Deze publicatie is gebaseerd op de domeinbeschrijving **Analytische Meetkunde** die in het kader van de aanpassing van de profielen Tweede fase werd ontwikkeld door de **C**ommissie **T**oekomst **W**iskunde**O**nderwijs (cTWO) voor het vak **Wiskunde D vwo** (onderdeel **Meetkunde**).

Titel: **Exemplarische uitwerking van enkele subdomeinen**

Samenstelling: Lia van Asselt, Aad Goddijn en Dick Klingens

december 2006

Exemplarische uitwerking van enkele subdomeinen

Wiskunde D: domein Analytische meetkunde

Overzicht

De paragrafen A t/m I geven de subdomeinen aan die in het domein Analytische meetkunde zijn opgenomen. Van de daaronder vermelde details (aangegeven met 3.x) is een uitwerking in deze publicatie opgenomen.

Subdomeinen 3.3 en 3.5

[3] Essentiële methoden van de analytische meetkunde gebruiken bij het onderzoeken van meetkundige figuren en hun onderlinge ligging (…)

[5] Het verband tussen figuur en vergelijking kennen en kunnen gebruiken: coördinaten van punten op de figuur voldoen aan de vergelijking en andersom.

Voorbeeld

We bekijken het stelsel V_1 van de vergelijkingen

$$V_1 : \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Een oplossing van dit stelsel kan worden gevonden door manipulatie (*lineaire combinatie*) van beide vergelijkingen, en wel zo, dat we een met V_1 equivalent stelsel krijgen waaruit we gemakkelijk het gemeenschappelijk paar getallen (x, y) kunnen vinden dat aan de vergelijkingen voldoet:

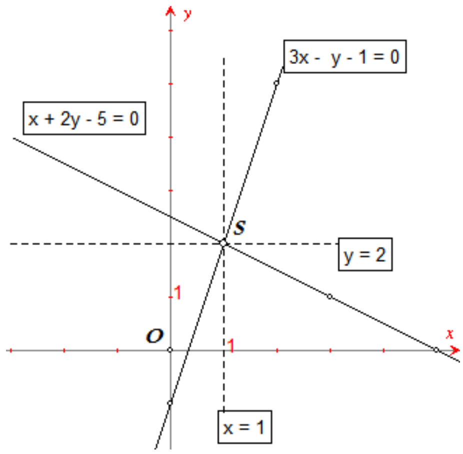
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \times 1 \\ \times 2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 6x - 2y = 2 \\ \hline 7x = 7 \\ x = 1 \end{array} \qquad \begin{vmatrix} \times 3 \\ \times(\text{-}1) \end{vmatrix} \quad \begin{array}{r} 3x + 6y = 15 \\ \text{-}3x + y = \text{-}1 \\ \hline 7y = 14 \\ y = 2 \end{array}$$

Analytisch stelt deze oplossing ($x = 1 \wedge y = 2$) het snijpunt $S = (1, 2)$ van de lijnen voor waarvan de vergelijkingen die van het stelsel V_1 vormen.

Het punt S wordt evenwel *ook* bepaald door het stelsel V_2 bestaande uit vergelijkingen van lijnen die evenwijdig zijn met de assen:

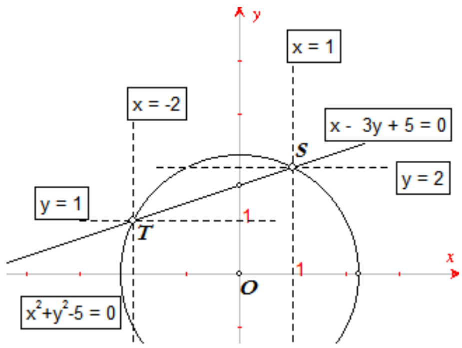
$$V_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Door lineaire combinatie van de vergelijkingen van V_1 ontstaat het stelsel V_2. Aan beide stelsels voldoet hetzelfde getallenpaar.



Het oplossen van een stelsel vergelijkingen in de analytische meetkunde is dus eigenlijk niets anders dan het vinden van een met dat stelsel *equivalent* stelsel vergelijkingen die van eenvoudiger gedaante zijn, en wel zo, dat daaruit de 'oplossing' direct kan worden afgelezen.

Dit geldt ook voor het vinden van de oplossing(en) van een stelsel V_3 dat bestaat uit bijvoorbeeld een lineaire en een kwadratische vergelijking:



$$V_3 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - 3y = \text{-}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3y-5)^2 + y^2 = 5 \\ x = 3y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3y + 2 = 0 \\ x = 3y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)(y-2) = 0 \\ x = 3y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \vee y = 2 \\ x = 3y - 5 \end{cases}$$

De snijpunten van de cirkel en de lijn zijn (-2, 1) en (1, 2). □

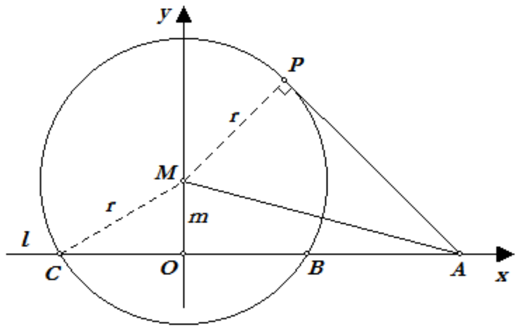
Subdomeinen 3.4 en 3.7

[4] Gemotiveerd kiezen uit algebraïsche technieken die bij de analytische meetkunde van belang zijn en deze adequaat en ondersteund door inzicht uitvoeren met pen en papier (…)

[7] Een probleem-adequaat coördinaatsysteem kiezen; qua ligging en aard aansluitend bij een gegeven meetkundig probleem.

Opgave 1

Gegeven zijn een cirkel met middelpunt M en straal r en een punt A buiten die cirkel. Punt P is het raakpunt van een raaklijn uit A aan de cirkel; B en C zijn de snijpunten van een willekeurige lijn l door A met de cirkel.



Toon aan dat $AP^2 = AB \cdot AC$.

Oplossing

We kiezen een loodrecht assenstelsel waarbij O het midden is van BC en waarvan de x-as samenvalt met de lijn l.

Dan kiezen we A = (a, 0), B = (b, 0), C = (-b, 0) en M = (0, m).

In de rechthoekige driehoek APM geldt: $AP^2 = AM^2 - MP^2 = AM^2 - r^2$; en in de rechthoekige driehoek OAM geldt: $AM^2 = OA^2 + OM^2 = a^2 + m^2$, zodat:

$$\begin{aligned} AP^2 &= a^2 + m^2 - r^2 \\ &= a^2 - (r^2 - m^2) \end{aligned}$$

Maar in driehoek OMC geldt:

$$OC^2 = MC^2 - OM^2 = r^2 - m^2 = b^2 \text{, zodat } AP^2 = a^2 - b^2 \qquad (4.1)$$

Verder is:

$$AB \cdot AC = (OA - OB)(OA + OC) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \qquad (4.2)$$

Uit (4.1) en (4.2) volgt dan het gestelde. □

Nb. Het kiezen van een assenstelsel is voor de oplossing van dit vraagstuk niet noodzakelijk!

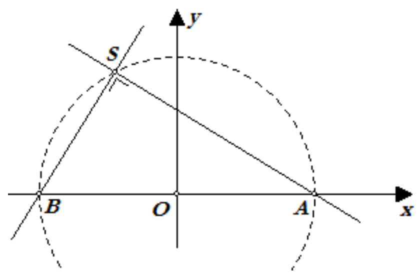
Opgave 2

Gegeven zijn twee punten A en B. Door A en B trekken we twee onderling loodrechte lijnen die elkaar snijden in het punt S.

Toon *analytisch* aan dat de afstand van S tot het midden van AB constant is.

Oplossing 1

Het midden van AB speelt een duidelijke rol in dit vraagstuk. We kiezen het midden O van AB dan ook als oorsprong van een loodrecht assenstelsel, waarvan de x-as samenvalt met de lijn AB, omdat de punten A en B samen met O op een rechte lijn liggen. We kunnen nu stellen A = (1, 0) en, vanwege de symmetrie, B = (-1, 0).



Zij m nu de richtingscoëfficiënt van de lijn door A, dan is $-\frac{1}{m}$ die van de lijn door B (m is een variabele parameter).We hebben dan:

$$\begin{aligned} AS:&\quad y = m(x-1) \\ BS:&\quad y = -\tfrac{1}{m}(x+1) \end{aligned}$$

Het punt $S = (p, q)$ voldoet aan deze vergelijkingen, dus: $\begin{cases} q = m(p-1) \\ q = -\frac{1}{m}(p+1) \end{cases}$.

Door vermenigvuldiging van de linker en rechter leden van deze gelijkheden vinden we:

$$q^2 = -(p^2 - 1)$$
$$p^2 + q^2 = 1$$

Met andere woorden: de lengte van het lijnstuk OS is gelijk aan 1. □

Oplossing 2

We kiezen het assenstelsel zó, dat $A = (0, 0)$ en $B = (2, 0)$. Het midden M van AB heeft dan de coördinaten (1, 0). We geven een lijn door A de vergelijking (m is de parameter van die lijn):

$$y = mx \text{ of } mx - y = 0 \text{, en dus ook } m = \tfrac{y}{x}$$

De door B gaande lijn daar loodrecht op heeft de vergelijking:

$$x + my = 2 \text{, en dus ook } m = \tfrac{2-x}{y}$$

De coördinaten van $S = (p, q)$ van het snijpunt voldoen dan aan het stelsel

$$\begin{cases} mx - y = 0 \\ x + my = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{q}{p} \\ m = \frac{2-p}{q} \end{cases}$$

En dit geeft:

$$p(2-p) = q^2 \;\Rightarrow\; p^2 - 2p + 1 + q^2 = 1 \;\Rightarrow\; (p-1)^2 + 1^2 = 1$$

waaruit blijkt dat de afstand van $S = (p, q)$ tot $M = (1, 0)$ gelijk is aan 1. □

Opmerking. In beide oplossingen voldoen de coördinaten van het punt S aan een vergelijking die de vergelijking is van een cirkel: $x^2 + y^2 = 1$ (in Oplossing 1) en $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (in Oplossing 2). Deze cirkel, de meetkundige plaats van het punt S, wordt wel de **Thales-cirkel** op het lijnstuk AB genoemd.

Subdomein 3.6

Eenvoudige eigenschappen zoals symmetrieën ten opzichte van de coördinaatsassen in de vergelijking van een figuur herkennen.

Opgave 1

Toon aan dat de figuur met vergelijking $3x^2 - 5y^2 = 17$ symmetrisch is in de x-as en in de y-as.

Oplossing

Een figuur is symmetrisch in de x-as, indien naast elk punt P met coördinaten (a, b) ook het punt P' met coördinaten $(a, -b)$ op die figuur ligt.

Stel het punt P ligt op de figuur. Nu hebben we voor P': $3a^2 - 5(-b)^2 = 3a^2 - 5b^2$.

En omdat P op de figuur ligt, geldt: $3a^2 - 5b^2 = 17$, zodat $3a^2 - 5(-b)^2 = 17$. P' ligt dus ook op de figuur.

Een figuur is symmetrisch in de y-as, indien naast elk punt P met coördinaten (a, b) ook het punt P'' met coördinaten $(-a, b)$ op die figuur ligt.

Er geldt voor het punt P'': $3(-a)^2 - 5y^2 = 3a^2 - 5b^2 = 17$. Dus P'' ligt ook op de figuur. □

Opmerking. De figuur is ook puntsymmetrisch in het punt O, immers voor het punt P''' met coördinaten $(-a, -b)$ geldt: $3(-a)^2 - 5(-b)^2 = 3a^2 - 5b^2 = 17$.

Opgave 2

Toon aan de lijn met vergelijking $y = x$ een symmetrie-as is van de kromme lijn K met vergelijking $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$.

K heeft twee symmetrie-assen. Geef een vergelijking van de andere symmetrie-as.

Oplossing

Bij een spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$ gaat een punt $P = (a, b)$ van K over in $P' = (b, a)$.

Nu is voor P': $\{x = b,\ y = a\}$, zodat $3b^2 - 2ba + 3a^2 = 3a^2 - 2ab + 3b^2 = 4$. P' ligt dus eveneens op K.

Uit het feit dat de uitdrukking in het linkerlid van de vergelijking van K *homogeen kwadratisch* is met gelijke coëfficiënten van x^2 en y^2, volgt dat, als $P = (a, b)$ op K ligt, ook $P'' = (-b, -a)$ op K ligt.

De lijn met vergelijking $y = -x$ is dus eveneens symmetrie-as van K. □

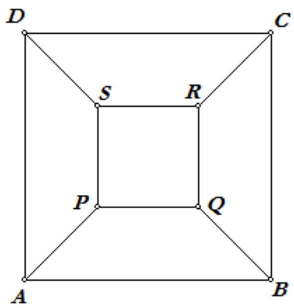
Subdomein 3.8

Relaties tussen variabelen en constanten in een probleem vastleggen middels vergelijkingen.

Opgave

Gegeven is een vierkant $ABCD$.

Bepaal de ligging van de punten P, Q, R, S op de diagonalen van dat vierkant zó, dat $PQRS$ een vierkant is, waarvoor geldt dat $AP = PQ$.



Oplossing

Stel dat de zijde van het gegeven vierkant gelijk is aan a (constante), en dat de zijde van het gezochte vierkant gelijk is aan x (variabele).

We zoeken nu een vergelijking in x en a, of meerdere vergelijkingen in x, … en a, waaruit we x als functie van a kunnen afleiden.

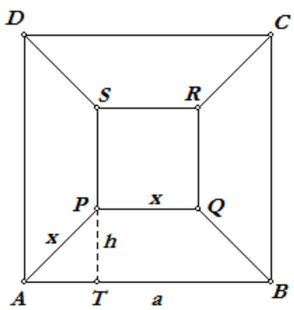
Zij $PT = h$ (variabele) de hoogte van het trapezium $ABQP$. Dan is $AT = h$, en dus is (volgens de stelling van Pythagoras in driehoek ATP):

$$x^2 = 2h^2, \text{ of}$$

$$2x^2 = 4h^2 \qquad (6.1)$$

Wegens de symmetrie van de figuur is ook:

$$a - x = 2h \qquad (6.2)$$



Uit de vergelijkingen (6.1) en (6.2) volgt dan:

$$2x^2 = (a - x)^2 \;\Rightarrow\; x^2 + 2ax - a^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 4a^2}}{2} = -a \pm a\sqrt{2}$$

Dus $x = a(\sqrt{2} - 1)$, waarmee de plaats van het punt P op de diagonaal AC is vastgelegd. □

Subdomein 3.9

Bij een door een vergelijking (of vergelijkingen) bepaalde figuur de vergelijking(en) bepalen van de verschoven, gespiegelde of in één of meer asrichtingen opgerekte figuur.

Gedeeltelijke uitwerking

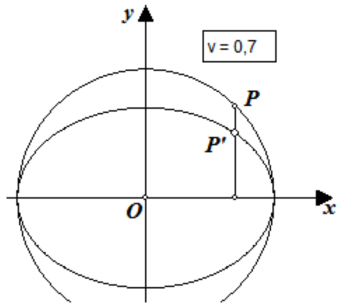
Een willekeurig punt van het vlak waarin de cirkel met vergelijking

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{9.1}$$

ligt, geven we aan met $P = (x, y)$. Het punt P is het beeld van een *verschuiving*: a in de richting van de x-as, b in de richting van de y-as.
Het origineel van P' van P heeft dus de coördinaten $(x-a,\ y-b)$.

We kunnen nu de vergelijking van de cirkel die dezelfde verschuiving heeft ondergaan, vinden door op te merken, dat het punt P' dan op de oorspronkelijke cirkel moet liggen: de coördinaten van het punt P' voldoen aan vergelijking (9.1), zodat we als vergelijking van de verschoven cirkel vinden: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

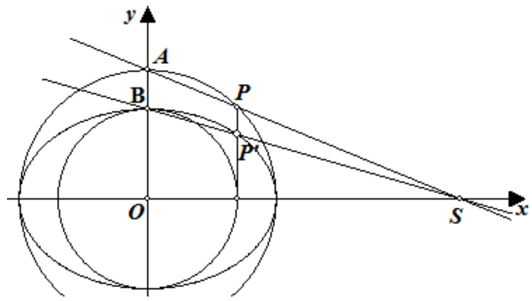
Op dezelfde cirkel ligt een punt $P = (p, q)$. We passen een *verticale lijnvermenigvuldiging* met de x-as als as en met de vaste factor v toe op het punt P, d.w.z. we vermenigvuldigen de y-coördinaat van P met het getal v. Hierdoor krijgen we het punt P' met coördinaten (p, vq). Nu geldt voor P':



$$\begin{cases} x_{P'} = p \\ y_{P'} = vq \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = x_{P'} \\ q = \frac{y_{P'}}{v} \end{cases}$$

En omdat $p^2 + q^2 = r^2$ is, geldt ook: $(x_{P'})^2 + \left(\frac{y_{P'}}{v}\right)^2 = r^2$. De coördinaten van het punt P' voldoen dus aan de vergelijking $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{(vr)^2} = 1$. De punten P' liggen dus op een ellips als P de cirkel doorloopt.

Opmerking. Een ellips kan ook op een iets andere manier uit een cirkel worden verkregen.
We gaan weer uit van $P = (p, q)$ op de cirkel nu met straal a, die de y-as snijdt in het punt A. We gebruiken dan verder een cirkel met middelpunt O en straal b ($b < a$), die de y-as snijdt in het punt B. De lijn AP snijdt de x-as in S en de lijn SB snijdt de loodlijn door P op de x-as in P'.



Nu is: $y_{P'} : y_P = OB : OA = b : a \Rightarrow y_P = q = \dfrac{a y_{P'}}{b}$, zodat, met $p = x_{P'}$:

$$(x_{P'})^2 + \frac{(a y_{P'})^2}{b^2} = a^2 \Rightarrow b^2 (x_{P'})^2 + a^2 (y_{P'})^2 = a^2 b^2$$

Dus voldoen de coördinaten van P' aan de vergelijking $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

Subdomein 3.10

Verschillende analytische voorstellingen van een rechte lijn in het platte vlak hanteren en met elkaar in verband brengen. Als vergelijking: (I) bij een gegeven punt op de lijn en gegeven richting, (II) door twee gegeven punten, (III) als asvergelijking in het speciale geval van gegeven snijpunten met x- en y-as, en (IV) met een parametervoorstelling door beschrijvingen van de verschillende coördinaten apart.

