hoofdstuk 12

ALGEBRAÏSCHE VOORSTELLING VAN EEN RECHTE LIJN

Opgave

128 In fig. 84 zie je de parallelprojectie van een kubus met assenstelsel.

a Bob: 'Het punt P heeft de coördinaten (4,2,4)'.
Wim: 'Volgens mij (0,0,3)'.
Wie van de twee heeft gelijk?

b Welk misverstand zou er met betrekking tot het punt Q kunnen bestaan?

c Bob geeft in de figuur heel precies het punt (4,2,1) aan.
Waar vind je dat punt in de figuur?

d En waar vind je het punt $(2,1,\frac{1}{2})$? En waar het punt $(-4,-2,-1)$? En $(-40,-20,-10)$?

e In welke richting is de kubus op het papier geprojecteerd, dat wil zeggen wat is de richtingsvector van de projecterende stralen?

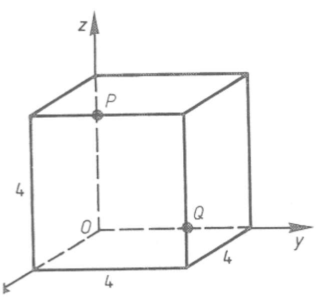


Fig. 84

De kubusfiguur van fig. 84 is de tweedimensionele voorstelling van een driedimensionele vorm. Bij zo'n voorstelling kan het niet anders of verschillende punten van de ruimte worden door dezelfde stip voorgesteld. Vandaar het meningsverschil van Bob en Wim.

Sterker gezegd:
Elk punt in de figuur vertegenwoordigt oneindig veel punten, namelijk alle punten van de projecterende straal door dat punt.

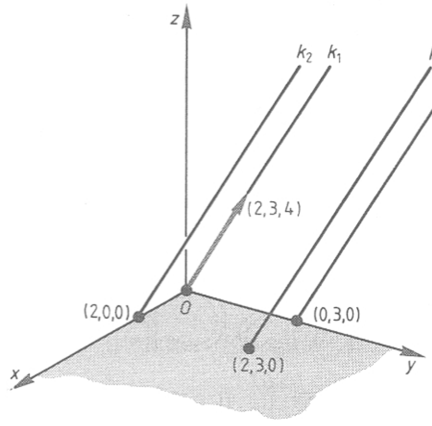


Fig. 85

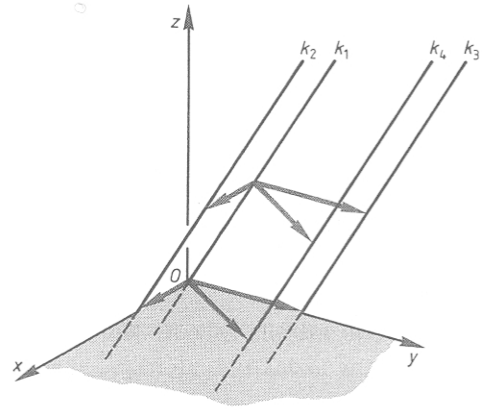


Fig. 86

Dat kan duidelijk worden gemaakt in een tekening waarbij het projectie-tafereel niet samenvalt met het tekenvlak (fig. 85).
Het Oxy-vlak is het projectietafereel.
De projecterende stralen hebben de richtingsvector (2,3,4).
Alle punten van lijn k_1 hebben dezelfde projectie namelijk het punt (0,0,0).
Evenzo worden k_2 (resp. k_3, resp. k_4) geprojecteerd in de punten (2,0,0) (resp. (0,3,0), resp. (2,3,0)).

Opgave

129 a Noem (de coördinaten) van twee punten 'boven' en twee punten 'onder' het Oxy-vlak waarvan het punt (2,0,0) de projectie is.
b Dezelfde vraag voor (0,3,0) en voor (2,3,0).

De coördinaten van een punt k_1 vind je eenvoudig door de coördinaten van het punt R (2,3,4) met een of ander reëel getal te vermenigvuldigen. Zo vind je bijvoorbeeld (4,6,8); (200,300,400); $(\frac{1}{2},\frac{3}{4},1)$; $(-10,-15,-20)$ als punten van k_1, punten die allemaal in de oorsprong worden geprojecteerd.
Kortom k_1 is de verzameling punten $(2t,3t,4t)$ met $t \in \mathbb{R}$.
We schrijven dat zo op:

$$\boxed{k_1: (x,y,z) = (2t,3t,4t) \text{ of } k_1: (x,y,z) = t(2,3,4)} \qquad (1)$$

Uitgaande van een punt van k_1 kan gemakkelijk een punt van k_1, k_2 of k_3 worden gevonden (zie ook fig. 86).
Voorbeelden:

punt van k_1	punt van k_2	punt van k_3	punt van k_4
(4,6,8)	(6,6,8)	(4,9,8)	(6,9,8)
(200,300,400)	(202,300,400)	(200,303,400)	(202,303,400)
$(\frac{1}{2},\frac{3}{4},1)$	$(2\frac{1}{2},\frac{3}{4},1)$	$(\frac{1}{2},3\frac{3}{4},1)$	$(2\frac{1}{2},3\frac{3}{4},1)$
$(-10,-15,-20)$	$(-8,-15,-20)$	$(-10,-12,-20)$	$(-8,-12,-20)$

De punten van k_2 worden gevonden door de punten van k_1 te verschuiven over de vector (2,0,0).
Verschuiven over de vector (2,0,0) betekent: 'bij de eerste coördinaat 2 optellen'. Dus:

k_1: $(x,y,z) = (2 + 2t, 3t, 4t)$
of
k_1: $(x,y,z) = (2,0,0) + t(2,3,4)$ (2)

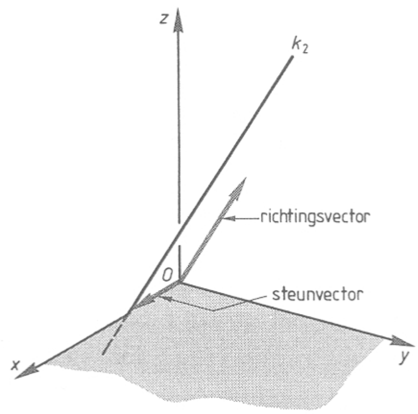


Fig. 87

(1) en (2) zijn de algebraïsche voorstellingen van de lijnen k_1 en k_2. Men noemt dit ook wel *parametervoorstellingen*. De variabele t is de zogenaamde parameter.

Opgave

130 Schrijf een parametervoorstelling van k_3 op (op twee manieren). Ook voor k_4.

Kijk nog eens naar de lijn k_2 (fig. 87).
De vector (2,3,4) legt de richting van k_2 vast en wordt daarom ook wel een *richtingsvector* van k_2 genoemd.
De lijn k_2 steunt als het ware op de vector (2,0,0) en deze heet dan ook wel een *steunvector* van k_2.

k_2: $(x,y,z) = (2,0,0) + t(2,3,4)$

steunvector parameter *richtingsvector*

Twee opmerkingen:
1 In principe kun je elk punt van de lijn als eindpunt van de steunvector kiezen. Voor de lijn k_2 bijvoorbeeld (6,6,8) in plaats van (2,0,0).
Ook kun je elke vector parallel met k_2 als richtingsvector nemen. Voor k_2 bijvoorbeeld (20,30,40) in plaats van (2,3,4).
Zo krijg je dan '$(x,y,z) = (6,6,8) + u(20,30,40)$' hetgeen evengoed een parametervoorstelling is van k_2 als '$(x,y,z) = (2,0,0) + t(2,3,4)$'.
2 In de parametervoorstelling (1) van k_1 ontbreekt ogenschijnlijk de steunvector. Als steunpunt van die lijn kun je echter (0,0,0) kiezen; $(x,y,z) = t(2,3,4)$ is ook te schrijven als:
$(x,y,z) = (0,0,0) + t(2,3,4)$.

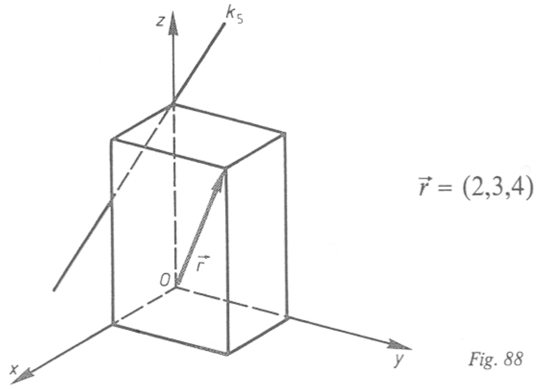


Fig. 88

Opgaven

131 Zie fig. 88. Schrijf een parametervoorstelling op van de lijn $k_5 /\!/ k_1$ die door het punt (0,0,4) gaat.
Welk punt van het Oxy-vlak is de projectie van het punt (0,0,4) bij een parallelprojectie met richtingsvector (2,3,4)?

132 κ is de kubus met ribben langs de positieve x-, y- en z-as en ribbelengte 4.
De kubus κ wordt parallel geprojecteerd op het Oxy-vlak in de richting (2,3,4).
a Bereken de coördinaten van de projecties van de hoekpunten van het bovenvlak van κ.
b Neem het Oxy-vlak als tekenvlak en teken daarin de projectie van κ.

133 Bekijk fig. 86 (blz. 62).
Hoe kun je beredeneren dat k_4 de z-as snijdt?
In welk punt gebeurt dat?

134 Bekijk opnieuw fig. 84 (blz. 61).
De punten (4,2,4) en (0,0,3) hebben daarin dezelfde projectie.
a Hoe kun je uit de coördinaten van die twee punten de richtingsvector van de projectie terugvinden?
b Noem nog drie punten die in de tekening door P worden voorgesteld.

***135** P en Q zijn roosterpunten in het Oyz-vlak en het Oxz-vlak.
Bij een parallelprojectie op het Oxy-vlak hebben P en Q hetzelfde beeldpunt.
a Construeer in de figuur dat beeldpunt.
b Wat is de richtingsvector van die parallelprojectie?
c De punten A en B liggen twee eenheden verticaal 'boven' P resp. Q. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijn AB met het Oxy-vlak.
d β is het vlak door de z-as waarvan de snijlijn met het Oxy-vlak de richtingsvector (1,1,0) heeft.
Teken het spiegelbeeld van de lijn PQ bij spiegeling in het vlak β. Geef ook een parametervoorstelling van dat spiegelbeeld.

136 De kubus κ uit opgave 132 wordt nu centraal geprojecteerd op het Oxy-vlak. Het projectiecentrum is het punt (6,6,8).

a Bereken de coördinaten van de projecties van de hoekpunten van κ's bovenvlak.

b Teken de projectiefiguur van κ (neem het Oxy-vlak als tekenvlak).

137 Een deeltje beweegt zich t.o.v. een driedimensionaal coördinatenvlak in een vaste richting met constante snelheid.
Op het tijdstip 0 bevindt zich in het punt (0,3,2); één seconde later (op 'het tijdstip' 1') is het in (2,4,4).

a Welke positie heeft het deeltje op 'het tijdstip 10', dat wil zeggen 10 seconden nadat het in (0,3,2) arriveerde?

b Waar is het deeltje op 'het tijdstip − 2' (2 seconden voorafgaande aan het tijdstip 0)?

c En waar op het tijdstip t?

d De eenheid van het coördinatenstelsel is 1 m.
Toon aan dat de snelheid van het deeltje 3 m/s bedraagt.

138 Van een deeltje dat zich in de ruimte beweegt is de positie (t.o.v. een rechthoekig coördinatenstelsel met als eenheid 1 m) op het tijdstip t gegeven door:

$$\vec{s}_t = (2 - t, 1, t)$$

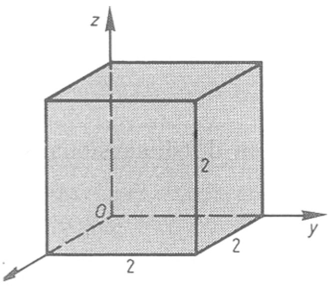
We noemen $\vec{s}_t$ de *plaatsvector* van het deeltje op het tijdstip t.

a Welke vector geeft de snelheid van het deeltje aan?

b Hoe snel (in m/s) beweegt het deeltje zich?

c Teken de baan van het deeltje voorzover die baan zich binnen de kubus (fig. 89) bevindt.

d Gedurende welk tijdsinterval bevindt het deeltje zich binnen de kubus?



