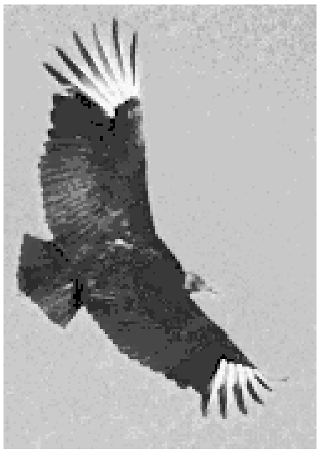
4.1 *Inleiding evenredigheden*

In deze paragraaf leer je:

- het begrip evenredig aan de hand van praktijksituaties
- in het geval van evenredigheid de evenredigheidsconstante te bepalen
- over de glijverhouding bij het zweven in de natuur en de techniek

4.1.1 glijvlucht van gier en eekhoorn



Op de kaft van dit boekje prijkt de Lammergier. Sinds enige tijd komt deze weer voor in Europese berggebieden als de Pyreneeën en Alpen.

Gieren zijn uitstekende zwevers. Zie deze foto van een zwarte gier uit Amerika. In pure glijvlucht – dus zonder vleugelslagen en zonder steun van stijgende luchtstromen – daalt een gier slechts één meter op elf meter glijden.

Je zult weinig moeite hebben met de nu volgende vragen, maar het idee erachter gaan we veelvuldig gebruiken.

4.1 Vul de tabel aan; doe het regelgewijs van boven naar beneden.
Let erop dat je het rekenwerk zo eenvoudig mogelijk houdt. (Delen door 11 is bijvoorbeeld nooit echt nodig.)

gier	
glijafstand (in meters)	*daling (in meters)*
11	1
....	2
....	10
220	....
550	....

4.2 Duiven zie je ook vaak een stuk zweven zonder vleugelbeweging. Hun prestaties zijn wel wat minder.
De getallen in de eerste regel van de volgende tabel kun je makkelijk op waarheid controleren. Niet precies natuurlijk, maar toch.
Vul ook hier de rest regelgewijs aan.

duif	
glijafstand (in meters)	*daling (in meters)*
15	4
....	2
....	10
150	....

4.3 a Ga na dat voor de zwevende gier en duif het volgende principe geldt:

Als daling en glijafstand met een zelfde getal worden vermenigvuldigd of door een zelfde getal worden gedeeld, ontstaan weer kloppende getallen.

b Ga na dat je alle berekeningen van de vorige opgaven met behulp van dit principe kunt uitvoeren.

4.1.2 evenredigheden

Dit boekje gaat over een bepaald soort verbanden, waarbij de glijvlucht van de gier en de duif voorbeelden zijn. Dit waren twee eenvoudige gevallen, maar moeilijker voorbeelden volgen straks. Het is daarom handig wat terminologie en notaties af te spreken.

evenredig

We zeggen in het geval van de duif en de gier:

de glijafstand is evenredig met de daling

notatie

en we gebruiken een speciale notatie:

$$glijafstand \propto daling$$

Zo’n evenredigheid stelt in één regel een heleboel gevallen van glijafstand-en-daling voor. In een tabel (zoals hierboven) staan zulke gevallen opgesomd.
In de tabel staan natuurlijk altijd maar enkele voorbeelden; bij de duif zijn het er slechts vier van de eindeloos vele mogelijkheden.

hoofdeigenschap

De hoofdeigenschap van de evenredigheden heb je in opgave 3 gezien. Je hebt gezien hoe je snel nieuwe regels van de tabel kunt maken:

Uitgaand van één voorbeeld van glijafstand-en-daling kun je een nieuw voorbeeld maken door beide getallen met eenzelfde getal te vermenigvuldigen.

Schematisch weergegeven:

		glijafstand	***daling***	
voorbeeld:		**45**	**7**	
	× **3**			× **3**
nieuw voorbeeld:		**135**	**21**	

4.4 Geldt ook: *daling* $\propto$ *glijafstand* ? Zo ja, waarom?

4.1.3 de finesses van het zweven

Er is nog iets bijzonders aan de hand met evenredigheden, iets dat we eigenlijk nauwelijks gebruikt hebben.

4.5 Bij duif en gier geldt allebei: *glijafstand* $\propto$ *daling*. Toch zijn duif en gier verschillend en dat kun je hieraan niet zien. Waar zit het verschil dan wel in?

4.6 Je kunt het verschil tussen duif en gier ook nog zó benadrukken:
Voor de gier geldt:

$$glijafstand = \text{constant getal } \times daling$$

a Welk getal is dat voor de gier?
b En voor de duif?

evenredigheids-constante

Het vaste getal dat je hier hebt gezien, heet *de evenredigheidsconstante* van het verband.
Dat is in dit geval dus een karakteristiek getal voor de zwever.

finesse of

Bij het zweven in de luchtvaart en in de biologie wordt deze constante *de finesse,*

glijgetal **_het glijgetal_ of _de glijverhouding_ van de vlieger en deze wordt met de letter _F_ aangegeven. Hier is voor enkele vliegers het glijgetal:**

zwever	*finesse*
zweefvliegtuig	35
albatros	20
Boeing 747	15
gier	11
gierzwaluw	10
koolwitje	4
vliegende eekhoorn	2.5
sprinkhaan	1.5

Mahogany Glider

4.7 Een bijzondere vliegende eekhoorn, de Australische Mahogany Glider, zie je hier in actie. Een zeldzame rakker! Tien jaar geleden is deze weer opnieuw ontdekt in de buurt van Ingham in Australië.
Als de rechtse boom gemist wordt, hoe loopt het dan af?

4.8 De Boeing 747 vliegt standaard op 10 kilometer hoogte. Bij de afdaling zal nog enig gas worden gegeven, waardoor de daling minder steil wordt. Hoever van Schiphol zal de daling moeten worden ingezet?

4.9 Met welke glijgetal vliegt een door jou gevouwen papieren vliegtuigje? (Demonstratie in de klas alleen bij $F > 5$.)

4.10 Wat is het glijgetal van een slechte zwever: de vallende steen?

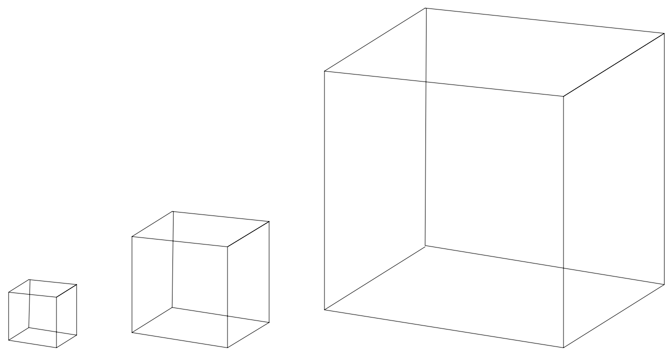
4.2 *Schaalvergroting*

In deze paragraaf leer je:

- wetten van de schaalvergroting ontdekken
- de wetten van de schaalvergroting
- hoe de wetten van de schaalvergroting te gebruiken
- de uithaalregel en het gebruik ervan

4.2.1 schaalvergroting

In deze figuur zie je drie kubussen, met een ribbe van 1 meter, 2 meter en 5 meter.



ribbe = 1 *ribbe = 2* *ribbe = 5*

We kijken naar:

- *draadkubussen* van dun staafmateriaal, diameter 1 cm (dus alleen het staketsel)
- *plaatkubussen* van plaatmateriaal met een dikte van 4 mm (dus alleen de zes zijvlakken)
- *massieve kubussen*,
  alles van staal met soortelijk gewicht 8 kg/dm^3.

En dan al die kubussen in allerlei maten, dat wil zeggen: met elke gewenste ribbelengte. Je kunt ook zeggen we hebben verschillende schaalgroottes van elke draad-, plaat- en massieve kubus.

4.11 De gewichten van al deze kubussen hangen van het type en de ribbe af.

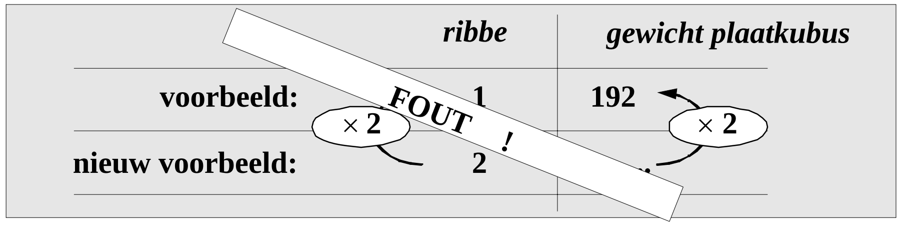
a Probeer bij het invullen van deze tabel gebruik te maken van eerder uitgerekende gevallen.

	gewicht kubussen		
ribbe	***draadkubus***	***plaatkubus***	***massieve kubus***
1 m	7.5 kg	192 kg	8000 kg
2 m	15 kg	768 kg	
3 m			
4 m			
5 m			
10 m			

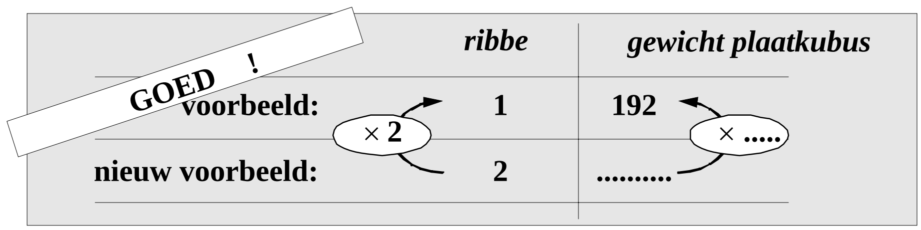
b Er geldt:
gewicht **draadkubus** $\propto$ ribbe
Wat is de evenredigheidsconstante?

c Ga na dat niet waar zijn:
gewicht ***plaatkubus*** $\propto$ *ribbe*
en gewicht **massieve kubus** $\propto$ ribbe

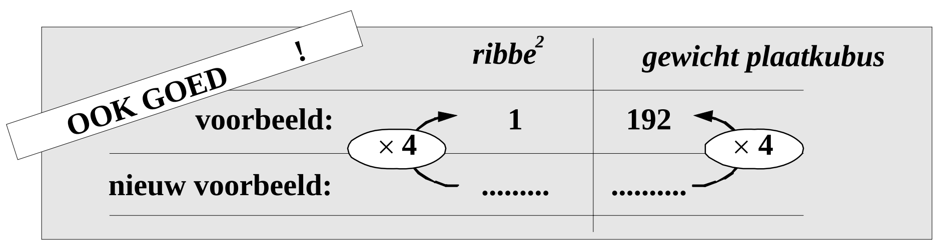
Het schema van bladzijde XX4 werkt niet zonder meer voor de plaatkubus:



4.12 Zorg dat dit schema wel in orde is, door de juiste vermenigvuldigtallen in te vullen.



Er is nog een correct schema mogelijk. Daarin staat niet de *ribbe* zelf, maar *ribbe*^{2}.



4.13 Je kunt de factor 4 natuurlijk door een ander getal vervangen. Vaak zullen dat kwadraten zijn, maar dat hoeft niet. Geef een voorbeeld waarbij de *oppervlakte* verdubbeld wordt en niet de ribbe.

vergroting van de kubus

Bij de vergroting van de kubussen geldt wel:

gewicht *plaatkubus* $\propto$ ***ribbe*** ^{2}

4.14 a Hoe groot is hier de evenredigheidsconstante?
b Maak nu net zo'n GOED! en OOK GOED!- schema voor het gewicht van de massieve kubus.
c Stel nu zelf een evenredigheid op voor het gewicht van de massieve kubussen en bepaal ook hier de evenredigheidsconstante.

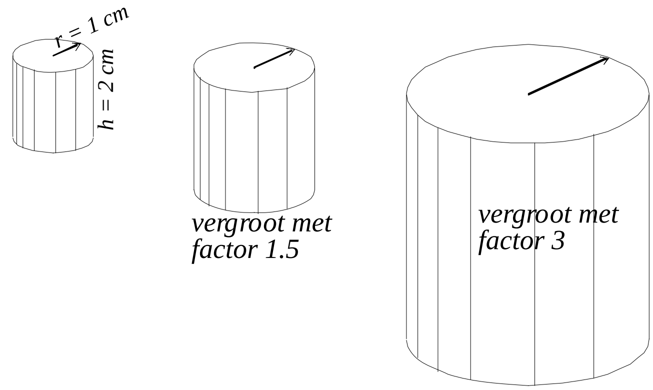
4.15 De kubussen met ribbe 3 en 5 zijn *vergrotingen* van de eerste kubus met *vergrotingsfactoren* 3 en 5.
a Ga na dat in dat geval de oppervlaktes met een factor 9 en een factor 25 worden vergroot.
b Vind ook de vergrotingsfactoren voor de inhouden.

4.16 a Bij de gewichten van de massieve kubus komen forse getallen voor. Waar komt dat eigenlijk door?
b Bereken het gewicht van een massieve kubus met ribbe 0.5 meter.

c Idem voor plaat- en draadkubus.

In wezen ging het om oppervlakte en inhoud van de kubus. Bij schaalvergroting van andere vormen treden vergelijkbare effecten op.

