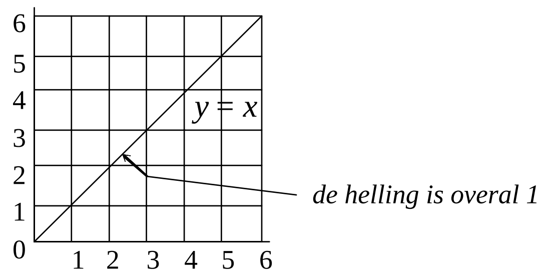
1.4 *Differentiëren van machtsfuncties*

De inmiddels bekende regel voor het differentiëren van machtsfuncties luidt:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

Deze regel kun je vrij gemakkelijk 'herontdekken' met behulp van de (uitgebreide) produktregel.
Voor $n = 1$ is de regel direct aan de grafiek te zien.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x] = 1$$



Voor $n = 2, 3, 4$, enz. werkt de produktregel:

$$\frac{d}{dx}[x^2] = \frac{d}{dx}[x \cdot x] = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

$$\frac{d}{dx}[x^3] = \frac{d}{dx}[x \cdot x \cdot x] = 1 \cdot x \cdot x + x \cdot 1 \cdot x + x \cdot x \cdot 1 = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}[x^4] = \frac{d}{dx}[x \cdot x \cdot x \cdot x] = 1 \cdot x \cdot x \cdot x + x \cdot 1 \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 \cdot x + x \cdot x \cdot x \cdot 1 = 4x^3$$

enzovoort.
In dit onderdeel gaat het vooral over machtsfuncties met negatieve en/of gebroken exponenten. Dus functies als: $y = x^{-1}$, $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-2\frac{1}{3}}$

De vraag is nu of voor deze functies dezelfde regel van kracht is, dus of geldt:

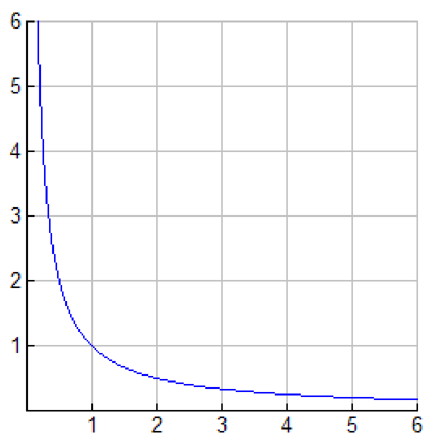
$$\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1} \text{ voor } n = -1, \tfrac{1}{2}, -2\tfrac{1}{3} \text{ enz.}$$

De eerstvolgende opgaven en stukjes theorie willen je overtuigen dat dit inderdaad het geval is. De latere opgaven van dit hoofdstuk zijn bedoeld als oefeningen en toepassingen van de regel.

1.20 Voor $n = -1$ zou de regel betekenen:

$$\frac{d}{dx}[x^{-1}] = -1 \cdot x^{-2}$$

a Bekijk de grafiek van $f(x) = x^{-1}$.
Meet de helling in $(1,1)$ en in $(2,\frac{1}{2})$ en ga na of de regel in die gevallen zo'n beetje klopt.



b Neem het interval [4,99; 5,01] en bereken het differentiequotiënt $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ op dit interval.

c Ga na of de uitkomst ongeveer gelijk is aan $-1 \cdot x^{-2}$ voor $x = 5$

Het lijkt er op of de regel $\dfrac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$ klopt voor $n = -1$

Voor het bewijs gebruiken we het volgende principe:

> Voorbeeld: $x^2 \cdot x = x^3$
>
> $2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$
>
> Differentieer twee vormen die aan elkaar gelijk zijn en je krijgt weer twee gelijke vormen!

Neem nu: $x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x$

Als je nu linkerlid en rechterlid wil differentiëren, zit je met het probleem dat je de afgeleide van $\dfrac{1}{x}$ niet kent.

$$x^2 \cdot \frac{1}{x} = x$$

$$2x\frac{1}{x} + x^2 \cdot ? = 1 \quad *$$

Op de plaats van ? past de afgeleide van $\dfrac{1}{x}$.

Je kunt die afgeleide nu vinden door (*) op te vatten als een vergelijking met ? als *onbekende* en de vormen met *x* als *bekende*.