'ig. 89

139 Dezelfde opgave voor het geval: $\vec{s}_t = (2 + t, -t, 2 + t)$.

140 Laat $\vec{s}_t$ de plaatsvector zijn van een deeltje op het tijdstip t en $\vec{v}$ de (constante) snelheidsvector.
Ga na dat de (rechtlijnige) baan van het deeltje gegeven wordt door de parametervoorstelling:

$$\vec{s}_t = \vec{s}_0 + t\vec{v}$$

141 Ga na dat de baan in de vorige opgave ook ken worden beschreven als:

$$\vec{s}_t = \vec{s}_0 + t(\vec{s}_1 - \vec{s}_0)$$

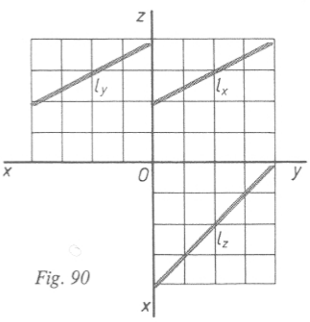


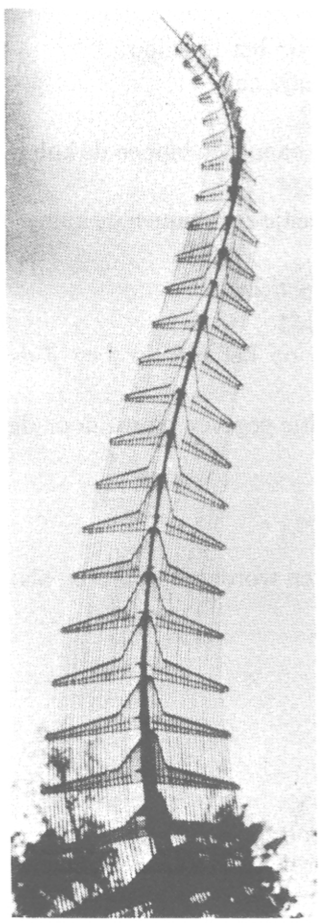
Fig. 90

Extra opgave

142
Van de lijn l zijn de drie projecties op de coördinaatvlakken gegeven (fig. 90).
Stel een parametervoorstelling op van l.

hoofdstuk 13

KROMMEN IN DE RUIMTE



Opgaven

143
Van een bewegend deeltje wordt de baan (t.o.v. een driedimensionaal assenstelsel) gegeven door: $\vec{s}_t = (4, t, t^2)$.
a Heb je enig idee hoe die baan er uitziet?
b In welk vlak beweegt het deeltje zich?
c Schets in een driedimensionaal assenstelsel de baan die het deeltje doorloopt.

144
Dezelfde opdracht voor:
a $\vec{s}_t = (\cos t, 3, \sin t)$.
b $\vec{s}_t = (t, t, \frac{1}{2}t^2)$.

De deeltjes, waarvan de beweging beschreven wordt in opgaven 143 en 144, bewegen zich langs kromme banen. Bij zo'n kromlijnige beweging verandert het deeltje voortdurend van richting, met andere woorden de snelheidsvector is *niet constant*. De kentallen van de (variabele) snelheidsvector op het tijdstip t vind je door de kentallen van de plaatsvector naar t te differentiëren. De volgende redenering, geldig voor een willekeurige kromlijnige baan (fig. 91) maakt dat duidelijk.

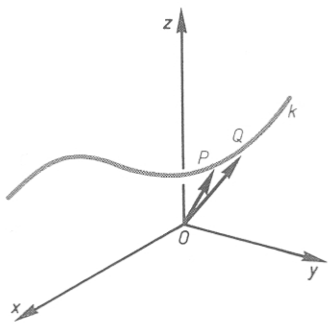


Fig. 91

Stel het deeltje is op het tijdstip t op het punt P met plaatsvector

$\vec{s}_t = (x(t), y(t), z(t))$

Een klein poosje (Δt) later bevindt het deeltje zich in Q met plaatsvector:

$\vec{s}_{t+\Delta t} = (x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t))$

Stel je voor dat het deeltje zich rechtlijnig van P naar Q zou bewegen. De snelheidsvector zou in dat geval gelijk zijn aan:

$$\frac{1}{\Delta t}\cdot(\vec{s}_{t+\Delta t} - \vec{s}_t) = \left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right)$$

Laten we nu Δt tot nul naderen, dan vinden we de snelheidsvector op het tijdstip t:

$\vec{v}_t = (x'(t), y'(t), z'(t))$

ofwel:

$$\vec{v}_t = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

Om aan te geven dat we $\vec{v}_t$ door differentiëren uit $\vec{s}_t$ vinden, noteren we ook wel: $\vec{v}_t = \vec{s}_t\,'$.

VOORBEELDEN:

In opgave 143 geldt: $\vec{v}_t = (0, 1, 2t)$
In opgave 144a geldt: $\vec{v}_t = (-\sin t, 0, \cos t)$
In opgave 144b geldt: $\vec{v}_t = (1, 1, t)$

Opgaven

144 Wat is het resultaat als je de plaatsvector naar t differentieert?

***145** $\vec{s}_t = (\frac{1}{2}t, \frac{1}{4}t^2, \frac{1}{8}t^3)$ is de algebraïsche voorstelling van de baan van een zich bewegend deeltje.

a Teken de baan die het deeltje gedurende het tijdsinterval [0; 2] doorloopt.
b Teken de snelheidsvector op de tijdstippen $t = 0$ en $t = 1$.
c Teken de loodrechte projecties van de baan op het Oxy-en het Oxz--vlak.
d Ligt de baan van het deeltje in een plat vlak?

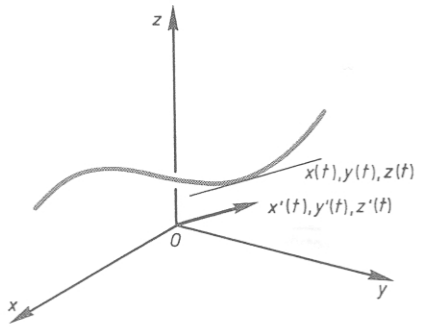


Fig. 92

Meetkundig gezien is de snelheidsvector op het tijdstip t (zoals in opgave 145) een richtingsvector van de *raaklijn* aan de kromme in het punt met parameter t (fig. 92). Men noemt dit ook wel de *raakvector* van de kromme in dat punt.

Opgave

146 In fig. 93 is de kromme getekend met parametervoorstelling:
$(x, y, z) = (\sin t, \sin 2t, \sin 3t)$
De kromme bevindt zich geheel in de cel κ die wordt begrensd door de vlakken $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ en $z = \pm 1$.

a Bereken de coördinaten van de tien punten van de kromme die op het buitenoppervlak van κ liggen.
b Toon aan dat de kromme twee ribben van κ raakt.
c De kromme snijdt zich zelf in het punt O. Bereken de hoek tussen de twee raaklijnen in O aan de kromme.

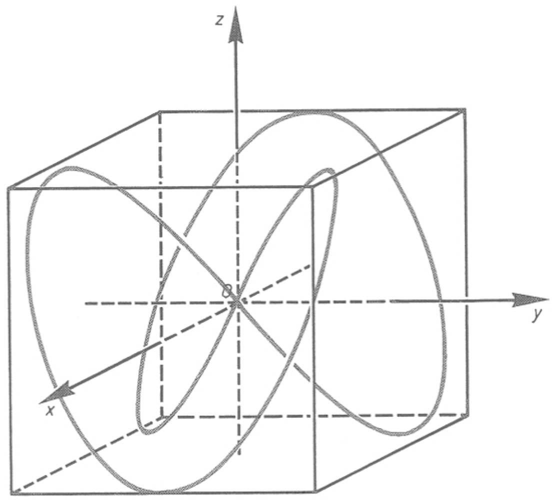
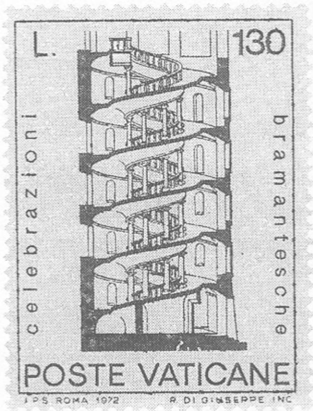


Fig. 93

Een fraai bekend voorbeeld van een 'ruimtekromme' is de zgn. *schroeflijn* of *helix*.
Voorbeelden hiervan zijn de draad in een schroef, de leuning van een wenteltrap, de baan van een propellertip.
Fig. 94 toont een wenteltrap in het Vaticaan (in het slot Belvedère) van de architect Dunato Bramante (1444-1514). De vergroting van de postzegel uit 1972 laat deze wenteltrap in aanzicht zien.