4.17 Als tweede voorbeeld de oppervlakte en inhoud van enkele cilinders met dezelfde vorm.



a Enkele maten staan bij de kleinste cilinder: straal van de cirkel en de hoogte van de cilinder. Twee vergrootte exemplaren staan afgebeeld. Vul de tabel verder in.

vergrotings factor	***straal***	***hoogte***	***totale oppervlakte***	***inhoud***
1	1	2		
1.5	1.5	3		
3				
15				

b Ga nu na dat de volgende vier evenredigheden gelden,

oppervlakte ***cilinder*** $\propto$ *straal* ^{2}	*oppervlakte* ***cilinder*** $\propto$ *hoogte* ^{2}
inhoud ***cilinder*** $\propto$ *straal* ^{3}	*inhoud* ***cilinder*** $\propto$ *hoogte* ^{3}

en bepaal de vier evenredigheidsconstanten door voor enkele van de cilinders $\dfrac{oppervlakte}{straal^2}$, enzovoorts, te berekenen.

c In plaats van met de straal kun je ook met de diameter van de cirkel werken. Leg uit waarom ook gelden

oppervlakte ***cilinder*** $\propto$ *diameter* ^{2}
inhoud ***cilinder*** $\propto$ *diameter* ^{3}

d Als de lengtematen (dus straal, hoogte of diameter) van de cilinder 3 of 5 keer worden vergroot, met welke factor worden dan oppervlakte en inhoud vergroot?

4.2.2 samenvatting: de wetten van de schaalvergroting

Bij het voorgaande heb je gemerkt dat bij schaalvergroting met een bepaalde factor de oppervlakte en de inhoud niet evenredig met die factor toenemen. Maar wel met het

kwadraat en respectievelijk de derde macht van die factor! Oppervlakte en inhoud groeien dus veel harder bij schaalvergroting en voor de inhoud geldt dat het sterkst.
Wat voor de kubus en de cilinder geldt, gaat op voor alle vormen die vergroot worden.
Bij gewicht van massieve voorwerpen werk je met inhoud; als het om plaatmateriaal gaat of om het schilderen van een voorwerp is oppervlakte de maat waar je mee rekent. Je ziet daaruit dat het om belangrijke praktische grootheden gaat.
Belangrijk!
Let erop dat bij deze vergroting alle lengtematen (dus lengte, hoogte en breedte, maar ook bijvoorbeeld diameter), met dezelfde factor vermenigvuldigd worden. Anders gaat het niet goed!
Hier zijn de wetten van de schaalvergroting:

EVENREDIGHEIDSWETTEN BIJ VERGROTING

Bij evenredige vergroting van een voorwerp zijn alle lengtematen evenredig met elkaar.

Voor oppervlakte en inhoud gelden:

$$\text{oppervlakte} \propto \text{lengtemaat}^2$$
$$\text{inhoud} \propto \text{lengtemaat}^3$$

waarbij voor de lengtemaat zowel lengte, hoogte, breedte of een andere in lengte uitgedrukte maat kan worden gekozen.

VERGROTINGSWETTEN

Bij schaalvergroting van een voorwerp met een factor f worden

lengte, hoogte, breedte, ...	***met***	f
oppervlakte	***met***	f^2
inhoud	***met***	f^3

vermenigvuldigd.

4.18 Een bol met straal 1 meter heeft een oppervlakte van 12.56 m^2 en een inhoud van 4.18 m^3. Vul de tabel volledig in:

straal	*oppervlakte*	*inhoud*
1 m	12.56 m^2	4.18 m^3
2 m		
10 m		

4.19 Een model voor een marmeren beeld (massief) is 50 centimeter hoog en weegt 34 kilo. Men wil het definitieve beeld 6 meter hoog maken. Bereken het gewicht als dat grote beeld ook massief wordt uitgevoerd.

4.20 Een stalen roeiboot is gemaakt van plaatmateriaal van 2 mm dik en weegt 400 kilo. Als de boot dubbel zo groot wordt nagebouwd, wat wordt dan het gewicht:
- als de dikte van 2 mm wordt aangehouden,
- als alles uit 4 mm dik materiaal wordt gemaakt?

4.2.3 de uithaalregel

De evenredigheids- en vergrotingswetten hangen nauw samen. Dat kun je ook nog met behulp van wat algebra inzien.

4.21 Ga eens uit van dit evenredigheidsverband voor de oppervlakte van de kubus:

$$\textit{oppervlakte} \propto \textit{ribbe}^2$$

en neem een kubus met ribbe 7 als voorbeeld. Vergroot met een factor 3.

a Controleer het volgende schema waarin niet alles volledig is uitgerekend:

	ribbe^2	***oppervlakte kubus***
voorbeeld:	$\mathbf{7^2}$	**294**
	$\times \mathbf{3^2}$	$\times \mathbf{3^2}$
nieuw voorbeeld:	$\mathbf{(3\cdot 7)^2}$	$\mathbf{9\cdot 294}$

b In het schema zit verborgen dat voor kwadrateren het volgende geldt:

$$(3\cdot 7)^2 = 3^2\cdot 7^2$$

Uiteraard geldt dat ook voor andere getallen dan 3 en 7.
Noteer het verband in algemene vorm, met de letter R voor de voorbeeldribbe en f voor de vergrotingsfactor.

c Voor het vergroten van de inhoud geldt een soortgelijk verband. Noteer ook dat.

In het voorbeeld hierboven zie je dat de factor 3 als het ware op de ribbe is toegepast. Omdat de ribbe gekwadrateerd wordt, moet bij de oppervlakte met een factor 9 worden gerekend. Anders gezegd, in de algemene vorm:

uithaalregel **Uit het kwadraat $(f\cdot R)^2$ haal je de factor *f* in het kwadraat naar voren: $f^2\cdot R^2$.**

taalgebruik **Men zegt ook wel:**
Bij vergroting groeit de oppervlakte evenredig met het kwadraat van de lengte.
en:
Bij vergroting groeit de inhoud evenredig met de derde macht van de lengte.

4.22 Voor de gewichten van de plaatkubussen geldt:
Het gewicht van de plaatkubus is evenredig met het kwadraat van de ribbe.
Noteer zo'n bewering in woorden voor de gewichten van de massieve kubussen.

4.3 *Licht en afstand*

In deze paragraaf leer je:

- hoe een evenredigheid te onderzoeken in een praktijksituatie (lichtsterkte)
- hoe m.b.v. evenredigheden lichtsterktes van verschillende lichtbronnen te kunnen vergelijken

4.3.1 de lichtsterkte hangt af van de afstand

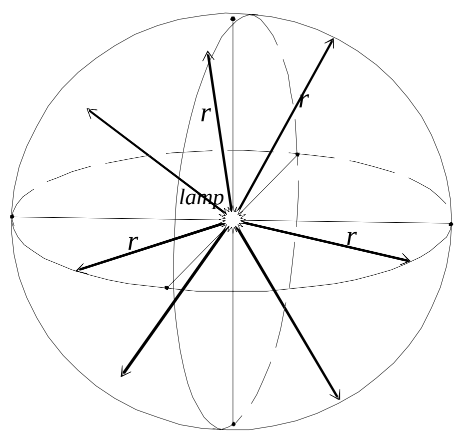
De belichtingssterkte door lamplicht is kleiner naarmate je verder van de lamp zit, dat weet iedereen. Je moet het licht namelijk delen met alle plekken op dezelfde afstand van de lamp. Hoe verder, met hoe meer plekken je moet delen. De lamp zelf brandt wel telkens even sterk, maar de afstand heeft grote invloed op het effect. Daarover gaat deze paragraaf.

4.23 Nu gaan we wat nauwkeuriger werken.
Stel je voor: een lamp schijnt gelijkmatig alle kanten uit. Alles wat zich op precies een afstand van 1 meter van de lamp bevindt, wordt even sterk belicht. Al die plekken samen vormen een oppervlak van een bol.

a Alles wat zich op afstand 2 meter van de lamp bevindt, moet het ook met dezelfde hoeveelheid licht doen. Maar dat is een groter geheel! Hoeveel keer groter?

b Waarom is de lichtsterkte op die afstand dus minder en met welke factor is de sterkte afgenomen?

c Welke verminderingsfactoren treden op bij afstand 3 en 4 meter?



bolvormige verspreiding

4.24 Je weet al dat de oppervlakte van dat boloppervlak evenredig is met afstand2. De verlichtingssterkte is dat zeker niet, die wordt kleiner naarmate de afstand groeit.

a Stel nu zelf eens een evenredigheidsverband op voor deze situatie.

b Als je twee keer zo ver van de lamp gaat staan, is de lichtsterkte met een factor 4 verminderd. Hoever moet je weg voor een vermindering met factor 16 en voor een vermindering met factor 10?

4.3.2 de lichtwet bij puntvormige lichtbron

Omdat je bij de bepaling van de verlichtingssterkte op een afstand dus steeds moest delen door afstand^2 geldt bij een lichtbron deze evenredigheid:

$$lichtsterkte \propto \frac{1}{afstand^2}$$

De lichtbron moet klein zijn in verhouding tot de afstand; hij is als het ware een punt.

uitspraak **Spreek uit:**

de lichtsterkte is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand.

Zo zegt men dat nu eenmaal. Ongebruikelijk, maar dichter bij de formule is:

de lichtsterkte is evenredig met het omgekeerde van het kwadraat van de afstand.

4.25 Als je in plaats van op 7 meter afstand op de dubbele afstand gaat staan, moest je de verlichtingssterkte door 22 delen.

uithaalregel **a** **Maak dat duidelijk door een uithaalregel op te schrijven voor de formule:**

$$\frac{1}{(2\cdot 7)^2}$$

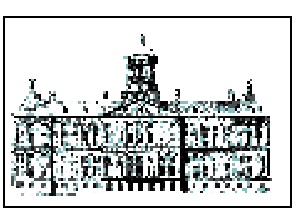
b Schrijf de uithaalregel bij dit verband algemeen op.

toepassingen **De volgende opgaven gaan over enkele gevolgen van deze belichtingswet en de toepassing van de uithaalregel.**

4.26 Als een 100 Watt lamp zich op 2 meter van je boek bevindt, is dat genoeg om te kunnen lezen.
Hoeveel van zulke lampen moet je bij elkaar zetten om op een afstand van 10 meter dezelfde belichtingssterkte te krijgen?

4.27 Bij deze opgave mag je je verbazen over de kwaliteit van het menselijk oog.
Op een afstand van 1 meter kun je zonder gevaar naar een brandende lamp van 40 Watt kijken. Zo sterk is dat niet.
Toch, bij helder weer, als er niets tussen jou en de lamp staat en als er geen ander storend licht is, kun je zo'n lamp nog goed op 20 kilometer afstand zien!
Toch is de lichtsterkte op die afstand heel wat minder. Met welke factor is die verminderd?

4.28 Toeristen in Amsterdam fotograferen het paleis op de Dam ook wel 's nachts, met de flitser moet dat kunnen, wordt er gedacht.



a Zo'n flitser is juist sterk genoeg om in een kamer van 5 meter groot daglicht te suggereren op de foto. Het fototoestel ontsteekt hem dan op vol vermogen. Wat zou je de toerist vertellen, die op 50 meter van het paleis staat?

b Met hoeveel flitsers die tegelijk worden ontstoken, zou het misschien toch lukken?

4.3.3 kracht van zon, maan en sterren (extra)

De volgende proeven zijn niet gemakkelijk, maar wel erg interessant om (samen met iemand anders) buiten te doen. Het gaat om tamelijk ruwe metingen, maar die geven toch een idee van de kracht van zon, maan en sterren.
Je moet bereid zijn te rekenen met grote getallen. De sterren staan nu eenmaal niet om de hoek.

4.29 Kijk ‘s avonds buiten eens naar de schaduwen die de maan vormt en die een straatlantaarn geeft.
Op een vel wit papier werpt die lamp een schaduw van een potlood, maar de maan doet dat ook.

a Door de afstand tot de lamp te verkleinen of te vergroten kun je beide schaduwen ruwweg even hard van contrast maken. Meet die afstand van lamp en papier op.

b De belichtingssterkte op het papier is dan voor beide bronnen ongeveer even groot.
Nu weet je verder dat de afstand tot de maan ongeveer 380.000 kilometer is. Druk nu het lichtvermogen van de volle maan uit in een aantal 100 Watt lampen, want dat zijn de straatlantarens ongeveer.

Het experiment van voorgaande opgave kan ook met een sterke lamp en de zon uitgevoerd worden. Dan valt de ongelooflijke sterkte van de zon op: het lukt je namelijk helemaal niet. Je moet te dicht met de lamp bij het papier zitten, er vormt zich dan geen duidelijk schaduw meer.

4.30 Probeer het daarom met een diaprojector: die geeft dicht bij de lens een veel grotere verlichtingsterkte dan de gewone lamp, doordat het licht door een lens geconcentreerd wordt.

a De afstand tot de zon is 150.000.000 kilometer. Hoeveel diaprojectorsterkten is de zon zelf?

b Om tot een vergelijking van de zon met een 100-watt-lamp te komen, moet je nog de diaprojector en de lamp vergelijken. Dat lukt goed in een donkere kamer. Hoeveel 100-watt-lampen is de zon sterk?

Men heeft uitgeprobeerd dat een kaars op één kilometer afstand dezelfde indruk van sterkte maakt als de heldere ster Capella in een heldere winternacht. Die ster bevindt zich op een afstand van 5×10^{14} kilometer van ons af.

a Hoeveel kaarsen is Capella?

b Voor een vergelijking van de zon en Capella moet je nu nog een kaars en een 100 Watt lamp vergelijken. Dat kun je binnenskamers wel doen.
Hoe verhouden zich de sterktes van Capella en onze zon?

4.3.4 tot slot: informatie over lichtsterkte

In deze paragraaf is nergens de evenredigheidsconstante bepaald of aangegeven. Je vergelijkt alleen maar lichtsterktes onderling en afstanden onderling. Dan heb je die constante niet nodig.
(Zo heb je de sterkte van de zon en maan heel grof uitgedrukt in lampen en die van een ster in kaarsen.)

twee soorten maten !!

