Gedetailleerd programma van de module Dynamische Modellen van VWO-Wiskunde D 2007-2011 (voorstel)

Swier Garst en Mark Peletier

25 januari 2007

1 Status van dit document

Dit document is bedoeld voor consultatie over de module Dynamische Modellen van het vak VWO-Wiskunde D. In dit document geven wij een voorstel voor een uitwerking van de globale eindtermen in gedetailleerde eindtermen en voorbeeldopgaven. De auteurs roepen specifiek alle belangstellenden op om hierop te reageren. Dat kan per email aan Mark Peletier, `m.a.peletier@tue.nl`. De reacties zullen gebruikt worden bij het samenstellen van latere documenten over deze module.

2 Discrete Dynamische Modellen

Globale eindterm: De kandidaat kan rijen relateren aan recurrente betrekkingen, iteraties, webgrafieken en contexten en kan het gedrag ervan beschrijven in termen van stationair, convergerend of divergerend.

Specifieke eindtermen: De kandidaat kan

1. Een voorstelling van een rij door een 'directe formule' herkennen en gebruiken.
   VOORBEELD:
   Schrijf $x_1, ...x_5$ op van de rij: $\{\frac{(-1)^n(n+1)}{2^n}\}$
2. Een voorstelling van een rij door een recurrente betrekking herkennen en gebruiken.
   VOORBEELD:
   Van een rij is $x_1 = 2$. Schrijf de eerste vijf termen van de rij $x_{n+1} = \frac{1}{3-x_n}$ op.
3. De notatie $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ herkennen en gebruiken.

4. Limieten van quotienten van veeltermen in n herleiden tot de standaardlimieten $\lim_{n\to\infty} n^p = \infty$, $\lim_{n\to\infty} n^{-p} = 0$ voor $p \geq 1$.
   VOORBEELD:
   Bereken $\lim_{n\to\infty} x_n$, waarbij $x_n = \frac{2n^2-n-3}{n^2+1}$.
   UITWERKING:
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n-3}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = 2.$$

5. Het begrip convergentie van een rij hanteren.
   VOORBEELD:
   Ga na of de rij $x_n = (-1)^n$ convergeert

6. Bij een rij, gedefinieerd door een formule van de vorm $x_{n+1} = f(x_n)$ een grafische voorstelling (web) maken.
   VOORBEELD: (uit Netwerk dl B2, hs 11)
   Gegeven is de rij $x_{n+1} = 2x_n(1-x_n), x_0 = 0,1$. Laat zien dat elk punt (x_n, x_{n+1}) op de parabool $y = -2x^2+2x$ ligt. Teken de eerste vijf stappen van het web dat bij de gegeven rij hoort.

7. In de grafische voorstelling van $x_{n+1} = f(x_n)$ de eventuele dekpunten herkennen.

8. Uit $x_{n+1} = f(x_n)$ de eventuele dekpunten berekenen.
   VOORBEELD:
   Bepaal de dekpunten van de rij $x_{n+1} = x_n^3 - x_n$

9. Het gedrag van het dynamische systeem $x_{n+1} = f(x_n)$, voor het geval dat $f(x_n)$ een lineaire functie of een stuksgewijs lineaire functie is, in een omgeving van de eventuele dekpunten beschrijven. (aantrekkend/afstotend dekpunt.)
   VOORBEELD:
   $$f(x_n) = \begin{cases} ax_n & \text{als } x < 1/2 \\ a - ax_n & \text{als } x \geq 1/2 \end{cases}$$
   Beredeneer voor $a = 1/2$ en $a = 3/2$ van beide dekpunten van $f(x_n)$ aan of ze aantrekkend of afstotend zijn.

10. Narekenen dat een gegeven term van een rij deel uit maakt van een periodieke baan.
    VOORBEELD:
    $$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{als } x < 1/2 \\ 2 - 2x_n & \text{als } x \geq 1/2 \end{cases}$$
    Laat zien dat 2/7 een term is van een rij met periode 3.

11. De notatie f^p voor de p-maal geïtereerde functie $f \circ f \circ \cdots \circ f$ gebruiken, en uit f de functie f^p berekenen.

