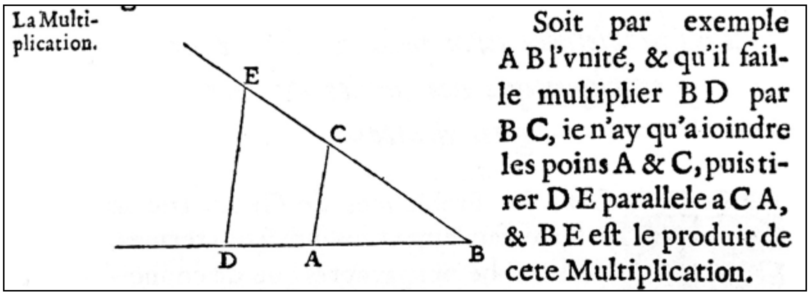
De analytische methode

Doe alsof het probleem opgelost is: Descartes grijpt hier terug op Pappus (4e eeuw na Christus). Pappus zegt dat je om de oplossing van een probleem (d.w.z. de constructie of het bewijs dat gezocht wordt) te vinden, ook uit kunt gaan van de situatie dat de constructie al gedaan is. Je bestudeert dan de figuur om de essentiële kenmerken en de verbanden met eenvoudiger proposities te vinden. Dit is de fase van de *analyse*. In de analysefase wordt de situatie als het ware uiteengerafeld. Daarna volgt de fase van de *synthese*, waarin vanuit de gevonden ontleding de constructie, of het bewijs, wordt opgebouwd.
De synthesefase is in de Griekse meetkunde de eigenlijke oplossing. ‘De oplossing’, ja, omdat het bewijs of de te vinden constructie ‘de oplossing’ van het probleem is. De analysefase is in die visie in feite een vooronderzoek.

De ‘analytische methode’ in de meetkunde heeft zijn naam aan dit onderscheid van Pappus te danken. Het nieuwe van Descartes’ methode is dat hij in de analysefase de algebra op een speciale manier inzet, op de zo even globaal beschreven manier. Later – en zeker nu op school – zal het algebraïsche proces als dé oplossingsfase worden gezien, culminerend in het vinden van waarden voor de onbekenden of van vergelijkingen die de oplossingsverzameling vastleggen. Het doorrekenen van ‘de oplossing’ in de uitgangssituatie en de eventuele meetkundige toetsing horen dan bij de controle van de oplossing en vormen niet de oplossing zelf. Voor wie zich zeker voelt van zijn algebraïsche techniek zijn ze niet eens meer essentieel. Het is een belangrijke verschuiving van de kern van de wiskundige activiteit, van *constructie* naar *analyse*.
Op vele plekken in *La Géométrie* is echter duidelijk dat de synthesefase nog niet vergeten is, integendeel.

Vermenigvuldigen, eenheid, opgeven van homogeniteit

In het begin van boek I laat Descartes de hoofdbewerkingen van de algebra zien, toegepast op lijnstukken. Samenvoegen of wegnemen komt overeen met optellen en aftrekken, de traditionele samenhang. De eerste echte constructie van het boek is die voor vermenigvuldigen van lijnstukken en die is opvallend.


La Multiplication.

Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E est le produit de cete Multiplication.

Descartes heeft daarvóór al aangegeven dat hij een eenheidslijnstuk aanneemt, dat willekeurig gekozen kan worden. In de figuur op de volgende pagina is dat lijnstuk *AB*.
DB en *CB* zijn gegeven lijnstukken. *ED* wordt evenwijdig aan *AC* genomen en dan geldt dat *AB* en *DB* zich verhouden als *BC* en *EB*. *EB* is de vierde evenredige van *AB*, *DB* en *BC*. De tekst naast de illustratie: dan is *EB* het product van *DB* en *CB*.