Natuurlijk bestaan er nauwkeuriger eenheden voor de lichtsterkte. Je moet echter goed onderscheid maken tussen wat de lamp doet en wat jij op een bepaalde afstand ervan ziet. Bij het eerste gaat het om de sterkte van het ding zelf, bij het tweede om hoeveel licht er op een bepaalde afstand overblijft.

De *sterkte van de lichtbron zelf* wordt officieel uitgedrukt in candela (cd). Candela betekent oorspronkelijk “het aantal kaarsen”, maar is nu heel exact gedefinieerd.
De *verlichtingssterkte op een bepaalde plek* is “de hoeveelheid straling” per vierkante meter en wordt gemeten in watt per m^2 (W/m^2). Voor deze verlichtingssterkte geldt dus de lichtwet voor puntvormige lichtbronnen van deze paragraaf.

Opmerking:
Bij een lamp wordt daarnaast het energiegebruik of beter: ‘het benodigde elektrische vermogen’ uitgedrukt in watt (W).
Voor elk type van een lampsoort (gloeilamp, natriumlamp, spaarlamp, TL, LED) zijn de lichtsterkte en het elektrisch vermogen evenredig met elkaar. (Zo is de lichtsterkte van een bepaald type spaarlamp 2.8 cd/W en voor een gelijkwaardige gloeilamp is die 1.2 cd/W.)

4.4 *Geluiden langs kust en snelweg*

In deze paragraaf leer je:

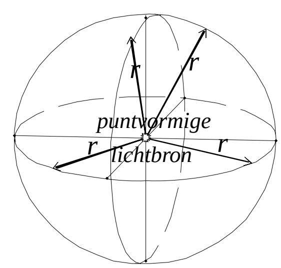
- hoe een evenredigheid te onderzoeken in een praktijksituatie (geluidsterkte), en
- hoe m.b.v. evenredigheden geluidssterktes in verschillende situaties te kunnen verklaren

4.4.1 de geluidssterkte hangt af van de afstand

De invloed die de afstand tot de bron heeft op de lichtsterkte (zie vorige paragraaf) geldt ook voor geluid.
Maar bij geluiden komt er nog iets speciaals bij: ze hebben soms geen puntvormige bron, zoals in het algemeen bij de lamp, en op grote schaal de zon en de sterren.
Bij geluiden komen ook vaak langwerpige bronnen voor. Denk aan:

- een snelweg die over zijn volle lengte een constant gedruis produceert,
- het strand, waar de branding van Hoek van Holland tot Den Helder een rechtlijnige lawaaiproducent is.

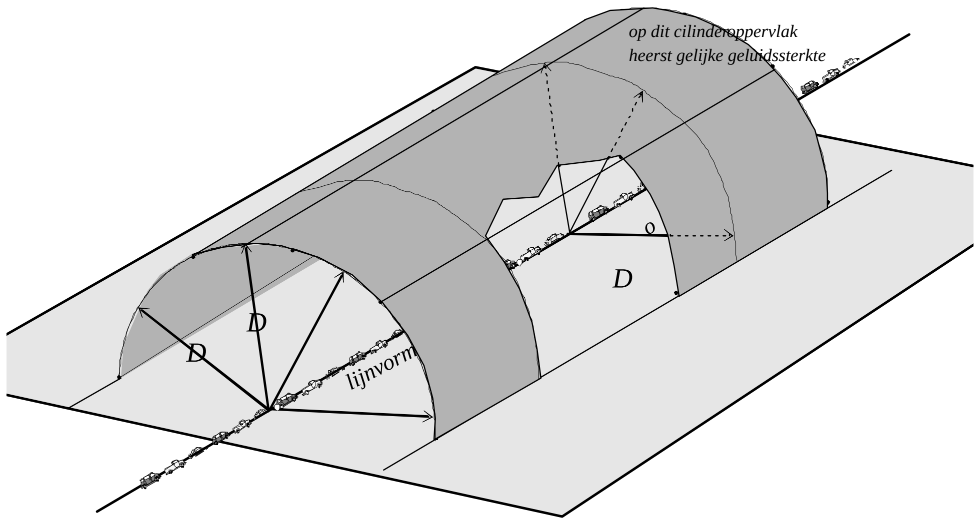
Als je met zijn tweeën vlak langs een drukke snelweg staat, sta je constant in het lawaai van de motoren en wielen van de voortrazende auto's. Toch kun je daar nog verstaanbaar met elkaar praten, je hoeft niet te schreeuwen bijvoorbeeld. Zo erg is dat lawaai blijkbaar niet.
Toch is er iets vreemds aan de hand. Loop maar eens vanaf de snelweg weg, over een rustig bospad bijvoorbeeld. Nog héél lang kun je het gedruis in de verte blijven horen. Men zegt dan ook soms dat er in Nederland geen enkele plek meer is waar je geen geluid van de een of andere (snel)weg kunt horen. Maar hoe kan dat dan, als de snelweg het op korte afstand in geluidssterkte absoluut niet haalt bij de kleinste discotheek?



bolvormige verspreiding

bol en cilinder **Het zit hem in de *vorm* van de geluidsbron.**
Bij de puntvormige bron van de vorige paragraaf speelden bollen om de bron een rol bij het bepalen van de afname van de lichtsterkte.
Je moest het licht delen met de andere plekken op de *bol*, met 'iedereen' die zich op dezelfde afstand als jij van de bron bevindt.

Bij een lijnvormige bron liggen de plekken met een vaste afstand *D* tot de geluidsbron op een *cilinder* met straal *D*. Die cilinder is in feite meestal heel lang en is vele malen zo groot als de straal. (De situatie aan uiteinden van de cilinder laten we buiten beschouwing.)



cilindervormige geluidsverspreiding rond snelweg

4.31 a Beredeneer waarom de oppervlakte van deze cilinders (alleen de mantel, geen uiteinden) nu evenredig is met de groeiende straal D van de cilinder.

b Geef nu zelf een evenredigheidsverband voor de geluidssterkte op afstand *D* van de snelweg. (Vergelijk zonodig met wat in de vorige paragraaf is gedaan.)

c Breng het verband ook onder woorden op een manier als in de vorige paragraaf bij ‘uitspraak’ is gedaan.

4.32 Nu zal niet meer gelden: 2 keer (of 10 keer) zo ver weg, dan 4 keer (of 100 keer) zo zwak geluid.

a Wat geldt nu wél bij verdubbeling en vertienvoudiging van de afstand?

b Verklaar waarom de snelweg als geheel op grote afstand nog wel te horen is, terwijl de knal van een klapband dat niet is.

4.33 Doe in gedachten het volgende experiment.
Vanuit een stille omgeving nader je een snelweg met een tikkende wekker in je hand, arm gestrekt. Op zeker moment kun je de wekker niet meer horen. Je afstand tot de snelweg op dat moment vertelt je iets over het geluid dat de snelweg produceert.
Stel dat je bij de A10 op deze manier 100 meter meet en bij de A27 200 meter.
Valt er nu iets te zeggen over de drukte op deze wegen?

4.34 De uithaalregel kan er in dit geval zó uit zien:

uithaalregel

$$\frac{1}{(f \cdot D)} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{D}$$

Breng dat onder woorden.

4.35 Het strand is ook een lijnvormige bron van geluid. De strook waar de branding ruist, is namelijk betrekkelijk smal. Op zee zelf is het eigenlijk heel stil.

a Op welke afstand van het strand (in de duinen) kun je de zee nog horen? (Ga af op je eigen ervaringen of vraag het anderen.)

b "Een discotheek op de boulevard is in geluid minder hinderlijk dan de zee zelf." Mee eens?

4.36 Bedenk ook een paar voorbeelden van lijnvormige *lichtbronnen*. Bedenk er ook een die (van een afstand) vele kilometers lang lijkt te zijn?

4.4.2 tot slot: informatie over licht en geluid

In deze en de vorige paragraaf is nergens de evenredigheidsconstante precies aangegeven. Je vergelijkt ook alleen maar lichtsterktes onderling, geluidssterktes onderling en afstanden onderling. Dan heb je die constante niet nodig.
(Zo heb je de sterkte van de zon en maan heel grof uitgedrukt in lampen en die van een ster in kaarsen.)

twee soorten maten !!

Natuurlijk bestaan er nauwkeuriger eenheden voor de lichtsterkte en de geluidssterkte. Dan moet je goed onderscheid maken tussen wat de lamp of luidspreker doet en wat jij op een bepaalde afstand zelf ziet of hoort. Bij het eerste gaat het om de sterkte van het ding zelf, bij het tweede om hoe het op afstand werkt.

licht

De *sterkte van de lichtbron zelf* wordt officieel uitgedrukt in candela (cd). Candela betekent oorspronkelijk "het aantal kaarsen", maar is nu heel exact gedefinieerd.
De *verlichtingssterkte op een bepaalde plek* is "de hoeveelheid straling" per vierkante meter en wordt gemeten in watt per m^2 (W/m^2). Voor deze verlichtingssterkte geldt dus de lichtwet voor puntvormige lichtbronnen van de vorige paragraaf.
Opmerking:
Bij een lamp wordt daarnaast het energiegebruik of beter: 'het benodigde elektrische vermogen' uitgedrukt in watt (W).
Voor elk type van een lampsoort (gloeilamp, natriumlamp, spaarlamp, TL, LED) zijn de lichtsterkte en het elektrisch vermogen evenredig met elkaar. (Zo is de lichtsterkte van een bepaald type spaarlamp 2.8 cd/W en voor een gelijkwaardige gloeilamp is die 1.2 cd/W.)

geluid

De *(akoustische) sterkte van een luidspreker* wordt ook in watt (W) aangegeven. (We hebben het hier niet over het benodigde elektrische vermogen.)
Het *geluid dat je op een bepaalde plek hoort*, wordt in watt per m^2 (W/m^2)aangegeven.

Onthoud het belangrijke onderscheid in het voorgaande tussen:
- de sterkte van de bron (geluid of licht) zelf
- de waarneming op een bepaalde afstand van de bron.

4.4.3 decibel (extra)

Bij geluid wordt vaak gewerkt met de bekende decibel (dB). Dat is de praktische manier om geluidssterkte op een bepaalde plek aan te geven (in plaats van in watt per m2).
XX <>

Het werkt zo:

0 dB is per definitie de menselijke gehoordrempel: daaronder hoor je dus niets; dat is dus de drempelwaarde.
Elke 10dB erboven staat voor een factor 10 meer. Dus:

10 dB is 10 keer de drempelwaarde
20 dB is 10*10 = 100 keer de drempelwaarde
30 dB is 10*10*10 = 1000 keer de drempelwaarde.
40 dB is 10*10*10*10 = 10000 keer de drempelwaarde.

Geluid in een drukke straat is gemiddeld 60-70 dB.

De pijngrens van het menselijk gehoor ligt bij 140 dB.
Dat is dus 100.000.000.000.000 keer zo sterk als de drempelwaarde.

4.37 Twee van de volgende zinnen zijn pertinent fout, omdat ze niets zinnigs betekenen. Geef een toelichting bij alledrie.

a Een Boeing 747 overschrijdt de pijngrens voor geluid.

b De actiegroep Rust in de Straat eist dat op het trottoir bij de huizen het geluid niet sterker is dan 65 dB.

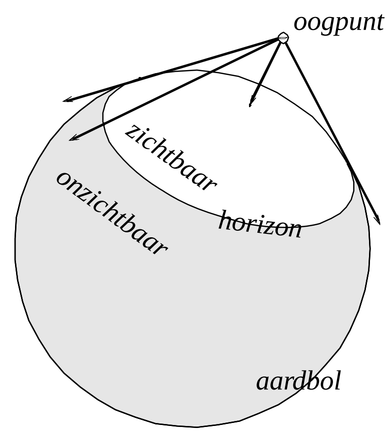
c Luidsprekers van 200 dB zijn levensgevaarlijk.

4.5 *Juist tot de horizon*

In deze paragraaf leer je:

- hoe een evenredigheid te onderzoeken in een praktijksituatie (afstand tot horizon)
- de evenredigheidsconstante van dit machtsverband bepalen
- hoe dit machtsverband theoretisch te berekenen (horizonformule)

4.5.1 uitzicht op de horizon



Als je hoog staat, kun je meer zien. Natuurlijk omdat je dan over mensen, muren en bomen heen kan kijken. Maar er is nog iets anders, en dat telt juist als er geen obstakels zijn: als je vanaf een vuurtoren over zee kijkt, is ook de horizon veel verder. Omdat de aarde een bol is, kun je altijd maar een beperkt stuk van de aarde zien, hoe hoog je ook staat. De horizon geeft de grens aan.

In deze paragraaf bestuderen we het verband tussen *stahoogte* en *horizonafstand*.

4.38 In deze tabel staat de afstand tot de horizon aangegeven bij verschillende stahoogtes boven het aardoppervlak. De hoogtes zijn die van enkele verdiepingen van een hotel op de boulevard met uitzicht op zee.

verdieping	hoogte (boven zeeniveau)	afstand tot de horizon
1	10 meter	11 km
2	13 meter	12.5 km
3	16 meter	14 km
4	19 meter	15.2 km
5	22 meter	16.4 km
18	61 meter	27.3 km
19	64 meter	28 km
20	67 meter	28.6 km

a Hoogte en horizonafstand zijn blijkbaar niet met elkaar evenredig. Aan diverse regels van de tabel kun je dat snel zien. Licht dat toe met voorbeelden.

b Het is dus niet zo, dat je op dubbele hoogte twee keer zo ver kunt zien. In de tabel komen wel 14 km en zijn dubbele, 28 km, als afstanden voor. Wat voor verband hebben de bijhorende hoogtes?

c Bekijk het nu eens van de andere kant en denk aan een van de eerdere verbanden: XX<meer uitleg of par.4.3 verplicht>

de hoogte is evenredig met ....

d Bepaal bij dit verband ook een evenredigheidsconstante. Reken daarna na of je voorgestelde verband klopt voor de andere regels van de tabel.

e Reken op een of andere manier uit hoever de horizon weg is, als je oog zich op precies 1 meter boven de zeespiegel bevindt.