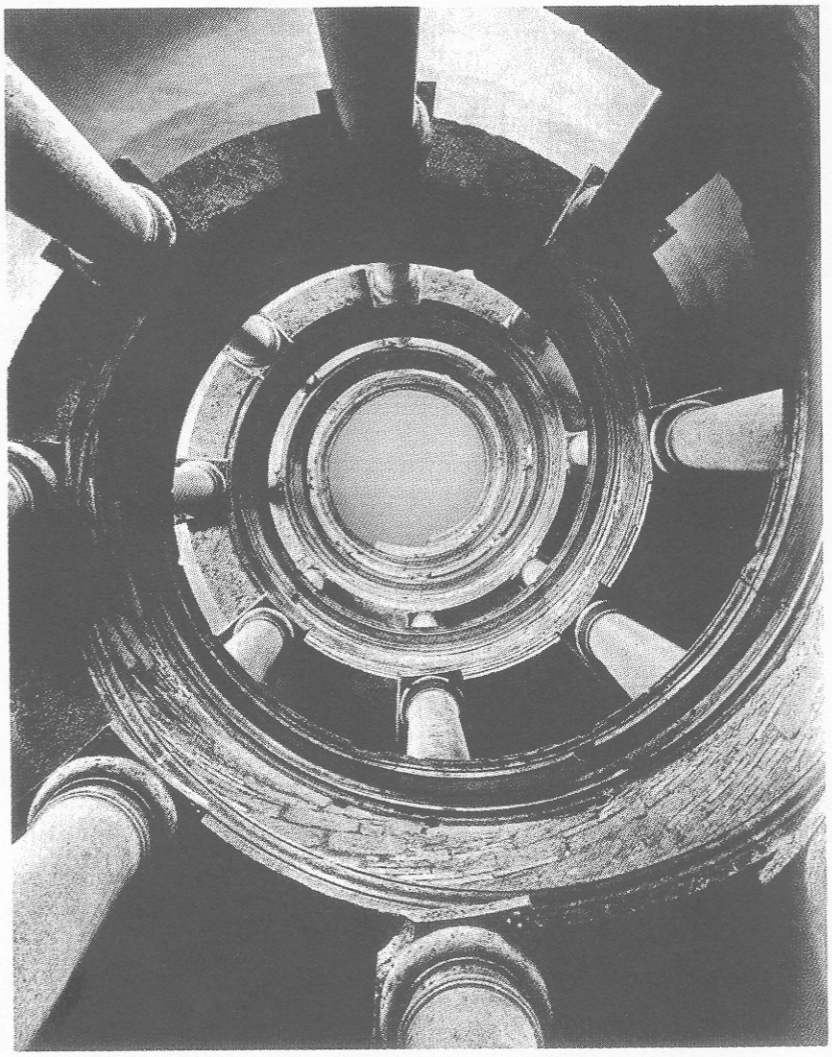


Fig. 94

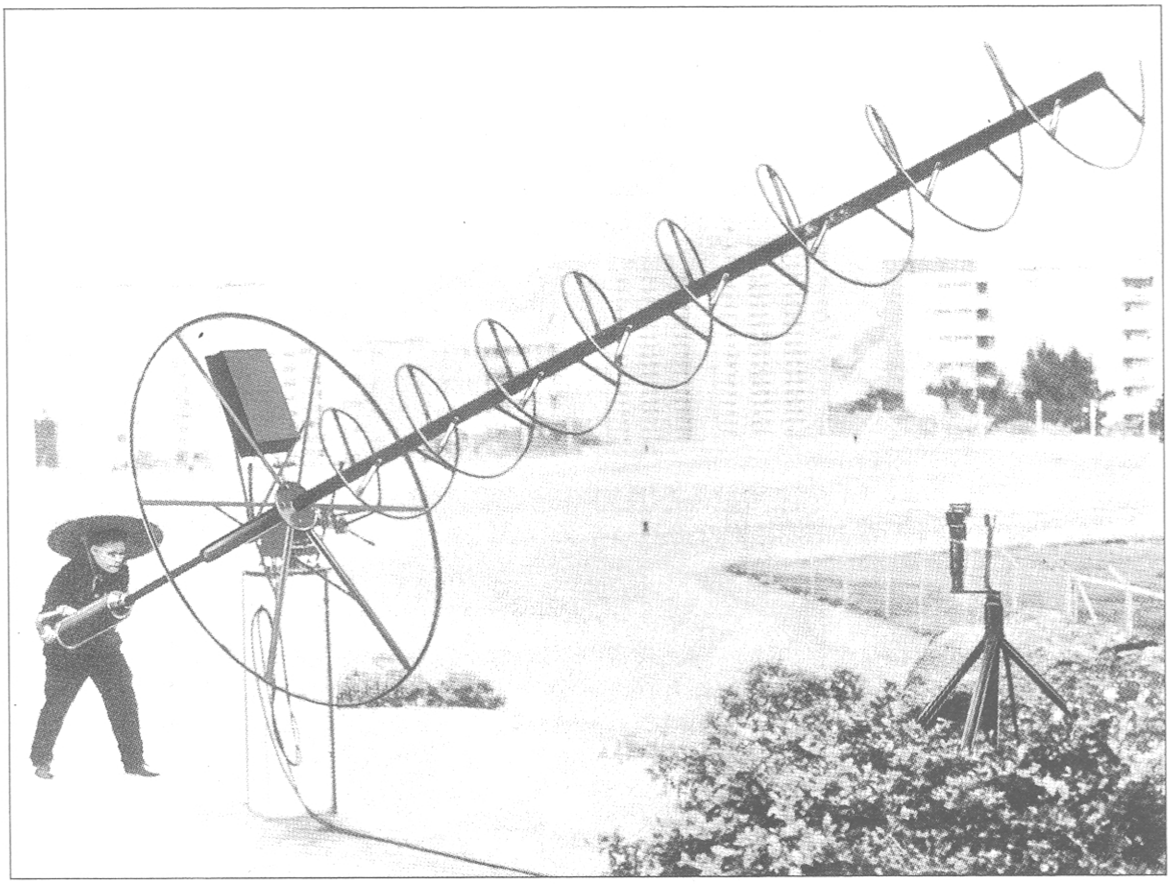


Fig. 95

Fig. 95 toont een miniatuur radiotelescoop in Hong Kong met een schroeflijnantenne, ingesteld op een passerende Amerikaanse weersatelliet.
Fig. 96 laat zien dat je onder bepaalde atmosferische omstandigheden de 'propellerschroeflijn' bij een startend vliegtuig met eigen ogen kunt waarnemen.

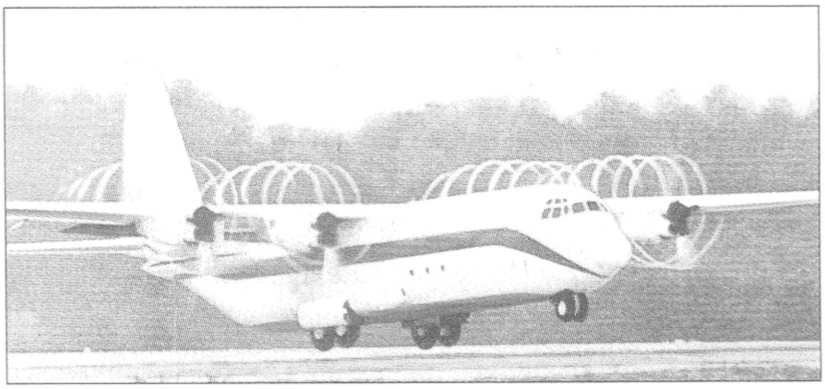


Fig. 96

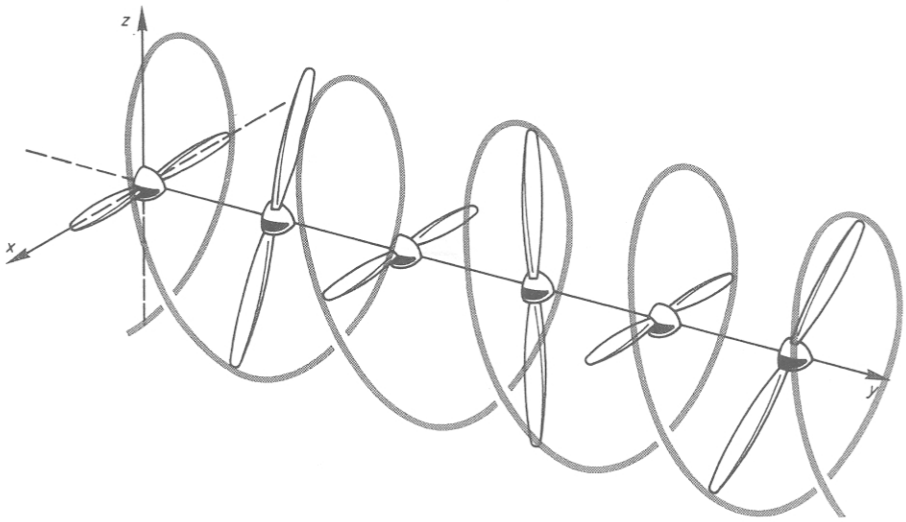
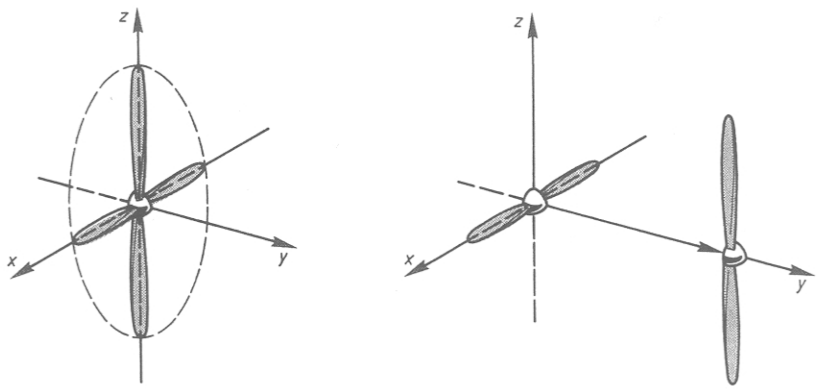


Fig. 97

Kijk naar de beweging van de propellertip (fig. 97):
Deze 'schroefbeweging' is de resultante van:
(1) een cirkelbeweging in het Oxz-vlak (fig. 97a);
(2) een rechtlijnige beweging in de richting van de y-as (fig. 97b).



Kiezen we de tijdseenheid zó dat de propeller in 2π tijdseenheden een volle slag maakt, stellen we de lengte van de propeller r en de snelheid van het vliegtuig v, dan worden de bewegingen (1) en (2) algebraïsch beschreven als:

(1): $(x,y,z) = (r\cos t,\, 0,\, r\sin t)$
(2): $(x,y,z) = (0,\, vt,\, 0)$

Opgaven

147 a Verklaar de parametervoorstellingen (1) en (2).
b Geef een parametervoorstelling van de schroeflijn die de propellertip beschrijft.

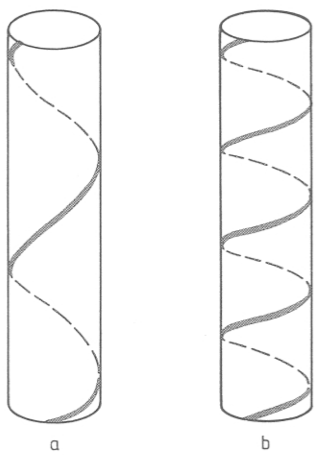


Fig. 98

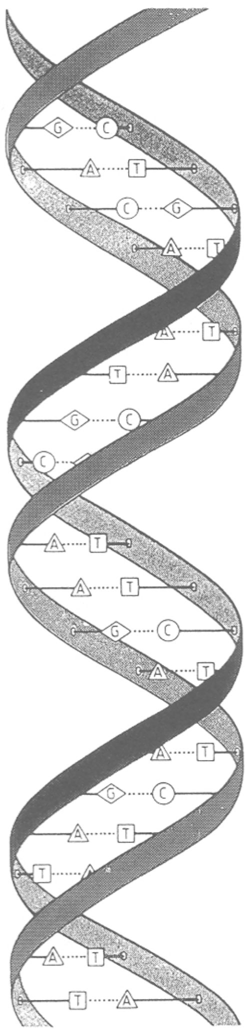


Fig. 99

Opgaven

148

In fig. 98 zie je twee schroeflijnen. Schroeflijn a heeft de parametervoorstelling:

$(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$

a Geef een parametervoorstelling voor schroeflijn b.

b Bereken de raakvector van de schroeflijn a in een willekeurig punt (dus met parameterwaarde t) en toon aan dat die raakvector een hoek van $45°$ met de z-as maakt.

c Schroeflijn a maakt dus voortdurend een hoek van $45°$ met zijn as. Hoe groot is de hoek die de schroeflijn b met zijn as maakt?

d De cilinder met straal 1 en hoogte 4π wordt opengeknipt langs de verticale lijn door $(1,0,0)$ en vervolgens uitgerold. Zo ontstaat een rechthoek. Teken die rechthoek en daarin de uitgerolde schroeflijnen a en b.

149

Schroeflijn a in fig. 98 is een zogenaamde rechtsdraaiende schroeflijn. Wat moet je in de parametervoorstelling van a veranderen om er een linksdraaiende schroeflijn van te maken?

150

Geef een parametervoorstelling van een rechtsdraaiende schroeflijn die een hoek van $45°$ met zijn as (= de z-as) maakt en die door het punt $(0,1,0)$ gaat.

151

Het Watson-Crick-model van het DNA-molekuul, de zogenaamde 'dubbel-helix', bestaat uit twee schroeflijnen, waarbij de ene schroeflijn verkregen wordt door de andere $90°$ om zijn as te draaien (fig. 99).

De horizontale verbindingslijnstukken (de 'sporten' van zo'n dubbel-helix zijn allemaal even lang.

Toon dit aan.

Extra opgave

152

Toon aan dat de middelpunten van de horizontale sporten van de dubbelhelix ook weer een schroeflijn vormen.

hoofdstuk 14

ALGEBRAÏSCHE VOORSTELLING VAN EEN VLAK

Opgave

153 Fig. 100 toont een bouwsel van kubusjes met ribbe 1.
a Uit hoeveel kubusjes bestaat het bouwsel?
b Vijftien hoekpunten zijn rood aangestipt.
Geef de coördinaten van elk van die hoekpunten.
c Welke betrekking bestaat er tussen die coördinaten van elk van die vijftien hoekpunten?
d Hoe kun je beredeneren dat die vijftien hoekpunten in één vlak – zeg α – liggen?
e In welke punten snijdt het vlak α de drie coördinaatassen?

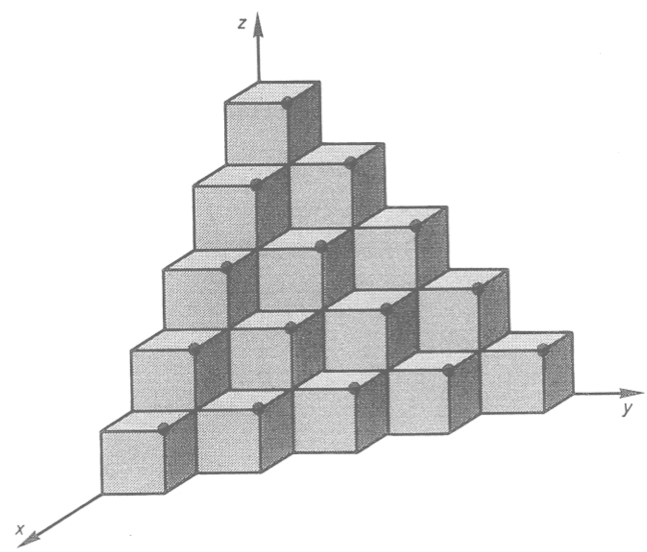


Fig. 100

Opvallend aan de vijftien punten van fig. 100 is dat de *som van de coördinaten* voor alle vijftien gelijk is aan 7. Bovendien liggen die vijftien in één vlak α.
Er is weinig fantasie voor nodig om op het idee te komen dat voor *elk* punt van α de coördinatensom wel eens gelijk zou kunnen zijn aan 7.