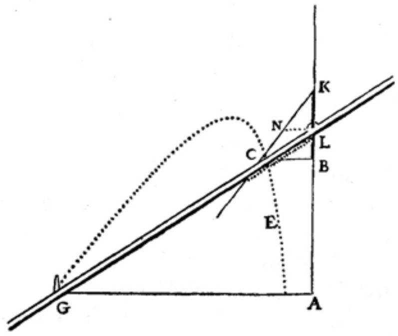
Het product van twee lijnstukken is hier een lijnstuk, en geen oppervlakte, zoals bij Viète!
a^2 wordt dus gedefinieerd als de vierde evenredige van 1, *a* en *a*, d.w.z. door $1 : a = a : a^2$. Descartes zegt dat hij wel de termen kwadraat en kubus zoals gebruikelijk hanteert, maar dat a^2 en b^3 lijnstukken zijn. De consequentie is dat ook uitdrukkingen als $ab - c$ zinvol zijn; de eis dat algebraïsche vormen en uitdrukkingen homogeen moeten zijn, is vervallen. Descartes legt wel uit dat er door toevoegen of wegnemen van eenheden in de termen van $aabb - b$ er een grootheid van dimensie drie kan ontstaan, waaruit de kubische wortel genomen kan worden. De kubische

wortel uit een grootheid, een lijnstuk *a,* is bij Descartes bepaald door een voortgezette evenredigheid, dus door de *x* in 1 : *x* = *x : y* = *y : a*, en niet als het zoeken van een zijde *x* bij een gegeven kubische grootheid *a*.

Descartes' algebra is, de titel van het boek *La Géométrie* getrouw, een algebra van lijnstukken, geschapen om meetkundige problemen op te kunnen lossen en algebraïsche problemen meetkundig te kunnen benaderen.

Van meetkunde algebra maken, modelleren

Geef alle lijnstukken in de figuur namen, zowel bekende als onbekende.
In combinatie met 'Doe als of het opgelost is' is dit een krachtige beschrijving van wat wij tegenwoordig de modelleerfase van een probleem zouden noemen. Descartes geeft bij zijn oplossingsstrategie ook nog de praktische aanwijzing: kies de letters *a, b, c, d* voor de bekende lijnstukken en *x, y, z* voor de onbekende lijnstukken. Deze aanwijzing is algemeen opgevolgd, dat hoeft geen betoog.
La Géométrie gaat over meetkunde, de gebruikte algebra is een hulpmiddel. Descartes is er vooral op uit te classificeren welke constructiemiddelen bij bepaalde problemen nodig waren.
Een bijzonder gereedschap van breed toepasbare aard is daarbij de methode om punten in het vlak vast te leggen met behulp van de afstanden tot twee gegeven lijnen. Omdat het te zoeken punt onbekend is, worden deze afstanden volgens de zojuist gegeven aanwijzing met x en *y* benoemd.
Het probleem dat in figuur 1 is uitgebeeld, is het eerste in het boek waarbij dat gebeurt. Het gaat om de gestippelde kromme lijn, die met een eenvoudig mechaniek gemaakt wordt. (Mechanisch gegenereerde krommen zijn een belangrijk thema in de meetkunde van de 17e eeuw; denk bijvoorbeeld aan de cycloïde, de kromme die ontstaat als we één punt van een rollende cirkel volgen.)



Aprés cela prenant vn point a diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel ie ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A ſont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne *y* & l'autre *x*. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie conſidere auſſy les quantités connuës qui determinent la deſcription de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme *a*, K L que ie nomme *b*, & N L parallele a G A que ie nomme *c*. puis ie dis, comme N L eſt à L K, ou *c* à *b*, ainſi C B, ou *y*, eſt à B K, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & B L eſt $\frac{b}{c}y - b$, & A L eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B eſt à L B, ou *y* à $\frac{b}{c}y - b$, ainſi *a*, ou G A, eſt á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que multipliant la premiere par la derniere. & ainſi l'equation qu'il falloit trouuer eſt.

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

de laquelle on connoiſt que la ligne E C eſt du premier genre, comme en effect elle n'eſt autre qu'vne Hyperbole.

figuur 1 : x en y als afstanden tot twee vaste lijnen

GA is een vast lijnstuk. Punt *L* beweegt op de verticale lijn door *A.* Het driehoekje van vaste vorm *KLN* schuift als *L* beweegt mee over de verticale lijn. Het punt *C,* snijpunt van de lijn *GL* met de lijn door *K* en *N,* beschrijft de gestippelde kromme.
Hier is lijnstuk *CB y* genoemd en *BA x*.
Verder: *GA = a, Kl = b, NL = c,* de bekende (vaste) grootheden in het probleem.
In de figuur zijn nu direct evenredigheden te vinden wegens de gelijkvormigheden van de driehoeken *KNL* en *KCB* en die van *GAL* en *CBL*. Het lijnstuk *BL* laat zich daarom op twee manieren berekenen; zo komt Descartes tot een *vergelijking* waarin de samenhang van *x* en *y* te zien is. Het is een probleem met een onbepaalde oplossing: er zijn veel punten, of paren lijnstukken *x* en *y* als men wil, die aan het probleem voldoen.