Als a tot en met d je gelukt zijn, heb je een manier gevonden om bij horizonafstand de vereiste hoogte te vinden. Maar daarmee was vraag e niet direct te beantwoorden.

Natuurlijk wil je juist zoals bij vraag e kunnen werken: bij een gegeven hoogte de afstand bepalen.
Dat gaan we nu doen.
We willen verderop ook nog afleiden waarom dit evenredigheidsverband geldt.

4.5.2 hoge torens en wortels

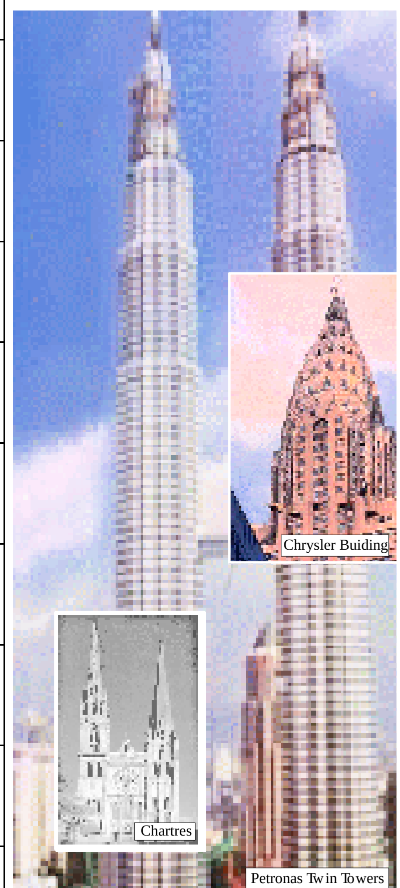
Het evenredigheidsverband tussen afstand en hoogte is:

$$horizonafstand \propto \sqrt{hoogte}$$

Onthoud hierbij nog dat bij 1 meter hoogte de horizon op 3.5 km afstand ligt.

4.39 Hier is een lijstje met hoogtes van beroemde gebouwen.

gebouw	hoogte	horizonafstand
Piramide van Cheops, Egypte, 2600 voor Christus	146 m	... km
Kathedraal, Chartres, 13e eeuw	107 m	... km
Münsterkerk, Ulm, 14e eeuw	161 m	... km
Chrysler Building, New York, 1930	319 m	... km
Empire State Building, New York, 1931	381 m	... km
World Trade Center, New York, 1972	417 m	... km
Sears Towers, Chicago, 1974	443 m	... km
Petronas Twin Towers, Kuala Lumpur, 1997	452 m	... km
Mile High Tower, Chicago (nooit uitgevoerd)	1609 m	... km



a Bereken de horizonafstanden vanaf de toppen. Verdeel het werk samen.

b Bij de kathedralen in de Middeleeuwen en bij de wolkenkrabbers was er een competitie aan de gang: wie kon – en durfde – de hoogste te bouwen. De lijst bevat de hoogste Gotische kerk en de hoogste wolkenkrabber van dit moment. Maar voor een wat grotere horizonafstand moet je maar geen toren van 500 meter meer gaan bouwen. Waarom niet?

4.40 Klopt het hierboven gegeven evenredigheidsverband met wat je zelf bij opgave XX hebt genoteerd, ook al is het een ander verband?

uitspraak **De uitspraak van deze evenredigheid is, dat verwacht je al:**

de horizonafstand is evenredig met de wortel van de hoogte.

4.41 In Angelsaksische landen worden hoogtes vaak in feet uitgedrukt en afstanden vaak in miles. Geldt daar dan nog wel dezelfde evenredigheidswet? Wat moet er wél veranderd worden?

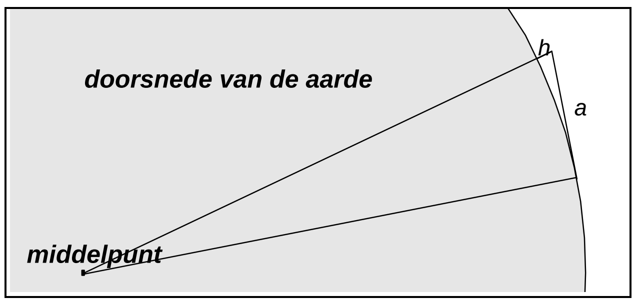
4.42 Als je 4 keer zo hoog staat, is de horizon 2 keer zo ver.
Als je 9 keer zo hoog staat, is de horizon 3 keer zo ver.

uithaalregel **Laat zien dat dit volgt uit de *uithaalregel voor wortels*:**

$$\sqrt{f \cdot A} = \sqrt{f} \cdot \sqrt{A}$$

4.5.3 afleiding van de horizonformule

We willen het verband afleiden tussen de hoogte *h* in meters en de horizonafstand *a* in kilometers.
Dat de horizon er is, komt door de bolvorm van de aarde. In de tekening hieronder zie je de aarde doorgesneden, je ziet ook het middelpunt aangegeven. Je ziet niet de hele doorsnede, die is niet nodig.



4.43 In de figuur staat *h* voor de hoogte, *a* voor de afstand tot de horizon. Om te kunnen rekenen, moet je ook weten hoe diep onder het aardoppervlak het middelpunt van de aarde zit. Dat is ongeveer 6300 kilometer. Maar we gaan in meters werken, want daarin is *h* steeds gegeven.

a Geef die 6 300 000 m op de juiste plek(ken) in de figuur aan.

b De figuur bevat een rechthoekige driehoek waar je Pythagoras in kunt toepassen. Geef de rechte hoek aan en noteer het verband dat Pythagoras oplevert.

c Werk dit verband zo om, dat je *a* in *h* uitgedrukt hebt:

$$a = \sqrt{(12\,600\,000 + h) \cdot h}$$

4.44 (Vervolg afleiding) De uithaalregel vertelt ons dan dat:

$$a = \sqrt{(12\,600\,000 + h)} \cdot \sqrt{h}$$

a Als *h* beperkt blijft tot maximaal 2 km, wat kan $\sqrt{(12\,600\,000 + h)}$ dan op zijn kleinst worden? En op zijn grootst?

b Maar *a* willen we wél in kilometers uitdrukken.
Wat worden deze kleinste en grootste waarde dan?
Laat zien dat dus inderdaad als een goede benadering geldt:

$a \approx 3.5 \cdot \sqrt{h}$ (met *a* in kilometers en *h* in meters).

c Dit is een praktische formule om de horizonafstand te bepalen als je op een hoogte *h* staat. Controleer dit voor een aantal gevallen die je eerder bent tegengekomen.

4.6 *Evenredigheden op 10-staps-papier*

In deze paragraaf leer je:

- wat 10-staps-papier is en waar het op gebaseerd is
- hoe 10-staps-papier te lezen en
- hoe 10-staps-papier te gebruiken in een praktijksituatie (horizon), en
- hoe m.b.v. evenredigheden geluidssterktes in verschillende situaties te kunnen verklaren

4.6.1 hoe werkt 10-stapspapier?

Bij veel van de evenredigheidsverbanden die je nu gezien hebt, traden zeer uiteenlopende getalwaarden op. Zo heb je bij het licht gewerkt met afstanden variërend van enkele meters tot 5×10^{14} kilometer. XX<geluid>
We gaan nu enkele evenredigheden als grafiek weergeven, maar we gebruiken geen gewoon grafiekrooster, maar een sterk vervormde weergave. Dan past het wel.

basisidee **Het idee is grofweg:**

kijk niet naar de getallen zelf, maar naar hoeveel factoren 10 je erbij nodig hebt.

Anders gezegd: XX<log>

in de figuur moet het onderscheid tussen 1 en 2 even duidelijk zijn als dat tussen 10000 en 20000.

Het gaat immers om de verhoudingen onderling!

Om te beginnen een voorbeeld met groeiende vierkanten en kubussen.
Zo ziet het speciale roosterpapier eruit.

4.45 Het bijzondere zit in de getallen langs de assen. Kijk daar even goed naar. De zwarte stip stelt voor: een *vierkant* met *ribbe* 10^3 heeft een *oppervlakte* van 10^6.

a Zet de (open) stip voor de *inhoud* van de *kubus* met die ribbe van 10^3. Voeg nog enkele stippen voor inhouden en oppervlaktes toe.

b Kloppen de beschrijvingen (zie basisidee) van zo-even?

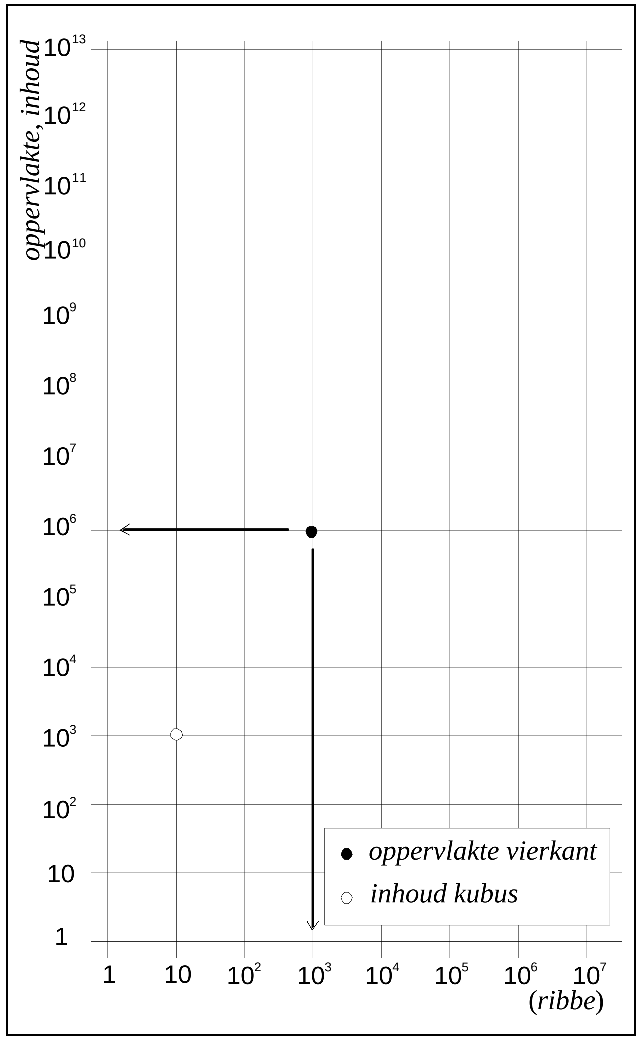
4.46 De zwarte stippen liggen op één lijn.

a Geef daar een verklaring voor.

b Trek die lijn!

Bij de volgende opgave ga je die rechte lijn gebruiken om een fijnere indeling te vinden op de ribbe-as, en dus vanzelf ook op de andere as van dit grafiekrooster.

4.47 a Teken nu ook zwarte stippen, die horen bij de oppervlaktes 10^3 en 10^5.

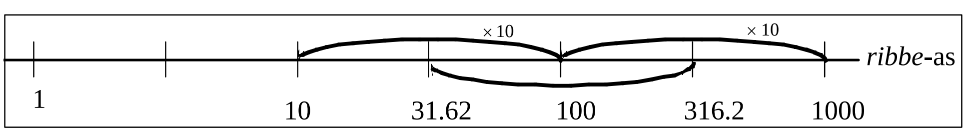


b Trek net zulke pijlen naar beneden als bij de eerste zwarte stip is gedaan. Die pijlen komen bij nog onzichtbare getallen op de ribbe-as uit.
Bepaal die getallen nauwkeurig met de rekenmachine. Je moet dus bijvoorbeeld een *ribbe* zoeken waar een *oppervlakte* van 10^5 bij hoort, enzovoort. Zet de getallen er op de as bij (klein, of dwars).

een nieuw soort midden

Normaal ligt het getal 55 in het midden tussen de getallen 10 en 100.
Op de ribbe-as van deze figuur gaat het anders: het getal 31.62 moet midden tussen 10 en 100 liggen, de oppervlakte bij ribbe 31.62 is 31.62^2 en dat is 10^3, op de oppervlakte-as ligt dat midden tussen 10^2 en 10^4 in.

4.48 Het ziet er op de ribbe-as vergroot zó uit:



De afstand tussen 31.62 en 316.2 is dezelfde als die tussen 10 en 100. De simpele reden daarvoor is:

omdat die getallen midden tussen 10 en 100 en tussen 100 en 1000 liggen.

Je kunt het ook anders beredeneren:

Van 10 naar 100 is een 10-stap, van 100 naar 1000 is ook, en ……..

a Maak deze redenering zelf af. En plaats meteen 3.162 op de juiste plek van de ribbe-as.

b Je kunt nu ook het getal 316.2 op de verticale as positioneren. Doe dat (op de vorige bladzijde dus).