? opgelost geeft $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} 2x \cdot \frac{1}{x} + x^2 \cdot \boxed{?} &= 1 \\ 2 + x^2 \cdot \boxed{?} &= 1 \\ x^2 \cdot \boxed{?} &= -1 \\ \boxed{?} &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Dus: $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{x}\right] = -\dfrac{1}{x^2}$ ofwel $\dfrac{d}{dx}[x^{-1}] = -1 \cdot x^{-2}$

1.21 Bekijk het voorgaande bewijs goed.

Hoe kun je $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]$ ook vinden door uit te gaan van $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

1.22 $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$

a Laat met behulp van de produktregel zien dat $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\right] = \frac{-2}{x^3}$

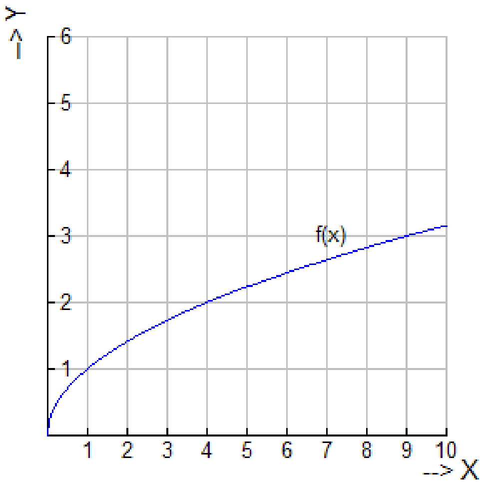
b Is dit resultaat in overeenstemming met $\frac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$?

c Wat zal de afgeleide functie zijn van $f(x) = \frac{1}{x^4}$

1.23 De grafiek van $f(x) = \frac{1}{x^2}$ is symmetrisch ten opzichte van de y-as.

a Hoe kun je dat zien aan de formule?
b Welke asymptoten heeft de grafiek?
c Teken de grafiek van f.
d De raaklijnen in de punten $(\frac{1}{2}, 4)$ en $(-\frac{1}{2}, 4)$ snijden elkaar in A en de x-as respectievelijk in B en C.
Bereken de oppervlakte van driehoek ABC.

1.24 Hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$



a Neem de grafiek van $y = x^{\frac{1}{2}}$ over en teken in dezelfde figuur ook de grafiek van $y = x^2$ voor $x \geq 0$.
De twee grafieken zijn elkaars spiegelbeeld. Ten opzichte van welke spiegelas?

b De hellingscoëfficiënt van de raaklijn aan $y = x^2$ in het punt (1,1) is gelijk aan 2. Als je die raaklijn spiegelt in de lijn $y = x$ krijg je de raaklijn aan $y = x^{\frac{1}{2}}$
Hoe groot is de hellingscoëfficiënt van dat spiegelbeeld?

c De hellingscoëfficiënt van $y = x^2$ in het punt (5,25) is 10.
Hoe kun je hieruit de hellingscoëfficiënt van $y = x^{\frac{1}{2}}$ vinden in het punt (25,5)?

De regel $\frac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$ is ook geldig voor $n = \frac{1}{2}$.
Het bewijs gaat weer met de produktregel.

Er geldt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} &= x \\
\boxed{?} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \boxed{?} &= 1 \\
2\sqrt{x} \cdot \boxed{?} &= 1 \\
\boxed{?} &= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Dus $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ is de afgeleide van $\sqrt{x}$.

Kortom: $\dfrac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

of: $\dfrac{d}{dx}[x^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

1.25 Op dezelfde manier kun je de afgeleide functie van $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ vinden.

Je begint nu zó: $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x$

a Differentieer nu met de produktregel en laat zien dat geldt: $\dfrac{d}{dx}\left[x^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$.

b Wat zal de afgeleide functie zijn van $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$?

En van $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$?

1.26 Bekijk opnieuw de grafiek van $y = x^{\frac{1}{2}}$ (opgave 1.26).

In welk punt van de grafiek heeft de raaklijn een hellingshoek van 45°?

1.27 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ kun je differentiëren met de produktregel, immers: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$

Voer de berekening uit en laat zien dat $\dfrac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$ ook klopt voor $n = \frac{2}{3}$

Voortaan mag je direct de volgende regel toepassen.

Voor alle ***positief gehele***
negatief gehele
positief gebroken
negatief gebroken

exponenten ***r*** **geldt:**

$$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}$$

Voorbeelden:

(1) $f(x) = 6\sqrt[3]{x^2}$

Om te kunnen differentiëren, schrijf je: $f(x) = 6 \cdot x^{\frac{2}{3}}$

Er volgt: $f'(x) = 6 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

(2) $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$

Om te kunnen differentiëren, schrijf je: $f(x) = 3x^{-4}$.