De oplossing is in dit geval een locus, een meetkundige plaats. De vergelijking is van de tweede graad; Descartes spreekt van een kromme ‘du premier genre’. Hij trekt de conclusie dat de kromme een hyperbool is.[1]

Vergelijkingen van derde en hogere graad

Los de onbekende uit de vergelijking op. Descartes geeft expliciete constructies voor het oplossen van vergelijkingen van de derde tot en met zesde graad.
In de constructies voor de derde- en vierdegraads vergelijking wordt een cirkel met een parabool gesneden; ligging en afmeting van deze figuren worden uitgedrukt in de coëfficiënten van de vergelijking. Voor de vijfde- en zesdegraads vergelijking snijdt Descartes een hulpkromme, die gegenereerd is door een mechaniek van een draaiende lijn met een verschuivende parabool. Een belangrijk thema in La *Géométrie* is het aangeven welke krommen die op verwante manieren gemaakt worden, geometrisch acceptabel zijn in constructies. Voor de derde en vierde graad zijn dat de kegelsneden, voor de vijfde en zesde graad de zojuist genoemde Cartesische parabool. De graad (in algebraïsche zin) van de Cartesische parabool is een hogere dan die van de gewone parabool; de suggestie van Descartes aan het eind van het boek dat met zijn algemene methode alle constructies (van wortels van vergelijkingen) kunnen worden gevonden is misschien wat kort door de bocht, want dit wordt verder niet uitgewerkt. Het lijkt er op is wel dat Descartes dit als noodzakelijk zag voor zijn plan om alle meetkundige problemen te kunnen oplossen.

Men treft verspreid in *La Géométrie* menige andere praktische algebraïsche aanwijzing aan. In veel situaties bijvoorbeeld kennen we een punt op de te zoeken of te onderzoeken kromme en zoeken we naar het tweede snijpunt met de kromme van een lijn door dat eerste punt. Algebraïsch komt het neer op vinden van een tweede oplossing van een vergelijking als de eerste oplossing bekend is. Het is niet handig de vergelijking dan algemeen op te lossen, het is eenvoudiger de factor die bij de bekende oplossing hoort uit te delen. Descartes demonstreert dit uitvoerig, inclusief de staartdeling bij het delen van een veelterm door een factor.

Slotopmerking

Dat René Descartes ‘de analytische meetkunde’ in de zin van het gebruiken van coördinaten bij meetkunde heeft bedacht en daarmee zijn grootste bijdrage aan de wiskunde heeft gegeven, is onjuist; Fermat en Mersenne gebruikten verwante methoden en ook Engelse wiskundigen claimden hier prioriteit. Maar de stellingname doet vooral onrecht aan waar het werkelijk om ging. In *La Géométrie* blijkt Descartes vooral systematisch het constructierepertoire van de meetkunde van cirkel en lijn uit te breiden naar hogeregraads krommen, die hij systematisch genereert. Descartes geeft ook aan welke krommen hij hier toelaatbaar vindt. De titel van het boek waarin Henk Bos (1999) deze visie op *La Géométrie* gedetailleerd onderbouwt is veelzeggend: *Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction.*

La Géométrie is nog steeds verkrijgbaar in een tweetalige (Frans/Engels) editie van Dover.
Op derechterbladzijde staat een facsimile van het origineel, waaruit ook de afbeeldingen van hierboven komen. Op de linkerbladzijde staat een Engelse vertaling.

Er is een Nederlandse vertaling (‘Meetkunst’, van Jan Hendrik Glazemaker uit 1659) op internet beschikbaar:
http://www.math.leidenuniv.nl/~wiskonst/descartes/digitale_versie.html

1 Frans van Schooten (1615 – 1660) vertaalde *La Géométrie* in het Latijn, voor de betere verspreiding van het boek. Hij geeft in zijn uitgave ook een (synthetisch) bewijs dat het om een hyperbool gaat.