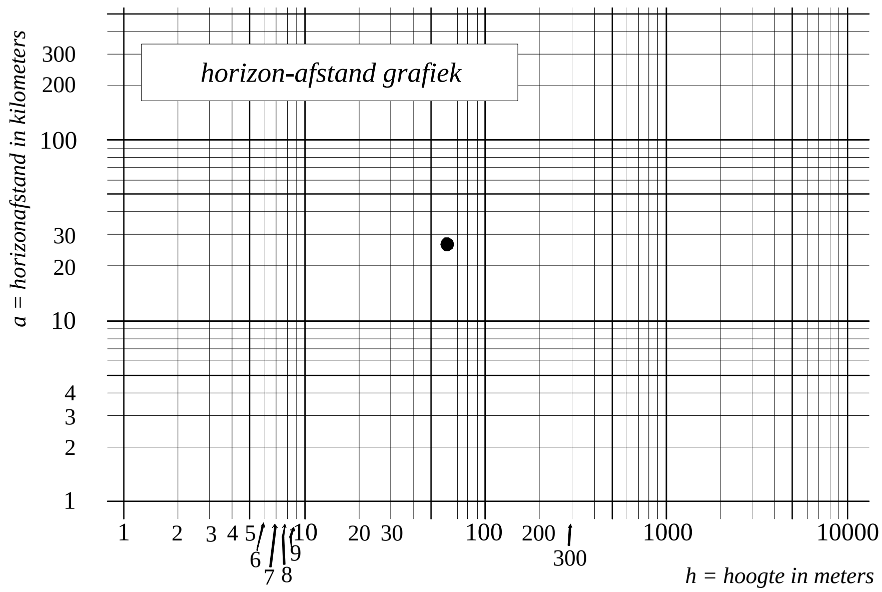
c Dat getal stelt ook weer de oppervlakte van een vierkant voor! Vind dus het bijhorende getal op de ribbe-as. Plaats weer andere getallen met de 10-staps-methode.

4.6.2 praktisch nut van 10-staps-papier

Op deze manier kunnen veel meer getallen op de horizontale as (en verticale as) ingevuld worden. Dat hoef je niet zelf te doen.
In de figuur hieronder is dat al gedaan en op gelijke afstanden is te vinden:

	1	10	100	1000			enzovoort,
en ook:		2	20	200	2000		enzovoort,
en ook:			3	30	300	3000	enzovoort,

enzovoort.



Let op:

- De getallen 11, 12 zitten er niet bij. Je gaat meteen van 10 naar 20,
- Je ziet niet alle getallen afgedrukt, want dan wordt het warrig.

We gaan het verband uit §4.5 (zie aldaar) weergeven op dit 10-staps-papier.
In die paragraaf is het machtsverband bepaald tussen de hoogte h waarop je ogen zich bevinden (op een duintop is dat hoger dan op het strand) en de afstand a tot de horizon (dus hoever je feitelijk kunt kijken). Dat machtsverband luidt: $a = 3.5 \cdot \sqrt{h}$.

4.49 Het verband $a = 3.5 \cdot \sqrt{h}$ kun je in deze grafiek onderbrengen.

a Eén punt is al aangegeven: h = 61m, a = 27 km. Controleer of dit goed gedaan is.

b Verwerk nu de tabellen van bladzijde XX17 en bladzijde XX18 in deze figuur. Neem de horizonafstand vanaf de Mont Blanc (4810 m) en de Mount Everest (8848 m) er nog even bij.

c Teken de grafiek.

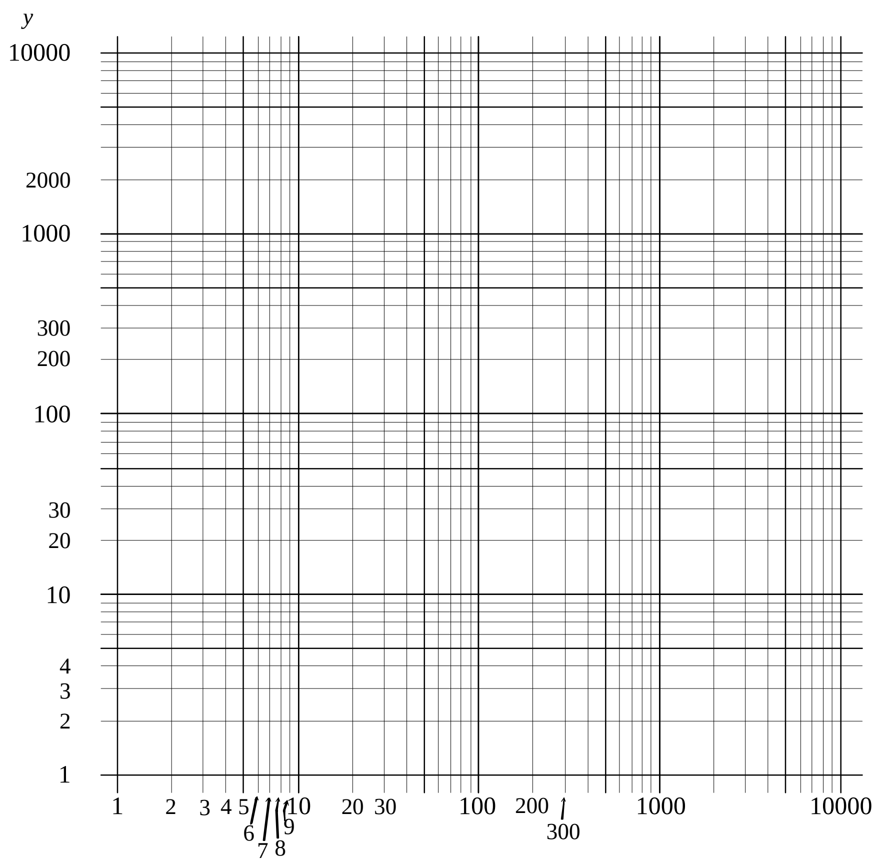
4.50 Voor het verband $a = 3.5 \cdot \sqrt{h}$ heb je eerder via de uithaalregel gezien (zie §4.5.2):
als h met 100 wordt vermenigvuldigd, wordt a met 10 vermenigvuldigd.
Vertaal dit in stappen-van-10 op de afstand-as en op de hoogte-as.
Licht nu toe waarom de helling van de grafiek dus ½ moet zijn en controleer dat.

4.6.3 dalende lijnen

4.51 a. Teken hieronder de grafieken van $y = \dfrac{10\,000}{x}$ en van $y = \dfrac{10\,000}{x^2}$.

Neem x = 1, 10, 100, 1000, 10000.

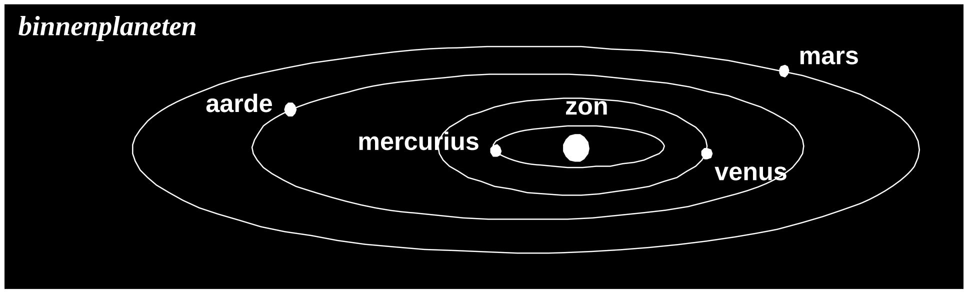
b Wat valt je op? Wat valt er te zeggen over de helling van de grafieken?
Kun je dat ook verklaren?

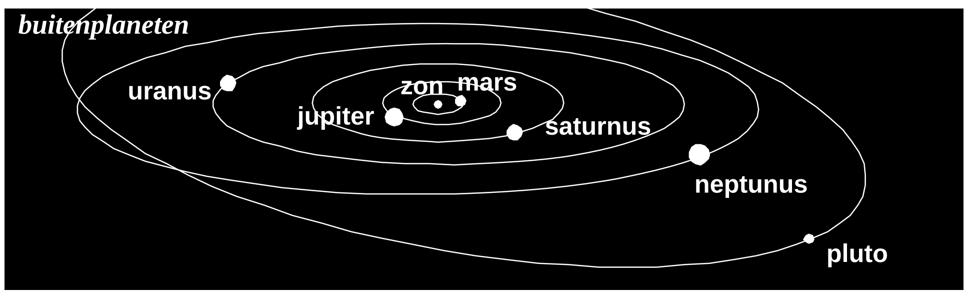


4.7 *planeten en machten*

4.7.1 afstanden en omlooptijden van de planeten

Net als de aarde bewegen de andere acht planeten van ons zonnestelsel zich in bijna cirkelvormige banen om de zon.





Hoe verder de planeet van de zon af staat, hoe langer de omloopstijd is en andersom

planeet	*omloopstijd T* (in dagen)	gemiddelde *afstand R* tot de zon (in 10^6 km)
Mercurius	88	57.9
Venus	225	108.2
Aarde	365	149.6
Mars	687	227.77
Jupiter	4329	778.3
Saturnus	10753	1427
Uranus	30660	2870
Neptunus	60150	4497
Pluto	90670	5907

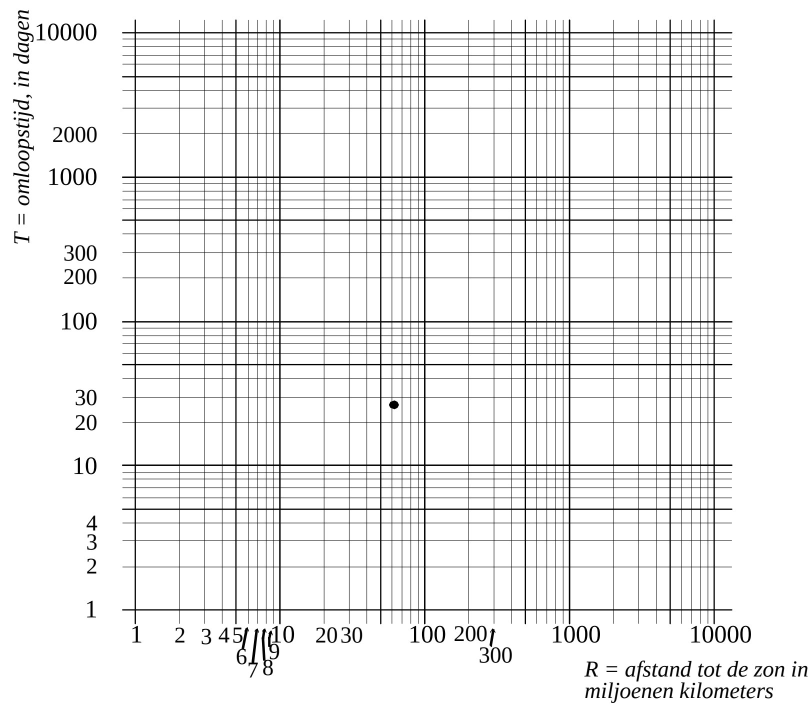
4.52 Zou er weer een of ander evenredigheidsverband tussen T en R zijn? En hoe ziet dat er uit? Ga eens uit van de volgende gegevens:

Aarde	365	149.6
Saturnus		1427

en bereken de omloopstijd voor Saturnus:
– als er een verband van de vorm $T \propto R$ zou zijn,
– als er een verband van de vorm $T \propto R^2$ zou zijn.

Trek een voorlopige conclusie.

4.53 Voor een nauwkeurig onderzoek gebruiken we weer het bijzondere grafiekenrooster.



a Tot en met Saturnus mag dat geen probleem geven. Ga je gang.

b Het wordt weer een fraaie lijn! De helling van die lijn zal tussen 1 en 2 liggen. Meet die helling nauwkeurig op.

c Een factor 100 voor *R* lijkt overeen te komen met een factor 1000 voor *T*. Controleer dit.

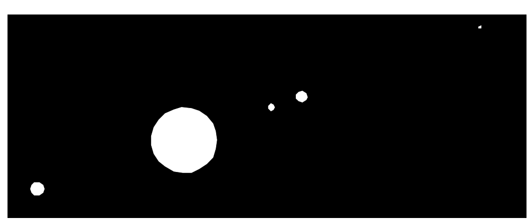
d Er geldt een evenredigheidsverband van de vorm:

$$T^{?} \propto R^{?}$$

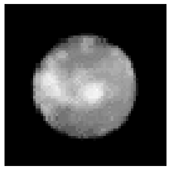
Doe een (zo eenvoudig mogelijk) voorstel voor de getalletjes die op de plaats van het vraagteken kunnen staan. Maak gebruik van wat je bij c. hebt gezien.

4.54 Controleer tot slot of de gevonden evenredigheid ook de omloopstijden van de verre planeten Uranus, Neptunus en Pluto goed op grond van de afstanden tot de zon voorspelt.

4.7.2 de manen van Jupiter

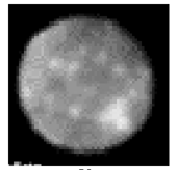


Als je met een goede verrekijker naar de planeet Jupiter kijkt, zie je Jupiter als een schijfje met enkele kleine stipjes ernaast.
De kleine stipjes zijn manen van Jupiter, waarvan Jupiter er (minstens) zestien heeft en je er met een gewone verrekijker (hoogstens) vier kunt zien. Ze draaien om Jupiter heen. Deze vier zijn al in 1610 door Galileï ontdekt.
Door een gewone verrekijker blijven het stipjes. Maar de Hubble Space Telescope ziet meer:

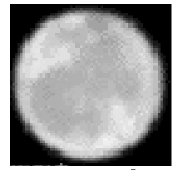


Io

Europa



Callipso



Ganymedes

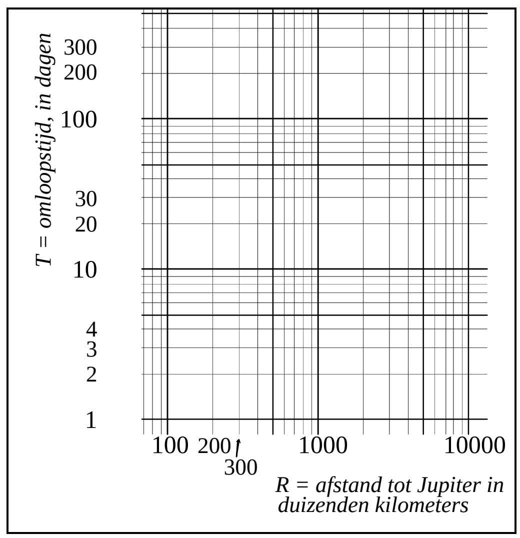
Gewoon door regelmatig waarnemen met een verrekijker zou je de omloopstijden zelf nauwkeurig kunnen bepalen. Zo heeft Galileï dat in 1610 al gedaan.