Algemene uitwerking

I. Een vergelijking van een lijn kunnen we schrijven als: $y = ax + b$.

Hierin is a de *richtingscoëfficiënt* van de lijn. De term b in de vergelijking geeft, meetkundig gezien, het snijpunt van de lijn met de y-as. De lijn met vergelijking $y = ax$ die door het punt (0, 0) gaat, is dan over de afstand b (positief of negatief gerekend) verticaal verschoven.
Het is in de analytische meetkunde gebruikelijk de richtingscoëfficiënt van een rechte lijn aan te geven met de letter m. Gaat een lijn door het punt $P = (x_0, y_0)$, dan schrijven we de vergelijking daarvan meestal als:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

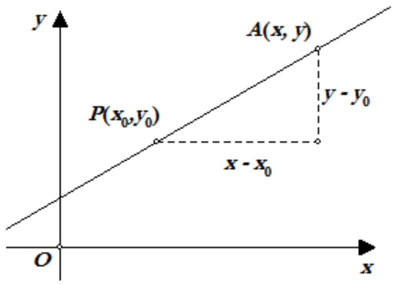
Immers, de coördinaten van P voldoen aan de vergelijking. Of, uitgaande van de lijn met vergelijking $y = mx + b$ waarop het punt P gelegen is, vinden we:

$$y_0 = mx_0 + b \;\Rightarrow\; b = y_0 - mx_0$$

zodat de vergelijking luidt:

$$y = mx + (y_0 - mx_0)$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Meetkundig is deze vergelijking als volgt te illustreren.
P is een vast punt van de lijn, $A = (x, y)$ is een variabel punt van de lijn. De waarde $y - y_0$ is de verplaatsing van A ten opzichte van P in de y-richting, $x - x_0$ is zo'n verplaatsing in de x-richting.
Voor de richtingscoëfficiënt van de lijn geldt dan: $\frac{y-y_0}{x-x_0} = m$.



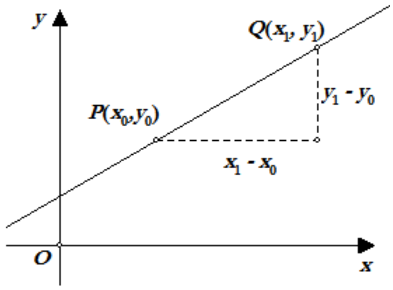
Opmerking. De algemene gedaante van de vergelijking van een rechte lijn, $ax + by = c$, kan uiteraard voor $b \neq 0$ hiermee in verband worden gebracht: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.
Voorts, als het punt (x_0, y_0) op deze lijn ligt, dan is $c = ax_0 + by_0$, met als gevolg

$$ax + by = ax_0 + by_0$$ •

II. Van een lijn die door de *gegeven* punten $P = (x_0, y_0)$ en $Q = (x_1, y_1)$ gaat, kunnen we de richtingscoëfficiënt m afleiden uit de coördinaten van beide punten:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

De lijn gaat (bijvoorbeeld) door P, dus (volgens I) is een vergelijking van de lijn:



$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

III. Gaat een lijn door de punten $A = (a, 0)$ en $B = (0, b)$, respectievelijk op de x-as en op de y-as, dan hebben we (volgens II):

$$y - 0 = \frac{0-b}{a-0}(x - a) \;\Rightarrow\; ay = -bx + ab \;\Rightarrow\; bx + ay = ab \;\Rightarrow\; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Deze laatste vergelijking is de zogenoemde **asvergelijking** van de lijn.

IV. (Als **voorbeeld**.) We gaan uit van de vergelijking $x + 2y = 5$ voor de lijn l. Indien we nu (bijvoorbeeld) stellen dat $x = \lambda$ is, dan volgt direct: $y = (5 - \lambda)/2$. We zeggen nu dat het stelsel:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

een **parametervoorstelling** is van de lijn l; *elke* waarde van λ geeft een punt van de lijn l.

Door **eliminatie** van λ uit dit stelsel krijgen we de vergelijking van de lijn *l* weer terug:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\lambda \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \times 1 \\ \times 2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{r} x = \lambda \\ 2y = 5 - \lambda \\ \hline x + 2y = 5 \end{array}$$

Merk op dat we niet beperkt zijn in de keuze van de variabele *x* voor de parameter λ. We krijgen eveneens een parametervoorstelling van de lijn *l* als we (en opnieuw bijvoorbeeld) stellen dat $y = \lambda$ is, waardoor $x = 5 - 2\lambda$, zodat dan:

$$l: \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

Eliminatie van λ: $x + 2y = (5 - 2\lambda) + 2\lambda = 5$.

Opmerking. Maar er zijn er meer parametervoorstellingen van de lijn, zoals

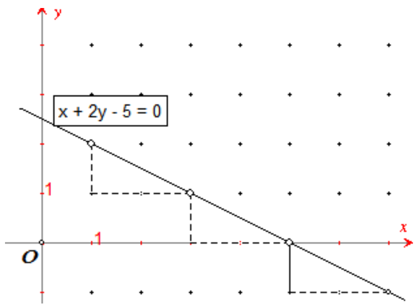
$$\{x = 1 + 2\lambda,\ \ y = 2 - \lambda\}$$

We kunnen deze vergelijking als volgt afleiden.
We proberen op de lijn $x + 2y = 5$ enkele punten met *gehele* coördinaten te vinden: (1, 2), (3, 1), (5, 0), … We zien daaruit dat $\Delta x = 2, \Delta y = \text{-}1$. Voor de *x*-coördinaten van de punten op de lijn hebben we dus:

$$x = 1 + (\text{aantal keer})\Delta x = 1 + \lambda \cdot 2 = 1 + 2\lambda$$

en voor de bijbehorende *y*-coördinaten:

$$y = 2 + (\text{aantal keer})\Delta y = 2 + \lambda \cdot (\text{-}1) = 2 - \lambda$$



Subdomeinen 3.11 en 3.12

[11] Op grond van hun vergelijkingen vaststellen of twee lijnen elkaar snijden, evenwijdig zijn, samenvallen, elkaar loodrecht snijden.
[12] Vergelijkingen opstellen van lijnen door een gegeven punt loodrecht op of evenwijdig met een door een vergelijking gegeven lijn.

Opgave 1

Bepaal de onderlinge ligging van elk tweetal van de hieronder door hun vergelijkingen gegeven lijnen:

$l:\ 3x - 2y = 5 \qquad m:\ \text{-}6x + 4y = 9 \qquad n: 2x + 3y = 9 \qquad p: x - y = 1$

Oplossing

$rico(l) = 1\tfrac{1}{2} \qquad rico(m) = 1\tfrac{1}{2} \qquad rico(n) = \text{-}\tfrac{2}{3} \qquad rico(p) = 1$

Conclusie: $l \,//\, m,\ l \perp n,\ l$ snijdt $p,\ m \perp n,\ m$ snijdt $p,\ n$ snijdt p.

Opgave 2

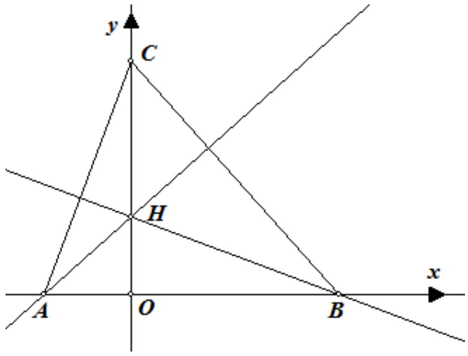
Toon *analytisch* aan dat de hoogtelijnen van een driehoek door hetzelfde punt gaan.

Opmerking vooraf. Kijken we naar een lijn met richtingscoëfficiënt $\frac{v}{u}$ die door het punt (0, *d*) gaat, dan is $y = \frac{v}{u}x + d$ een vergelijking van die lijn. Omwerken geeft dan $vx - uy + ud = 0$, of met $ud = r$:

$$vx - uy + r = 0$$

De getallen v en $-u$ worden (hier) **normaalgetallen** van de lijn genoemd. We schrijven ze meestal als een getallenpaar: $(v,-u)=(\Delta y,-\Delta x)$, waarbij Δy en Δx opvolgend de verschillen zijn van de y- en x-coördinaten van twee punten op de lijn.
Uit de normaalgetallen van een lijn kunnen de normaalgetallen van een loodlijn van die lijn eenvoudig worden afgeleid.
Een paar normaalgetallen van een loodlijn op de genoemde lijn is nu: $(u,v)=(\Delta x,\Delta y)$. •

Oplossing 1



Zij ABC een willekeurige driehoek. We kiezen nu een loodrecht assenstelsel waarvan de x-as samenvalt met de lijn AB en waarvan de y-as door het punt C gaat. We hebben dan A = ($-a$, 0), B = (b, 0) en C = (0, c).
De loodlijn door A op BC heeft dan normaalgetallen (b, $-c$), zodat een vergelijking van de hoogtelijn h_a is:

$$h_a:\ bx-cy=-ab$$

De loodlijn door B op AC heeft normaalgetallen ($-a$, $-c$), zodat voor de hoogtelijn h_b geldt:

$$h_b:\ -ax-cy=-ab$$

Het snijpunt van de lijn h_a met de y-as (x = 0 in h_a) is dan $(0,\frac{ab}{c})$; het snijpunt van de lijn h_b met de y-as (x = 0 in h_b) is eveneens $(0,\frac{ab}{c})$.
De hoogtelijn uit C (dat is de y-as) en de hoogtelijnen uit A en B gaan dus door hetzelfde punt. □

Oplossing 2

Wanneer we een *willekeurig* loodrecht assenstelsel aanbrengen, dan hebben we:

$$A=(a_1,a_2),\ B=(b_1,b_2),\ C=(c_1,c_2)$$

Normaalgetallen van de hoogtelijnen zijn dan:

$$\begin{aligned} h_c &:\ (a_1-b_1,a_2-b_2)\\ h_a &:\ (b_1-c_1,\ b_2-c_2)\\ h_b &:\ (a_1-c_1,\ a_2-c_2)\end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned} h_a &:\ (b_1-c_1)x+(b_2-c_2)y=(b_1-c_1)a_1+(b_2-c_2)a_2\\ h_b &:\ (a_1-c_1)x+(a_2-c_2)y=(a_1-c_1)b_1+(a_2-c_2)b_2\end{aligned}$$

We willen nu laten zien dat het snijpunt H van deze twee lijnen ook op de derde hoogtelijn ligt, dus op:

$$h_c:\ (a_1-b_1)x+(a_2-b_2)y=(a_1-b_1)c_1+(a_2-b_2)c_2$$

We rekenen nu *niet* de coördinaten van het snijpunt H van h_a en h_b uit! We stellen $H=(p,q)$.
Dan gelden de volgende *gelijkheden*:

$$\begin{cases}(b_1-c_1)p+(b_2-c_2)q=(b_1-c_1)a_1+(b_2-c_2)a_2\\ (a_1-c_1)p+(a_2-c_2)q=(a_1-c_1)b_1+(a_2-c_2)b_2\end{cases}$$

Hierna zoeken we een lineaire combinatie van deze uitdrukkingen die leidt tot een gelijkheid die overeenkomt met de vergelijking van h_c. Aftrekking van de gelijkheden (de onderste min de bovenste) geeft:

$$\begin{aligned}(a_1-b_1)p+(a_2-b_2)q&=-b_1c_1+a_1c_1-b_2c_2+a_2c_2\\ &=(a_1-b_1)c_1+(a_2-b_2)c_2\end{aligned}$$

En hieruit blijkt dat het punt H ook ligt op de lijn met vergelijking:

$$(a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)y = (a_1 - b_1)c_1 + (a_2 - b_2)c_2$$

immers, de coördinaten van H voldoen aan deze vergelijking.
En die vergelijking is nu juist de vergelijking van h_c. De hoogtelijnen van een driehoek gaan dus door hetzelfde punt. □

Naschrift

In de hierboven staande opmerking voerden we het begrip **normaalgetal** in. Een geordende paar normaalgetallen bestaat dus uit de coëfficiënten van de x en de y in de standaard vergelijking van de rechte lijn.
Hebben we $ax + by + c = 0$ of $ax + by = c$, dan is (a, b) een paar normaalgetallen van de bij die vergelijking behorende lijn.
Hiermee voorkomen we in dit stadium het gebruik van het begrip **normaalvector** van een lijn.
Door het gebruik van normaalgetallen wordt het afleiden van de vergelijking van een lijn evenwijdig met een (door een vergelijking) gegeven lijn vereenvoudigd; en daarmee ook die van een loodlijn op een gegeven lijn.
We kunnen dus ook zeggen: twee lijnen staan loodrecht op elkaar als de *productsom* (ook wel *inwendig product* of *inproduct* genoemd) van hun normaalgetallen gelijk is aan 0:
als de lijnen $l: ax + by = c,\ \ m: px + qy = r$ loodrecht op elkaar staan, dan is $ap + bq = 0$; en omgekeerd.

Voorbeeld
Gegeven is de lijn l met vergelijking $ax + by = c$.

- Bepaal een vergelijking van de lijn m door het punt $S = (p, q)$ die evenwijdig is met de lijn l.
- Bepaal ook een vergelijking van de lijn n door het punt S die loodrecht staat op l.

Oplossing
De lijn m heeft dezelfde normaalgetallen als de lijn l. Dus:

$$m:\ ax + by = ap + bq$$

Een paar normaalgetallen van de lijn n is nu bijvoorbeeld $(b, -a)$. Dus:

$$n:\ bx - ay = bp - aq$$

□

Nb. Voor lijnen die *niet* evenwijdig zijn met de x-as, is het steeds mogelijk een paar normaalgetallen te bepalen waarvan het eerste getal gelijk is aan 1.
In het bovenstaande voorbeeld is $(1, \frac{b}{a})$ een dergelijk paar voor de lijn m.
Is een lijn evenwijdig met de x-as, dan is het eerste normaalgetal gelijk aan 0.

Subdomein 3.13

Afstand van een punt tot een lijn bepalen vanuit een analytische voorstelling van een lijn.

Algemene uitwerking

Het punt P heeft de coördinaten (x_0, y_0). We kiezen nu als vergelijking van de lijn l de assenvergelijking: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. De punten $A = (a, 0)$ en $B = (0, b)$ zijn dan de snijpunten van l met de coördinaatsassen.

Deze assenvergelijking kunnen we ook schrijven als:

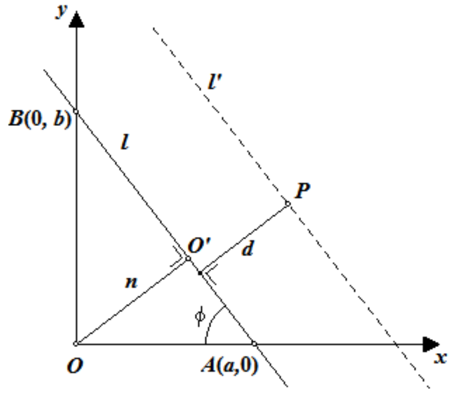
$$bx + ay = ab$$

Dan is verder, met $n = |OO'|$:

$\sin\phi = \frac{OO'}{OA} = \frac{n}{a}$ (in driehoek OAO'), en ook

$\sin\phi = \frac{OB}{AB} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (in driehoek OAB).

Zodat: $d(O,l) = n = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. (13.1)



De vergelijking van de lijn l' (door P // l) luidt (op basis van die van l): $bx + ay = bx_0 + ay_0$.

Dan is: $d(O,l') = \dfrac{bx_0 + ay_0}{\sqrt{a^2+b^2}}$, zodat we vinden:

$$d(P,l) = d(O,l') - d(O,l) = \frac{bx_0 + ay_0 - ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

En algemeen:

$$d(P,l) = \frac{|bx_0 + ay_0 - ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Opmerking. Er zijn ook andere methodes om formule (13.1) af te leiden, bijvoorbeeld door de oppervlakte van driehoek OAB te bekijken:

$$Opp(OAB) = \tfrac{1}{2} OA \cdot OB = \tfrac{1}{2} n \cdot AB \;\Rightarrow\; ab = n\sqrt{a^2+b^2} \;\Rightarrow\; n = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Voorbeeld 1

De afstand d van het punt $P = (1, 2)$ tot de lijn met vergelijking $3x + 4y = 17$ berekenen we door de vergelijking eerst in de standaard vorm te schrijven:

$$3x + 4y - 17 = 0$$

Zodat $d = \dfrac{|3\cdot 1 + 4\cdot 2 - 17|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{|11-17|}{5} = 1\tfrac{1}{5}$. □

Voorbeeld 2

De in voorbeeld 1 gegeven lijn heeft als parametervoorstelling (bijvoorbeeld) $\begin{cases} x = -1 - 4\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \end{cases}$.

Een willekeurig punt van die lijn is dan $Q = (-1-4\lambda, 5+3\lambda)$. Voor de afstand van $P = (1, 2)$ tot Q hebben we dan $PQ = \sqrt{(2+4\lambda)^2 + (-3-3\lambda)^2} = \sqrt{25\lambda^2 + 34\lambda + 13}$. De kleinste waarde van PQ vinden we voor $\lambda = -\frac{17}{25}$, zodat de afstand d van P tot de lijn is gelijk aan:

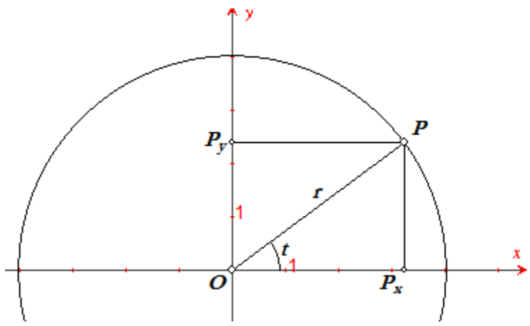
$$d = \sqrt{25\cdot(-\tfrac{17}{25})^2 + 34\cdot(-\tfrac{17}{25}) + 13} = \tfrac{1}{5}\sqrt{289 - 578 + 325} = \tfrac{1}{5}\sqrt{36} = \tfrac{6}{5}$$ □

Subdomein 3.14, 3.22 en 3.25

[14] Vergelijking van de cirkel opstellen als meetkundige plaats (vaste afstand tot een middelpunt), als baan van een roterend punt met een parametervoorstelling.
[22] Met behulp van een parametervoorstelling eenvoudige problemen kunnen oplossen.
[25] In hanteerbare gevallen vanuit een parametervoorstelling een vergelijking van een kromme bepalen.