12. In een grafische voorstelling van $x_{n+p} = f^p(x_n)$ eventuele periodieke punten herkennen.
    VOORBEELD:
    Gegeven is de rij $x_{n+1} = f(x_n)$ met
    $$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } x < 1/2 \\ 2 - 2x & \text{als } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
    Teken de grafiek van $f(x_n)$, $f^2(x_n)$, $f^3(x_n)$, en $f^4(x_n)$ Leid uit de grafiek van $f^2(x_n)$ het aantal punten met periode 2 af.
    Leid uit de grafiek van $f^3(x_n)$ het aantal punten met periode 3 af.

3 Continue Dynamische Modellen

Globale eindterm: De kandidaat kan in differentiaalverglijkingen van de vorm $y' = f(y, t)$ eigenschappen van f relateren aan eigenschappen van oplossingen, zoals stationariteit, monotonie, en asymptotisch gedrag, en in simpele gevallen een oplossing expliciet bepalen.

Specifieke eindtermen: De kandidaat kan:

1. Een differentiaalvergelijking van het type $y'(t) = f(y(t), t)$ herkennen en gebruiken.

   VOORBEELD:
   Gegeven is de vergelijking
   $$y' = y^2 - \sin t \qquad \text{voor } t > 0.$$
   Als $y'(\pi) = 3$, bepaal dan $y(\pi)$.

2. Door middel van substitutie controleren of een gegeven functie y oplossing is van een gegeven differentiaalvergelijking.

   VOORBEELD:
   Verifieer dat de functie
   $$y(t) = \frac{1 - e^t}{1 + e^t}$$
   oplossing is van de vergelijking
   $$y' = \frac{1}{2}(1 - y^2).$$

3. Door middel van een formule de algemene oplossing beschrijven van differentiaalvergelijkingen van de vorm $y' = cy$, met c constant, en wanneer mogelijk vergelijkingen in deze vorm brengen.

   VOORBEELD: zie onder punt 5

4. Door middel van scheiding van variabelen een oplossing bepalen, in gevallen waarin de relevante afgeleiden en integralen bekend mogen worden verondersteld.

   VOORBEELD: Bepaal een oplossing van de vergelijking

   $$y' = yt, \qquad \text{voor } t > 0,$$

   met beginwaarde $y(0) = 1$.

5. Relaties leggen tussen een oplossing van een differentiaalvergelijking en de eigenschappen van het model waar de differentiaalvergelijking een beschrijving van is.

   VOORBEELD: (Netwerk B1 deel 3, 2000)
   Een fles melk wordt uit de koelkast gehaald ($t = 0$) en heeft dan een temperatuur van 6°C. Omdat het in de keuken warmer is, warmt de melk op. De temperatuursverandering wordt beschreven door de vergelijking

   $$\frac{dT}{dt} = a(19 - T), \qquad t \text{ in minuten.}$$

   (a) Wat stelt het getal 19 voor?

   (b) Geef een formule voor de temperatuur T.

   (c) Na een kwartier is de temperatuur 12°C. Bereken a.

6. De methode van Euler gebruiken om met behulp van een grafische rekenmachine of computer een oplossing te benaderen van een differentiaalvergelijking.

   VOORBEELD: (Getal en Ruimte VWO B5, Hoofdstuk 17, 2003)
   Gegeven is het dynamische model $\frac{dI}{dt} = 100 - I$ met $I(0) = 10$ en t in minuten.

   (a) Geef een benadering van $I(1)$. Neem stapgrootte $0,2$.

   (b) Geef een benadering van $I(1)$ met stapgrootte $0,1$. Bereken hoeveel procent het antwoord van a verschilt van de benadering van $I(1)$ die je krijgt met $t = 0,1$.

   (c) Bereken hoeveel procent de benadering van $I(1)$ die je krijgt met $t = 0,1$ verschilt met de benadering van $I(1)$ die je krijgt met $t = 0,05$.

7. Bij een vergelijking $y' = f(y,t)$ de stelling van existentie en uniciteit gebruiken bij het onderzoeken van oplossingen.