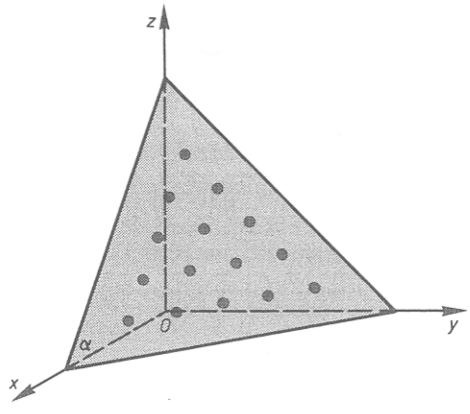


Fig. 101

Opgave

154 Kies twee punten uit de vijftien van fig. 101 en stel een parametervoorstelling op van de verbindingslijn van die door jou gekozen punten.
Laat nu zien dat voor elk punt van die verbindingslijn de coördinatensom inderdaad gelijk is aan 7.

In het vlak α kan een rooster worden getekend waarvan de vijftien eerder genoemde punten roosterpunten zijn. Dat rooster wordt opgespannen door de vectoren $(-1, 1, 0)$ en $(-1, 0, 1)$. Dat betekent dat elk roosterpunt bereikt kan worden vanuit een ander roosterpunt door een geheel aantal 'vectorstapjes' te nemen met $(-1, 1, 0)$ en $(-1, 0, 1)$, eventueel in tegengestelde richting. Zo wordt het punt $(1, 4, 2)$ vanuit $(7, 0, 0)$ bereikt door vier stapjes met $(-1, 1, 0)$ en twee stapjes met $(-1, 0, 1)$ te nemen (fig. 102):

$$(7,0,0) + 4(-1,1,0) + 2(-1,0,1) = (1,4,2)$$

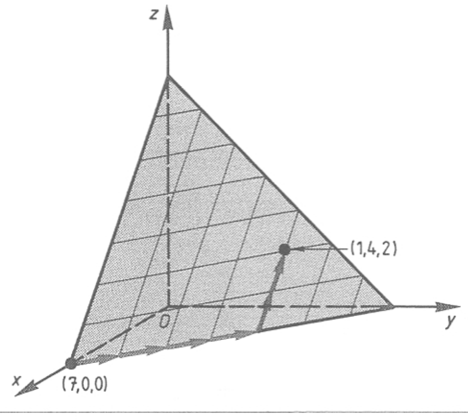


Fig. 102

Een willekeurig punt (x,y,z) van α wordt gevonden uit:

$$\boxed{(x,y,z) = (7,0,0) + t(-1,1,0) + u(-1,0,1)} \qquad (1)$$

ofwel:

$$\boxed{(x,y,z) = (7 - t - u, t, u)} \qquad (2)$$

Omdat elk punt van α op deze manier beschreven kan worden, noemen we (1) zowel als (2) een *parametervoorstelling van het vlak* α. Hierin komen de twee onafhankelijke parameters t en u voor.
Uit (2) volgt onmiddellijk dat de coördinatensom van *elk* punt (x,y,z) in α gelijk is aan 7.
Zo hebben we nog een algebraïsche voorstelling van α

$$\boxed{x + y + z = 7} \qquad (3)$$

die ook wel een *vergelijking van* α wordt genoemd.
Bekijk nog eens de parametervoorstelling (1).
Als je voor t een vaste waarde kiest (en u laat variëren), krijg je een lijn in α met richtingsvector $(-1,0,1)$.
Kies je voor u een vaste waarde (en laat je t variëren), dan krijg je een lijn in α met richtingsvector $(-1,1,0)$.
In fig. 103 zie je een aantal 't-lijnen' en 'u-lijnen' getekend. Men noemt dit ook wel *parameterlijnen* van α, bij de gekozen parametervoorstelling.

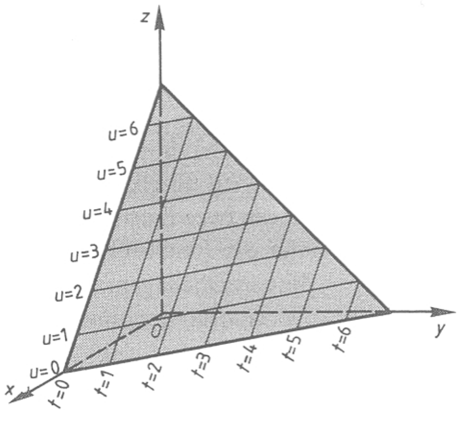


Fig. 103

Opgaven

*155 Elk punt van het vlak α correspondeert met twee parameterwaarden t en u.
a Teken de verzameling punten in α waarvoor geldt: $t = u$.
b Dezelfde opgave voor: $t + u = 4$.
Ook: $t - u = 2$.

156 Bij een parametervoorstelling van een lijn hebben we onderscheid gemaakt tussen een 'steunvector' en een 'richtingsvector'.
Welke vectoren in (1) zou je steun- resp. richtingsvector willen noemen?

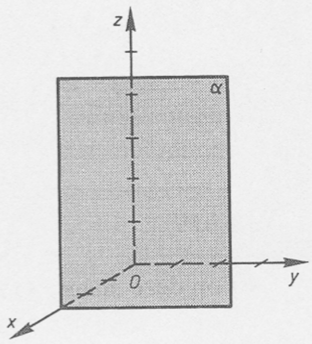


Fig. 104

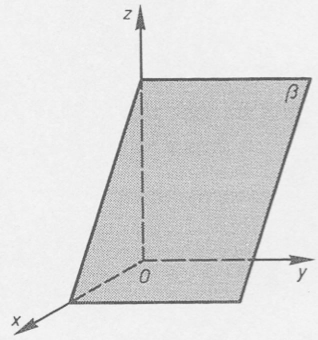


Fig. 105

157 Zie fig. 104. α is het vlak door het punt $(4,0,0)$ parallel met het Oyz-vlak en heeft de vergelijking $x = 4$.
a Geef een parametervoorstelling van α.
b Hoe lopen nu de parameterlijnen?

158 Zie fig. 105. β is het vlak door de punten $(4,0,0)$ en $(0,0,4)$ parallel met de y-as.
a Geef de parametervoorstelling van β.
b Hoe lopen de parameterlijnen?
c Geef een vergelijking van β.

159 Kijk nog eens naar het kubusbouwsel in fig. 100.
Hoeveel kubusjes liggen er 'boven' het vlak $z = 2$?
En hoeveel liggen er achter het vlak $x + y = 3$?

Houd goed uit elkaar:
- In een tweedimensionaal coördinatenstelsel is $x + y = 3$ de vergelijking van een (rechte) lijn (fig. 106).
  In verzamelingentaal: $l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 3\}$
- In een driedimensionaal coördinatenstelsel is $x + y = 3$ de vergelijking van een (plat) vlak (fig. 107).
  In verzamelingentaal: $\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 3\}$

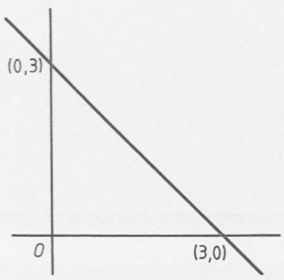


Fig. 106

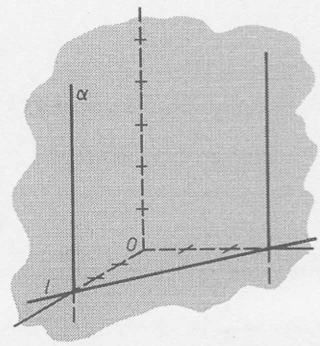


Fig. 107

Het eerste weet je nog van vroeger.
Het tweede kun je bijv. als volgt beredeneren:
'Kies een punt in het Oxy-vlak, waarvan de coördinaten voldoen aan $x + y = 3$ (zo'n punt ligt op de lijn l). Als je dit punt in vertikale richting verschuift (omhoog of omlaag), verandert alleen de z-coördinaat! De coördinaten blijven dus voldoen aan $x + y = 3$. Zo krijg je allemaal vertikale lijnen (parallel met de z-as) door punten van l en die vormen met z'n allen een vlak!

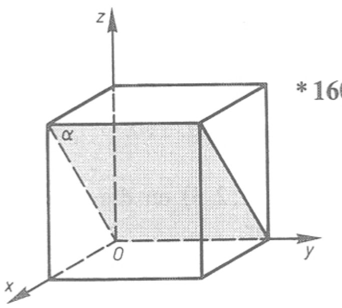


Fig. 108

Opgaven

***160** κ is de kubus $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqq x \leqq 4 \text{ en } 0 \leqq y \leqq 4 \text{ en } 0 \leqq z \leqq 4\}$
a Teken (in verschillende kleuren) de doorsneden van de vlakken
$\alpha: x + y = 2;$ $\beta: x + z = 3;$ $\gamma: y + z = 4$
met de kubus κ.
b Construeer het snijpunt van de vlakken α, β en γ.
c Bereken de coördinaten van dat punt.

161 Zie fig. 108. De vergelijking van het diagonaalvlak α in de kubus (ribbe 6) is:
$x - z = 0$ ofwel $x = z$.
De kubus heeft nog vijf andere diagonaalvlakken.
a Welke vergelijkingen passen daarbij?
b Welk punt ligt in alle zes diagonaalvlakken?

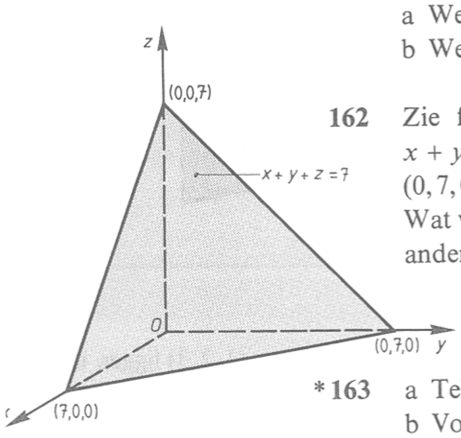


Fig. 109

162 Zie fig. 109. In het begin van dit hoofdstuk heb je ontdekt dat $x + y + z = 7$ een vergelijking is van het vlak door de punten $(7,0,0)$, $(0,7,0)$ en $(0,0,7)$.
Wat voor een vlak krijg je als je die 7 in de vergelijking vervangt door een ander getal?

***163** a Teken de doorsnede van de kubus met het vlak α: $x + y + z = c$.
b Voor welke $c \in \mathbb{R}$ is die doorsnede een driehoek?
c Bereken de oppervlakte van die doorsnede als functie van c.
(Onderscheid de gevallen $0 \leqq c \leqq 2$, $2 \leqq c \leqq 4$ en $4 \leqq c \leqq 6$.)
d Teken de grafiek van de functie bedoeld in de vorige vraag in je werkboek.
Voor welke $c \in \mathbb{R}$ is de oppervlakte van de doorsnede maximaal? (Vergelijk je resultaat met opgave 111d.)

164 De lichaamsdiagonaal vanuit de oorsprong in de kubus van opgave 162 is een normaal van de vlakken met vergelijking $x + y + z = c$. Denk maar weer aan het kubushuis van Blom.
Laat door berekening zien dat de richtingsvector van die lichaamsdiagonaal inderdaad loodrecht staat op de richtingsvectoren van twee verschillende richtingen in zo'n vlak.

Een vector die loodrecht staat op alle richtingsvectoren van een vlak is een *normaalvector* van dat vlak.
Zo is bijvoorbeeld $(1,1,1)$ een normaalvector van het vlak $x + y + z = 7$.

Opgaven

165 Geef een normaalvector van het vlak $x = 3$.
Ook van het vlak $x + y = 3$.

166 De vector $(1,2,3)$ staat loodrecht op de vier vectoren in fig. 110.
a Controleer dit met behulp van het inprodukt.
b Noem nog twee vectoren die loodrecht staan op $(1,2,3)$ en die een andere richting hebben dan de vectoren in de figuur.