Uitwerking

Voor een punt P met coördinaten (x, y) op een cirkel met middelpunt O en straal r geldt in nevenstaande figuur:



$$\frac{OP_x}{OP} = \frac{x}{r} = \cos t,\ \frac{PP_x}{OP} = \frac{y}{r} = \sin t$$

waarbij t de hoek is tussen de halve lijn OP en de 'positieve' x-as.
Zodat voor $0 \le t \le 2\pi$ geldt:

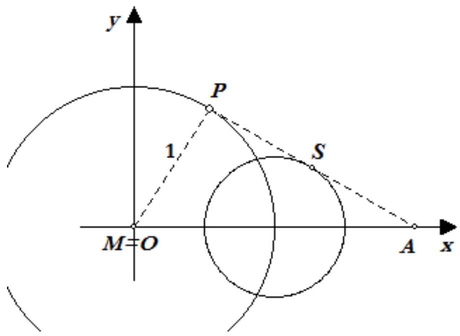
$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

Dit stelsel is de zogenoemde **parametervoorstelling** van de cirkel; t is de **parameter** van de cirkel.
Uit $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ volgt dan de vergelijking van de cirkel: $x^2 + y^2 = r^2$.

Deze vergelijking vinden we (eenvoudiger) met behulp van de stelling van Pythagoras, of, zo men wil, met de afstandsformule toegepast op de punten O en P.
In driehoek OP_xP geldt: $(OP_x)^2 + (P_xP)^2 = (OP)^2$, of $x^2 + y^2 = r^2$.

Opgave 1

Op een cirkel met middelpunt M en straal 1 ligt een punt P. Verder is gegeven een punt A met $MA = 2$.
Het punt S is het midden van het lijnstuk AP.
Toon aan dat de meetkundige plaats van de punten S een cirkel is als P de cirkel doorloopt. Geef ook een vergelijking van die cirkel.



Oplossing 1
We kiezen het punt O als middelpunt van een loodrecht assenstelsel, waarvan de x-as samenvalt met de lijn MA.
Daardoor is $A = (2, 0)$, en een parametervoorstelling van de cirkel is dan $\{x = \cos t,\ \ y = \sin t\}$.
Het punt S heeft de coördinaten:

$$\left(\frac{2+\cos t}{2}, \frac{0+\sin t}{2}\right) = (1 + \tfrac{1}{2}\cos t, \tfrac{1}{2}\sin t)$$

Dus hebben we als parametervoorstelling van de meetkundige plaats van het punt S:

$$\begin{cases} x = 1 + \tfrac{1}{2}\cos t \\ y = \tfrac{1}{2}\sin t \end{cases}$$

Dan is: $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\cos^2 t + \frac{1}{4}\sin^2 t = \frac{1}{4}(\cos^2 t + \sin^2 t)$.
Een vergelijking van de meetkundige plaats van S is dan: $(x-1)^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$.
De meetkundige plaats van het punt S is dus een cirkel met middelpunt (1, 0) en straal $\frac{1}{2}$. □

Oplossing 2
We kunnen het punt P ook 'gewone' coördinaten geven: $P = (p, q)$, waarbij we rekening houden met het feit dat P op de cirkel ligt; en dat is het geval als voldaan wordt aan $p^2 + q^2 = 1$.
Dan is voor het midden S van AP: $S = (1 + \frac{1}{2}p, \frac{1}{2}q)$, of anders geschreven:

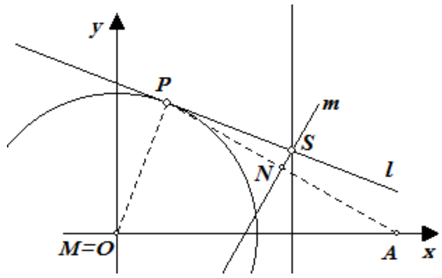
$$\begin{cases} x_S = 1 + \tfrac{1}{2}p \\ y_S = \tfrac{1}{2}q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2(x_S - 1) \\ q = 2y_S \end{cases}$$

Samen met $p^2 + q^2 = 1$ geeft het voorgaande:

$$4(x_S-1)^2+4y_S^2=1\text{, of } (x_S-1)^2+y_S^2=(\tfrac{1}{2})^2$$

Waaruit we zien dat de coördinaten van het punt S voldoen aan: $(x-1)^2+y^2=(\tfrac{1}{2})^2$. □

Opgave 2



We hebben dezelfde cirkel en hetzelfde punt A als in Opgave 1.
De raaklijn l in een variabel punt P van de cirkel snijdt de middelloodlijn m van het lijnstuk AP in het punt S.
Geef een vergelijking van de meetkundige plaats van het punt S als P de cirkel doorloopt.

Oplossing 1
We kiezen een rechthoekig assenstelsel met $M = O$, waarvan de x-as samenvalt met de lijn MA. Dan hebben we verder cirkel: $x^2 + y^2 = 1$ en $A = (2, 0)$. Kiezen we $P = (\cos t, \sin t)$, dan is ook:

- een vergelijking van l: $(\cos t)\cdot x+(\sin t)\cdot y=1$;
- voor het midden N van het lijnstuk AP: $N=(1+\tfrac{1}{2}\cos t, \tfrac{1}{2}\sin t)$;
- een paar normaalgetallen van de middelloodlijn van AP: $(2-\cos t, \text{-}\sin t)$.

We vinden als vergelijking van de lijn m:

$$\begin{aligned}(2-\cos t)x+(\text{-}\sin t)y &= (2-\cos t)(1+\tfrac{1}{2}\cos t)+(\text{-}\sin t)(\tfrac{1}{2}\sin t)\\ &= 2-\tfrac{1}{2}\cos^2 t-\tfrac{1}{2}\sin^2 t\\ &= 1\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

De coördinaten van het snijpunt S van de lijnen l en m voldoen aan het stelsel:

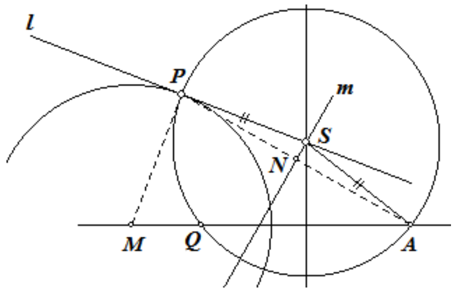
$$\begin{cases}(\cos t)x+(\sin t)y=1\\ (2-\cos t)x+(\text{-}\sin t)y=1\tfrac{1}{2}\end{cases}$$

Dus ook aan een uit het stelsel af te leiden vergelijking die onafhankelijk is van t: we krijgen zo'n vergelijking door beide vergelijkingen (in dit geval) op te tellen:

$$2x=2\tfrac{1}{2}$$

Een vergelijking van de meetkundige plaats van het punt S is dus: $x=1\tfrac{1}{4}$; en dit is een vergelijking van een lijn die loodrecht staat op de x-as (de lijn AM). □

Oplossing 2



Zonder assenstelsel!
De cirkel met middelpunt S die door P gaat, gaat ook door A, waarbij dan MP in P aan die cirkel raakt. De cirkel snijdt de lijn MA voor de tweede keer in het punt Q. Dan is (zie Opgave 1 bij subdomein 3.4): $MP^2 = MQ\cdot MA$.
Maar MP en MA zijn beide constant.
En dan volgt daaruit dat ook MQ constant is: alle cirkels met middelpunt S die door A en P gaan, gaan door Q. Dus S ligt op de middelloodlijn van AQ. □

Opgave 3

Op de parabool K met vergelijking $y = x^2$ liggen de *vaste* punten $A = (0, 0)$ en $B' = (1, 1)$. De punten A', B, C zijn willekeurige punten van K. Verder hebben we de punten $P_A = B'C \times BC'$ (het teken '×' betekent hier 'snijpunt'), $P_B = CA' \times C'A$, $P_C = AB' \times A'B$.

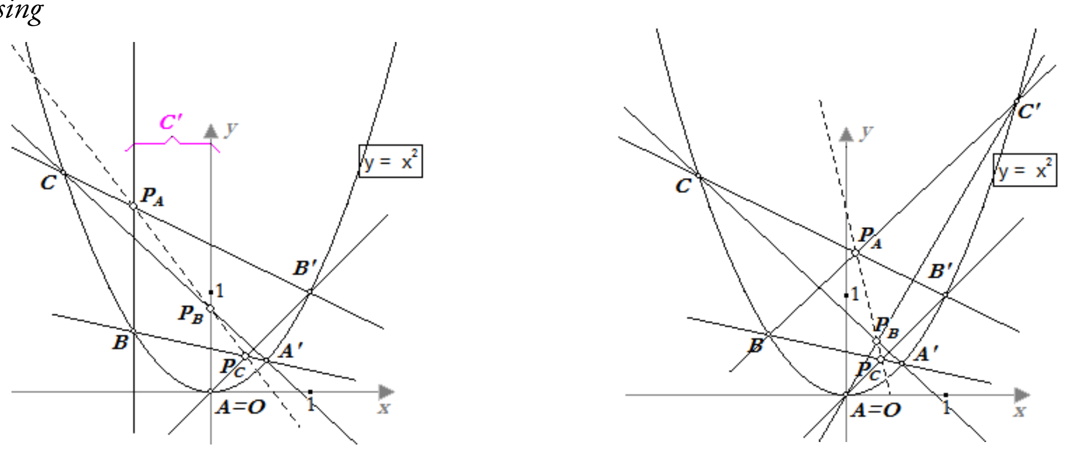
Daarbij is het punt C' het '*oneindig verre*' punt van de y-as; de lijn BC' is daardoor evenwijdig met de y-as.

a. Toon aan dat de punten P_A, P_B, P_C op dezelfde rechte lijn liggen.

b. Bewijs deze eigenschap ook als het punt C' een 'eigenlijk' punt is van K.

Opmerking. Deze eigenschap staat bekend als de *stelling van Pascal* (naar **Blaise Pascal**, 1623-1662, Frankrijk): *als van een zeshoek de hoekpunten op een kegelsnede liggen, dan liggen de snijpunten van de overstaande zijden op dezelfde rechte lijn.*

Oplossing



a. Zie de figuur hierboven, links. Kies $A' = (a, a^2)$, $B = (b, b^2)$, $C = (c, c^2)$. We berekenen achtereenvolgens de coördinaten van de punten P_A, P_B, P_C:

$BC':\ x = b$	$C'A:\ x = 0$	$AB':\ y = x$
$B'C:\ y - 1 = \frac{c^2-1}{c-1}(x-1)$	$CA':\ y - c^2 = \frac{a^2-c^2}{a-c}(x-c)$	$A'B:\ y - a^2 = \frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)$
$y = (c+1)x - c$	$y = (a+c)x - ac$	$y = (b+a)x - ab$
$P_A = (b, bc + b - c)$	$P_B = (0, -ac)$	$P_C = (\frac{ab}{a+b-1}, \frac{ab}{a+b-1})$

En vervolgens tonen we aan dat P_C op de lijn P_AP_B ligt. Voor de lijn P_AP_B hebben we:

$$y + ac = \frac{bc+b-c+ac}{b}(x)$$

$$y = (\frac{c(a+b-1)}{b} + 1)x - ac$$

Substitueren we hierin $x = \frac{ab}{a+b-1}$ (de x-coördinaat van P_C), dan leidt dit tot:

$$y = (\frac{c}{b}(a+b-1)+1)\cdot\frac{ab}{a+b-1} - ac = ac + \frac{ab}{a+b-1} - ac = \frac{ab}{a+b-1}$$

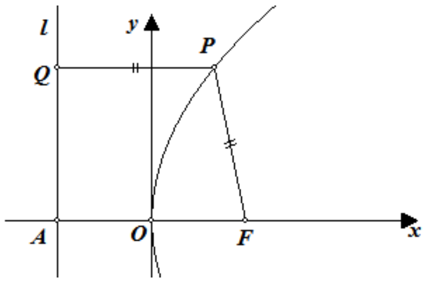
en dat is nu juist de y-coördinaat van P_C. Het punt P_C ligt dus op de lijn P_AP_B.

b. Zie de figuur hierboven, rechts. We laten dit bewijs aan de lezer. □

Subdomein 3.15

In geschikte coördinaten de standaard vergelijkingen opstellen voor parabool, ellips en hyperbool; dit vanuit de definities van deze figuren als verzameling punten met een gegeven afstandsrelatie.

Uitwerking voor de parabool



De definitie van parabool luidt: *Een parabool is de meetkundige plaats van de punten P waarvoor de afstand tot een gegeven punt F gelijk is aan de afstand tot een gegeven lijn l.*
We nemen de loodlijn door F op de lijn l als x-as. Snijdt de x-as de lijn l in A, dan kiezen we voor $O = (0, 0)$ het midden van het lijnstuk FA. Voor elk punt $P = (x, y)$ van de parabool geldt nu, op basis van de definitie:

$$|PF| = |PQ| \qquad (15.1)$$

waarbij $|PQ|$ de afstand is van P tot l. Stellen we verder $|FA| = p$, dan is $F = (\frac{1}{2}p, 0)$ en $A = (-\frac{1}{2}p, 0)$.
Zodat uit (15.1) volgt:

$$\sqrt{(x-\tfrac{1}{2}p)^2 + y^2} = |x + \tfrac{1}{2}p| \qquad (15.2)$$

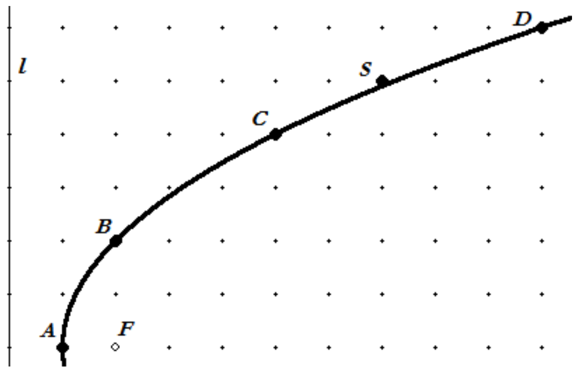
Kwadrateren van (15.2) geeft:

$$x^2 - px + \tfrac{1}{4}p^2 + y^2 = x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2$$

of, en dit geeft de standaard vergelijking van de parabool:

$$y^2 = 2px$$

Opgave 1



Gegeven is de parabool met brandpunt F en richtlijn l. De lijn l is een roosterlijn; alle andere punten liggen op het rooster.

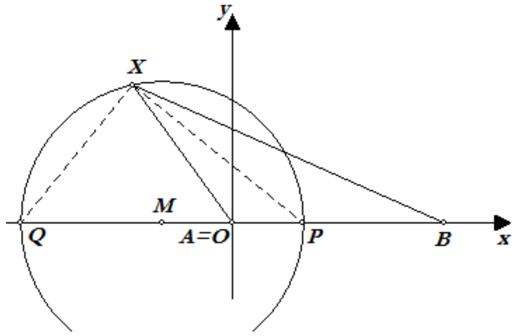
- Toon via een berekening aan dat de punten A, B, C, D op de parabool liggen, en dat het *niet* het geval is met het punt S.
- Zijn er meer roosterpunten die op de parabool liggen? Licht je antwoord toe.

Oplossing (gedeeltelijk)
Voor het punt A geldt $AF = 1$ en $d(A, l) = 1$. Volgens de parabool-definitie ligt A op de parabool.
Voor het punt C geldt $CF = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ en $d(C, l) = 5$. Het punt C ligt dus ook op de parabool. Enzovoorts. □

Opgave 2

Gegeven zijn twee punten A en B.
Bepaal de meetkundige plaats van de punten X waarvoor $2 \cdot XA = XB$ (of ook $AX : BX = 1 : 2$).
Oplossing
We kiezen $A = O$ als oorsprong van een assenstelsel, waarvan de x-as samenvalt met de lijn AB.
Voorts kiezen we $B = (3, 0)$.

Een punt waarvan direct kan worden gezien dat het tot de gezochte meetkundige plaats behoort, is het punt $P = (1, 0)$ van het lijnstuk AB (zie figuur): gelegen op $\frac{1}{3}AB$ van het punt A.



Stel $X = (p, q)$.
Dan is:

$$XA = \sqrt{p^2 + q^2} \text{ en } XB = \sqrt{(p-3)^2 + (q-0)^2}$$

Dus:

$$2\sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{p^2 - 6p + 9 + q^2}$$
$$3p^2 + 3q^2 + 6p = 9$$
$$(p+1)^2 + q^2 = 4$$

De coördinaten van het punt X voldoen dan aan de vergelijking:

$$(x+1)^2 + y^2 = 4$$

De gezochte meetkundige plaats is dus een cirkel met middelpunt (-1, 0) en straal 2. Deze cirkel is een zogenoemde **Apollonius-cirkel**. □

Opmerking. Het tweede snijpunt van de lijn AB met de cirkel is Q. Nu is volgens de *cirkelstelling* van Thales $\angle QXP = 90°$. Omdat in driehoek AXB geldt dat $XA : XB = PA : PB$, is XP de binnenbissectrice van hoek X. XQ is dus de buitenbissectrice van die hoek.