   VOORBEELD: ([BDH], p. 74, ex. 9)

   (a) Verifieer dat $y(t) = t^2$ en $y(t) = t^2 + 1$ beide oplossingen zijn van de vergelijking
   $$y' = -y^2 + y + 2yt^2 + 2t - t^2 - t^4.$$

(b) Toon aan dat als y een oplossing is van deze differentiaalvergelijking, en $0 < y(0) < 1$, dan geldt $t^2 < y(t) < t^2 + 1$.

8. Evenwichten (stationaire oplossingen) van een vergelijking $y' = f(y)$ relateren aan de functie f, en hun stabiliteit relateren aan de afgeleide f'.

   VOORBEELD: ([BDH], p. 91, ex. 1) Schets het hellingsverloop (*slope field*, hier moet een betere naam voor komen) van de vergelijking

   $$y' = 3y(1 - y).$$

   Bepaal de evenwichten en hun stabiliteit.

9. In de vergelijking $y' = f(y)$ het tekenverloop van f gebruiken om het gedrag van oplossingen te onderzoeken (monotonie en asymptotisch gedrag op $t = \infty$).

   VOORBEELD: ([BDH, p. 49, ex. 12) Beschouw de differentiaalvergelijking

   $$y' = y^3 - 2y^2 + y.$$

   (a) Schets het hellingsverloop.

   (b) Gebruik dit hellingsverloop om de oplossingen $y(t)$ te schetsen met begincondities $y(0) = 0$, $y(0) = 1/2$, $y(1) = 1/2$, $y(0) = 3/2$, en $y(0) = -1/2$.

4 Profielspecifieke verdieping

Globale eindterm: De kandidaat kan de stof van de subdomeinen Discrete Dynamische Modellen en Continue Dynamische Modellen gebruiken in een profielspecifieke verdieping.

Een mogelijke verdieping kan gevonden worden in de vergelijkingen van de tweede orde, die sterk gerelateerd zijn aan systemen van vergelijkingen van de eerste orde. Een invulling hiervan wordt hieronder geschetst. Hierbij maken we gebruik van voorkennis van complexe getallen, waaronder de complexe exponentiële functie.

Specifieke eindtermen: De kandidaat kan

1. Tweede-orde differentiaalvergelijkingen van de vorm

   $$y'' + f(t)y' + g(t)y = h(t)$$

   relateren aan systemen van eerste-orde differentiaalvergelijkingen van de vorm

   $$\begin{aligned} x' &= f(x, y, t) \\ y' &= g(x, y, t) \end{aligned}$$

2. Voor beide typen problemen de voorwaarden voor unieke bepaling van oplossingen (existentie en uniciteit) hanteren

3. Met de complexe exponentiële functie vergelijkingen analyseren van de vorm
$$y'' + ay' + by = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \tag{1}$$
en daarbij de concepten karakteristieke vergelijking, karakteristieke waarde, oscillatie, amplitude, periode, groei, verval, stabiliteit hanteren

   VOORBEELD: Gegeven is de vergelijking
$$y'' + 4y' + 8y = 0.$$

   (a) Bepaal de reële algemene oplossing van deze vergelijking

   (b) Beschrijf het gedrag van oplossingen als $t \to \infty$ en als $t \to -\infty$. Is de oorsprong stabiel?

4. Asymptotisch gedrag van oplossingen van zulke vergelijkingen gebruiken en relateren aan karakteristieke waarden

5. Bij gegeven beginwaarden een specifieke oplossing bepalen

6. Verbanden leggen en gebruiken tussen oplossingen van (1) en de bijbehorende oplossingskrommen in het y, y'-vlak

7. Vergelijkingen van de vorm (1) en het gedrag van hun oplossingen relateren aan een gegeven toepassing

VOORBEELD EXAMENSOM: Gegeven is de vergelijking
$$y'' + y' = 0 \qquad \text{voor } 0 < t < 1.$$

1. In tegenstelling tot de situatie in de klas willen we deze nu oplossen met een begin- en een eindwaarde:
$$y(0) = 1, \qquad y(1) = 0.$$
   Bepaal daarvoor eerst de algemene oplossing van de combinatie
$$\begin{aligned} &y'' + y' = 0 \qquad \text{voor } 0 < t < 1 \\ &y(0) = 1 \end{aligned}$$
   Let op! deze hangt nog van één parameter af. Welke?