4.55 Je vindt de resultaten in deze tabel:

maan	**omloopstijd *T*** (in dagen)	**afstand *R* tot Jupiter** (in 10^2 km)
Io	1.76	422
Europa	3.55	671
Ganymedes	7.15	1070
Callipso	19.69	1882

4.56 a. Onderzoek voldoen deze gegevens ook voldoen aan $T^2 \propto R^3$ door een grafiek van hetzelfde type te maken.

b Breng de gegevens in de grafiek onder. Kun je een conclusie trekken?



4.57 Ervan uitgaand dat het evenredigheidsverband tussen T^2 en R^3 inderdaad geldig is, kun je met behulp van de grafiek goed de volgende problemen oplossen:

a De dertiende maan heet Leda; deze is pas ontdekt in 1974 en draait rond op 11 miljoen kilometer afstand van Jupiter. Hoe lang duurt één ronde?

b Ananke draait op het dubbele van Leda's afstand rond Jupiter. Wat is de omloopstijd van Ananke?

4.58 Voor de planeten geldt in goede benadering: $T^2 = 0.04 \times R^3$. In de bovengegeven schalen natuurlijk: T in dagen en R in miljoenen kilometers. Door enkele malen T^2 / R^3 uit te rekenen, vind je dat snel terug.

Geef net zo'n verband voor de Jupitermanen, dus met een geschikte constante. Neem T in dagen en R in duizenden kilometers.

4.7.3 informatie over Kepler en Jupiter/Zeus (extra)

Kepler

De bijzondere evenredigheid die in deze paragraaf aan bod is gekomen, staat bekend als de derde wet van Kepler.

Johannes Kepler, 1571- 1630, kwam in 1601 naar Praag om Tycho Brahe met wiskundige berekeningen te helpen bij het observeren van planeetbanen. Na de dood van Tycho Brahe ging Kepler verder en vond zeer ongeëvenaard nauwkeurige beschrijvingen van de planeetbanen, die hij in drie wetten samenvatte.

Kepler formuleerde zijn derde wet in 1619 in zijn boek ‘Harmonice mundi’ in deze vorm:

“de kwadraten van de omloopstijden verhouden zich als de derde machten van de baanstralen”.

Dit is dus hetzelfde als wat je in deze paragraaf hebt gevonden.

Jupiter/Zeus

De namen van de Jupitermanen stammen uit de Griekse mythologie.

Jupiter is de Romeinse naam voor de Griekse God Zeus. Onder de Jupitermanen komen nog voor: Metis, Europa, Callisto, Ananke, Leda en Himalia, Ganymedes. (Volledige lijst op bladzijde XX58) Zeus beminde hen en zij baarden hem kinderen (op Ganymedes na natuurlijk). Bij deze escapades vermomde Zeus zich nogal eens. Europa benaderde hij in Phoenicië in de vorm van een witte stier. Europa vond de stier bijzonder mooi, klom op diens rug en werd naar Kreta gezwommen. Voor Io veranderde Zeus zich in een wolk. Aan Leda verscheen Zeus in de vorm van een witte zwaan.

Leda en de zwaan, Francois Boucher, 1742

Op internetsite http://www.bell-labs.com/user/gwills/yeats.html#leda tref je een gedicht van William Butler Yeats: Leda and the Swan. Of vraag je docent Engels hiernaar.

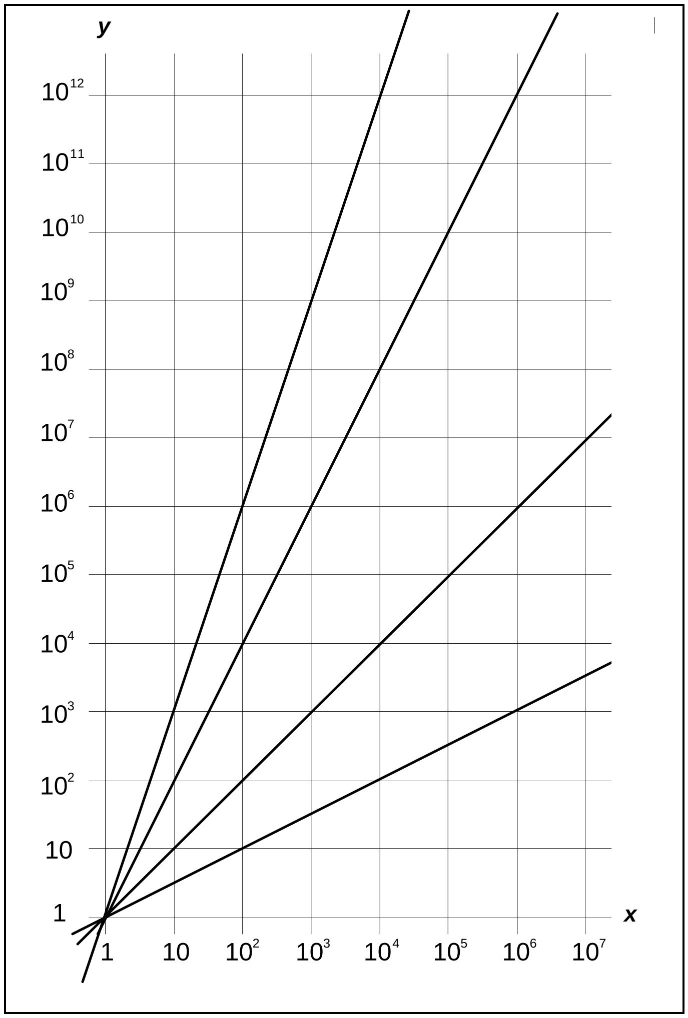
Hier is een internetsite voor informatie over de bewegingen van zon, maan planeten:
http://bang.lanl.gov/solarsys/eng/homepage.htm

4.8 *allerlei machten*

4.8.1 wortelvormen en gebroken machten

4.59 In deze 10-stapsgrafiek zie je nogmaals de volgende verbanden in beeld gebracht.

- $y = x^3$
- $y = x^2$
- $y = x$
- $y = \sqrt{x}$



a Noteer de verbanden bij de juiste lijnen.

b Voeg het verband $y = x\sqrt{x}$ eraan toe.

Bij de eerste drie voorbeelden ($y = x^2$, x^3 en x) gaat het om machtsverbanden en je weet dat de helling in de figuur gelijk is aan de exponent. Ook bij $y = x$ is dat zo, want dat is hetzelfde als $y = x^1$.

afspraak:

> **Omdat het verband $y = \sqrt{x}$ in de grafiek een lijn is met helling $\frac{1}{2}$ of 0.5 spreken we nu af dat $\sqrt{x}$ ook genoteerd mag worden als $x^{\frac{1}{2}}$ of $x^{0.5}$.**
>
> **Het getal $\frac{1}{2}$ of 0.5 heet de *exponent*. $x^{\frac{1}{2}}$ wordt ook wel een *gebroken macht* van x genoemd.**

4.60 a Doe zelf een voorstel voor een notatie voor $x\sqrt{x}$ in overeenstemming met de helling van de grafiek.

b Je kunt ook opschrijven $x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}$. Klopt het optellen van exponenten zoals je dat kent van $a^3 \cdot a^4 = a^7$ hier ook?

c Werk het kwadrateren van $x^{0.5}$ uit door exponenten op te tellen.

4.61 Je kunt nu ook het verband $y = x^{\frac{1}{3}}$ een plaats geven.

a Teken een grafiek (in dezelfde figuur) van dit verband.

b Een andere omschrijving hiervan is: de *derdemachtswortel* van x. Licht toe dat dit klopt met de uitwerking van $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$.

4.62 Bepaal zonder rekenmachine:

a $8^{\frac{1}{3}}$ b. $100^{1.5}$ c. $27^{\frac{2}{3}}$ d. $\left(2^8\right)^{\frac{1}{4}}$ e. $10000^{0.25}$ f. $4^{2.5}$

4.8.2 gebroken machten op de rekenmachine

Op rekenmachines kun je vaak direct kwadraten en wortels uitrekenen, maar er zit ook meestal een machtsverheffingstoets op. En die kan de gebroken machten ook aan.

Zó reken je gewoonlijk 23^{5} uit:	23 ^ 5 <ENTER>
en zó dus ook 1001^{5} :	100 ^ 1.5 <ENTER>
Ingewikkelder exponenten zet je tussen haakjes:	27 ^ (2/3) <ENTER>

4.63 a Oefen jezelf door enkele gebroken machten te berekenen.

b Bereken $7^{1.183294662455}$ en $13^{1.7954234350053}$.

c Bereken met de rekenmachine $37^{\frac{1}{2}} \times 37^{\frac{1}{3}} \times 37^{\frac{1}{6}}$ en verklaar het resultaat.

d Controleer de volgende gelijkheden op de rekenmachine door links en rechts apart uit te rekenen:

$$\left(13^{\frac{2}{5}}\right)^{1.5} = 13^{0.6} \text{ en } 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times 3^{\frac{1}{16}} \times 3^{\frac{1}{32}} = 3^{\frac{31}{32}}$$

Op grond van welke rekenregels kloppen die gelijkheden?

e Bedenk nog enkele formules met gebroken machten en voer dezelfde controle uit.

f Niet alles kan met de rekenmachine. Verklaar de reactie van de GR op:
–3 ^ 0.5 en (–3) ^ 0.5

g Wat doet de GR met 2 ^ 3 ^ 4?
Interpreteert de GR dit als 2 ^ (3 ^ 4) of als (2 ^ 3) ^ 4?
Bereken ook 2 ^ (3 × 4) met de GR.
Wat vind je nu van de keus die de GR maakt uit 2 ^ (3 ^ 4) en (2 ^ 3) ^ 4?

4.8.3 gebroken machten en evenredigheden

4.64 Noteer de horizonformule (bladzijde XX19) in de vorm van een *macht*sverband.

4.65 Herschrijf de ‘uithaalregel’ voor wortels, maar nu met gebroken machten:

uithaalregel

$$\sqrt{f \cdot A} = \sqrt{f} \cdot \sqrt{A}$$

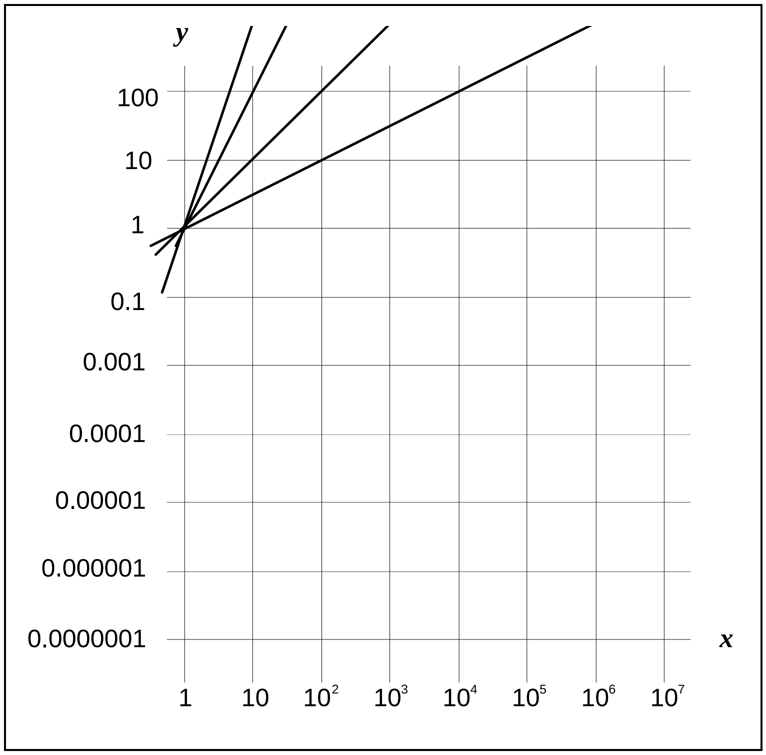
4.66 De derde wet van Kepler voor de planeten had de gedaante: $T^2 = 0.04 \times R^3$.

a Noteer ook dit verband met een gebroken macht in de vorm T = ...

b Om bij gegeven R de waarde van T te vinden, is het beter andersom te werken. Schrijf het verband ook in de vorm: R = ...

4.8.4 negatieve machten

Deze 10-stapsgrafiek laat zien wat er gebeurt als je de *y*-as van de grafiek van bladzijde XX29 naar onderen voortzet.



4.67 a Teken in deze figuur nu de volgende verbanden:

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{x^2}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

b Bedenk nu zelf een notatie voor deze verbanden als macht, als je net als eerder uitgaat van de richtingscoëfficiënt.

c Je weet dat: $\frac{x^3}{x^2} = x$ en ook dat $\frac{x^3}{x^2} = x^3 \cdot \frac{1}{x^2}$

Laat zien dat de regel "bij vermenigvuldiging van machten (met hetzelfde grondtal) de exponenten moeten worden opgeteld" klopt, door de machtsnotatie met een negatieve exponent te gebruiken.

4.68 Ook de GR rekent goed met negatieve exponenten. (Je moet wel het minteken gebruiken dat vlak naast de ENTER-toets zit!)
Bereken met de GR
a. 4^{-2} b. 10^{-1} c. $6^{-2.4444} \times 36^{12222}$.