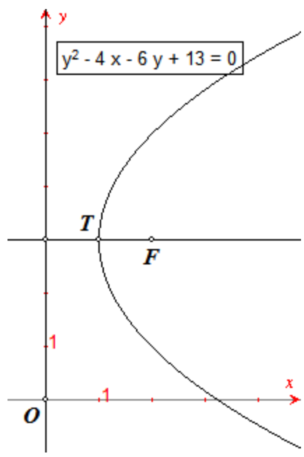
Subdomein 3.16

Van eerste- en tweedegraads krommen (zonder kruisterm) de aard en de ligging van de bijbehorende figuur bepalen en daarbij aangeven - voor zover van toepassing - asrichtingen, aslengtes, straal, middelpunt, en brandpunt(en), asymptoten, en snijpunten met de coördinaatsassen, en toppen.

Opgave 1

Gegeven is de kromme K met vergelijking: $y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$.

- Laat zien dat K een parabool is.
- Bereken de coördinaten van de top en het brandpunt en stel een vergelijking op van de richtlijn van K.



Oplossing

Herschrijven van de vergelijking van K door o.a. *kwadraatafsplitsing* geeft:

$$(y-3)^2 = 4x - 13 + 9$$
$$(y-3)^2 = 4(x-1)$$

Uit de laatste vergelijking blijkt dat K een parabool is.

De top van K is het punt (1, 3). De vergelijking van de as van K is $y = 3$.

De parameter van de parabool is 2. De halve parameter is dan gelijk aan 1. Het brandpunt van de parabool is dan (1 + 1, 3) = (2, 3).

Het snijpunt van de richtlijn van de parabool met de as is dan:

$$(1 - 1, 3) = (0, 3)$$

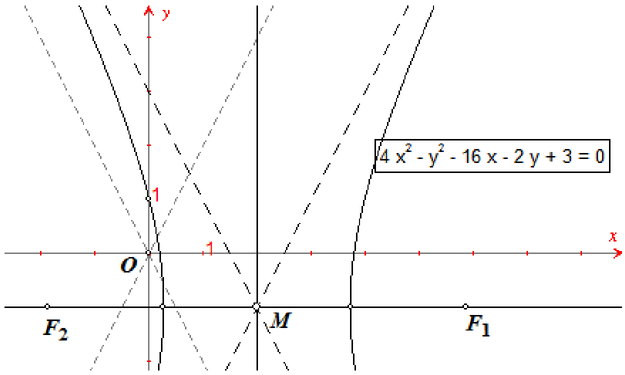
Een vergelijking van de richtlijn van de parabool is $x = 0$ (de y-as). □

Opgave 2

Gegeven is de kromme K met vergelijking:

$$4x^2 - y^2 - 16x - 2y + 3 = 0$$

Geef zoveel mogelijk bijzonderheden van K.



Oplossing

Herschrijven van de vergelijking geeft:

$$4(x^2 - 4x) - (y^2 + 2y) = -3$$

$$4(x-2)^2 - (y+1)^2 = -3 + 16 - 1 = 12$$

$$\frac{(x-2)^2}{3} - \frac{(y+1)^2}{12} = 1$$

K is dus een hyperbool met middelpunt M = (2, -1), met $a = \sqrt{3}$ en $b = \sqrt{12}$. De toppen hebben dan de coördinaten $(2 \pm \sqrt{3}, -1)$.

De lengte van de hoofdas is dan $2\sqrt{3}$, de lengte van de nevenas is $4\sqrt{3}$. De hoofdas heeft de vergelijking y = -1, de nevenas heeft de vergelijking x = 2.

Voor de brandpunten geldt $c^2 = a^2 + b^2 = 3 + 12 = 15$, zodat $c = \sqrt{15}$. De brandpunten hebben dan de coördinaten $(2 \pm \sqrt{15}, -1)$.

De *asymptootrichtingen* (zie Naschrift) volgen uit $4x^2 - y^2 = 0$.

De asymptoten hebben dus de vergelijkingen: $y = 2x - 5,\ y = -2x + 3$. □

Naschrift – Over de asymptootrichtingen van een hyperbool

We bekijken het stelsel vergelijkingen: $\begin{cases} y = mx \\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$. Het oplossen daarvan geeft de snijpunten van een hyperbool met middelpunt O en een rechte lijn door O.

We vinden voor de x-coördinaten van de snijpunten: $(b^2 - a^2m^2)x^2 = a^2b^2$, en daaruit

$x = \pm\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2 - a^2m^2}} = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$, onder de voorwaarde dat $N = b^2 - a^2m^2 > 0$; in dit geval hebben we dus twee snijpunten (puntsymmetrisch in O). Als N < 0 is, dan zijn er *geen* snijpunten.

Indien N = 0 is, en in dat geval is $m = \pm\frac{b}{a}$, hebben we dus twee lijnen die evenmin snijpunten met de hyperbool hebben. *Deze* lijnen, $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$ zijn de **asymptoten** van de hyperbool.

Merk op dat deze lineaire vergelijkingen ook volgen uit $b^2x^2 - a^2y^2 = 0$ (het '*homogeen kwadratisch* deel' van de vergelijking is gelijk aan 0)!

In Opgave 2 kan de hyperbool K met vergelijking $4x^2 - y^2 - 16x - 2y + 3 = 0$ worden verschoven (via een translatie) naar de oorsprong. De vergelijking van de verschoven hyperbool K' is dan $4x^2 - y^2 = 12$. De asymptoten van K' volgen dan uit $4x^2 - y^2 = 0$. En deze lijnen zijn evenwijdig met de asymptoten van K.

Subdomeinen 3.17 en 3.18

[17] Raaklijnen aan een tweedegraads kromme bepalen door een gegeven punt op de kromme, bijvoorbeeld met behulp van de discriminant van een vierkantsvergelijking.

[18] Raaklijnen aan kegelsneden opstellen als die door standaard vergelijkingen zijn gegeven.

Algemene uitwerking

We gaan uit van de ellips met standaard vergelijking $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Zij verder l de lijn die de ellips in het punt $P = (x_0, y_0)$ snijdt, met vergelijking $y-y_0=m(x-x_0)$. Hierin moet m dan zo bepaald worden dat l raakt aan de ellips.

Eerste methode. We snijden daartoe l met de ellips. Oplossing naar x van het stelsel:

$$\begin{cases} y-y_0=m(x-x_0) \\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \end{cases}$$

geeft dan de x-coördinaten van de snijpunten P en P', waarvan we die van P al weten (nl. $x = x_0$).
Dus:

$$b^2x^2+a^2\left(m(x-x_0)+y_0\right)^2=a^2b^2 \tag{17.1}$$

We werken deze vergelijking alleen uit voor de coëfficiënten van x^2 en x; dit geeft:

$$(b^2+a^2m^2)x^2-2(a^2m^2x_0-a^2my_0)+\ldots=0$$

Nu geldt voor de x-coördinaten x_P en $x_{P'}$ van P en P':

$$x_P+x_{P'}=\frac{2(a^2m^2x_0-a^2my_0)}{b^2+a^2m^2} \tag{17.2}$$

Als l aan de ellips raakt, dan moeten de punten P en P' samenvallen, zodat $x_{P'}=x_P=x_0$.
Uitdrukking (17.2) gaat daardoor over in:

$$x_0=\frac{a^2m^2x_0-a^2my_0}{b^2+a^2m^2} \Rightarrow b^2x_0=-a^2my_0$$

waaruit volgt, in geval van raking:

$$m=\frac{-b^2x_0}{a^2y_0} \tag{17.3}$$

Met deze waarde van m gaat de vergelijking van de lijn l over in:

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$

$$b^2x_0x+a^2y_0y=b^2x_0^2+a^2y_0^2$$

Omdat P op de ellips ligt, geldt $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$, zodat we voor de vergelijking van de raaklijn in het punt $P = (x_0, y_0)$ aan de ellips (in middelpuntsvergelijking) vinden:

$$b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2 \text{ of } \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \tag{17.4}$$

Tweede methode. We bekijken opnieuw de uitdrukking (17.1).
Met $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$ (P ligt op de ellips) gaat deze vergelijking over in:

$$b^2x^2+a^2\left(m(x-x_0)+y_0\right)^2=b^2x_0^2+a^2y_0^2$$

Werken we deze vergelijking (in x) verder uit, dan vinden we, na enige herleiding:

$$b^2(x^2-x_0^2)+a^2m^2(x-x_0)^2+2a^2my_0(x-x_0)=0$$

Het is niet verwonderlijk dat we kunnen delen door $x - x_0$, immers $x = x_0$ is een oplossing, namelijk het snijpunt P van de lijn met de ellips.
Die deling geeft dan:

$$b^2(x+x_0)+a^2m^2(x-x_0)+2a^2my_0=0$$

Willen we de lijn laten raken, dan moet hiervoor opnieuw gelden: $x = x_0$; het tweede snijpunt van de lijn met de ellips valt bij raking samen met P. Dus is:

$$2b^2 x_0 + 2a^2 m y_0 = 0$$

waaruit we vinden:

$$m = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

Verder verloopt de herleiding dan analoog aan de eerste methode vanaf uitdrukking (17.3).

Naschrift

- In bovenstaande algemene uitwerking is *geen* gebruik gemaakt van de discriminantmethode. Het waarom daarvan is gelegen in het feit dat daarbij in het algemeen meer rekenwerk moet worden verricht dan bij de genoemde eerste en tweede methode (zie bijvoorbeeld de hieronder staande Opgave 3, oplossing 2).
- We bekijken de uitdrukkingen:

  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (\times 1), \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \cdots (\times -2), \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \cdots (\times 1)$$

  Vermenigvuldiging met de getallen die er tussen haakjes achter staan, en daarna optelling – we bepalen dus een lineaire combinatie van de drie vergelijkingen – geeft:

  $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 0$$

  De enige oplossing die hieraan voldoet, is $\{x = x_0,\ y = y_0\}$. Het daardoor bepaalde punt is dus raakpunt van de lijn (17.4) aan de ellips.

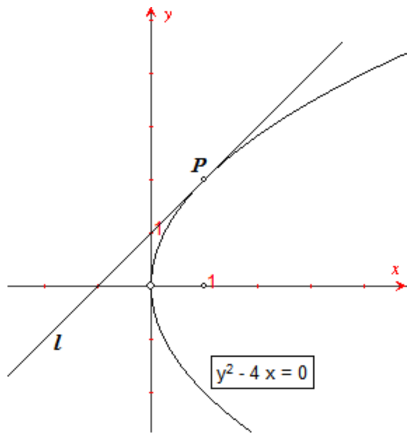
Opgave 1

Gegeven is de parabool met vergelijking $y^2 = 4x$. Op de parabool ligt het punt $P = (1, 2)$.
Bepaal, *zonder* gebruik te maken van de formule voor de raaklijn, een vergelijking van de raaklijn in het punt P aan de parabool.

Oplossing

We gebruiken de tweede methode. Voor een willekeurige lijn l door P hebben we:

$$l: \ y - 2 = m(x-1)$$



Zodat voor de x-waarden van de snijpunten van l met de parabool geldt:

$$(m(x-1)+2)^2 = 4x$$

$$m^2(x-1)^2 + 4m(x-1) - 4(x-1) = 0$$

Deling door $x - 1$ geeft dan:

$$m^2(x-1) + 4m - 4 = 0$$

En omdat ook nu $x = 1$ (vanwege de raking van l in P), hebben we $m = 1$. Een vergelijking van de lijn l is dan: $y = x + 1$. □

Opgave 2

Gegeven is de parabool met vergelijking $y^2 = 4x$. Op de parabool ligt een willekeurig punt P (niet zijnde de top). De projectie van het punt P op de as van de parabool is het punt P'. De loodlijn op de raaklijn in P snijdt de parabool-as in het punt Q. Toon aan dat $P'Q$ constant is.

Oplossing
We gebruiken een parametervoorstelling van de parabool: $\{x = t^2,\ y = 2t\}$. We maken verder gebruik van de raaklijnformule $y_0 y = p(x + x_0)$ in het punt $P = (2t^2, 2t)$, met $t \neq 0$:

$$2t \cdot y = 2(x + t^2)$$
$$x - ty + t^2 = 0$$

waarvan (1, -*t*) een paar normaalgetallen is. De loodlijn in *P* op die raaklijn heeft dan als normaalgetallen (*t*, 1) waarmee we als de vergelijking van de bedoelde loodlijn vinden:

$$t \cdot x + y = t^3 + 2t$$

Voor $y = 0$ volgt hieruit: $Q = (t^2 + 2, 0)$, terwijl $P' = (t^2, 0)$. Dus is $P'Q = 2$. □

Opgave 3

Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 5$.
Bepaal de raaklijn aan de cirkel in het punt $P = (1, 2)$.

Oplossing 1
Met normaalgetallen. De normaalgetallen van de raaklijn in het punt (1, 2) zijn (1, 2), immers de lijn *OP*, met vergelijking $y = 2x$ of $2x - y = 0$, staat loodrecht op de 'gezochte' raaklijn.
Een vergelijking van de raaklijn is dan $x + 2y = 5$. □

Oplossing 2
Met de discriminantmethode. We kiezen een willekeurige lijn *l* door het punt *P*. De vergelijking van zo'n lijn is $y - 2 = m(x - 1)$. Substitutie hiervan in de vergelijking van de cirkel geeft voor de *x*-coördinaten van de snijpunten:

$$x^2 + (m(x-1) + 2)^2 = 5$$
$$x^2 + m^2(x-1)^2 + 4m(x-1) + 4 = 5$$
$$(1 + m^2)x^2 + (-2m^2 + 4m)x + m^2 - 4m - 1 = 0$$

De lijn *l* raakt aan de cirkel, dus de discriminant van deze vergelijking (in *x*) is gelijk aan 0:

$$(-2m^2 + 4m)^2 - 4(1 + m^2)(m^2 - 4m - 1) = 0$$

Na 'enige' herleiding van deze laatste uitdrukking vinden we:

$$16m^2 + 16m + 4 = 0$$
$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$
$$(2m + 1)^2 = 0$$

Zodat $m = -\frac{1}{2}$. Een vergelijking van de raaklijn in *P* aan de cirkel is dan:

$$y - 2 = -\tfrac{1}{2}(x - 1)$$
$$2y - 4 = -x + 1$$

zodat $x + 2y = 5$ een vergelijking is van de raaklijn in *P*. □

Oplossing 3
Met een parametervoorstelling van de raaklijn. Een raaklijn door $P = (1, 2)$ aan de cirkel heeft bijvoorbeeld de vergelijking:

$$x + ay = 1 + 2a$$

waarbij (1, *a*) een paar normaalgetallen is van die raaklijn. We moeten nu *a* berekenen.

Nu is $\begin{cases} x = 1 + \lambda a \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$ een parametervoorstelling van die lijn (de lezer ga dit na!).

Substitutie in $x^2 + y^2 = 5$ geeft dan:

$$(1+\lambda a)^2 + (2-\lambda)^2 = 5$$
$$1 + 2a\lambda + a^2\lambda^2 + 4 - 4\lambda + \lambda^2 = 5$$
$$(a^2+1)\lambda^2 + (2a-4)\lambda = 0$$

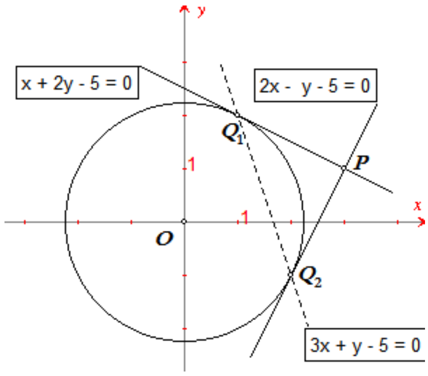
De discriminant van de laatste vergelijking moet gelijk zijn aan 0; dus $2a - 4 = 0$, zodat $a = 2$.
Een vergelijking van de raaklijn is dan $x + 2y = 5$. □

Opmerking. Een voordeel van het gebruik van een parametervoorstelling van de raaklijn is dat de vergelijking die na substitutie ontstaat, gereduceerd is tot een vergelijking zonder 'bekende term'. Daardoor is het rekenwerk bij de discriminantmethode in dit geval niet gecompliceerd.
De discriminantmethode is samen met een parametervoorstelling van een lijn ook goed te gebruiken indien raaklijnen *uit* een punt aan een tweedegraads kromme moeten worden bepaald (zie Opgave 4).

Opgave 4

Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 5$. Bepaal vergelijkingen van de raaklijnen *uit* het punt $P = (3, 1)$ aan de cirkel.

Oplossing



Zij $\{x = 3 + \lambda,\ y = 1 + a\lambda\}$ een parametervoorstelling van een raaklijn door P aan de cirkel. We moeten nu a berekenen.
Dit verloopt via het snijden van de lijn met de cirkel:

$$(3+\lambda)^2 + (1+a\lambda)^2 = 5$$
$$(1+a^2)\lambda^2 + 2(3+a)\lambda + 5 = 0$$

De discriminant van deze vergelijking moet gelijk zijn aan 0, vanwege de raking, dus:

$$a^2 + 6a + 9 - 5 - 5a^2 = 0$$
$$2a^2 - 3a - 2 = 0$$
$$(2a+1)(a-2) = 0$$
$$a = -\tfrac{1}{2} \text{ of } a = 2$$

Voor de raaklijnen hebben we dus de parametervoorstellingen:

$$\{x = 3 + \lambda,\ \ y = 1 - \tfrac{1}{2}\lambda\},\ \{x = 3 + \lambda,\ \ y = 1 + 2\lambda)$$

en op basis daarvan de vergelijkingen: $x + 2y = 5,\ 2x - y = 5$. □

Opmerking. Een andere methode voor de bepaling van de raaklijnen aan een cirkel is weer gebaseerd op het gebruik van normaalgetallen.
Stel $Q = (x_0, y_0)$ is een raakpunt. Normaalgetallen van de raaklijn in Q door P zijn dan $(x_0 - 3, y_0 - 1)$ en normaalgetallen van de lijn OQ zijn (x_0, y_0). De raaklijn en OQ staan loodrecht op elkaar, zodat de productsom van de normaalgetallen gelijk is aan 0:

$$x_0^2 - 3x_0 + y_0^2 - y_0 = 0$$

Samen met $x_0^2 + y_0^2 = 5$ (Q ligt immers op de cirkel) geeft dit:

$$\begin{cases} x_0^2 - 3x_0 + y_0^2 - y_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_0 + y_0 = 5 \\ x_0^2 + y_0^2 = 5 \end{cases}$$

En uit dit laatste stelsel kunnen x_0 en y_0 eenvoudig worden berekend, waarna de vergelijkingen van de lijnen *PQ* (het zijn er in dit geval twee) kunnen worden opgesteld.
Nb. De lijn met vergelijking $3x + y = 5$ is de lijn door de beide raakpunten; dit is de zogenoemde **poollijn** van *P* bij de cirkel.