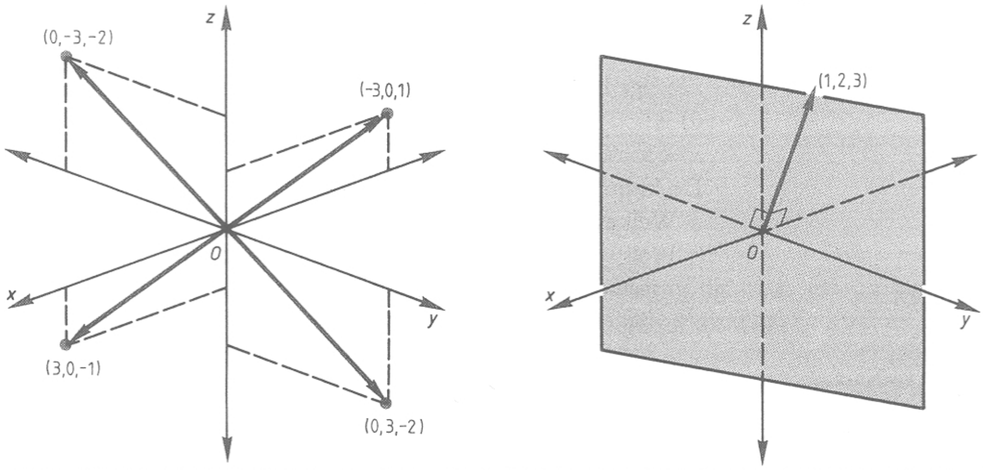


Fig. 110

Alle vectoren vanuit O die loodrecht staan op de vector $(1,2,3)$ liggen in het vlak door O met $(1,2,3)$ als normaalvector.
Als x, y, z een vector loodrecht $(1,2,3)$ is, geldt dat het produkt van die vectoren nul is, dus: $1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 0$.
Het vlak door O met normaalvector $(1,2,3)$ heeft dus als vergelijking $x + 2y + 3z = 0$.
Vlakken die hiermee parallel zijn, dus bijvoorbeeld $x + 2y + 3z = 14$, $x + 2y + 3z = -70$, hebben dezelfde normaalvector $(1,2,3)$.
In het algemeen geldt:

Een vlak heeft ten oprichte van een $Oxyz$-stelsel een vergelijking van de vorm:
$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$.
Hierbij is (a, b, c) de normaalvector van α.

167 In bovenstaande vergelijking mogen de coëfficiënten a, b en c niet alle drie gelijk zijn aan 0.

a Wat weet je van de ligging van het vlak als $a = 0$, $b \neq 0$ en $c \neq 0$?

b En wat als $a = 0$, $b = 0$ en $c \neq 0$?

c En wat als $d = 0$?

***168** a Teken de doorsneden van het blok met de vlakken
α: $2x + 3y + 6z = 6$, β: $2x + 3y + 6z = 12$ en γ: $2x + 3y + 6z = 18$.
Aanwijzing: bereken eerst de snijpunten met de coördinaatassen.

b De normaal van de drie vlakken die door de oorsprong gaat snijdt de vlakken in A, B en C. Bereken de coördinaten van deze punten.

c Bereken de onderlinge afstand van de vlakken α, β en γ.

***169** a Teken in het blok (in verschillende kleuren) de vlakken:
α: $3x + 4y + 8z = 24$, β: $3y + 2z = 9$ en γ: $2z = 3$.

b Construeer het snijpunt van α, β en γ en bereken de coördinaten van dat punt.

Een vlak is bepaald door drie punten die niet op één lijn liggen (Regel 1). Dat betekent dat de vergelijking van een vlak bepaald is door de coördinaten van drie punten in dat vlak.
In het geval dat die drie punten op de coördinaat-assen liggen, maar buiten O, is er een snelle manier om die vergelijking te vinden:
Neem $d = 1$ en zorg ervoor dat de coördinatenrijtjes van de drie punten voldoen.

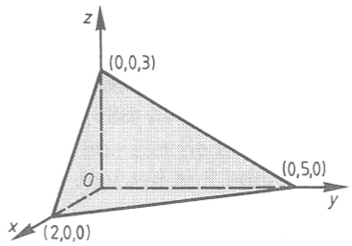


Fig. 111

Is α het vlak door de punten (2,0,0), (0,5,0) en (0,0,3), zie fig. 111, dan vinden we:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} + \frac{z}{3} = 1$$

hetgeen te herleiden is tot:

$$15x + 6y + 10z = 30$$

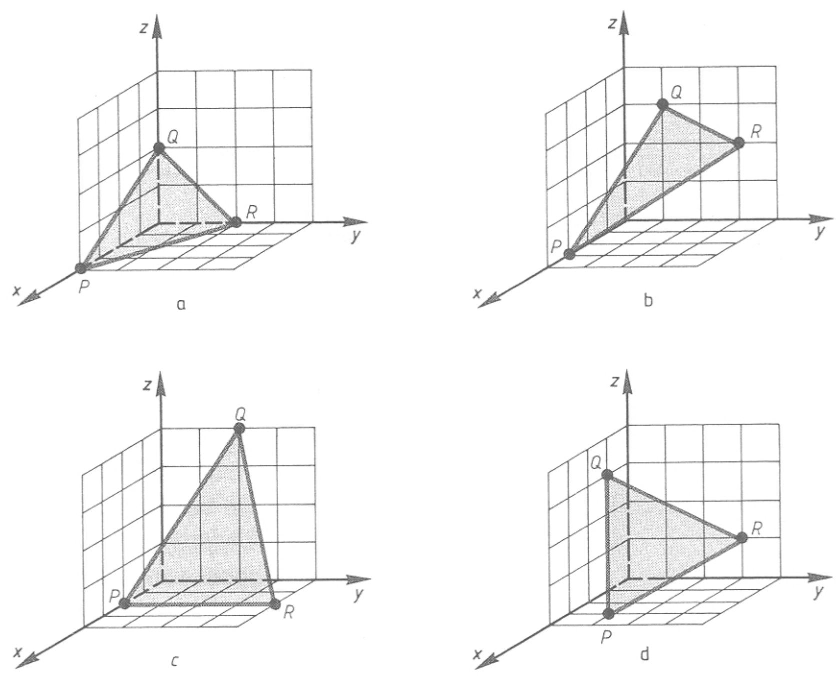


Fig. 112

Opgaven

170 Geef een vergelijking van het vlak bepaald door de punten P, Q en R in elk van de situaties die in fig. 112 zijn getekend.

171 α is het vlak $15x + 6y + 10z = 30$ (zie figuur 112).
a Bereken de hoeken die de drie coördinaatassen met α maken.
b Bereken de afstand van de oorsprong tot α.

***172** In de kubus met ribbe 2 is het vlak *AMKH* getekend; hierbij is M het midden van BF en K het midden van FG.
a Geef een vergelijking van vlak *AMKH*.
b Teken de doorsnede van de kubus met het vlak door B // vlak *AMKH* en geef ook van dit vlak een vergelijking.
c Bereken de afstand van het in *b* bedoelde vlak tot vlak *AMKH*.

Extra opgave

***173** a Teken in het coördinatenstelsel de verzameling punt (x, y, z) die voldoen aan $|x| + |y| + |z| = 6$.
b Beschouw de zwaartepunten van de zijvlakken van het veelvlak dat je getekend hebt.
Van wat voor een figuur zijn die zwaartepunten de hoekpunten?

hoofdstuk 15

ALGEBRAÏSCHE VOORSTELLING VAN GEBOGEN VLAKKEN

15.1 Vergelijking van bol en cilinder

Opgave

174 Gegeven is een bol met middelpunt O en straal 5 in een assenstelsel (fig. 113).

a Welke van de volgende punten liggen op die bol?
Welke punten liggen binnen de bol en welke er buiten?
$(4,2,0)$; $(3,4,0)$; $(3,4,1)$; $(2,3,3)$; $(3,3,3)$; $(2\sqrt{2},4,1)$.

b Aan welke vergelijking, in x, y en z, voldoen alle punten van de bol?

c Hoe ziet de doorsnede eruit van de bol met het vlak $z = 4$?

d En hoe ziet de doorsnede eruit met het vlak $x = y$?

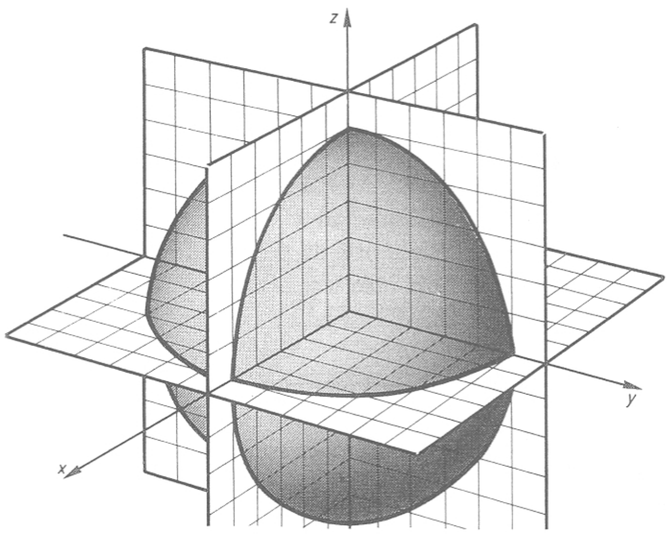


Fig. 113

De afstand van een punt in de ruimte tot de oorsprong vind je, zoals bekend, via de stelling van Pythagoras.

VOORBEELD

Zie fig. 114.

$\overrightarrow{OP} = (1,2,2)$
$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

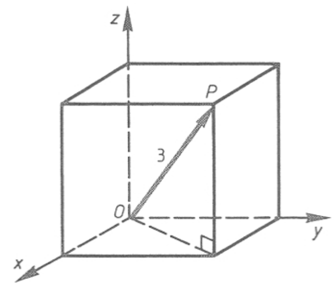


Fig. 114

Algemeen geldt:
als $\overrightarrow{OP} = (x,y,z)$, dan: $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

De formule geldt ook als één of meer coördinaten van P negatief zijn. Uit bovenstaande afstandsformule volgt onmiddellijk dat voor elk punt (x,y,z) op de bol met middelpunt O en straal r geldt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{1}$$

Omgekeerd: elk punt (x,y,z) waarvoor (1) geldt, heeft een afstand r tot O en ligt dus op de bol (O,r).

Kortom: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ is een vergelijking van de bol (O,r).
Anders gezegd: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ stelt de bol (O,r) voor.

Opgaven

175 Wat voor een meetkundige figuur stelt
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 9 \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq 25\}$ voor?

***176** De ribbe van de kubus in je werkboek heeft de lengte 2.
a Teken de doorsnede van de bol β_1: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ met de kubus.
b De bollen β_2 en β_3 zijn concentrisch met β_1 (d.w.z. ze hebben hetzelfde middelpunt) en gaan resp. door de punten $(2,0,1)$ en $(2,0,2)$.
Teken (in andere kleuren) de doorsneden van β_2 resp. β_3 met de kubus.

***177** a Teken, voorzover zichtbaar, de punten (x,y,z) in het Oxy-vlak, die voldoen aan $x^2 + y^2 = 25$.
b Teken ook de punten in het vlak $z = 6$ die aan $x^2 + y^2 = 25$ voldoen.
c Enig idee wat $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2\}$ voorstelt?
Maak een tekening!

178 β is de bol met middelpunt O en straal 5.
γ is de cilinder met de z-as als as en straal 3.
a Geef een vergelijking van γ.
b Waaruit bestaat de doorsnede van β en γ?

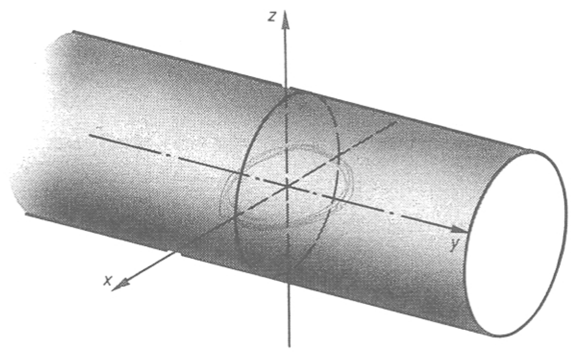


Fig. 115

179 Zie fig. 115.

a De cilinder-as is de y-as en de straal van de cilinder is 2. Geef een vergelijking van die cilinder.

b Waaruit bestaat de doorsnede van die cilinder met het vlak $x = 1$? En wat is de doorsnede van de cilinder met het vlak $y = 1$?

c Dezelfde opdracht als b maar nu voor de vlakken $x = z$ resp. $x = y$.