2. Vind de waarde van deze parameter zódat $y(1) = 0$. Teken de grafiek van de bijbehorende oplossing.

3. Leg uit waarom de gevonden oplossing van het probleem
$$\begin{aligned} &y'' + y' = 0 \qquad \text{voor } 0 < t < 1 \\ &y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \end{aligned}$$
   de enige oplossing is.

5 Toelichting

5.1 ICT

De eindtermen spreken nauwelijks van ICT, en behoudens expliciete vermelding zijn de bovenstaande eindtermen en voorbeeldsommen opgesteld om getoetst te worden *zonder* hulpmiddelen. Dit is in lijn met het uitgangspunt *Use to Learn* van cTWO. Desalniettemin beveelt de commissie alle didactische mogelijkheden, waaronder uiteraard die van ICT, van harte aan om leerlingen op deze eindtermen voor te bereiden.

5.2 Differentiaalvergelijkingen versus dynamische systemen

In pre-tweedefasemethoden worden differentiaalvergelijkingen vaak behandeld op een manier die sterk afwijkt van wat deze commissie voor ogen staat. Voor deze module Dynamische Modellen is het uitgangspunt het *dynamisch systeem*, een systeem waarvan de toestand y in de tijd verandert. De tijd kan hier discreet of continu zijn. Voor discrete tijd is een oplossing van het dynamische systeem een rij y_n, en we beperken ons voornamelijk tot systemen waarvan de evolutie geschreven kan worden in de vorm $y_{n+1} = f(y_n, n)$ met een scalaire y_n.

Voor continue tijd is $y = y(t)$ een functie van de continue variabele t, en het systeem wordt gekarateriseerd door de toestandsverandering $y'(t)$ te geven als functie van de huidige toestand y en het tijdstip t, *i.e.* $y' = f(y, t)$.

Deze keuze heeft een aantal voordelen. Ten eerste zijn de discrete en de continue systemen sterk verwant, en bieden de discrete systemen een laagdrempelige (en vroeg uitvoerbare) introductie voor de continue systemen. Veel van de issues zijn bovendien sterk analoog, zoals stationariteit en gedrag als $n \to \infty$ of $t \to \infty$. Een oplossing van een continu systeem is daarnaast altijd een functie van t, hetgeen conceptueel simpeler is dan de vroegere 'formule'. Tenslotte is de relatie met modellen voor deze klasse van differentiaalvergelijkingen het meest eenvoudig te doorgronden.

5.3 Lesmateriaal

De commissie heeft een aantal paragrafen uit bestaande methodes aangewezen waarmee een flink deel van de stof te behandelen is. Geen enkele van de huidige methodes overdekt de bovenstaande eindtermen geheel, en aanvulling is daarom nodig.

5.3.1 Discrete dynamische modellen:

... nog aan te vullen ...

5.3.2 Continue dynamische modellen:

Getal en Ruimte VWO B5, 2003: 17.1 Dynamische modellen (NB: geen fysica), 17.2 Differentiaalvergelijkingen, 17.3 Methode van Euler, 17.4 Differentiaalvergelijkingen oplossen

Netwerk B1 deel 3, 2000: 8.1 Modellen 8.2 Opstellen van een model 8.3 Dynamische groeimodellen 8.4 De methode van Euler 9.2 Exponentiële groei 9.3 Andere groeimodellen 9.4 Toepassingen

Voor beide is uitbreiding nodig, met name op het gebied van de kwalitatieve analyse (de analyse zonder oplossingen uit te rekenen). Hiervoor zijn de paragrafen 1-5 van Hoofdstuk 1 van Blanchard, Devaney, & Hall, Differential Equations, 2002 [BDH] goed te gebruiken.

6 Contexten en modelleren

6.1 Positie van modelleren

Een belangrijke keuze bij de invulling van de module Dynamische Modellen betreft de rol van contexten, modellen, en het modelleren. De keuze van de commissie voor de eindtermen van de module DM stoelt op twee uitgangspunten die elkaar bijna tegenspreken.