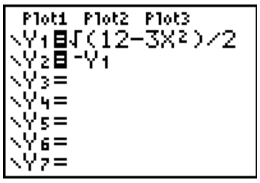
Subdomeinen 3.19 en 3.23

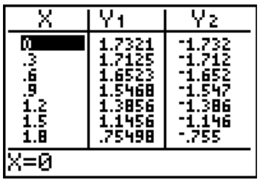
[19] Door een vergelijking gegeven figuren puntsgewijs tekenen en schetsen.
[23] Inzien dat een vergelijking van een kromme een middel is om te toetsen of een punt op een figuur ligt, en dat een parametervoorstelling alle punten van een figuur voortbrengt op een berekenbare manier; verband leggen met de termen meetkundige plaats en baan.

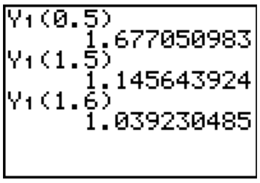
Gedeeltelijke uitwerking

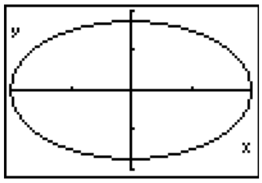
Het puntsgewijs tekenen van een figuur waarvan de vergelijking impliciet in *x* en *y* gegeven is, kan eenvoudig verlopen indien een tabel wordt gemaakt van de paren (*x*, *y*) die aan de vergelijking voldoen. Hierbij is het aan te raden *y* te schrijven als functie(s) van *x*, waardoor, indien gewenst, ook gebruik kan worden gemaakt van een grafische rekenmachine (GR).

Voorbeeld 1
Schets de kromme met vergelijking $3x^2 + 4y^2 = 12$.
Oplossing









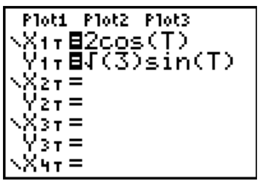
We schrijven *y* als functie van *x*: $y = \pm\sqrt{\frac{12-3x^2}{2}}$, zodat we met behulp van een GR coördinaten van punten van de kromme kunnen berekenen en een plot van de kromme kunnen maken. □

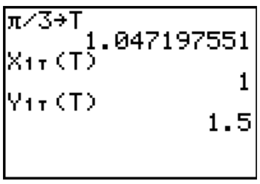
Opmerking. Ook andere functies van de GR kunnen worden gebruikt, zoals voor het tekenen van de raaklijn in een punt van de kromme. •

We kunnen een vergelijking van een kromme opvatten als een 'open bewering'. Deze bewering wordt dan alleen *waar*, als we voor *x* én *y* de coördinaten kiezen van een punt *op* de kromme.
Bij een parametervoorstelling ligt dat niet anders als we naar toegestane waarden van de parameter kijken. Evenwel, kiezen we in dit geval *alle* toegestane waarden van die parameter, dan genereert de parametervoorstelling *alle* punten van de kromme.

Voorbeeld 2
Het punt (1, 2) ligt *niet* op de ellips uit Voorbeeld 1, omdat $3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 \neq 12$. Het punt $(1, -1\frac{1}{2})$ ligt *wel* op de ellips, omdat $3 \cdot 1^2 + 4 \cdot (-1\frac{1}{2})^2 = 3 + 4 \cdot \frac{9}{4} = 12$.

Bekijken we een parametervoorstelling van de ellips, $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sqrt{3}\sin t \end{cases}$ met *t* in $[0, 2\pi]$, dan ligt het punt met $t = \frac{\pi}{3}$ op de ellips.





Om met behulp van de parametervoorstelling van de kromme, in dit geval de ellips, te onderzoeken of bijvoorbeeld het punt $(1, 1\frac{1}{2})$ erop ligt, moeten we het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2\cos t = 1 \\ \sqrt{3}\sin t = 1\frac{1}{2} \end{cases}$$

oplossen: we moeten een waarde van t vinden waarvoor *beide* open beweringen waar zijn. □

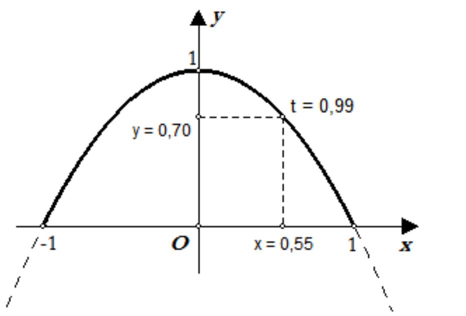
Voorbeeld 3

We bekijken de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

met t in $[0, 2\pi]$.
Eliminatie van t geeft:

$$y = \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - x^2$$

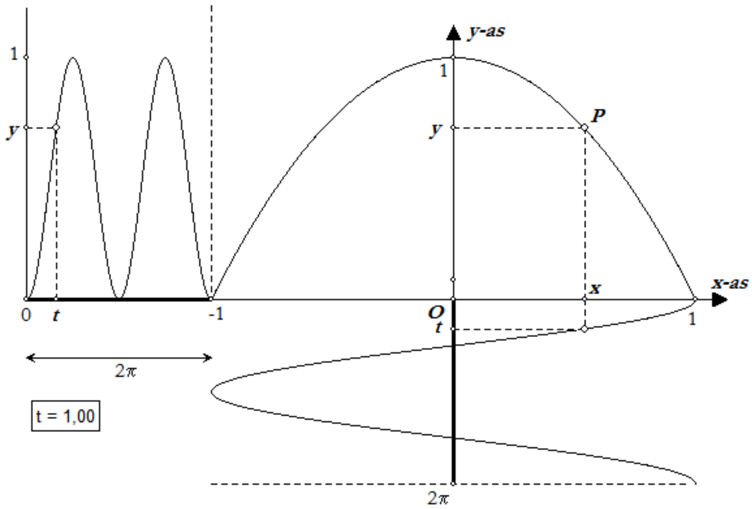


Hieruit zouden we kunnen concluderen, dat de meetkundige plaats van de punten P met $P = (\cos t, \sin^2 t)$ een parabool is:

$$y = 1 - x^2$$

Evenwel, de meetkundige plaats van P is een *deel* van die parabool (omdat hier $0 \le y \le 1$)! □

Opmerking. Voor de opbouw van de figuur hiernaast zie Subdomein 3.20.

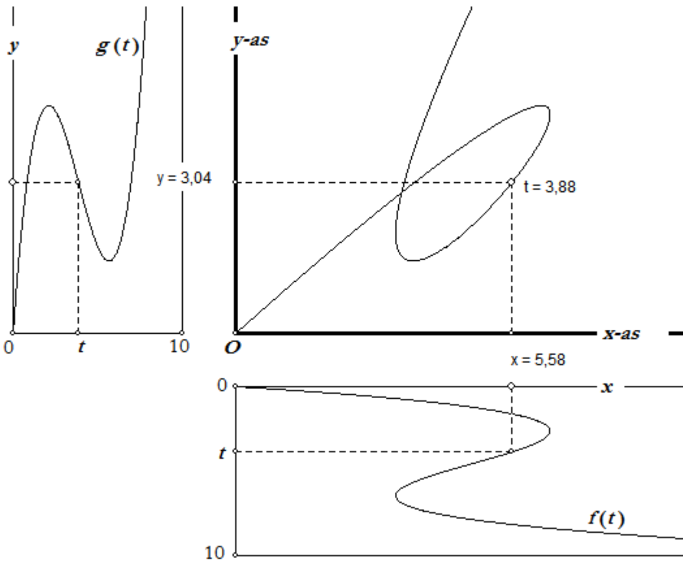


Subdomein 3.20

Een punt waarvan de coördinaten beschreven zijn door functies van eenzelfde variabele (de parameter), interpreteren als punt dat een baan beschrijft.

Uitwerking

Gegeven is het punt P met coördinaten $P = (f(t), g(t))$, waarbij f en g functies zijn gedefinieerd voor $t \ge 0$. We kunnen t opvatten als een tijdstip (bijvoorbeeld in seconden).
Op elk tijdstip t is dan de plaats (x, y) van het punt P in het platte vlak via de functies f en g vastgelegd door: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$.
De baan van het punt P kan dan bijvoorbeeld worden bepaald door de functies f en g (eventueel puntsgewijs) te tekenen en daarbij de gevonden waarden van x en y te gebruiken in een derde assenstelsel (zie de figuur hieronder).



Opmerking. In de figuur is

$$\begin{cases} x = 0{,}11t^3 - 1{,}50t^2 + 5{,}6t \\ y = 0{,}14t^3 - 1{,}63t^2 + 5{,}0t \end{cases}$$

Opgave

Op het tijdstip $t = 0$ begint een punt P te bewegen op basis van de *bewegingsvergelijkingen*:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases} \quad \text{met } t \geq 0$$

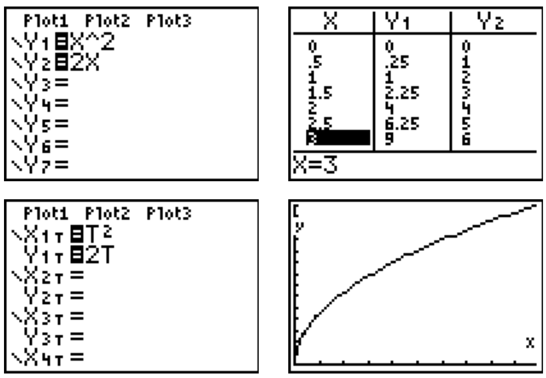
Teken de baan van het punt P door gebruik te maken van (de grafieken van) de functies $x = t^2$ en $y = 2t$.

Oplossing

De waarden van x en y kunnen bijvoorbeeld worden berekend via de GR met $x = Y_1(X)$ en $y = Y_2(X)$.

Ook kan de baan van P direct worden geplot in de parametermodus van de GR.

Door t (indien mogelijk; en hier kan dat) te elimineren uit de beide vergelijkingen vinden we een vergelijking van de baan van P: $y = 2\sqrt{x}$. □

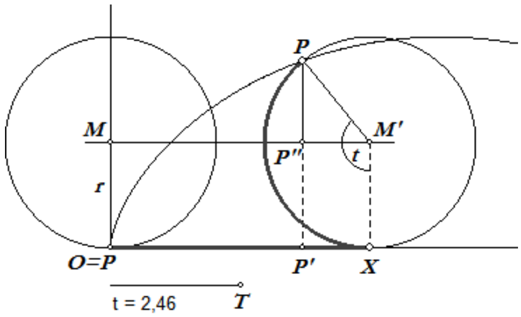


Subdomein 3.21

Bij een door een beweging beschreven figuur een geschikt gekozen parameter gebruiken om de beweging te beschrijven. (…) bijvoorbeeld de cycloïde en andere afwikkelingskrommen.

Uitwerking

Een (gewone) **cycloïde** (*wiellijn*) ontstaat als de meetkundige plaats van een *vast* punt P van de omtrek van een cirkel bij het (wrijvingsloos) rollen van die cirkel over een rechte lijn.



We kiezen een parameter t (die de *rolhoek* bij het punt M bepaalt; dit is de hoek waarover het punt P in negatieve richting om M draait). Heeft de cirkel een straal die gelijk is aan r, dan is de *rolafstand* gelijk aan

$$r \cdot t = OX = bg(XP)$$

In driehoek $M'PP''$ is dan:

$$\frac{M'P''}{M'P} = \frac{M'P''}{r} = \cos(t - \tfrac{\pi}{2}) = \sin t$$

zodat $M'P'' = r \sin t$.

Ook is $\dfrac{PP''}{M'P} = \dfrac{PP''}{r} = \sin(t - \tfrac{\pi}{2}) = \text{-}\cos t$, zodat $PP'' = \text{-}r \cos t$.

Voor de coördinaten (x_P, y_P) van het punt P geldt dan:

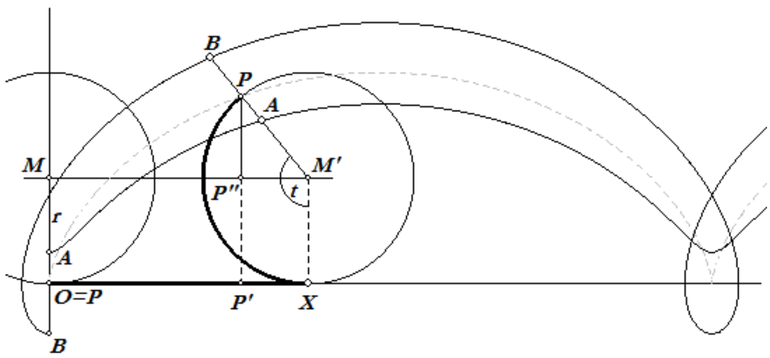
$$\begin{cases} x_P = OP' = OX - M'P'' = r \cdot t - r \sin t = r(t - \sin t) \\ y_P = P'P = P'P'' + PP'' = r - r\cos t \quad = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

Opmerking. De standaard cirkel (middelpunt O, straal r) is ten opzichte van het punt O verschoven over $(r \cdot t, r)$. De cirkelbeweging wordt dus beschreven door:

$$\begin{cases} x - r \cdot t = x' = \text{-}r \sin t \\ y - r = y' = \text{-}r \cos t \end{cases}$$

Opgave 1

Leid de parametervoorstelling af van de krommen die de meetkundige plaats zijn van het punt A en van het punt B (beide met een vaste afstand tot het punt M) opvolgend binnen de cirkel en buiten de cirkel, als die cirkel over een rechte lijn rolt.



Oplossing

De verschuiving van de standaard cirkel is dezelfde als die in bovenstaande uitwerking. De cirkelbeweging wordt nu beschreven door (zie de Opmerking hierboven):

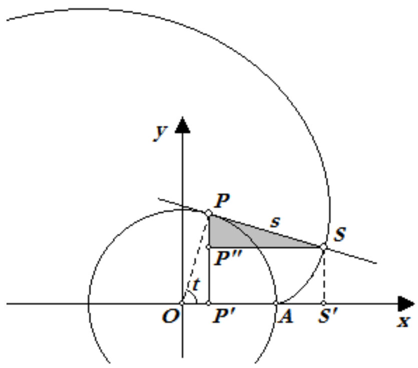
$$\begin{cases} x - r \cdot t = x' = \text{-}a \sin t \\ y - r = y' = \text{-}a \cos t \end{cases}$$

waarbij $a = MA$ ($a < r$), c.q. $a = MB$ ($a > r$); zodat de parametervoorstelling in beide gevallen luidt:

$$\begin{cases} x = r \cdot t - a \sin t \\ y = r - a \cos t \end{cases}$$

De bedoelde krommen heten opvolgend *verkorte* en *verlengde* cycloïde. □

Opgave 2



Wanneer een draad (zonder dikte) om een cirkel gewikkeld is, dan kunnen we die draad afwikkelen waarbij de draad zó strak gehouden wordt, dat deze samenvalt met de raaklijn in een punt P van de cirkel. De draad zit vast in een punt A van de cirkel.
Bepaal een parametervoorstelling van de kromme die het punt S beschrijft, dat het einde van het afgewikkelde deel van de draad bepaalt.

Oplossing
We kiezen een rechthoekig assenstelsel waarvan de oorsprong O samenvalt met het middelpunt van de cirkel. De x-as valt samen met de lijn door de punten O en A.
Zij r de straal van de cirkel. Nu is bg(AP) = PS = s, omdat de draad van het begin af wordt afgewikkeld. Zij verder t de hoek tussen OA en OP, dan is in de rechthoekige driehoek SPP'' de hoek SPP'' gelijk aan t. In die driehoek is:

$$\frac{SP''}{s} = \sin t \Rightarrow SP'' = s\sin t, \quad \frac{PP''}{s} = \cos t \Rightarrow PP'' = s\cos t$$

En ook geldt: s = bg(AP) = $t \cdot r$.
Kiezen we $P = (r\cos t, r\sin t)$, dan geldt voor de coördinaten (x, y) van het punt S:

$$\begin{cases} x = r\cos t + t\cdot r\sin t = r(\cos t + t\sin t) \\ y = r\sin t - t\cdot r\cos t = r(\sin t - r\cos t) \end{cases}$$

De kromme heet de **afwikkelingskromme** (ook wel **evolvente**) van de cirkel. □

Subdomein 3.24

In hanteerbare gevallen een parametervoorstelling aangeven van een bewegend punt op een middels een coördinaatvergelijking gegeven kromme; met behulp van een parametrisering van een kromme vragen over de kromme beantwoorden.

Opgave 1

Zie Opgave 2 bij Subdomein 3.17 en 3.18.

Opgave 2

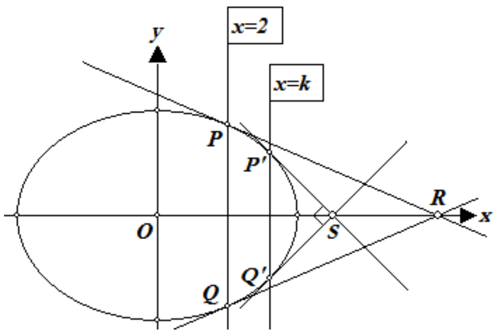
Gegeven is de ellips met vergelijking $9x^2 + 16y^2 = 144$.

- Laat zien dat $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ een parametervoorstelling is van deze ellips. Geef daarbij voor de parameter t een zo klein mogelijk domein dat $t = 0$ bevat.
- Wat zijn de afmetingen van de kleinste rechthoek, met zijden evenwijdig met de coördinaatsassen, waarbinnen de ellips gelegen is?
- Welke waarden van t behoren bij de snijpunten van de ellips met de assen?
- Bereken (exact) de coördinaten van de snijpunten P en Q van de ellips met de lijn met vergelijking $x = 2$.
- Bereken (exact) de coördinaten van het snijpunt R van de x-as met van de raaklijn in P aan de ellips.