180 De cilinder van opgave 179 gaan we snijden met een tweede cilinder met straal 2, waarvan de z-as de as is (fig. 116).

a Beschrijf hoe naar jouw idee de doorsnijdingsfiguur van beide cilinders eruit ziet?

b Leidt uit de vergelijking van beide cilinders af dat de doorsnijdingskrommen in de vlakken $y = z$ en $y = -z$ liggen.

c Wat kun je concluderen met betrekking tot de doorsnijdingsfiguur van beide cilinders?

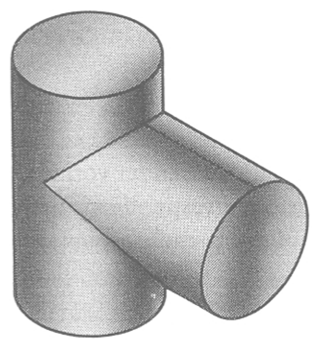
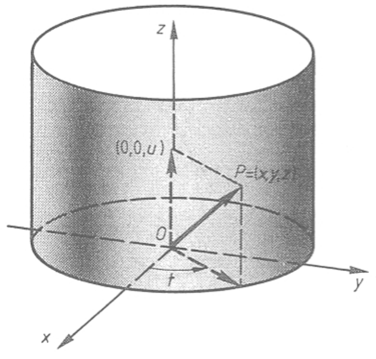


Fig. 116

15.2 Parameteryoorstelling van een cilinder



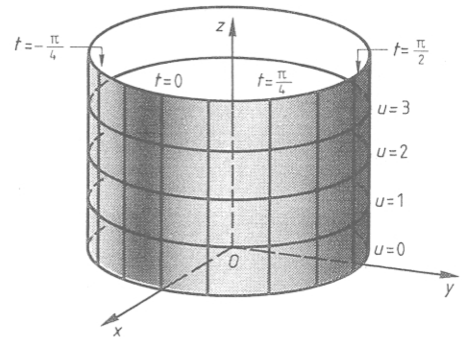


Fig. 117

Fig. 118

Op een eenvoudige wijze kunnen we van de cilinder met de z-as als as en straal 5 een parametervoorstelling maken.
Een plaatsvector van een willekeurig punt P op de cilinder kan worden ontbonden in twee componenten (fig. 117):
- één component in het Oxy-vlak: $(5\cos t, 5\sin t, 0)$;
- één component langs de z-as: $(0, 0, u)$.

Gevolg:
$(x,y,z) = (5\cos t,\ 5\sin t,\ u) \quad (0 \leqq t < 2\pi,\ u \in \mathbb{R})$.
is een parametervoorstelling van de cilinder.
De parameterlijnen (resp. t = constant, u = constant) zijn resp. de rechte lijnen ($/\!/$ z-as) en de cirkels ($/\!/$ Oxy-vlak) op de cilinder (fig. 118).

Opgaven

181 Uit de parametervoorstelling van de cilinder:
$(x,y,z) = (5\cos t,\ 5\sin t,\ u)$
kun je de vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ afleiden. Hoe?

182 De parameterlijnen op de cilinder vormen een 'rooster' op de cilinder. Elk punt van de cilinder correspondeert met één t-waarde en één u-waarde. Wat weet je van de verzameling punten op de cilinder waarvoor geldt: $t = u$?

183 Geef een parametervoorstelling van de cilinder van opgave 179.

188 Op een bol met middelpunt O wordt een rooster van parameterlijnen (breedtecirkels en meridianen) aangebracht.
De bol (met rooster) wordt orthogonaal geprojecteerd op het Oxy-vlak.
a Neem het Oxy-vlak als tekenvlak en teken daarin de projectie van het rooster.
b Dezelfde opdracht maar nu bij een loodrechte projectie van de bol op het Oyz-vlak.

15.4 Parametervoorstelling van een kegel

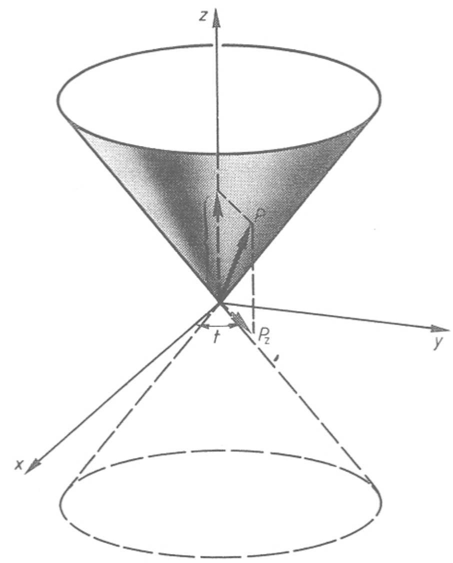


Fig. 120

Opgaven

189 κ is de kegel met de oorsprong als top, z-as als as en een halve tophoek van 45° (zie fig. 120).
De plaatsvector van een willekeurig punt $P\ (x, y, z)$ op de kegel wordt ontbonden in componenten op de gebruikelijke wijze.
a Welke parametervoorstelling kun je nu van κ opstellen?
(De parameters t en u zijn eengegeven in de figuur.)
Aanwijzing: $\angle POP_z = 45°$.
b Laat zien dat $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ een vergelijking van κ is.
c Wat voor een figuur is de doorsnede van κ met het vlak $z = 2$?
d Teken de doorsnede van κ met het vlak $x = 2$.
Aanwijzing: breng in het vlak $x = 2$ een assenstelsel aan // Oyz-stelsel, met $(2, 0, 0)$ als oorsprong.

190 Bekijk nog eens kegel κ.
Het gedeelte van κ tussen de vlakken $z = 0$ en $z = 4$ wordt opengeknipt langs de lijn '$t = 0$' en vervolgens uitgerold zó dat een vlakke figuur ontstaat.

a Beredeneer dat die figuur een sector van een cirkel met straal $4\sqrt{2}$ is.

b Teken die cirkelsector.
Aanwijzing: bereken eerst de omtrek van de cirkel '$u = 4$'.

c Hoe vind je de parameterlijnen ('u = constant', 't = constant') op de uitslag van de kegel terug?

191 Van de kegel is de uitslag precies een halve cirkel.

a Hoe groot is de halve tophoek van de kegel?

b Als je die kegel in een driedimensionaal assenstelsel plaatst (top in de oorsprong, as langs de z-as), wat wordt dan de vergelijking van die kegel?

192 Op de kegel κ: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ zie je een rooster van parameterlijnen aangebracht. Door de vergelijking $u = t$ wordt een kromme op de kegel bepaald.

a Schets een deel van die kromme op beide kegelhelften.

b Bewijs dat de parameterlijn $t = 0$' de raaklijn aan de kromme in de oorsprong is.

c Een deeltje beweegt zich langs de kromme '$u = t$'; t is de tijdparameter. Toon aan dat (de grootte van) de snelheid op het tijdstip t gelijk is aan $\sqrt{2 + t^2}$.

d Toon aan dat de richting waarin het deeltje zich beweegt op het tijdstip t een hoek maakt met de z-as waarvan de cosinus gelijk is aan
$$\frac{1}{\sqrt{2 + t^2}}$$

e De hier beschreven kromme is een soort kegelspiraal. De hoek die de spiraal met de as van de kegel maakt verandert voortdurend. Hoe verandert die hoek als t toeneemt van 0 tot ∞?

193 Een gebogen vlak α heeft de parametervoorstelling:

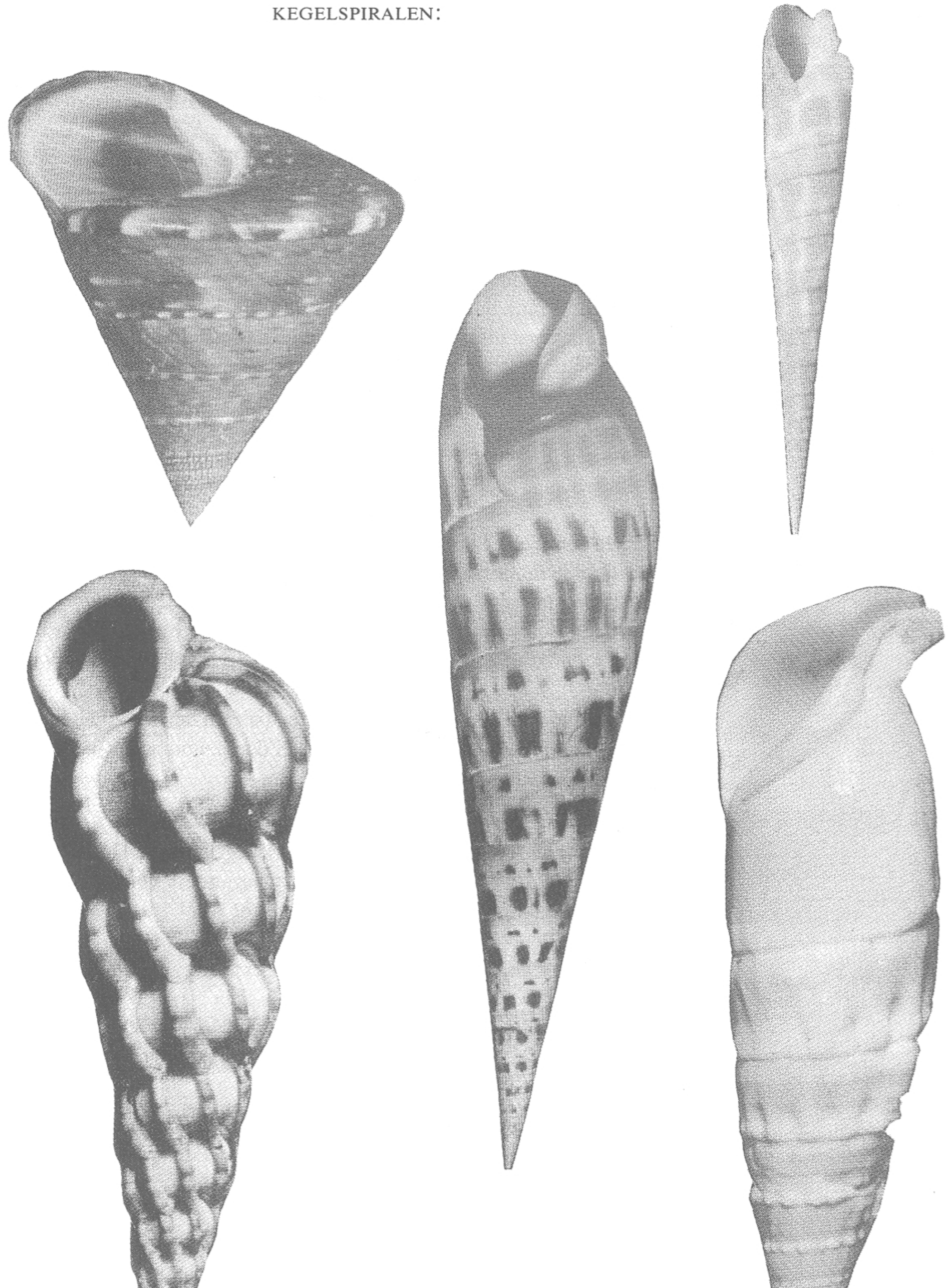
$$(x, y, z) = (u \cos t,\ u \sin t,\ u^2)$$

a Maak een schets van α in een driedimensionaal stelsel.

b Geef een vergelijking van α.

c Hoe ziet de doorsnede van α met het vlak $y = 0$ eruit?

