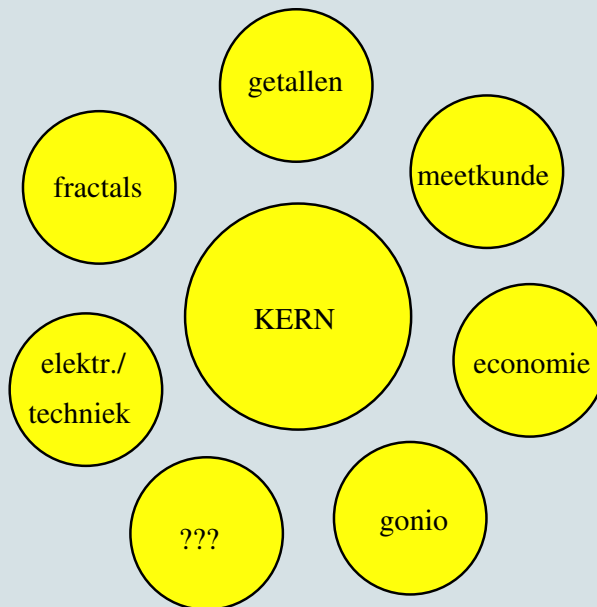


Complexe getallen

discussie in het kader van Wiskunde D

29 november 2006



Kern: bewerkingen en meetkundige voorstelling

- Complexe getallen: definitie
- Reële en imaginaire deel, absolute waarde en argument, geconjugeerde van $z = a + bi$

$$\operatorname{Re}(z) = a; \operatorname{Im}(z) = b, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \bar{z} = a - bi.$$

- Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen; rekenregels

$$zw = wz; \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

- Het complexe vlak; de meetkundige betekenis van de bewerkingen en eigenschappen

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

- De Moivre, complexe e -macht?

Kern complexe getallen: vergelijkingen

- De vergelijking $z^n = a$ en wortels

$$z^4 = -4 \longrightarrow \{1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i\}$$

Wat is nu $\sqrt[4]{-2}$?

- Kwadratische vergelijkingen: kwadraatafsplitsen

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z + 1)^2 = -1 \Leftrightarrow z = -1 \pm i$$

- Hoofdstelling van de Algebra (*)
- Delen met rest ivm hogeregraads vergelijkingen

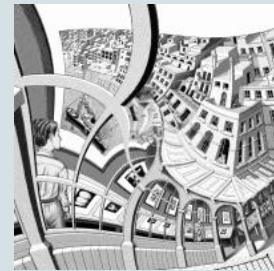
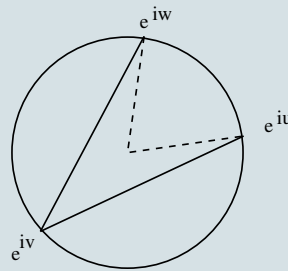
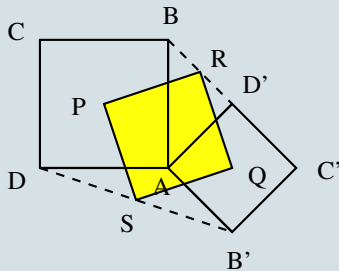
$$z^3 + z + 1 = (z - 1)(z^2 + z + 2) + 3$$

- Reële veeltermen/polynomen: als $1 + i$ nulpunt is van een veelterm met reële coëfficiënten, dan $\overline{1 + i} = 1 - i$ ook.

Uitbreidingsmogelijkheden

Meetkunde en complexe getallen

- Meetkundige bewijzen met complexe getallen



Met $A = 0, d = ib, d' = ib'$ vind je $i(s - p) = r - p$.

- Brug met analytische meetkunde: een rekensysteem met meer structuur

$$\frac{e^{iu} - e^{iv}}{e^{iw} - e^{iv}} : \frac{e^{-iw} - e^{-iv}}{e^{-iu} - e^{-iv}} = \frac{e^{i(u-w)} - e^{i(v-w)} - e^{i(u-v)} + 1}{e^{i(w-u)} - e^{i(w-v)} - e^{i(v-u)} + 1} = e^{i(u-w)}$$

Uitbreidingen: getallen

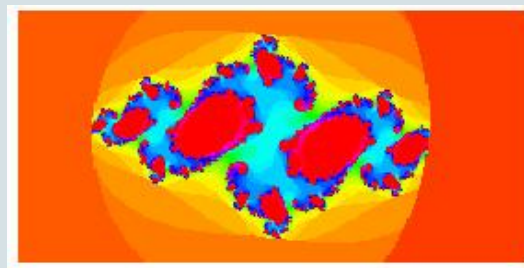
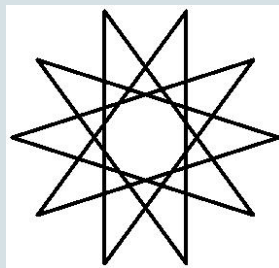
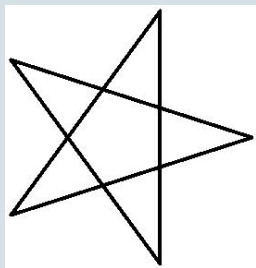
- Gehelen van Gauss: $a + bi$ met a en b geheel (uitbreiding van \mathbf{Z})
- 5 is plots niet meer priem:

$$5 = (2 + i)(2 - i)$$

- Wat is priem in deze nieuwe wereld?
- Delen met rest, **norm** $N(z) = z \cdot \bar{z}$ van een complex getal z .
- Priemfactorontbinding bij de gehelen van Gauss.

ICT-mogelijkheden

Via het web opdrachten uitvoeren...



Waar komen die complexe getallen voor?

Wiskunde: analyse, algebra, ...

- **Analytische meetkunde + complexe getallen** → complex algebraïsche/analytische meetkunde

$$x^2 + y^2 = -1$$

Nut: softwarepakketten Cabri, Cinderella; wiskunde achter 'stringtheorie'

- **Dynamische modellen + complexe getallen:** complexe getallen bij differentiaalvergelijkingen. Oplossen van $y'' + y = 0$ via

$$\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix} \rightarrow c \cos x + d \sin x$$

- **Kansrekening en statistiek:** bewijzen van de centrale limietstelling; in werk van de Fields medaillewinnaar (2006) Wendelin Werner statistische fysica (veel deeltjes-systemen)

Waar komen die complexe getallen voor?

- **Natuurkunde:** Fouriertheorie, quantummechanica
- **Elektrotechniek:** analyse van signalen, elektrische schakelingen, Laplace- en Fourier-transformatie
- **Werktuigbouw:** dynamische modellen/differentiaalvergelijkingen
- **Biomedische Technologie:** beeldherkenning, signaalanalyse (hartritme)
- **Econometrie:** differentiaal- en differentievergelijkingen