De ellips wordt in de punten P' en Q' gesneden door de lijn met vergelijking $x = k$. De raaklijnen in P' en Q' aan de ellips snijden elkaar *loodrecht* in het punt S.

- Bereken de coördinaten van het punt S.

Oplossing



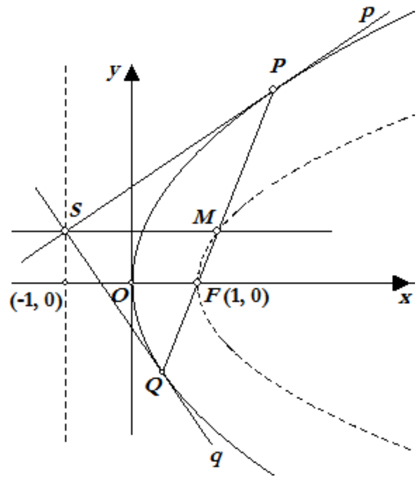
- Er geldt:
$$9x^2+16y^2=9\cdot(16\cos^2 t)+16\cdot(9\sin^2 t)=$$
$$=144\cdot(\cos^2 t+\sin^2 t)=144$$
waarbij t in $[0,2\pi]$.
- Voor x geldt $-4\le x\le 4$, omdat $-1\le\cos t\le 1$; voor y geldt $-3\le y\le -3$, omdat $-1\le\sin t\le 1$ op het beschouwde interval waarin t ligt. De afmetingen van de bedoelde rechthoek zijn dus 8 × 6.
- Voor de snijpunten met de x-as geldt $y = 0$, zodat $3\sin t=0$, en dit geeft $t = 0$ en $t = \pi$. De snijpunten met de y-as volgen uit $4\cos t=0$, en dit geeft $t=\frac{\pi}{2}$ en $t=1\frac{1}{2}\pi$.
- Voor $x = 2$ is $\cos t=\frac{1}{2}$, zodat $t=\frac{1}{3}\pi$ of $t=1\frac{2}{3}\pi$. En die waarden geven:
$$\begin{cases} y=3\sin\frac{1}{3}\pi=3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ y=3\sin 1\frac{2}{3}\pi=-3\sin\frac{1}{3}\pi=-\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{cases}$$
Zodat $P=(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$ en $Q=(2,-\frac{3}{2}\sqrt{3})$.
- De vergelijking van de raaklijn in P aan de ellips is $9\cdot 2x+16\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3}\cdot y=144$.
Voor $y = 0$ geeft dit $x = 8$, zodat $R = (8, 0)$.
- Stel de t-waarde van P' is $t = u$. Op basis van *symmetrie-overwegingen* is dan de t-waarde van Q' gelijk aan $t = 2\pi - u$.
Voor de raaklijnen in die punten hebben we opvolgend de vergelijkingen:
$$\frac{\cos u}{4}x+\frac{\sin u}{3}y=1$$
en
$$\frac{\cos(2\pi-u)}{4}x+\frac{\sin(2\pi-u)}{3}=1\ \Rightarrow\ \frac{\cos u}{4}x+\frac{-\sin u}{3}y=1$$
Deze lijnen staan loodrecht op elkaar als de productsom van hun normaalgetallen gelijk is aan 0, dus als
$$\frac{\cos^2 u}{16}-\frac{\sin^2 u}{9}=0\ \Rightarrow\ (3\cos u-4\sin u)(3\cos u+4\sin u)=0.$$
En hieruit vinden we
$$\tan u=\pm\frac{3}{4}$$
Uit $\tan u=\frac{3}{4}$ vinden we $\cos u=\pm\frac{4}{5}$, zodat we voor de x-coördinaat k van P' hebben:
$$k=x_{P'}=4\cos u=4\cdot\pm\frac{4}{5}=\pm\frac{16}{5}$$
Uit $\tan u=-\frac{3}{4}$ volgt $\cos u=\mp\frac{4}{5}$. En dit geeft dezelfde waarden van k. Dus: $k=\pm\frac{16}{5}$.
En voor het punt S vinden we dan $S=(\pm 5,0)$. □

Opgave 3

Op een parabool ligt een punt P. Het punt P is één van de eindpunten van een koorde van de parabool die door het brandpunt F gaat; Q is het andere eindpunt. In P en Q worden raaklijnen getekend aan de parabool die elkaar snijden in het punt S.

- Toon aan dat de beide raaklijnen elkaar loodrecht snijden.
- Onderzoek de baan die het punt S beschrijft, als P de paraboolbaan doorloopt.
- Toon aan dat de lijn door S evenwijdig met de as van de parabool door het midden M van PQ gaat.
- Onderzoek de baan van het punt M, als P de paraboolbaan doorloopt.

Oplossing (gedeeltelijk)



We kiezen het assenstelsel zo, dat O samenvalt met de top van de parabool, en waarbij de lijn OF samenvalt met de positieve x-as. Ook kiezen we $F = (1, 0)$.
Een vergelijking van de parabool is dan $y^2 = 4x$. Voor het punt P op de parabool kiezen we als coördinaten $(4t^2, 4t)$.
De lijn PF, de drager van de koorde door F, heeft dan de vergelijking:

$$y = \tfrac{4t}{4t^2-1}(x-1) \;\Rightarrow\; 4tx - (4t^2-1)y - 4t = 0$$

Om de coördinaten van het punt Q te vinden snijden we deze lijn met de parabool; we lossen op:

$$\begin{cases} y^2 = \underline{4x} \\ \underline{4t}\underline{x} - (4t^2-1)y - 4t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ ty^2 - (4t^2-1)y - 4t = 0 \end{cases}$$

De tweede vergelijking in het rechter stelsel heeft de y-coördinaten van P en Q als oplossing. De y-coördinaat van P kennen we, nl. $y = 4t$; dus (via ontbinding!):

$$ty^2 - (4t^2-1)y - 4t = 0 \;\Rightarrow\; (y-4t)(ty+1) = 0$$

Zodat: $x_Q = \tfrac{1}{4t^2},\ y_Q = \text{-}\tfrac{1}{t}$.
De vergelijkingen van de raaklijnen p en q in opvolgend P en Q aan de parabool zijn dan:

$$p: \quad 4ty = 2(x + 4t^2) \;\Rightarrow\; x - 2ty + 4t^2 = 0$$
$$q: \; \text{-}\tfrac{1}{t}\, y = 2(x + \tfrac{1}{4t^2}) \;\Rightarrow\; 4t^2x + 2ty + 1 = 0$$

De paren normaalgetallen van de lijnen p en q zijn opvolgend $(1, \text{-}2t)$ en $(4t^2, 2t)$. Hun productsom is gelijk aan 0 (zie het Naschrift bij Subdomein 3.11). De lijnen p en q staan dus loodrecht op elkaar.
Optelling van beide laatste vergelijkingen geeft:

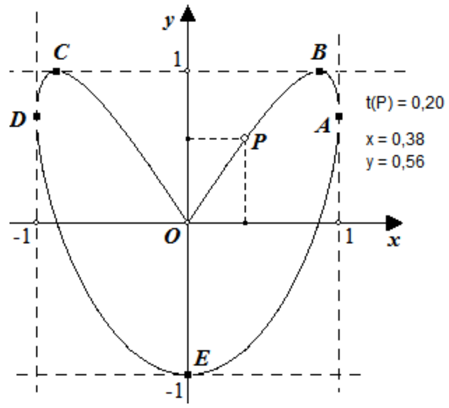
$$(1+4t^2)x + (4t^2+1) = 0 \;\Rightarrow\; x = \text{-}1$$

Het punt S doorloopt dus een lijn loodrecht op de x-as; en die lijn is, vanwege $F = (1, 0)$, de **richtlijn** van de parabool. □

Opgave 4

Gegeven is een punt P waarvan voor t in $[0, \pi]$ de plaats in het platte vlak wordt bepaald door:

$$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin 3t \end{cases}$$



- Bereken de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de baan van het punt P met de lijnen $x = \pm 1,\ \ y = \pm 1$.
- Waarom is er sprake van raking in die gemeenschappelijke punten?
- Toon aan dat de baan van P symmetrisch is in de y-as.

Oplossing

- Voor x = 1 hebben we: $\sin 2t = 1 \ \Rightarrow\ 2t = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \ \Rightarrow\ t = \frac{\pi}{4}$. Voor deze waarde van t is dan: $y = \sin \frac{3}{4}\pi = \sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dus: $A = (1, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

  Voor x = -1 hebben we: $\sin 2t = \text{-}1 \ \Rightarrow\ 2t = 1\frac{1}{2}\pi \ \Rightarrow\ t = \frac{3}{4}\pi$. Zodat dan: $y = \sin \frac{9}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dus: $B = (\text{-}1, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

  Voor y = 1 is: $\sin 3t = 1 \ \Rightarrow\ 3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \ \Rightarrow\ t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{4}{6}\pi$. De waarden van t in het beschouwde interval zijn dan $t = \frac{1}{6}\pi,\ t = \frac{5}{6}\pi$, zodat $B = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$ en $C = (\text{-}\frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$.

  Voor y = -1 hebben we hier: $\sin 3t = \text{-}1 \ \Rightarrow\ 3t = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \ \Rightarrow\ t = \frac{1}{2}\pi$. Zodat $E = (0, \text{-}1)$.
- De algemene oplossing van $\sin x = \sin a$ luidt: ($x = a + k \cdot 2\pi$ of $x = \pi - a + k \cdot 2\pi$). Er zijn bij dit type vergelijkingen dus altijd *twee* series oplossingen.

  Voor (bijvoorbeeld) x = 1 hebben we:

  $$\sin 2t = 1 = \sin \tfrac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ \begin{cases} (i) \ldots 2t = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ (ii) \ldots 2t = (\pi - \frac{\pi}{2}) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

  En we zien hieruit dat beide series *dezelfde* oplossing(en) hebben. Er is sprake van samenvallende snijpunten. Dus raking! Het onderzoek van de andere gevallen verloopt analoog.
- We bekijken een willekeurig punt P met $t = t_0$ en daarbij het punt Q met $t = \pi - t_0$.

  Dan is: $x_P = 2\sin t_0$ en $x_Q = \sin(2\pi - 2t_0) = \sin(\text{-}2t_0) = \text{-}\sin(2t_0)$, zodat:

  $$x_P = \text{-}x_Q \qquad (24.1)$$

  En ook: $y_P = \sin 3t_0$ en $y_Q = \sin(3\pi - 3t_0) = \sin(\pi - 3t_0) = \sin 3t_0$, waaruit volgt:

  $$y_P = y_Q \qquad (24.2)$$

  Uit (24.1) en (24.2) volgt dan de symmetrie van de baan van P in de y-as. □

Subdomein 3.26

Een grafiek van een functie herkennen als een parametervoorstelling van een figuur.

Voorbeeld

We bekijken de functie $f(x) = 3x^2 - 2x$. We stellen nu $x = t$ en $y = f(t) = 3t^2 - 2t$. Het stelsel vergelijkingen:

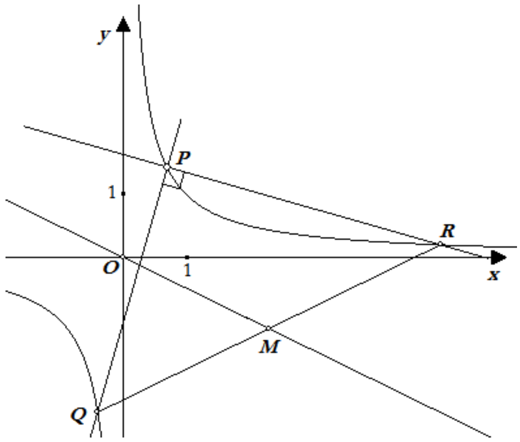
$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t^2 - 2t \end{cases}$$

is daardoor een parametervoorstelling van de grafiek van de functie *f*. □

Opgave

Op de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ ligt een *vast* punt *P* waardoor men twee onderling loodrechte lijnen tekent die de grafiek nog in *Q* en *R* snijden.
Bepaal de meetkundige plaats van de middens *M* van het lijnstuk *QR* als de lijnen, onderling loodrecht blijvend, om het punt *P* draaien.

Oplossing



Een parametervoorstelling van de grafiek van *f* is

$$\{x = t,\ \ y = \tfrac{1}{t}\}$$

Voor het vaste punt *P* kiezen we $t = a$, zodat
$P = (a, \frac{1}{a})$ met a is constant.
Voor de lijn *PQ* door *P* kiezen we als vergelijking:

$$y - \tfrac{1}{a} = m(x - a)$$

met m variabel (de parameter van de lijn).
Zodat een vergelijking van *PR* luidt:

$$y - \tfrac{1}{a} = -\tfrac{1}{m}(x - a)$$

Voor de punten *P*, *Q* is dan: $\begin{cases} y - \frac{1}{a} = m(x - a) \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a - x}{xa} = m(x - a)$, waarin voor *P* geldt dat $x = a$. Deling door $x - a$ geeft dan voor *Q*: $-\frac{1}{xa} = m$.
En dus: $x_Q = -\frac{1}{am}$, $y_Q = -am$. En voor *R* ($m \to -\frac{1}{m}$): $x_R = \frac{m}{a}$, $y_R = \frac{a}{m}$.

En daarmee: $\begin{cases} x_M = \frac{1}{2}(-\frac{1}{am} + \frac{m}{a}) = \frac{1}{2am}(m^2 - 1) \\ y_M = \frac{1}{2}(-am + \frac{a}{m}) = -\frac{a}{2m}(m^2 - 1) \end{cases}$. En ook: (*) $\frac{x_M}{y_M} = \frac{1}{2am} \cdot (-\frac{2m}{a}) = -\frac{1}{a^2}$.

Dus: $y_M = -a^2 x_M$.
Een vergelijking van de meetkundige plaats van het punt *M* is dan: $y = -a^2 x$; en dit is een rechte lijn door het punt *O*. □

Opmerking. Er is hierboven, zie (*), gedeeld door $m^2 - 1$. Heeft dit gevolgen voor de meetkundige plaats van het punt *M*?

Subdomein 3.27

De beschrijving van punten in de ruimte met drie coördinaten hanteren in voorkomende toepassingen.

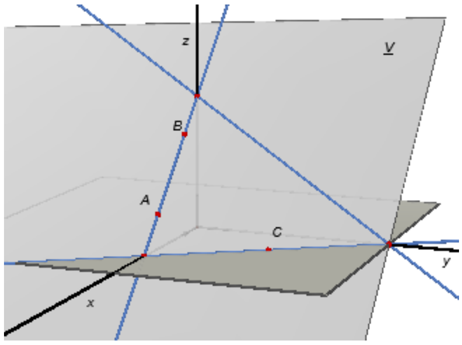
Opgave 1

De punten *A*, *B*, *C* hebben in een driedimensionaal assenstelsel de coördinaten (3, 0, 1), (1, 0, 3), (2, 3, 0). *V* is het vlak door de punten *A*, *B*, *C*.

- Schets in een ruimtelijke figuur de snijlijn van het vlak *V* met het *xOz*-, het *xOy*- en het *yOz*-vlak.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van *V* met de coördinaatsassen.

- Dezelfde opdracht voor het geval A = (3, 0, 1), B = (1, 0, 3) en C = (4, 3, 0) , waarbij $\underline{V}'$ het vlak is door deze punten.

Oplossing



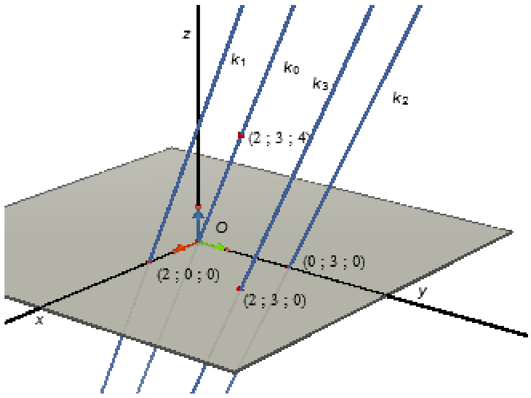
- Zie voor een tekening de figuur hiernaast.
- De lijn AB ligt in het xOz-vlak en heeft *in dat vlak* (y = 0) de vergelijking $x + z = 4$.
  De snijpunten van de lijn AB met de x-as en de z-as zijn dus opvolgend (4, 0, 0) en (0, 0, 4).
- De snijlijn van V met het xOy-vlak gaat door de punten (4, 0, 0) en C = (4, 3, 0).

  Die snijlijn heeft *in dat vlak* (z = 0) de vergelijking $3x + 2y = 12$. Het snijpunt van $\underline{V}$ met de y-as (x = 0) is dan (0, 6, 0).
- In vergelijking met het eerste stel gegevens zijn alleen de coördinaten van het punt C veranderd. De snijpunten van $\underline{V}'$ met de x-as en de y-as zijn daardoor onveranderd.
  De snijlijn van $\underline{V}'$ met het xOy-vlak gaat door de punten (4, 0, 0) en (4, 3, 0). Een vergelijking van die lijn *in dat vlak* is dan x = 4. Dit is een lijn evenwijdig met de y-as. Het vlak $\underline{V}'$ snijdt de y-as dan ook *niet*. □

Opmerking. In de oplossing hierboven komen zinnen voor als 'De lijn AB ligt in het xOz-vlak en heeft *in dat vlak* (y = 0) de vergelijking $x + z = 4$.'

Het is evenwel gebruikelijk (en korter) te schrijven $AB : \begin{cases} x+z=4 \\ y=0 \end{cases}$.

Opgave 2



In de figuur hiernaast gaat de lijn k_0 door de punten O en (2, 3, 4).
De lijn k_1 gaat door (2, 0, 0), k_2 door (0, 3, 0) en de lijn k_3 gaat door (2, 3, 0).
De lijnen k_0, k_1, k_2, k_3 zijn evenwijdig met elkaar.

- Geef de coördinaten van twee punten 'boven' en van twee punten 'onder' het xOy-vlak die gelegen zijn op de lijn k_1.
- Dezelfde vraag voor de lijn k_2 en voor de lijn k_3.