4.69 a Bereken ook 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-12}, 10^{-34} met de GR.

b De GR geeft hier antwoorden met E-notatie. Zoek uit hoe je ook zélf deze getallen had kunnen intoetsen met behulp van 2ND EE.

4.70 Noteer de evenredigheden voor lichtsterkte en/of geluidssterkte (uit de betreffende paragrafen) met behulp van negatieve exponenten.

4.71 Bij deze evenredigheden hoorden ook **uithaalregels**. Noteer ook die met negatieve exponenten.

4.8.5 de exponent 0

Tot slot nog iets de bijzondere exponent 0.
Op bladzijde XX29 en XX31 gaan alle lijnen door het punt x = 1, y = 1.

4.72 Eén rechte lijn door dat punt is nog niet besproken: de horizontale lijn.

a Geef een vergelijking van die lijn.

b Als denkt aan de richtingscoëfficiënt: waaraan zou x^0 dan wel gelijk moeten zijn?

c Ga na dat jouw afspraak voor de macht nul goed klopt met de rekenregels voor machten.

Reken bijvoorbeeld $3^5 \times 3^{-5}$ (handmatig) uit op twee manieren: door 3^{-5} eerst te herschrijven als een breuk en door het samennemen van de exponenten.

d Op dezelfde manier kun je wel 2^0 en 1^0 bepalen (ga dat na), maar bij 0^0 lukt dat niet. Waarom niet?

afspraak

> **Voor de exponent 0 spreken we af:**
>
> **$a^0 = 1$ als a ongelijk 0 is,**
>
> **0^0 wordt niet gedefinieerd.**

4.8.6 samenvatting rekenen met machten

Je wist vast al: Van de **macht** x^p noemt men x het **grondtal** en p de **exponent**.

Je weet de betekenis van een machtsverband $y = x^p$ door de grafiek op een XX speciaal rooster, ook als p een negatieve en/of gebroken exponent is.

Je begrijpt nu ook beter waarom voor deze machten (met negatieve en gebroken exponenten) dezelfde rekenregels gelden als voor gewone machten (met gehele positieve exponenten). In feite hebben we vastgelegd wat a^p betekent als p geen geheel of positief getal is, door te zorgen dat die regels blijven gelden. Ter verduidelijking twee voorbeelden daarvan:

voorbeeld een	***voorbeeld twee***
Je wilt dat geldt: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	Je wilt dat geldt: $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$
want er moet gelden $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$	want er moet gelden $x^4 \cdot \frac{1}{x^3} = x$
en dat gaat alleen goed met exponent $\frac{1}{2}$ volgens de regels voor exponenten:	en dat gaat alleen goed met exponent -3 volgens de regels voor exponenten:
$x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$	$x^4 \cdot x^{-3} = x^{4+-3} = x^1 = x$

overzicht rekenregels

Exponentenregels bij gelijk grondtal		
Vermenigvuldigen:	**bij gelijke grondtallen exponenten optellen.**	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
Delen:	**bij gelijke grondtallen exponenten aftrekken.**	$\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
Grondtalregels bij gelijke exponent		
Vermenigvuldigen:	**bij gelijke exponent grondtallen vermenig vuldigen.**	$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$
Delen:	**bij gelijke exponent grondtallen delen.**	$\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$
Regel voor samengestelde machten		
machtsverheffing van een macht:	**exponenten vermenigvuldigen.**	$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

Let op: bij (positieve en negatieve) gebroken exponenten moeten we ons beperken tot positieve grondtallen.

uithaalregel **Wat in het voorgaande steeds de uithaalregel heette en zo gebruikt werd, is feitelijk een van deze rekenregels.**

4.73 a Welke?

b Noteer de uithaalregel expliciet voor het geval $a = 13$, $b = 2$ en $p = -5.6$

fout of goed?

fout! **Bij de rekenregels staat niet:** $(a+b)^p = a^p + b^p$

a Laat zien dat je deze regel ook maar beter onmiddellijk kunt vergeten. Geef dus enkele tegenvoorbeelden met eenvoudige getallen voor *a* en *b* en met een gehele, een gebroken en een negatieve waarde voor *p*.

b Op welke rekenregel die wel is toegestaan, lijkt deze foute regel een beetje?

c Er is slechts één waarde van *p*, waarvoor de regel wél goed is, al zul je zoiets niet zo gauw opschrijven. Welke waarde van *p* is dat?

d Mag dit zomaar?

4.74 Kijk het volgende oefenwerk goed na en streep de fouten aan. Soms moet je even redeneren, soms zit er niets anders op dan narekenen met de GR.

$$2^6 \cdot 4^{-3} = 1$$

$$\frac{12^3}{12^{-2}} = 12^5$$

$$\frac{30^5}{10^2} = 3^{\frac{5}{2}}$$

$$(1{,}2^3)^4 = (1{,}2^4)^3$$

$$7^{1{,}4} \cdot 7^{1{,}5} \cdot 7^{-0{,}8} \cdot 7^{-2{,}6} \cdot \sqrt{7} = 1$$

$$3^{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)} = 3^{\frac{1}{6}}$$

$$5^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)} = 5^{\frac{5}{6}}$$

$$(56 \cdot 57)^{58} = 56^{57} \cdot 58^{58} \cdot \left(\frac{57}{58}\right)^{58} \cdot \frac{1}{56^{-1}}$$

$$\sqrt{12} + \sqrt{24} = \sqrt{36}$$

$$\sqrt{12^2} + \sqrt{24^2} = \sqrt{36^2}$$

$$7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2}} = 2$$

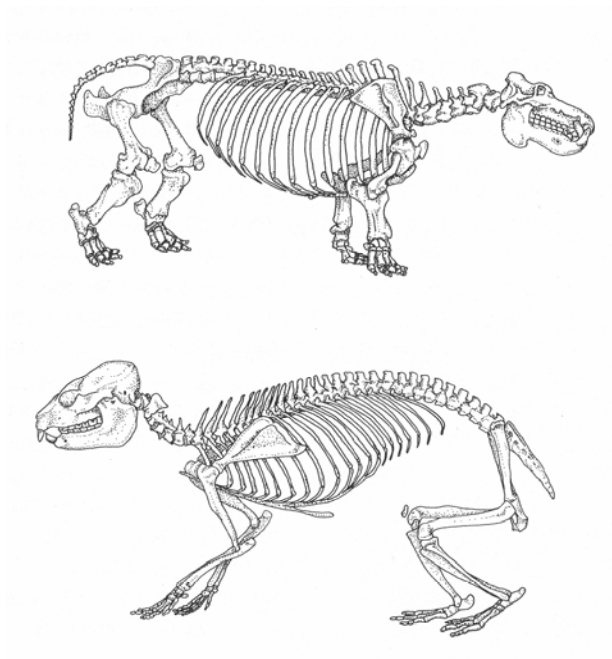
$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2}}}}}} = 2$$

4.9 *Schaalvergroting in de natuur en in de techniek*

In dit hoofdstuk leer je:

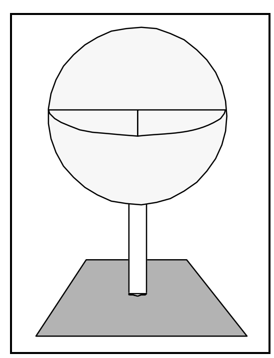
- hoe een machtsverband te bepalen in een situatie uit de techniek, en
- hoe een machtsverband te bepalen in een situatie uit de natuur, zowel in theorie als in de praktijk

4.9.1 grotere beesten, dikkere botten



In deze illustratie zijn de skeletten van een nijlpaard en van een klipdas afgebeeld. Een klipdas wordt echter niet groter dan ongeveer 40 cm, een nijlpaard haalt toch wel de 3 meter. De afbeeldingen zijn dus niet op gelijke schaal. Je mag verwachten dat een groter beest naar verhouding dikkere botten heeft.
In de illustratie zijn de skeletten van een nijlpaard en van een klipdas even groot gemaakt. Wanneer de dikte van de botten evenredig met de grootte van de dieren zouden zijn, zouden ze in deze figuur ongeveer even dik moeten zijn. Je ziet echter dat de botten van het nijlpaard meer dan evenredig dikkere botten heeft. In deze paragraaf wordt onderzocht waarom dat zo is en ook of het afdoende is.
Het skelet bepaalt de stevigheid van een dier. Om aan de verhouding tussen skelet en gewicht van het dier te kunnen rekenen, doen we eerst een voorstudie:

4.9.2 schaalvergroting in de techniek



We bekijken een eenvoudig geval uit de techniek, waarin we precies alles kunnen narekenen: een massieve bol op een massieve, ronde paal (zie illustratie). Technische ontwerpers kunnen m.b.v. mechanica uitrekenen hoe dik zo'n paal waarop het totale gewicht van de bol rust, moet zijn. Zo is bijvoorbeeld voor een bol van 20 cm doorsnee op een paaltje van 10 cm lang (de totale hoogte is dan 30 cm) uitgerekend dat die paal dan 2 cm dik moeten zijn om precies sterk genoeg te zijn.

evenredige schaalvergroting

Dit object gaan we op allerlei schalen vergroten. De bol en de paal zijn steeds massief en van hetzelfde homogene materiaal. We vergroten alles evenredig, dus alle lengtematen met dezelfde factor.

Bij de evenredigheden hierna werken we voornamelijk met de diameter van de bol; die lengtemaat geven we aan met *D*.

4.75 Bij schaalvergroting van het geheel gelden dan de wetten van de schaalvergroting.

a Uiteraard geldt: *boldiameter* $\propto$ *D* (verband 4.1),
maar ook: *paalhoogte* $\propto$ *D* (verband 4.2)
Wat zijn de evenredigheidsconstanten hier?

b Geef het evenredigheidsverband op voor het gewicht van de bol, uitgedrukt in *D*:
bolgewicht $\propto$ .... (verband 4.3)

c Als *D* met een factor 10 wordt vergroot, met welke factor neemt het bolgewicht dan toe?

Uit de sterkteleer is bekend dat de *draagsterkte* van de paal niet door zijn eigen gewicht wordt bepaald, maar door de *oppervlakte van de doorsnede*:

paalsterkte $\propto$ *opp. paaldoorsnede*

Het hele gewicht steunt op dat oppervlak. Die oppervlakte is dus van groot belang.

d Stel ook een evenredigheidsverband op voor de oppervlakte van de doorsnede van de paal, uitgedrukt in *D*:
opp. paaldoorsnede $\propto$ .... (verband 4.4)
ofwel: *paalsterkte* $\propto$ .... (verband 4.5)

e Als alles met een factor 10 wordt vergroot, met welke factor neemt dan de paalsterkte toe?

De conclusie uit verband 4.3 en 4.5 luidt nu (de antwoorden van c en e zijn een getallenvoorbeeld daarvan):
Bij evenredige vergroting wordt de paal relatief zwakker omdat de oppervlakte van de doorsnede van de paal niet snel genoeg groeit.

4.76 Het idee achter het bol-met-paal-model kun je ook toepassen in onverwachte situaties.
Een vader loopt met zijn dochtertje van 5 jaar langs het strand. Ze doen hun best hun voeten zo plat mogelijk neer te zetten, dan maak je bijna geen sporen.
Waarom klopt de volgende redenering niet?
De kindervoeten zijn eigenlijk spitser en maken dus diepere sporen, net als een stok die je op het zand zet.
Geef een betere redenering wie de diepste sporen maakt.

vergroting met versterkte paal

Aan de toenemende zwakte van de paal kan iets gedaan worden door de dikte ervan meer-dan-evenredig te vergroten. Dit *ideale* model van vergroting onderzoeken we nu.

4.77 In die ideale toestand is vereist:

ideale paalsterkte $\propto$ *bolgewicht*

Maak weer evenredigheidsverbanden met formules waarin *D* zit:

a *ideale paalsterkte* $\propto$ .... (verband 4.i5)

b Dit betekent voor de oppervlakte van de doorsnede van deze paal:
doorsnede-opp. v.d. ideale paal $\propto$ .... (verband 4.i6)

c Bedenk eerst de evenredigheid tussen de diameter en de oppervlakte van de doorsnede van de paal:
diameter $\propto$ (*doorsnede-opp.*)$^{\cdots\cdots}$ (verband 4.4a)

en vervolgens de consequenties voor de diameter van deze paal, uitgedrukt in D:
diameter v.d. ideale paal $\propto$ .... (verband 4.i7)

4.9.3 grotere beesten, zwaardere botten: theorie

Het is na het voorafgaande geen dwaze veronderstelling dat de botten van *alle* grote dieren relatief dikker zijn dan die van kleine dieren. In de illustratie van klipdas en nijlpaard kon je dat ook goed zien.

4.78 Om nu de analogie van bol-op-paal naar dieren-met-skelet goed te kunnen doortrekken, moeten we een evenredigheid hebben waarin het *ideale paalgewicht* (skeletgewicht) in verband wordt gebracht met het *bolgewicht* (lichaamsgewicht).

a Voor de gewone, niet-versterkte paal geldt natuurlijk:
paalgewicht $\propto D^3$ (verband 4.8)
Waarom?

b Leidt uit verband 4.i5 een evenredigheid af voor het gewicht van de ideale paal, uitgedrukt in D:
gewicht v.d. ideale paal $\propto$ .... (verband 4.i8)

c Dit samen met verband 4.3 levert een evenredigheid tussen het *gewicht* v.d. ideale paal en het bolgewicht:
gewicht v.d. ideale paal $\propto$ (*bolgewicht*) (verband 4.i9)

De vergelijking van de dierensituatie met het bol-op-paal-model wordt nu:
skeletgewicht *in plaats van* gewicht v.d. ideale paal
lichaamsgewicht *in plaats van* bolgewicht

Opmerking: Bij een dier dragen de botten ook het skeletgewicht zelf. Omdat bij dieren het botgewicht maar een klein deel van het totale lichaamsgewicht is, maakt dit niet zoveel uit.