KEGELSPIRALEN:



Schelpen en spiralen

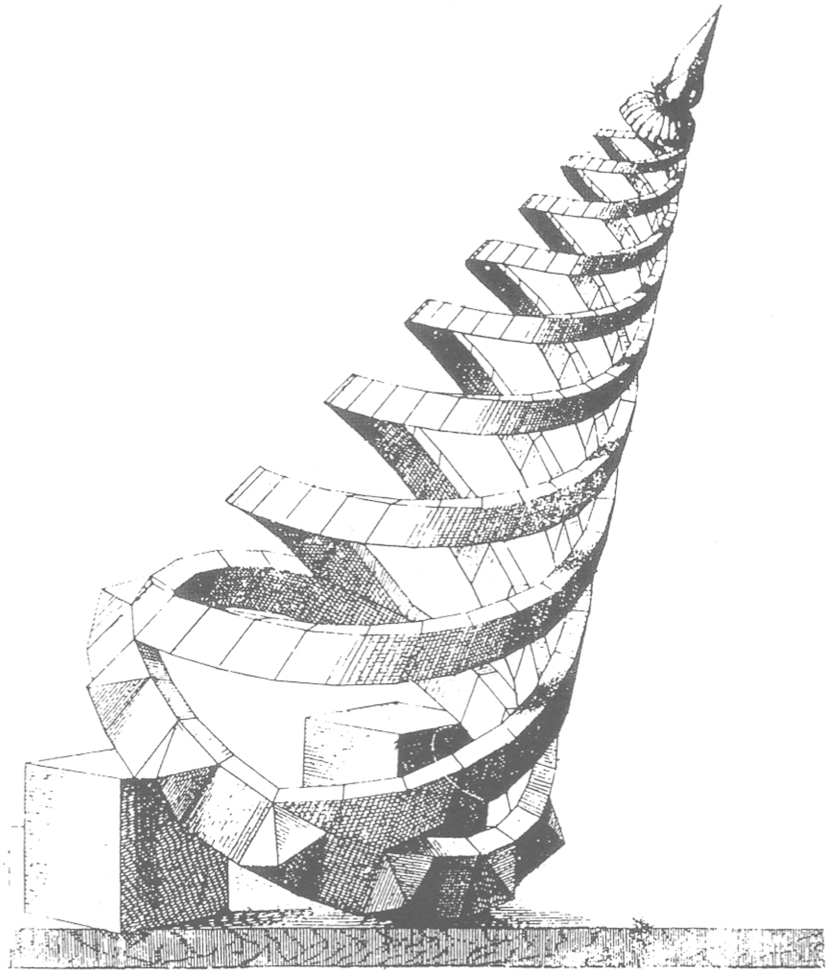


Fig. 121

Vier kegelspiralen waarbij de hoek met de as niet verandert, zie je in fig. 121 uitgebeeld door de Italiaan Daniele Barbaro (1513–1570).
Zulke spiralen worden gelijke-hoek-spiralen genoemd.

Extra opgave

194 Een gelijke-hoek-spiraal op de kegel $\kappa\ (x, y, z) = (u \cos t, u \sin t, u)$ wordt bepaald door de vergelijking $u = \mathrm{e}^t$.
Een parametervoorstelling van die ruimtekromme is dan:
$(x, y, z) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \sin t, \mathrm{e}^t)$.

a Bewijs dat de lengte van de raakvector in het punt met parameter t gelijk is aan $\sqrt{3} \cdot \mathrm{e}^t$.

b Bewijs dat hieruit volgt dat de cosinus van de hoek tussen een raaklijn en de as van de kegel steeds gelijk is aan $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

c Wat kun je zeggen over het verloop van de spiraal als t afneemt van 0 tot $-\infty$?

d Schets de loodrechte projectie van de kegelspiraal op het Oxy-vlak.

Samenvatting

Vectorrekening (Uit Oriëntatie op Ruimtemeetkunde)

vector

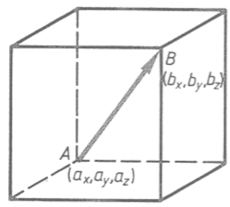
De verplaatsing van een punt A naar een punt B wordt aangeduid met de vector $\overrightarrow{AB}$.

kentallen

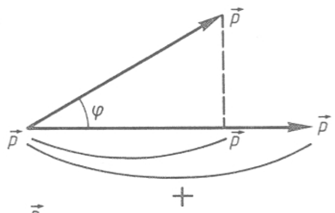
Een vector in de ruimte kan worden vastgelegd t.o.v. een coördinatenstelsel met drie kentallen.
Als A de coördinaten (a_x, a_y, a_z) en B de coördinaten (b_x, b_y, b_z) heeft, dan geldt:

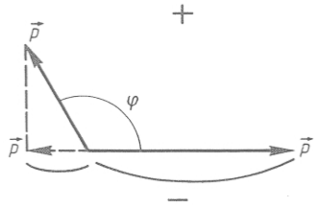
$$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z)$$

Vectoren woren kentalswijs opgesteld.



inprodukt





Het inprodukt van twee vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ ($\vec{p} \neq \vec{o}$ en $\vec{q} \neq \vec{o}$) is:

1 $\begin{cases} |\vec{p}\,'| \cdot |\vec{q}| & \text{als de projectie } \vec{p}\,' \text{ op de werklijn van } \vec{q} \text{ niet tegengesteld gericht is aan } \vec{q}; \\ -|\vec{p}\,'| \cdot |\vec{q}| & \text{als } \vec{p}\,' \text{ en } \vec{q} \text{ tegengesteld gericht zijn;} \end{cases}$

2 $|\vec{p}\,'| \cdot |\vec{q}|.\cos\varphi$ als φ de hoek is tussen $\vec{p}$ en $\vec{q}$.

3 $p_x \cdot q_x + p_y \cdot q_y + p_z \cdot q_z$ als (p_x, p_y, p_z) en (q_x, q_y, q_z) de kentallenrijtjes zijn van $\vec{p}$ en $\vec{q}$ t.o.v. een rechthoekig assenstelsel.

Opmerking: Als $\vec{p} = \vec{o}$ of $\vec{q} = \vec{o}$, dan $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$

hoekberekening

hoek tussen $\vec{p}$ en $\vec{q}$	inprodukt
scherp	+
recht →	0 →
stomp	−

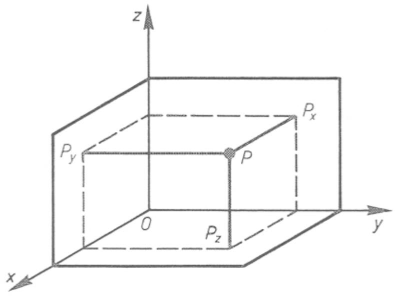
De hoek φ tussen $\vec{p}$ en $\vec{q}$, waarvan de kentallen gegeven zijn, kan worden berekend uit:

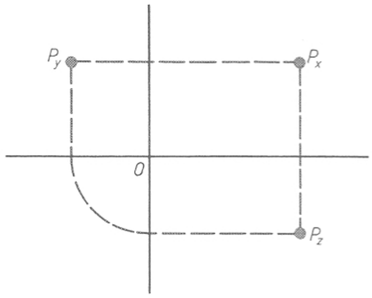
$$p_x \cdot q_x + p_y \cdot q_y + p_z \cdot q_z = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos\varphi$$

hoofdstuk 1 Projecties en Coördinaten

projecties

P_x, P_y en P_z zijn de projecties in de richting van de x-, y- en z-as op resp. het Oyz-, Oxz- en Oxy-vlak.





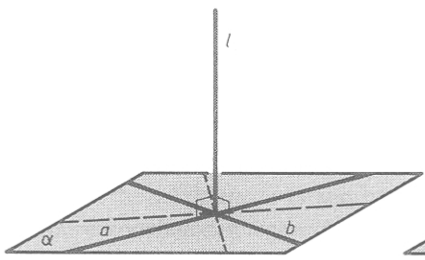
coördinaten

punt	coördinaten
P	(p,q,r)
P_x	$(0,q,r)$
P_y	$(p,0,r)$
P_z	$(p,q,0)$

hoofdstuk 2 In en uit het lood

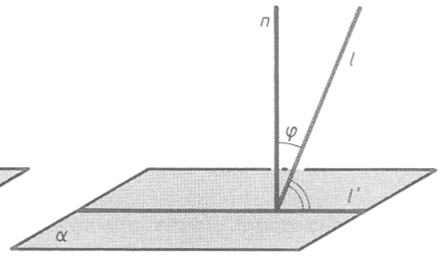
loodrecht en scheef

Lijn l loodrecht vlak α:
l loodrecht *alle* richtingen in α



- a en b zijn snijdende lijnen in α
- $l \perp a$ èn $l \perp b$
  DAN
  $l \perp a$

Lijn l scheef op vlak α:
l maakt *verschillende* hoeken met *verschillende* richtingen in α

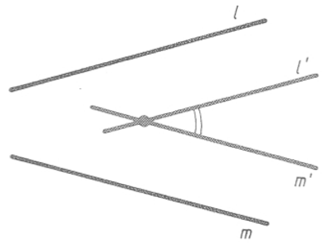


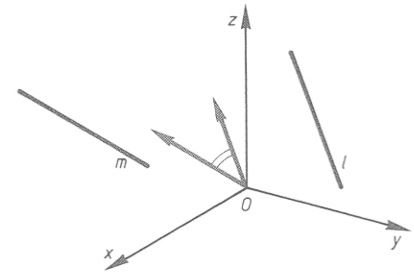
- n is normaal van α
- hoek $(l,n) = \varphi$
  DAN
  hoek $(l,n) = 90^\circ - \varphi$

hoofdstuk 3 Kruisende lijnen

kruisende lijnen

Lijnen die elkaar niet snijden en niet parallel zijn, worden kruisende lijnen genoemd.
De hoek van twee kruisende lijnen l en m is gelijk aan de scherpe of rechte hoek die de snijdende l' en m' met elkaar maken, waarbij $l' \parallel l$ of $l' = l$ en $m' \parallel m$ of $m' = m$.





Ten opzichte van een $Oxyz$-stelsel kan de hoek tussen twee kruisende lijnen worden berekend met behulp van richtingsvectoren van die lijnen.

hoofdstuk 4 Schaduw en perspectief

centrale projectie en parallelprojectie

Schaduwvorming door een lichtbron niet al te ver van het voorwerp komt overeen met centrale projectie. Schaduwvorming door de zon wordt als parallelprojectie opgevat.
Een bijzonder geval van parallelprojectie is loodrechte projectie, waarbij de projectierichting loodrecht op het projectievlak (tafereel) staat.
Centrale projectie en parallelprojectie worden beide gebruikt bij het maken van tekeningen van de ruimte.
Centrale projectie levert zogenaamde perspectieftekeningen op; zo'n tekening is vanuit één punt 'ideaal' te bezichtigen.
Parallelprojectie wordt meestal gebruikt voor ruimtemeetkundige tekeningen; om zo'n tekening 'ideaal' te zien, moet het oog ver weg zijn.

hoofdstuk 5 Punten, lijnen, vlakken

regels voor de onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken

1 Door drie punten, niet op één lijn, gaat precies één vlak.
2 Een rechte lijn die twee punten van een vlak verbindt, ligt in dat vlak.
3 De doorsnede van twee snijdende vlakken is een rechte lijn.
4 Door een rechte lijn en een punt daarbuiten gaat één vlak.
5 Door twee snijdende lijnen gaat precies één vlak.
6 Door twee parallelle lijnen gaat precies één vlak.
7 Alle lijnen die een gegeven lijn snijden en door een punt buiten die gegeven lijn gaan, liggen in één vlak.
8 Alle lijnen die een gegeven lijn snijden en parallel zijn met een tweede gegeven lijn (niet parallel aan de eerste) liggen in één vlak.

hoofdstuk 6 Ruimteconstructies

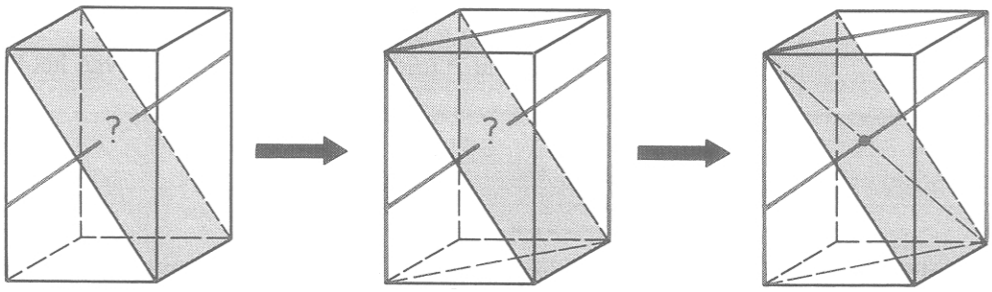
parallelprojectie

Bij ruimteconstructies wordt gebruik gemaakt van tekeningen in parallelprojectie. Dat betekent dat middelpunten van lijnstukken ook in de figuur als middelpunt zijn terug te vinden, en dat parallelle lijnen in de figuur ook parallel zijn.

hulpvlak

De regels 1 tot en met 8 uit hoofdstuk 5 zijn essentieel bij het uitvoeren van ruimteconstructies.
Het snijpunt van een lijn en een vlak wordt bijna altijd gevonden met behulp van een hulpvlak.
De constructie van zo'n hulpvlak is gebaseerd op regel 5 of regel 6.
Met behulp van regel 2 en 3 wordt de snijlijn van hulpvlak en het gegeven vlak gevonden. Het gevraagde snijpunt ligt op die snijlijn.