1. 'Het duale karakter van de wiskunde is wezenlijk: de abstractie komt voort uit het abstraheren van toepassingen (tenslotte begon wiskunde als hulpmiddel bij handel en landmeetkunde), en juist nieuwe toepassingen worden mogelijk vanuit een abstract gezichtspunt' (Klaas Landsman). Hoewel een deel van de wiskunde los kan worden gezien van toepassingen, geeft zeker bij de domeinen van discrete en continue dynamische systemen de toepassing, het model, een waardevol perspectief.

2. Het zelf opstellen en interpreteren van een model, op basis van fysische, geometrische, of getalsmatige aannamen en observaties, is een vaardigheid op hoog niveau, die bovendien sterk afhankelijk is van kennis van en inzicht in de wiskundige aspecten van het model zelf. Daarom moet het slechts in zeer simpele gevallen op een examen getoetst worden.

De commissie ziet een belangrijk onderscheid tussen enerzijds *fysisch* modelleren en anderzijds *getalsmatig* en *geometrisch* modelleren. Het *fysisch* modelleren, het opstellen van modellen op basis van fysische beginselen zoals de wetten van Newton, is een intrinsiek lastiger activiteit en is daarom geen onderdeel van de eindtermen. Merk op dat het hier alleen gaat over de eindtermen: een leerling zal niet gevraagd worden om fysische wetten toe te passen om een model op te stellen. Dit laat onverlet dat de fysische wereld ons een overdaad aan voorbeeldproblemen levert.

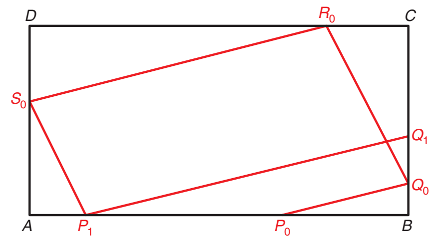
Anders is de situatie voor *getalsmatig* en *geometrisch* modelleren. Hieronder volgen twee voorbeeldsommen om deze twee klassen te illustreren.

Voorbeeld: Geef een recurrente betrekking voor een bolstapeling met vierkant grondpatroon (antwoord: $B_n = B_{n-1} + n^2$ met $B(0) = 0$) en bepaal het aantal bollen in een dergelijke piramide van hoogte 5.

Voorbeeld: G&R, som 9 in H24 op p 137:

9 In rechthoek $ABCD$ met $AB = 12$ en $BC = 6$ vindt het volgende iteratieve proces plaats.

- Neem punt P_0 op zijde AB.
- Q_0 ligt op zijde BC zo, dat $BQ_0 = \frac{1}{4}BP_0$.
- R_0 ligt op zijde CD zo, dat $CR_0 = \frac{1}{2}CQ_0$.
- S_0 ligt op zijde AD zo, dat $DS_0 = \frac{1}{4}DR_0$.
- P_1 ligt op zijde AB zo, dat $AP_1 = \frac{1}{2}AS_0$.
- Q_1 ligt op zijde BC zo, dat $BQ_1 = \frac{1}{4}BP_1$.
- Enzovoort. Zie figuur 24.29.



figuur 24.29

Noem $AP_n = x_n$ en $AP_{n+1} = x_{n+1}$.

Er geldt dan $x_{n+1} = 1\frac{11}{16} + \frac{1}{64}x_n$.

a Toon aan dat deze formule juist is.

b Toon aan dat de rij x_n convergeert en bereken de exacte waarde van $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

c Bestaat er een x_0 zo, dat een van de andere termen van de rij gelijk is aan 2?

6.2 Voorbeelden van modellen/toepassingen/contexten

- Radioactief verval (Kalium-Argon methode, C14 methode)
- Levensduur van een gloeidraad (verdamping van materiaal ten gevolge van hoge temperatuur, evenredig met het oppervlak van de draad)
- Verdamping mottebal (verdamping evenredig met het oppervlak van het bolletje: $\dot{x} = -cx^{2/3}$)
- Massa en snelheid van een vallende regendruppel (regendruppel groeit door condensatie, snelheid evenredig met oppervlakte)
- Chemisch afval in meer, instroom vervuild water.

Bij tweede orde differentiaalvergelijkingen: resonantie (AANVULLEN), en bij stelsels vergelijkingen

- Verbonden vaten met zoutoplossingen (uit Robinson, An introduction to Dynamical Systems, Pearson 2004).
- Electronische circuits (Kirchhoff).