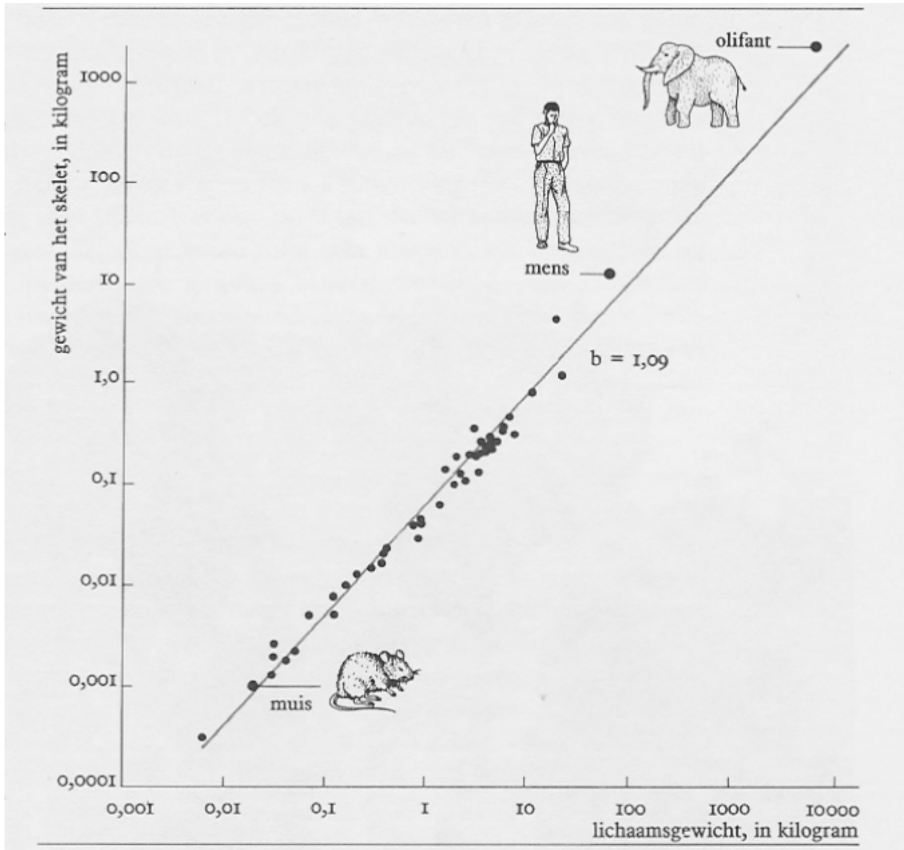
theoretisch verband

Je krijgt dus het volgende theoretische verband voor dieren met een skelet:

$$skeletgewicht = (lichaamsgewicht)^{\frac{4}{3}}$$

4.9.4 grotere beesten, zwaardere botten: praktijk

Van veel dieren is het lichaamsgewicht betrekkelijk makkelijk te meten. Er zijn lijsten van het gemiddelde gewicht van een dier van een bepaalde soort; in het Binas-boek staat zo’n lijst. Ook is van veel dieren het gewicht van het skelet bekend.



4.79 In deze figuur zijn voor een groot aantal zoogdieren skeletgewichten en lichaamsgewichten tegen elkaar uitgezet. Elk stip staat voor een diersoort en de mens staat er ook bij.

a De rechte lijn geeft aan dat er een machtsverband is van de vorm, die je nu al vaak gezien hebt. Bepaal het evenredigheidsverband op dat zo goed mogelijk met de feiten van deze figuur klopt en vul dat in:

praktijk-verband

$$skeletgewicht = (lichaamsgewicht)^{\cdots\cdots}$$

Dit praktijkverband geldt dus globaal voor al deze zoogdieren; sommige dieren zitten hier een klein beetje boven, andere er een beetje onder.

b Hoe zit dat, vergeleken met de theoretische voorspelling van de vorige bladzijde?

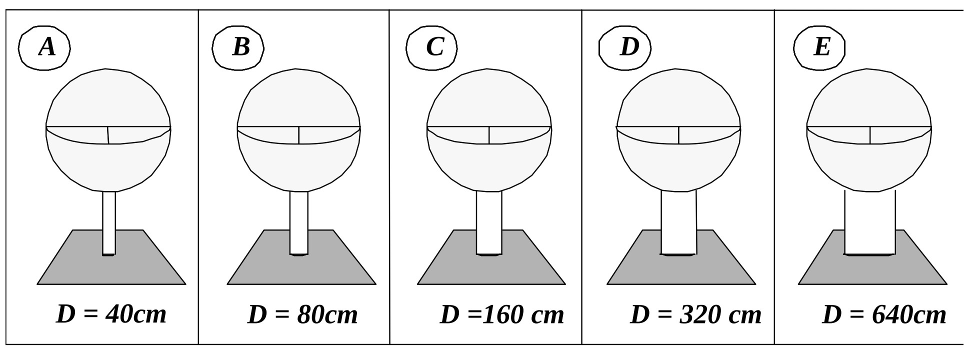
aangepast diergedrag

Je ziet dat het skeletgewicht van grote dieren minder is dan het theoretisch voorspelde. Een belangrijke reden is dat het skelet niet een onbeperkt groot deel van het lichaam zelf kan innemen. De natuur kan dus maar ten dele rekening houden met skeletaanpassing bij zwaardere dieren. Worden heel grote zoogdieren zoals olifanten dan niet gevaarlijk zwak in de botten?

Grote dieren lossen hun problemen met de sterkte van hun botten op door aanpassingen in hun gedrag. Zo zul je een gazelle ver en hoog kunnen zien springen, maar een olifant houdt het altijd bij rustig stappen of hoogstens een drafje. Nooit komen zijn poten alle vier tegelijk van de grond.
"Onze" klipdas klautert met grote snelheid ingewikkelde rotspartijen op en af, terwijl "ons" nijlpaard het niet veel verder brengt dan een draf door de vlakte, met hooguit 40 kilometer per uur. Dat lijkt snel, maar voor zo’n groot beest is het toch eigenlijk wat mager: nu begrijpen we dat zijn gedrag past bij zijn relatieve ‘dunne’ skelet.
Ander aanpassingsgedrag zie je bij de potvis: die blijft in zee, waar hij in feite in het water drijft volgens de wet van Archimedes en dus nauwelijks op eigen botkracht steunt. Op eigen kracht steunen kan zo’n dier ook met zijn spieren niet. Aanspoelen op het strand is voor hun fataal, zoals je waarschijnlijk wel eens gezien hebt.

4.9.5 opschaling in de techniek (extra)

In de techniek worden van een nieuw te ontwikkelen product soms schaalmodellen gemaakt waarmee dan proeven worden genomen voordat men het
We nemen weer het bol-op-(ideale)paal-model en gaan dat een aantal keren vergroten, d.w.z. dat we de boldiameter D telkens met een factor 2 vergoten (en dat geldt dan ook voor de lengte van de paal en dus ook voor de totale hoogte). De paal krijgt echter steeds de bijpassende "ideale" dikte.



In de figuur hieronder zijn de steeds groter wordende bollen echter steeds even groot afgebeeld (net als toen bij de skeletten van nijlpaard en klipdas). Daardoor zie je goed hoe de *relatieve dikte* van de paal toeneemt.

4.80 Leid uit eerdere verband(en) af waarom hier geldt:

$$\textit{relatieve paalverdikking} \propto D^{0.5} \qquad \text{(verband 4.i10)}$$

en controleer dat in de figuur.

4.81 Test zelf of de analogie in de natuur opgaat. De verhouding klipdas/nijlpaard is vergelijkbaar met de verhouding tussen de figuren (A) en (D) hierboven. Klopt dat wat betreft de dijbeendiktes van klipdas en nijlpaard in de afbeeldingen van de skeletten?

4.10 *Opdrachten*

In deze paragraaf komen nog enkele vergelijkbare problemen aan bod in de vorm van opdrachten. Het is de bedoeling dat je er zelf meer informatie bij zoekt en zo zelf een klein onderzoek opzet waarin je je kennis van evenredigheden toepast en uitbreidt.

Opdracht 10A: Lezen op Jupiter?

Voordat je deze opdracht kunt gaan uitvoeren, moet je voldoende bekend zijn met §4.3 Licht en Afstand en wel inclusief §4.3.3 *kracht van zon, maan en sterren*.

Jupiter zelf is moeilijk begaanbaar; deze planeet bestaat uit vloeibaar methaan. Callisto, een van de grotere manen, komt in Science Fiction-boeken echter vaak voor als mogelijke basis voor ruimtereizende aardbewoners. De zwaartekracht is er een stuk minder dan op de aarde en dat zal na even wennen wel prettig aanvoelen. Maar is het zo ver van de zon niet erg donker?
Het gaat om een onderzoek naar de volgende kwesties:
a Kun je op Callisto bij zonlicht lezen?
Net als op aarde is het op Callisto soms nacht. Dan zit je dus niet aan de zonkant van Callisto. Jupiter schijnt dan nog wel. Jupiter is veel groter dan onze maan, ongeveer 25 maal zo groot, en weerkaatst ook het zonlicht. behoorlijk goed.
b Kun je ‘s nachts op Callisto bij Volle Jupiter een boek lezen?
Uiteraard in je ruimtepak, want het zal er koud zijn. Voor verdere reizen nog de vraag:
c Wat kun je uitvinden over de leesomstandigheden op de verre planeet Pluto?

Pak de problemen op verschillende manieren aan:
- Door vergelijken met lamplicht, zoals dat eerder is gebeurd; en met gebruikmaking van de afstanden van Jupiter en de Aarde tot de Zon; ook de afstand van Callisto tot Jupiter heb je nodig.
- Door uit te zoeken hoeveel vermindering van licht een zonnebril geeft; bedenk zelf een proef om dit te meten en om te zetten in verandering van afstand tot de lichtbron. Je kunt uiteindelijk stellen dat je bij Jupiter een dubbele, driedubbele of hoeveel dubbele zonnebril op hebt vergeleken met het zonlicht hier.
- Door gebruik van het feit te maken dat Jupiter ongeveer even helder aan de hemel te zien is als de ster Capella.

Opdracht 10B: Fietsband harder dan autoband?

Kijk nog eens in §4.9.2 *Schaalvergroting in de techniek* naar de vraag over "sporen in het zand", het verschil tussen de sporen van kinderen en die van volwassenen. Het hele gewicht van de persoon steunt op hun voetoppervlak. De verhouding oppervlakte en gewicht is daar van groot belang. Die verhouding gewicht per oppervlakte wordt de *druk* genoemd.
Druk wordt officieel uitgedrukt in *pascal* (Pa); dat is hetzelfde als newton per vierkante meter (N/m^2). Wanneer je de zwaartekracht constant verondersteld, is die eenheid evenredig met de eenheid kg/cm^2 (waarom en wat is de evenredigheidsconstante?) Omdat gewichten in de praktijk vaak in kg (eigenlijk dus massa) worden uitgedrukt en kleine oppervlakten vaak in vierkante cm, mag je in het volgende onderzoek kiezen

voor kg/cm^2 als eenheid van druk, zodat je sneller weet hoe groot die drukwaarden zijn.

Het gaat om de sporen die banden van voertuigen maken in het zand. De lucht in de band en de vervormbaarheid van de band zorgen er voor dat op het hele contactvlak met de weg gelijke druk staat. Dat is tevens de luchtdruk in de band.

Bij een fiets kan dit 4 kg/cm^2 zijn, bij een auto is het altijd minder dan 2 kg/cm^2.

a Bepaal - als vooronderzoek - op twee manieren hoe groot het contactoppervlak van een fietsband ongeveer is:
door schatting te maken van het gewicht van fiets plus berijder,
en
door het contactoppervlak op te meten bij een fiets met berijder.

Bij autobussen staat het gewicht van de (lege) bus vaak op de zijkant vermeld. Meet zelf even het oppervlak op dat op de weg drukt.

b Doe onderbouwde voorspellingen over de sporen van fiets, auto en bus in vergelijkbare situaties op strandzand.

c Betrek ook lopen naaldhakken en de spitse hoeven van hert en geit in het onderzoek. Waarom zie je de sporen van een jong hertje op een bospad bijvoorbeeld wél en die van jezelf nauwelijks?

Opdracht 10C: Ieder evenveel hartslagen?

Voordat je deze opdracht kunt gaan uitvoeren, moet je voldoende bekend zijn met §4.9 *Schaalvergroting in de natuur en in de techniek.*

Je hebt de volgende formule gevonden die gemiddeld voor zoogdieren geldt:

$$skeletgewicht = (lichaamsgewicht)^{1.1}$$

In de natuur bestaan meer van zulke verbanden.

Heel ruw geldt bijvoorbeeld de volgende relatie tussen gemiddelde *levensduur* en gemiddeld *lichaamsgewicht* voor veel diersoorten:

$$gemiddelde\ levensduur = (gemiddeld\ \ lichaamsgewicht)^{0.2}$$

Over de (normale, gemiddelde) hartslag van enkele zoogdieren hebben we gegevens opgezocht, gecombineerd met het gemiddelde lichaamsgewicht.

dier	***gewicht***	***hartslagen per minuut***
spitsmuis	15 gram	700
kat	2.5 kg	200
zeehond	75 kg	100
olifant	3500 kg	30

a Onderzoek of hier een evenredigheidsverband geldt en hoe dat er dan uitziet.

b Kun je uiteindelijk een conclusie onderbouwen over het aantal hartslagen dat zoogdieren in hun leven gemiddeld tot hun beschikking hebben? Wat is dat aantal dan ongeveer? (kijk ook naar jezelf!)