VOORBEELD



hoofdstuk 7 Scheluw

regel

9 Als twee lijnen elkaar kruisen, bestaat er geen vlak dat beide lijnen bevat.

gebogen lijnen

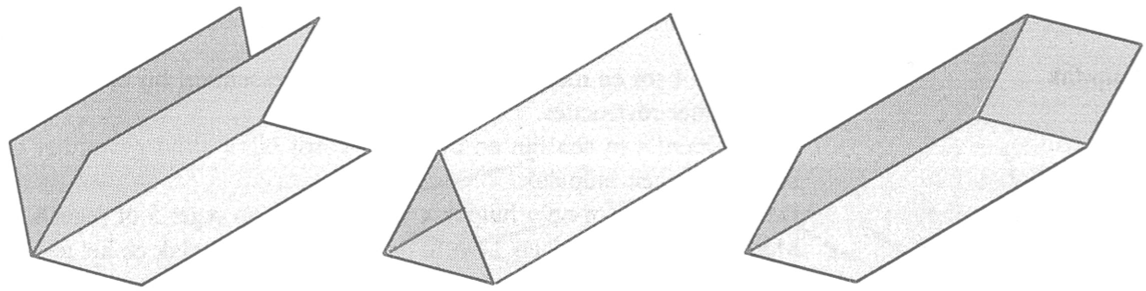
Er zijn wel gebogen vlakken die kruisende lijnen bevatten.
Een voorbeeld daarvan is een hyperboloïde.
Andere voorbeelden van gebogen vlakken met rechte lijnen zijn:
cilinder (bevat parallelle lijnen);
kegel (bevat lijnen door één punt).

hoofdstuk 8 Parallelliteiten

regels

10 Een lijn die parallel is met een lijn in een vlak en zelf niet in dat vlak ligt is parallel met dat vlak.
11 Een vlak dat twee snijdende lijnen bevat die parallel zijn met een tweede vlak is parallel met dat tweede vlak.
12 Twee parallelle vlakken snijden een derde vlak volgens parallelle lijnen.

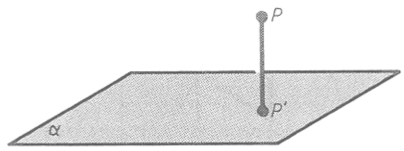
13 Als drie vlakken elkaar twee aan twee snijden zijn er drie mogelijkheden:
- de drie vlakken gaan door één (snij-)lijn;
- er zijn drie snijlijnen die parallel zijn;
- er zijn drie snijlijnen die door één punt gaan.



hoofdstuk 9 Overal even ver

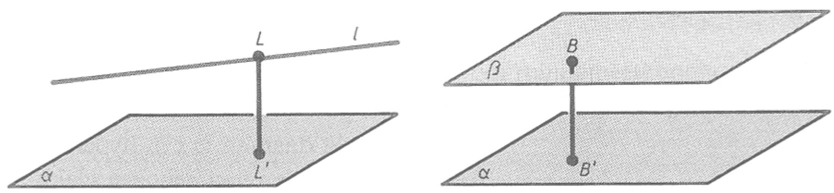
afstand punt tot een vlak

Om de afstand van een punt P tot een vlak α te vinden, wordt P loodrecht geprojecteerd op α (P').
De afstand van P tot α is gelijk aan de lengte van het lijnstuk PP'.



lijn of vlak parallel met een vlak

Als een lijn l parallel is met het vlak α, liggen alle punten van l even ver van α.
De afstand van l tot α wordt gevonden door de afstand te nemen van een willekeurig punt van l tot α.
Hetzelfde kan worden gezegd van een vlak β parallel met α.



hoofdstuk 10 Doorsneden

doorsnede

Van een lichaam, begrensd door platte vlakken, een zogenaamd veelvlak, wordt gezegd dat het een vlak α snijdt, als de doorsnede van dat lichaam met α een veelhoek is.
Het aantal zijden van die doorsnede is ten minste 3 en ten hoogste gelijk aan het aantal grensvlakken van het lichaam.
Zo kan een kubus door een vlak worden gesneden volgens een driehoek, vierhoek, vijfhoek of zeshoek.
De doorsnijdingsfiguur van een vierzijdige piramide (vier zijvlakken en één grondvlak) met een vlak kan een driehoek, vierhoek of vijfhoek zijn.

hoofdstuk 11 Ruimteconstructies (2)

grondlijn

Een doelgerichte methode bij doorsnedeconstructies is het werken met de *grondlijn*. Dit geldt vooral als het de doorsnede van een vlak met een meer-dan-driezijdige piramide of prisma betreft.
Het principe is dat eerst de snijlijn van het vlak met het grondvlak van het lichaam wordt geconstrueerd; vervolgens wordt die grondlijn gesneden met de aangrenzende zijvlakken en worden de snijlijnen met die zijvlakken gevonden.
Bij lichamen met parallelle grensvlakken is regel 12 goed bruikbaar!

hoofdstuk 12 Algebraïsche voorstelling van een rechte lijn

Een lijn in de ruimte kan ten opzichte van een $Oxyz$-stelsel worden voorgesteld door:

$$(x,y,z) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t)$$

ofwel:

$$((x,y,z) = (a_1, a_2, a_3) + t\cdot(b_1, b_2, b_3)$$

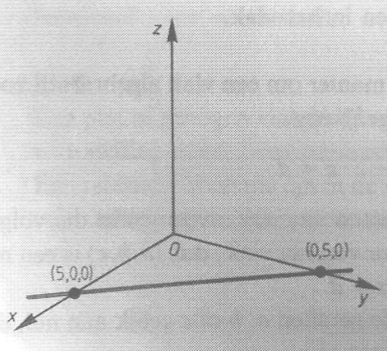
In zo'n *parametervoorstelling* wordt de richting van de lijn bepaald door de *richtingsvector* (b_1, b_2, b_3).
Merk op: een eerste-graads-vergelijking in x, y, z stelt nooit een rechte lijn voor, maar een vlak.

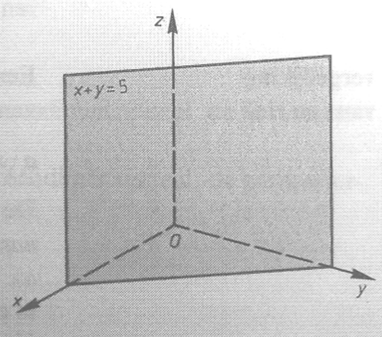
VOORBEELD

De lijn l door de punten $(5,0,0)$ en $(0,5,0)$ heeft de algebraïsche voorstelling:

$$(x,y,z) = (5,0,0) + t\cdot(-1,1,0)$$

De vergelijking $x + y = 5$ stelt het vlak voor dat door l gaat en parallel is met de z-as!



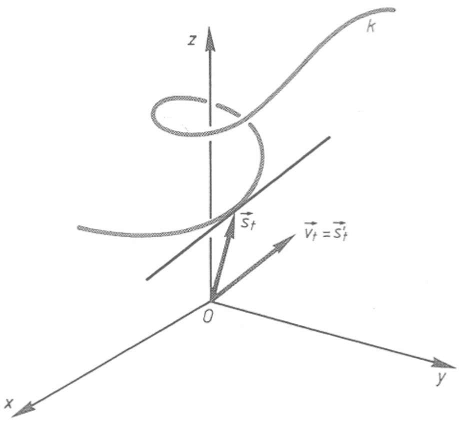


hoofdstuk 13 Krommen in de ruimte

plaatsvector, snelheidsvector

Als x, y, z functies zijn van t, dan is $\vec{s}_t = (x(t), y(t), z(t))$ de parametervoorstelling van een ruimtekromme.
De vector $\vec{s}_t$ wijst de plaats aan van het punt op de kromme bij parameterwaarde t en wordt daarom wel *plaatsvector* genoemd.
Door differentiatie van $\vec{s}_t$ wordt de *snelheidsvector* of *raakvector* $\vec{v}_t$ gevonden.
Er geldt:

$\vec{v}t = (x'(t), y'(t), z'(t))$



hoofdstuk 14 Algebraïsche voorstelling van een vlak

parametervaststelling van een vlak

Een vlak in de ruimte kan ten opzichte van een $Oxyz$-stelsel worden voorgesteld door:

$$(x, y, z) = (p_1 + q_1t + r_1u, p_2 + q_2t + r_2u, p_3 + q_3t + r_3u)$$

ofwel:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t \cdot (q_1, q_2, q_3) + u \cdot (r_1, r_2, r_3)$$

In zo'n parametervoorstelling zijn (q_1, q_2, q_3) en (r_1, r_2, r_3) richtingsvectoren van lijnen in het vlak.

vergelijking van een vlak

Een andere manier om een vlak algebraïsch voor te stellen is door middel van een *vergelijking*:

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

De coëfficiënten van x, y, z vormen in die volgorde de kentallen van een *normaalvector* van het vlak; dus (a, b, c) is een normaalvector van het vlak $ax + by + cz = d$.
Is één van de getallen a, b of c gelijk aan nul, dan is het vlak parallel met één coördinaat-as.
Zijn twee van de getallen a, b of c gelijk aan nul, dan is het vlak parallel met een coördinaatvlak.

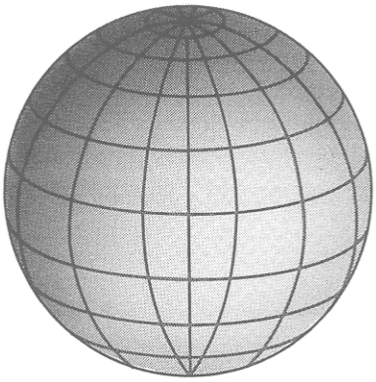
bol, cilinder, kegel

gebogen vlak	vergelijking	parametervoorstelling
bol, middelpunt O, straal r	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	$\begin{cases} x = r \cdot \cos u \cdot \cos t \\ y = r \cdot \cos u \cdot \sin t \\ z = \mathrm{r} \cdot \sin u \end{cases}$
cilinder, as langs z-as, straal r	$x^2 + y^2 = r^2$	$\begin{cases} x = \mathrm{r} \cdot \cos t \\ y = r \cdot \sin t \\ z \cdot u \end{cases}$
kegel, top 0, langs z-as, tangens van de halve tophoek m	$x^2 + y^2 - m^2z^2 = 0$	$\begin{cases} x = m \cdot u \cdot \cos t \\ y = m \cdot u \cdot \sin t \\ z = u \end{cases}$

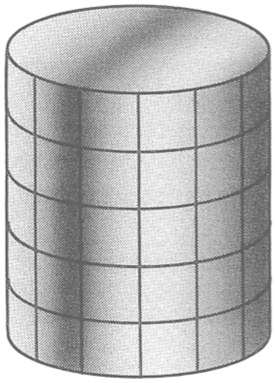
parameterlijnen

De lijnen 'u = constant' en 't = constant' worden de parameterlijnen van het (gebogen) vlak bij de gegeven parametervoorstelling genoemd.
Voor de hierboven aangegeven parametervoorstellingen geldt:

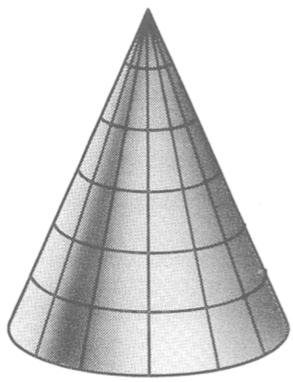
parameterlijnen
bol



parameterlijnen
cilinder



parameterlijnen
kegel



'horizontaal': u = constant
'verticaal' : t = constant

Merk op:
Een plat of gebogen vlak in de ruimte is tweedimensionaal; de parametervoorstelling bevat twee parameters.
Een rechte of kromme lijn in de ruimte is ééndimensionaal; de parametervoorstelling bevat één parameter.