Er volgt: $f'(x) = 3 \cdot -4x^{-5} = -12x^{-5} = \dfrac{-12}{x^5}$

1.28 Differentieer nu de volgende functies.

a $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ c $f(x) = 10 \cdot x^{0,2}$ e $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x}$

b $f(x) = \dfrac{5}{x^3}$ d $f(x) = 0,2 \cdot x^{10}$ f $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1.29 Voorbeeld: $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$

Om f te kunnen differentiëren, kun je eerst als volgt herleiden:

$$f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = x + 1 + x^{-1}.$$

Er volgt nu: $f'(x) = 1 + 0 - x^{-2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

Herleid en differentieer:

a $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$ c $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}$

b $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$ d $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 - 3x}{x\sqrt{x}}$

1.30 Je kunt $y = x\sqrt{x}$ op twee manieren differentiëren.

(i) door $x\sqrt{x}$ op te vatten als het produkt van x en $\sqrt{x}$.

(ii) door $x\sqrt{x}$ op te vatten als macht van $x(= x^{1\frac{1}{2}})$.

Differentieer de functie op beide manieren en laat zien dat je resultaten gelijk zijn.

1.31 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $f(x) = \sqrt{x}$

Bereken $f'(x)$ en $g'(x)$

1.32 Bereken:

a $\dfrac{d}{dx}[\sqrt{x^5}]$ voor $x = 1$

b $\dfrac{d}{dx}[(\sqrt{x})^5]$ voor $x = 4$

c $\dfrac{d}{dx}[x\sqrt[2]{x}]$ voor $x = 9$

d $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}\right]$ voor $x = 9$

1.33 $f(x) = 2\sqrt{x}$, $g(x) = x$, $v(x) = f(x) - g(x)$.

a Teken in één figuur de grafieken van *f, g* en *v*.

b Toon aan dat de maximale waarde van *v(x)* gelijk is aan 1.

1.34 $f(x) = x^{1,5} - 3x \ (x \geq 0)$.

a Vul in:

x	0	1	4	9	16
f(x)					
f′(x)					

b Teken een grafiek van *f*

c Wat is het bereik van *f* ?

1.35 In een destilleerderij kan per dag 1000 liter jonge jenever worden gestookt. De produktiekosten *K* (in guldens) en de opbrengst *O* (in guldens) zijn functies van de geproduceerde hoeveelheid *q* (in liters).

De economisch adviseur van het bedrijf heeft een wiskundig model opgesteld:

$K = q^{\frac{2}{3}}$ en $O = 4q^{\frac{1}{2}}$

a Teken de grafieken van *K* en *O* als functie van *q*.

b Teken ook een grafiek van de winst $W(= O - K)$ als functie van q. Bij welke produktieomvang is *W* maximaal?

1.36 Op de emballage-afdeling van een fabriek vervaardigt men onder andere kartonnen dozen met een inhoud van 36 dm^3. De dozen zijn aan de bovenkant open. De bodem van zo’n doos moet een vaste vorm hebben (lengte en breedte moeten zich verhouden als 2 : 1)

a Stel de breedte van de doos *x* dm.

Toon aan dat de hoogte van de doos gelijk moet zijn aan $\frac{18}{x^2} dm^3$

b Druk de benodigde hoeveelheid karton (=*k)* voor de zijkanten en bodem uit in *x*.

c Bereken $\frac{dk}{dx}$

d De fabrikant concludeert dat hij het voordeligst uit is als hij dozen produceert die 3 dm breed, 6 dm lang en 2 dm hoog zijn. Hoe volgt dit uit b en c?

1.37 Zie de volgende tabel met zestien functies.
Differentieer ze alle zestien en vereenvoudig zo mogelijk de resultaten.

$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$\sqrt{x^{-1}}$	$\frac{1}{x}\sqrt[4]{x}$	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$
$\frac{1}{x\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x^{-3}}$	$10x^{0,7}$	$\frac{12}{x^{0,3}}$
$\frac{x+1}{\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})^{-3}$	$\sqrt[3]{8x}$	$\sqrt[3]{x^{-8}}$
$\frac{1}{x} + \sin x$	$\frac{1}{x} \cdot \sin x$	$\frac{2}{\sqrt{x}}\cos x$	$\frac{2\cos x}{\sqrt{x}}$