Oplossing

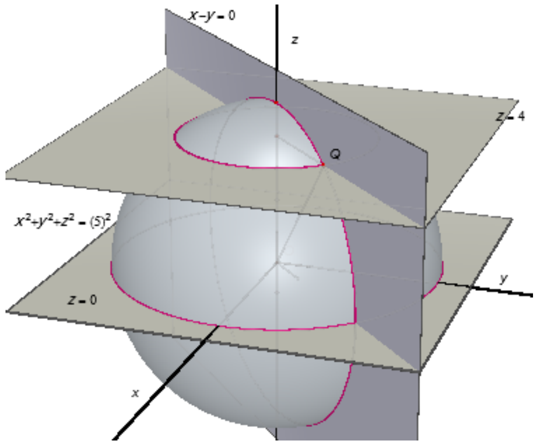
De punten (4, 6, 8), (6, 9, 12), (-4, -6, -8), (-6, -9 ,-12) liggen ook op de lijn k_0.
De punten (6, 6, 8), (8, 9, 12), (-2, -6, -8) en (-4, -9, -12) liggen op de lijn k_1.
De punten (4, 9, 8), (6, 12, 12), (-4, -3, -8) en (-6, -6, -12) liggen op de lijn k_2.
De punten (6, 9, 8), (8, 12, 12), (-2, -3, -8) en (-4, -6, -12) liggen op de lijn k_3. □

Subdomein 3.28

De vergelijking van een bol met gegeven straal en middelpunt opstellen; doorsnede van een bol en een vlak.

Opgave

Gegeven is een bol met middelpunt O en straal 5 in een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel.



- Welke van de volgende punten liggen op de bol, welke binnen de bol, en welke er buiten? $A = (4, 2, 0)$, $B = (3, 4, 0)$, $C = (3, 4, 1)$, $D = (2, 3, 3)$, $E = (3, 3, 3)$, $F = (2\sqrt{2}, 4, 1)$.
- Aan welke vergelijking in x, y en z voldoen de coördinaten van alle punten van de bol?

De doorsnede van de bol met het vlak $z = 0$ is een cirkel.

- Wat zijn de coördinaten van het middelpunt van die cirkel? Hoe groot is de straal van die cirkel?

De doorsnede van de bol met het vlak $z = 4$ is eveneens een cirkel.

- Bepaal de coördinaten van het middelpunt van die cirkel? Hoe groot is de straal van deze cirkel?
- Is de doorsnede van de bol met het vlak $x = y$ ook een cirkel? Zo ja, wat zijn de coördinaten van het middelpunt van deze cirkel en hoe groot is de straal ervan? Zo nee, waarom niet?

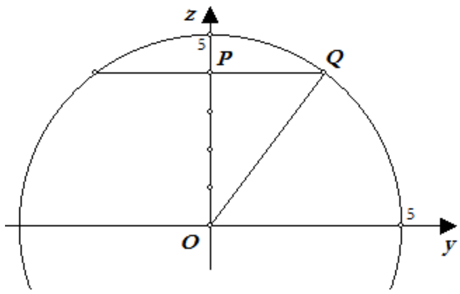
Oplossing

- Voor de genoemde punten hebben we:

  A: $4^2+2^2+0^2 = 20 < 25$; binnen de bol. D: $2^2+3^2+3^2 = 22 < 25$; er binnen.

  B: $3^2+4^2+0^2 = 25$; op de bol. E: $3^2+3^2+3^2 = 27 > 25$; buiten de bol.

  C: $3^2+4^2+1^2 = 26 > 25$; buiten de bol. F: $(2\sqrt{2})^2+4^2+1^2 = 8+16+1 = 25$; erop.
- Voor de coördinaten van een punt $Q = (x, y, z)$ van de bol geldt: $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 5$, immers voor elk punt Q is $|OQ| = 5$.
- Het vlak $z = 0$ is het vlak door de x-as en de y-as. Het punt O ligt in het vlak $z = 0$. Het middelpunt van de cirkel is dan het punt O; de straal is gelijk aan 5.



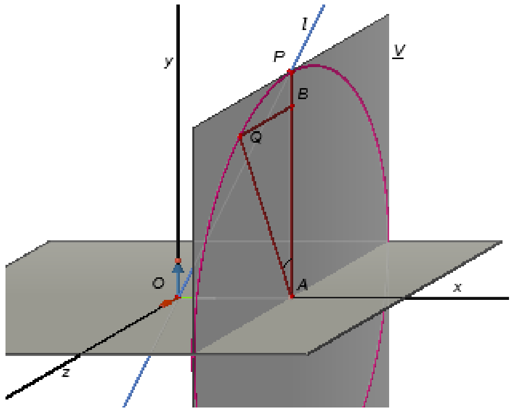
- Het vlak $z = 4$ snijdt de z-as in het punt $P = (0, 0, 4)$; oftewel $|OP| = 4$. En we weten $|OQ| = 5$.
  Volgens de stelling van Pythagoras in driehoek OPQ is:
  $$|PQ| = \sqrt{25-16} = 3$$
  De straal van de cirkel is dan $|PQ| = 3$.
- Ook het vlak $x = y$ gaat door het middelpunt van de bol. Het middelpunt van de snijcirkel is dus het punt O. De straal van die cirkel is 5. □

Subdomein 3.29

Bij een middels een xy-vergelijking gegeven figuur een vergelijking opstellen voor het omwentelingsoppervlak dat ontstaat bij draaiing van de figuur om één van de assen.

Opgave

Gegeven is de lijn l met vergelijking $y = 2x$ (liggend in het xOy-vlak: $z = 0$). De lijn l wordt gewenteld om de x-as.
Stel een vergelijking op van het omwentelingsoppervlak dat hierdoor ontstaat.



Oplossing 1

P is een willekeurig punt van l. Het punt A is de projectie van P op de x-as. Door de wenteling draait het punt P over een cirkel met middelpunt A en straal r, waarbij die cirkel (de zgn. **parallelcirkel**) is gelegen in het loodvlak $\underline{V}$ door A op de x-as.
Zij Q zo'n wentelend punt, waarbij $\angle PAQ = u$, en zij het punt B de projectie van Q op het xOy-vlak.

Een parameter voorstelling van de lijn l in het xOy-vlak is $\{\underline{x = t}, y = 2t, z = 0\}$, zodat $P = (t, 2t, 0)$ een willekeurig punt van l is. Dan is $r = AP = 2t$.
In de rechthoekige driehoek AQB is dan:

$$\sin u = \frac{QB}{AQ} = \frac{z_Q}{r} \Rightarrow z_Q = r\sin u$$
$$\cos u = \frac{AB}{AQ} = \frac{y_Q}{r} \Rightarrow y_Q = r\cos u$$

terwijl $x_Q = t$.
We elimineren dan t en u (en r) uit deze vergelijkingen. Dit geeft:

$$z_Q^2 + y_Q^2 = r^2(\sin^2 u + \cos^2 u) = r^2 = 4t^2$$

en vervolgens

$$z_Q^2 + y_Q^2 = 4x_Q^2$$

De coördinaten van het punt Q, en dat is een willekeurig punt van het omwentelingsoppervlak, voldoen dus aan de vergelijking:

$$4x^2 - y^2 - z^2 = 0 \qquad \square$$

Oplossing 2

Stellen we nu voor een punt P van de lijn l: $P = (x_0, y_0, 0)$. Voor het willekeurige punt $Q = (x, y, z)$ op de cirkel (en dus liggend op het oppervlak) is $AP = AQ$, zodat:

$$|y_0| = \sqrt{y^2 + z^2},\ x = x_0$$

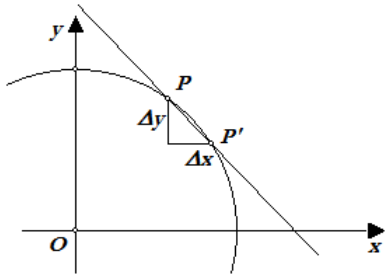
Dan volgt uit $y_0 = 2x_0$:

$$\pm\sqrt{y^2 + z^2} = 2x \Rightarrow 4x^2 = y^2 + z^2 \qquad \square$$

Subdomein 3.31

Het verband tussen de analytische benadering van het raaklijnbegrip en het raaklijnbegrip uit de differentiaalrekening begrijpen en beschrijven.

Uitwerking



We werken dit subdomein alleen voor de cirkel uit. Eenzelfde methode kan overigens ook worden toegepast bij andere kwadratische krommen.
We gaan uit van de standaard cirkel met vergelijking:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

We bekijken een lijn door een op de cirkel gelegen punt $P = (x_0, y_0)$ en een daar '*dichtbij*' ook op de cirkel gelegen punt $P' = (x_1, y_1)$.

Voor de richtingscoëfficiënt m van de lijn PP' hebben we in dit geval: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, zodat een vergelijking van PP' luidt: $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$.
We laten nu het punt P' over de cirkelomtrek naderen tot het punt P, tot P' uiteindelijk samenvalt met P (dan is de lijn PP' de raaklijn in P aan de cirkel).
De laatst vermelde vergelijking heeft daarbij het bezwaar dat de waarde van m onbepaald wordt, immers de teller van m nadert dan tot 0 en de noemer ook! Het lukt dus zo niet om de waarde van m vast te stellen. Maar…
We weten dat beide punten op de cirkel liggen, en dan geldt:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = a^2 \\ x_1^2 + y_1^2 = a^2 \end{cases}$$

Trekken we de eerste vergelijking van de tweede af, dan vinden we:

$$(x_1^2 - x_0^2) + (y_1^2 - y_0^2) = 0$$

$$x_1^2 - x_0^2 = -(y_1^2 - y_0^2)$$

of

$$(x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = -(y_1 - y_0)(y_1 + y_0)$$

en hieruit volgt voor $P \neq P'$:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\frac{x_1 + x_0}{y_1 + y_0}$$

Zodat, als de punten P en P' samenvallen, geldt: $m = -\frac{2x_0}{2y_0} = -\frac{x_0}{y_0}$. Een vergelijking van de raaklijn in P aan de cirkel is dan: $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$.
Na enige herschrijving vinden we: $x_0 x + y_0 y = x_0^2 + y_0^2$, of $x_0 x + y_0 y = 1$. □

Opmerking. Zie ook het Naschrift (Over 'eerlijk delen') bij Subdomein 3.32.

Subdomein 3.32

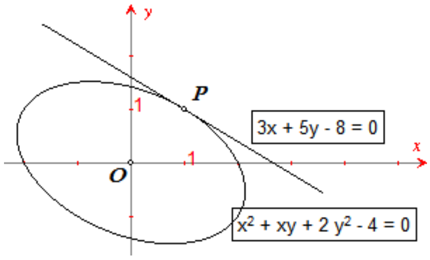
In geschikte gevallen via de differentiaalrekening de raaklijn aan een kromme vaststellen vanuit de (impliciete) vergelijking in *x* en *y* met behulp van o.a. de kettingregel.

Opgave 1

Gegeven is de kromme K met vergelijking $x^2 + xy + 2y^2 = 4$.
Bepaal een vergelijking van de raaklijn in het punt $P = (1, 1)$ aan K.

Oplossing

Stel dat K ook bepaald is (kan worden) door de parameter-voorstelling $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, waarbij we de expliciete functievoorschriften van f en g niet opschrijven.



Dan is:

$$(f(t))^2 + f(t)\cdot g(t) + 2(g(t))^2 = 4 \qquad (32.1)$$

Differentiatie van (32.1) naar t geeft dan, onder gebruikmaking van de ketting- en productregel:

$$2f(t)\cdot f'(t) + f'(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot g'(t) + 4g(t)\cdot g'(t) = 0$$

Voor de in deze uitdrukking voorkomende afgeleide functies kunnen we schrijven:

$$f'(t) = \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\ \ g'(t) = \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

waardoor (32.1) overgaat in:

$$2x\cdot\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot y + x\cdot\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4y\cdot\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$(2x+y)\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + (x+4y)\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad (32.2)$$

$$(x+4y)\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -(2x+y)\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Uit de laatste vergelijking vinden we dan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt met coördinaten (x, y):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{2x+y}{x+4y}$$

In het punt (1, 1) is die richtingscoëfficiënt dan gelijk aan $-\frac{3}{5}$, zodat we als vergelijking van de raaklijn in dat punt aan K vinden:

$$y - 1 = -\tfrac{3}{5}(x-1) \ \text{ of } \ 3x + 5y = 8$$ □

Opmerking. We laten in de uitdrukkingen (32.2) de *differentiaal* dt meestal weg. We spreken in dat geval van **impliciet differentiëren**.

Opgave 2

Gegeven is de cirkel met vergelijking: $x^2 + 2x + y^2 - 24 = 0$. Stel een vergelijking op van de raaklijn in het punt (2, 4) aan de cirkel.

Oplossing

Direct impliciet differentiëren van de vergelijking van de cirkel geeft:

$$2x\,\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0 \ \Rightarrow \ y\mathrm{d}y = -(x+1)\mathrm{d}x \ \Rightarrow \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x+1}{y}$$

In het punt (2, 4) is dan: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{3}{4}$, zodat we als vergelijking van de lijn door dat punt vinden:

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x-2)$$

Of ook:
$$3x + 4y = 22$$ □

Opmerking. Als we bij een vergelijking als $x^2 + 2x + y^2 - 24 = 0$ bedenken, dat y een functie is van x, dan kunnen we ook als volgt, en gebruik makend van de kettingregel, differentiëren:

$$2x + 2 + 2y\cdot y' = 0 \ \Rightarrow \ y' = -\frac{x+1}{y}$$

Naschrift – Over 'eerlijk delen'

Indien we in Opgave 2 de raaklijn in het punt $P = (x_0, y_0)$ aan de cirkel met vergelijking

$$x^2 + 2x + y^2 - 24 = 0$$

moeten vinden, dan hebben we voor de richtingscoëfficiënt van die raaklijn (zie weer Opgave 2 hierboven): $\frac{dy}{dx} = -\frac{x_0+1}{y_0}$. Een vergelijking van de raaklijn is dan:

$$y - y_0 = -\frac{x_0+1}{y_0}(x - x_0)$$
$$y_0 y - y_0^2 = -x_0 x + x_0^2 - x + x_0$$
$$x_0 x - x_0 + x + y_0 y - (x_0^2 + y_0^2) = 0$$

We brengen nu door optelling en aftrekking van een term $\underline{2x_0}$ de laatste vergelijking in de vorm:

$$x_0 x - x_0 + \underline{2x_0} + x + y_0 y - (x_0^2 + \underline{2x_0} + y_0^2) = 0$$
$$x_0 x + (x_0 + x) + y_0 y - (x_0^2 + 2x_0 + y_0^2) = 0$$

En omdat P op de cirkel ligt, geldt: $x_0^2 + 2x_0 + y_0^2 = 24$, waardoor de vergelijking van de raaklijn overgaat in:

$$x_0 x + (x_0 + x) + y_0 y - 24 = 0$$

We zeggen nu dat deze laatste vergelijking door **eerlijk delen** uit de cirkelvergelijking kan worden verkregen.
Eerlijk delen: vul de coördinaten van het punt P *'voor de helft'* in, waarbij de term x^2 als xx, x zelf als $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x)$ en y^2 als yy worden geschreven; indien een term met y en/of xy voorkomt wordt deze geschreven als $(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y)$ cq. $(\frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}yx)$.

Voorbeeld 1
Gegeven is de kromme K met vergelijking $y = 2x^2 - 6x + 1$.
Anders geschreven: $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y = 2xx - 3x - 3x + 1$
Raaklijn in (x_0, y_0): $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y_0 = 2x_0 x - 3x - 3x_0 + 1$, enz. □

Voorbeeld 2
Zie Opgave 1, waarin we de kromme K hebben met vergelijking $x^2 + xy + 2y^2 = 4$.
We schrijven de vergelijking van K als $xx + (\frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}yx) + 2yy = 4$.
De raaklijn in (x_0, y_0) heeft dan de vergelijking $x_0 x + (\frac{1}{2}x_0 y + \frac{1}{2}y_0 x) + 2y_0 y = 4$.
Voor $x_0 = 1$ en $y_0 = 1$ hebben we:

$$x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}x + 2y = 4$$

of, na vermenigvuldiging met 2:

$$3x + 5y = 8$$ □

Subdomein 3.35

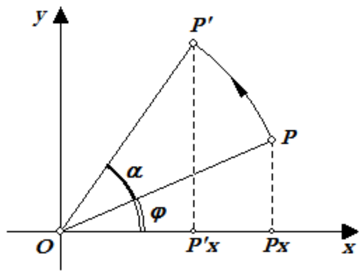
Met behulp van de technieken van de analytische meetkunde zelfstandig een verdergaande toepassing verkennen aan de hand van geschikte literatuur en andere bronnen.

Nb. Drie van de bij dit subdomein genoemde toepassingen zijn gedeeltelijk uitgewerkt.

Gedeeltelijke uitwerking - Draaiing

Door een rotatie (draaiing) over de hoek α om het punt O wordt een (willekeurig) punt P afgebeeld op (toegevoegd aan) het punt P'.
Als $P = (x, y)$, wat zijn dan de coördinaten van P' uitgedrukt in x, y en α?

Oplossing



Stel $P' = (x', y')$.

Zijn nu P_x, $P_{x'}$ de projecties van P, P' op de x-as en is φ de hoek tussen OP en de positieve x-as, dan hebben we:

- in driehoek OPP_x:

$$\sin\varphi = \frac{PP_x}{OP} = \frac{y}{OP},\quad \cos\varphi = \frac{OP_x}{OP} = \frac{x}{OP}$$

- in driehoek $OP'P'_x$:

$$\sin(\alpha+\varphi) = \frac{P'P'_x}{OP'} = \frac{y'}{OP'},\quad \cos(\alpha+\varphi) = \frac{OP'_x}{OP'} = \frac{x'}{OP'}$$

Zodat: $\quad \frac{y'}{OP'} = \sin\alpha\cdot\cos\varphi + \cos\alpha\cdot\sin\varphi = \sin\alpha\cdot\frac{x}{OP} + \cos\alpha\cdot\frac{y}{OP}$

En wegens $OP = OP'$: $\quad y' = \sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y$

En ook is: $\quad \frac{x'}{OP'} = \cos\alpha\cdot\cos\varphi - \sin\alpha\cdot\sin\varphi = \cos\alpha\cdot\frac{x}{OP} - \sin\alpha\cdot\frac{y}{OP}$

Zodat: $\quad x' = \cos\alpha\cdot x - \sin\alpha\cdot y$

Het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x' = \cos\alpha\cdot x - \sin\alpha\cdot y \\ y' = \sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y \end{cases}$$

geeft nu het verband tussen de coördinaten van P' en die van P. Ze worden wel **transformatievergelijkingen** genoemd.

En terug? Met andere woorden, als we de coördinaten van P' kennen, dus (x', y'), wat zijn dan de coördinaten van P, uitgedrukt in x', y' en α?

We roteren nu, uitgaande van P', over een hoek van $-\alpha$, zodat:

$$\begin{cases} x = \cos(-\alpha)\cdot x' - \sin(-\alpha)\cdot y' \\ y = \sin(-\alpha)\cdot x' + \cos(-\alpha)\cdot y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\alpha\cdot x' + \sin\alpha\cdot y' \\ y = -\sin\alpha\cdot x' + \cos\alpha\cdot y' \end{cases}$$

Voorbeeld

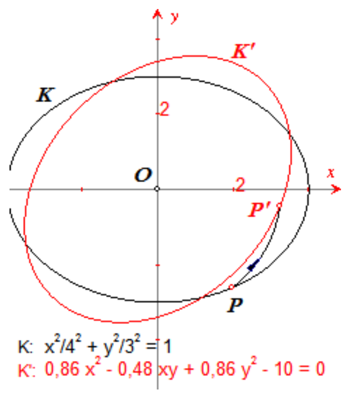
De ellips K met vergelijking $9x^2 + 16y^2 = 144$ wordt gedraaid over een hoek van +45°, dan hebben we voor de coördinaten van het punt $P' = (x', y')$:

$$9(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot x' + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot y')^2 + 16(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot x' + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot y')^2 = 144$$

$$\tfrac{9}{2}(x'^2 + y'^2 + 2x'y') + 8(x'^2 + y'^2 - 2x'y') = 144$$

waaruit blijkt dat de coördinaten van het punt P' voldoen aan:

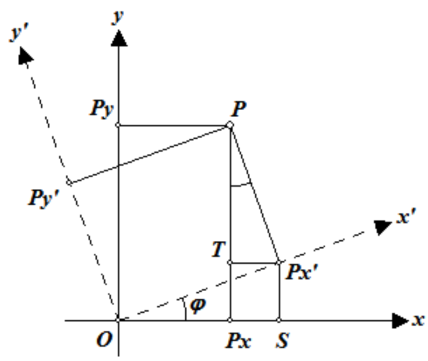
$$12\tfrac{1}{2}x^2 - 7xy + 12\tfrac{1}{2}y^2 = 144$$



Het is natuurlijk ook mogelijk het assenstelsel zelf te draaien en de figuur in het vlak op z'n plaats te laten.

We bekijken dan het verband tussen de coördinaten van een punt P ten opzichte van het oude en ten opzichte van het nieuwe assenstelsel.

In de figuur hiernaast is het assenstelsel xOy gedraaid om het punt O over de hoek φ. Het nieuwe assenstelsel is dan $x'Oy'$.



Nu is:

$$OP_x = x,\ PP_x = y \text{ en } OP_{x'} = x',\ PP_{x'} = y'$$

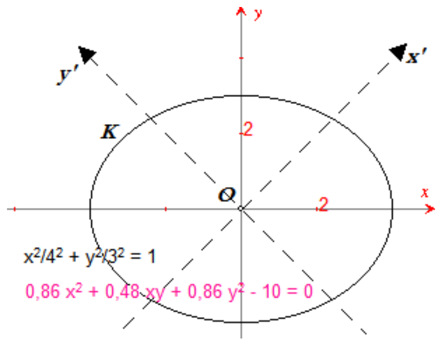
En verder:

$$\begin{aligned} OP_x &= OS - P_xS = OS - TP_{x'} \\ PP_x &= TP_x + PT = P_xS + PT \end{aligned} \qquad (35.1)$$

Bedenkt men ook dat in driehoek $PTP_{x'}$ geldt dat $\angle P = \varphi$, dan kunnen we voor de uitdrukkingen (35.1) schrijven:

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y' \\ y &= \sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y' \end{aligned}$$

Voorbeeld



De ellips K heeft de vergelijking $9x^2 + 16y^2 = 144$ ten opzichte van het standaard assenstelsel xOy.
We kiezen nu de bissectrices van de kwadranten als nieuwe assen: we roteren het assenstelsel over een hoek van +45°.
Dan vinden we:

$$\begin{aligned} 9(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot x' - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot y')^2 + 16(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot x' + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot y')^2 &= 144 \\ \tfrac{9}{2}(x'^2 + y'^2 - 2x'y') + 8(x'^2 + y'^2 + 2x'y') &= 144 \end{aligned}$$

Zodat K de vergelijking

$$12\tfrac{1}{2}x'^2 + 7x'y' + 12\tfrac{1}{2}x'^2 = 144$$

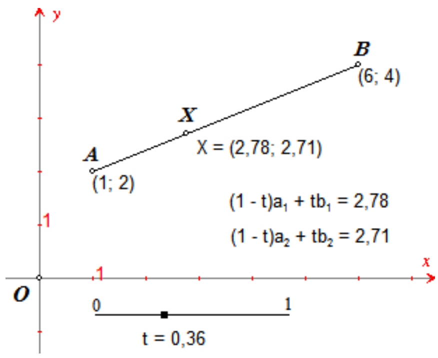
heeft in het (nieuwe) stelsel $x'Oy'$. □

Opmerking. Bovenstaande technieken kunnen, naast andere, worden gebruikt voor het onderzoek van tweedegraads vergelijkingen van de vorm:

$$g(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

onder meer voor de zogenoemde *classificatie* van tweedegraads krommen.

Gedeeltelijke uitwerking – Bézier-krommen



Uitgaande van de punten $A = (1, 2)$ en $B = (6, 4)$ bekijken we het stelsel:

$$\begin{cases} x = (1-t)\cdot 1 + t\cdot 6 \\ y = (1-t)\cdot 2 + t\cdot 4 \end{cases}$$

waarbij we t kiezen in het interval [0, 1].
Het stelsel is een parametervoorstelling van het *lijnstuk AB*.

Opmerking. Eliminatie van t uit het stelsel geeft uiteraard een vergelijking van de *lijn AB*:

$$\begin{cases} x = (1-t)\cdot 1 + t\cdot 6 \\ y = (1-t)\cdot 2 + t\cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 2t + 2 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times 2 \\ \times(\text{-}5) \end{matrix} \right| \quad \begin{aligned} 2x &= 10t + 2 \\ \text{-}5y &= \text{-}10t\ \text{-}10 \\ \hline 2x - 5y &= \text{-}8 \end{aligned}$$

Aan deze vergelijking is dus niet meer te zien, dat er sprake is geweest van een parametervoorstelling van een *lijnstuk*. •

Afspraak. We schrijven het stelsel $\begin{cases} x = (1-t)\cdot 1 + t\cdot 6 \\ y = (1-t)\cdot 2 + t\cdot 4 \end{cases}$ als $X = (1-t)A + tB$.

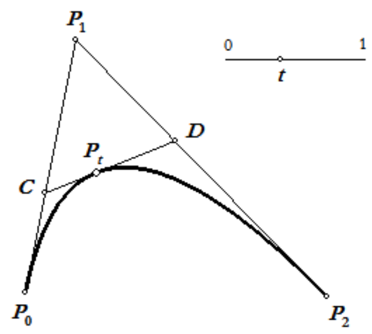
De meetkundige plaats van het punt X (dat is hier het lijnstuk AB) heet in dit geval **1e graads Bézier-kromme** (naar **Pierre Étienne Bézier**, 1910-1999, Frankrijk).

Merk op dat we een punt X op het lijnstuk AB kunnen construeren via een puntvermenigvuldiging van B met factor t en met centrum A.

Uitgaande van twee lijnstukken P_0P_1 en P_1P_2 kunnen we via eenzelfde puntvermenigvuldiging, steeds met dezelfde factor t, een punt C op P_0P_1 en een punt D op P_1P_2 construeren. Op het lijnstuk CD construeren we dan analoog het punt P_t.
We hebben dan:

$$C = (1-t)P_0 + tP_1 \quad (\text{met } |P_0C| = t\cdot|P_0P_1|)$$
$$D = (1-t)P_1 + tP_2 \quad (\text{met } |P_1D| = t\cdot|P_1P_2|)$$

en ook $P_t = (1-t)C + tD \quad (\text{met } |CP_t| = t\cdot|CD|)$.

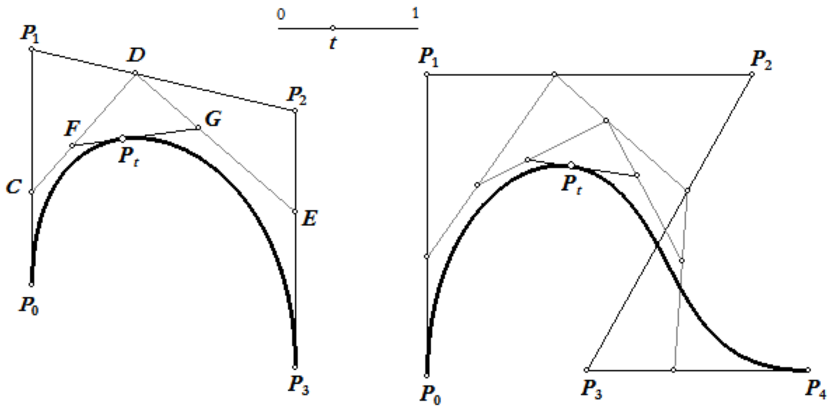


Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} P_t &= (1-t)\big((1-t)P_0 + tP_1\big) + t\big((1-t)P_1 + tP_2\big) \\ &= (1-t)^2 P_0 + (1-t)tP_1 + (1-t)tP_1 + t^2 P_2 \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2 \end{aligned}$$

De meetkundige plaats van het punt P_t als t alle waarden aanneemt in het interval [0, 1], is dan een zogenoemde **2e graads Bézier-kromme**.

Het hierboven beschreven proces (het zogenoemde *De Casteljau-algoritme*; naar **Paul de Faget de Casteljau**, 1910-1999, Frankrijk) kunnen we voortzetten voor drie, vier, … lijnstukken die telkens een gemeenschappelijk eindpunt hebben.



We krijgen dan Bézier-krommen van de 3e, 4e, … graad, steeds met t in [0, 1]:

(3e graad) $P_t = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 tP_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$

(4e graad) $P_t = (1-t)^4 P_0 + 4(1-t)^3 tP_1 + 6(1-t)^2 t^2 P_2 + 4(1-t)t^3 P_3 + t^4 P_4$

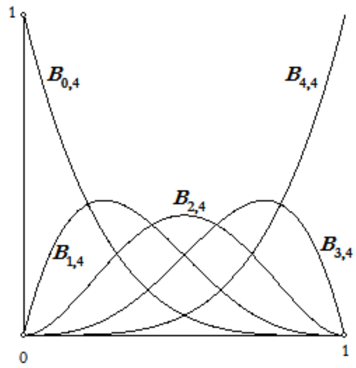
Voor een n-de graads Bézier-kromme hebben we dan:

$$\begin{aligned} P_t &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k P_k \\ &= (1-t)^n P_0 + \binom{n}{1}(1-t)^{n-1} t P_1 + \binom{n}{2}(1-t)^{n-2} t^2 P_2 + \cdots + t^n P_n \end{aligned}$$

Opmerking. De n-de graads functies van de vorm

$$B_{k,n}(t) = \binom{n}{k}(1-t)^{n-k} t^k$$

(met k = 0, …, n) staan bekend als *Bernstein-polynomen* (naar **Sergei N. Bernstein**, 1880-1968, Rusland).



In de figuur hierboven staan de grafieken van de functies $B_{k,4}(t)$ voor k = 0, …, 4.

Gedeeltelijke uitwerking – Pythagoreïsche drietallen

Definitie: *Een Pythagoreïsch drietal (P-tal; Eng. Pythagorean triple) is een geordend tripel positieve gehele getallen (a, b, c) met* $a^2 + b^2 = c^2$.

Stellen we $\frac{a}{c} = x$ en $\frac{b}{c} = y$, dan volgt direct: $x^2 + y^2 = 1$, wat de vergelijking is van de eenheidscirkel.

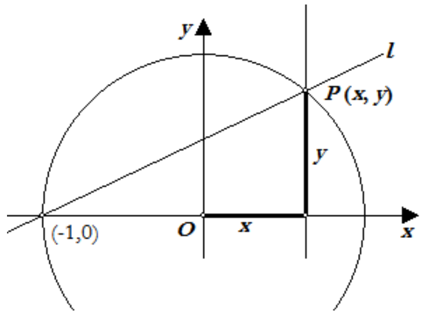
Het vinden van een P-tal komt dus meetkundig overeen met het vinden van punten op de eenheidscirkel waarvan de coördinaten *rationale* getallen zijn.

Zij l de lijn door het punt (-1, 0) die de eenheidscirkel ook in het punt $P = (x, y)$ snijdt.
Dan geldt voor de richtingscoëfficiënt m van die lijn:

$$m = \frac{y}{x+1} \qquad (35.2)$$

zodat $m(x+1) = y$, en dus:

$$m^2(x+1)^2 = y^2 = 1 - x^2 = (1+x)(1-x)$$



en, omdat we alleen geïnteresseerd zijn in de coördinaten van het punt P:

$$m^2(x+1) = 1 - x$$

Lossen we deze laatste vergelijking op naar x, dan vinden we:

$$x = \frac{1-m^2}{1+m^2} \qquad (35.3)$$

en voor y volgt uit $y = m(x+1)$:

$$y = \frac{2m}{1+m^2} \qquad (35.4)$$

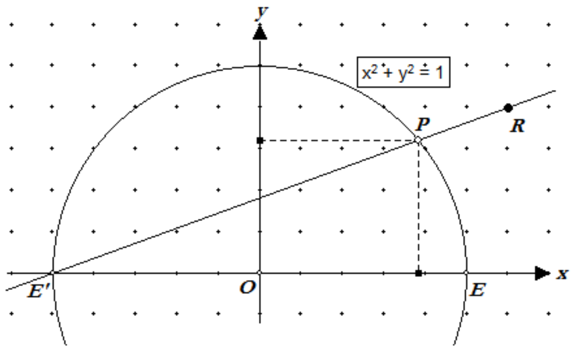
Uit de formules (35.2)…(35.4) zien we direct dat x en y rationaal zijn dan en slechts dan als m rationaal is.

Als de lijn l niet raakt aan de cirkel, dan hebben de lijn en de cirkel twee gemeenschappelijke snijpunten. Lossen we het stelsel

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = m(x+1) \end{cases}$$

op naar x en y, dan vinden we twee oplossingen (x, y), waarvan de ene oplossing (-1, 0) is, terwijl de andere oplossing de coördinaten vormt van het punt P.

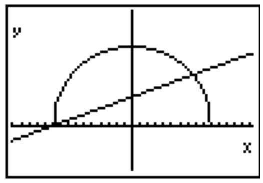
In nevenstaande figuur is het punt R een roosterpunt.
P is een snijpunt van de lijn door $E' = (-1, 0)$ en R met de cirkel.
De coördinaten van het punt P zijn nu rationaal, omdat m rationaal is.
In de figuur is $m = \frac{4}{11}$, zodat $x = \frac{105}{137}$, $y = \frac{88}{137}$.
Dus: $105^2 + 88^2 = 137^2$. □



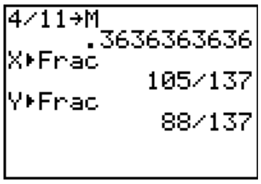
Opmerking. De GR kan ook hier gemakkelijk worden ingezet.
Vanwege de symmetrie in de x-as leggen we de functies

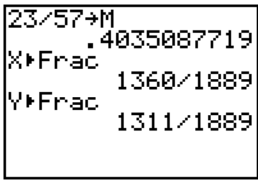
$$Y_1=\sqrt{(1-X^2)} \text{ en } Y_2=M(X+1)$$

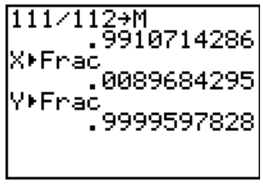
in de GR vast. De waarde van M kunnen we toekennen als breuk.



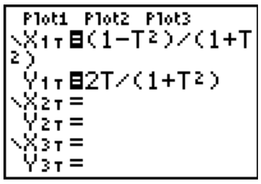
Het van het punt (-1, 0) verschillend snijpunt kan dan via [intersect] worden bepaald en omgezet naar een 'echte' breuk.

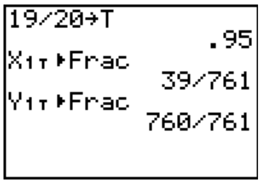


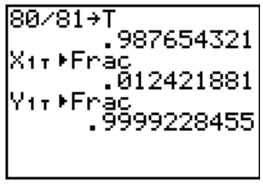




Evenwel, de onnauwkeurigheid van de GR kan ons daarbij parten spelen…
Dit geldt uiteraard ook voor de parametermodus van de GR.







Schrijven we m echter rationaal, dus als $m = \frac{p}{q}$, dan vinden we met (35.3) en (35.4):

$$x = \frac{1-(\frac{p}{q})^2}{1+(\frac{p}{q})^2} = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}, \quad y = \frac{2 \cdot \frac{p}{q}}{1+(\frac{p}{q})^2} = \frac{2pq}{q^2 + p^2}$$

Voor bijvoorbeeld $m = \frac{114}{340}$ is dan $x = \frac{102604}{128596}$, $y = \frac{77520}{128596}$, zodat $102604^2 + 77520^2 = 128596^2$.

