Lineaire algebra toegepast

voor wiskunde D (5 VWO)

H. van Gendt
R.A.C. Dames

Versie 4, november 2008

Deze module is ontwikkeld in opdracht van cTWO.

Inhoudsopgave

Inleiding

Waarom lineaire algebra?
(Stelsels) eerstegraads vergelijkingen kom je overal tegen in de wiskunde. Het vak lineaire algebra onderzoekt alle mogelijke uitbreidingen van dit eenvoudige principe.
Via economische toepassingen, ruimtemeetkunde en vectormeetkunde tot aan ruimtes van oneindig vaak differentieerbare functies. De meest recente theorieën op wiskundegebied maar ook bij natuurkunde (relativiteitstheorie, kwantummechanica) zijn dankzij dit vak ontwikkeld. Lineaire algebra is een van de belangrijkste vakken in de eerste jaren van technische studies. Daarnaast is het vakgebied van de operationele analyse (toegepaste wiskunde) onmisbaar voor economische vervolgopleidingen (zie hoofdstuk 5).

Opzet van de module.
Deze module bestaat uit zes hoofdstukken. Hoofdstuk 1 en 2 bevatten de basisstof lineaire algebra. In principe doet elke leerling deze twee hoofdstukken. De antwoorden bij de opgaven van deze hoofdstukken vind je achterin deze reader.
De hoofdstukken 3 t/m 6 bevatten keuzeonderwerpen, gebaseerd op een viertal onderzoeksvragen. Bij een studielast van 40 SLU is een combinatie van de hoofdstukken 1 en 2 samen met twee van deze keuzehoofdstukken haalbaar. Aangezien deze hoofdstukken als onderzoeksvragen zijn bedoeld, zijn hier geen antwoorden bijgeleverd.

Onderzoeksvragen
In deze module leer je van alles over lineaire algebra. Als uitgangspunt dienen een aantal wiskundige problemen die je met lineaire algebra kunt oplossen. In overleg met je leraar kun je afspreken hoeveel en welke van deze problemen je wilt gaan bestuderen.

1 Toepassingen in de ruimtemeetkunde

Zodra je in de ruimte coördinaten hebt geïntroduceerd en lijnen en vlakken beschrijft met vergelijkingen en vectorvoorstellingen kan je met je kennis van het oplossen van stelsels vergelijkingen aan de slag. Uiteindelijk is het de bedoeling, aan de hand van een aantal voorbeelden, te laten zien hoe je hoeken tussen lijnen en vlakken in de ruimte bepaalt. De benodigde theorie vind je in hoofdstuk 1, 2 en 3. Ben je geïnteresseerd in berekeningen in de ruimte (zeker van belang bij technische vervolgopleidingen) dan kan je kiezen voor deze onderzoeksvraag. Zodra je alle (deel-)vragen uit hoofdstuk 3 hebt beantwoord ben je klaar met dit deel van de praktische opdracht.

2 oplossingsmethoden automatiseren

Het oplossen van stelsels eerstegraads vergelijkingen gaat goed met de methoden die in hoofdstuk 1 behandeld worden. Er blijven echter momenten dat je het oplossen kan versnellen door slimme keuzes te maken (rijen verwisselen, vegen met een klein getal liever dan met breuken en dergelijke). Heb je daar geen behoefte aan maar wil je een methode die je in een computer stopt die dan de oplossing genereert dan ga je te werk zoals bij deze onderzoeksvraag.

De benodigde theorie vind je in hoofdstuk 1, 2 en 4. Ben je vooral wiskundig geïnteresseerd en wil je kennis maken met de wat abstractere wiskunde dan kan je het beste deze onderzoeksvraag kiezen. Zodra je alle (deel-)vragen uit hoofdstuk 4 hebt beantwoord ben je klaar met dit deel van de praktische opdracht.

3 Lineair programmeren

Lineair programmeren staat voor optimalisatieproblemen (minimale kosten, maximale winst e.d.) waarbij zowel de doelstellingsfunctie als de voorwaarden van de eerste graad zijn. Het is een belangrijk onderdeel van het wiskundevak ‘Operationele Analyse’ dat bij veel vervolgopleidingen onderwezen wordt. Gezien de aard van de problemen die ermee opgelost worden zal het zeker een belangrijk onderdeel zijn van bedrijfswetenschappelijke of economische vervolgopleidingen.

De benodigde theorie vind je in hoofdstuk 1, 2 en 5. Ben je vooral geïnteresseerd in het praktisch nut van de wiskunde of vind je economie of logistiek interessante onderwerpen dan kan je kiezen voor deze onderzoeksvraag. Zodra je alle (deel-)vragen uit hoofdstuk 5 hebt beantwoord ben je klaar met dit deel van de praktische opdracht.

4 Lineaire transformaties

In het platte vlak en de ruimte kunnen bepaalde afbeeldingen beschreven worden met behulp van matrices. In het platte vlak houden we ons bezig met rotaties. In de ruimte gaan we vervolgens in op lineaire operatoren die in bepaalde richtingen alleen een verlenging of verkorting tot gevolg hebben. Je maakt hierbij kennis met eigenwaarden en eigenvectoren van matrices.

De benodigde theorie vind je in hoofdstuk 1, 2 en 6. Ben je geïnteresseerd in meetkunde en berekeningen in de ruimte dan kan je kiezen voor deze onderzoeksvraag. Zodra je alle (deel-)vragen uit hoofdstuk 6 hebt beantwoord ben je klaar met dit deel van de praktische opdracht.

Als je nog geen keuze kunt maken is dat geen probleem. Je kunt gewoon beginnen met hoofdstuk 1. Daarin wordt de basis gelegd van het werken met stelsels eerstegraads vergelijkingen. De in dit hoofdstuk behandelde kennis heb je voor elk bovengenoemd onderwerp nodig.

Hoofdstuk 1 Inleiding eerstegraads vergelijkingen

1.1 Inleiding eerstegraads vergelijkingen.

Een eerstegraads vergelijking in *n* variabelen $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ is een vergelijking van de vorm:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

waarbij $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ en *b* gegeven reële getallen zijn.
In allerlei disciplines kom je eerstegraadsvergelijkingen tegen.

Voorbeelden uit de economie.

Bij de opbrengstfunctie $Ob = 0,50 \cdot a + 0,75 \cdot b$ brengt artikel *a* blijkbaar 0,50 per stuk op en artikel *b* 0,75 per stuk.

Als vervoer per stuk van A naar B € 0,50 kost en van A naar C € 0,75 dan zijn je transportkosten $T = 0,50 \cdot p + 0,75 \cdot q$ als er *p* artikelen van A naar B worden getransporteerd en *q* artikelen van A naar C gaan.

Voorbeelden uit de meetkunde.

De vergelijking $2x + 3y = 6$ stelt een rechte lijn door de punten (3,0) en (0,2) voor.

De vergelijking $2x + 3y + z = 12$ stelt het vlak door de punten (6,0,0), (0,4,0) en (0,0,12) voor.

Als er meer dan drie variabelen voorkomen in een vergelijking heeft deze geen meetkundige betekenis binnen de drie dimensies die wij ons voor kunnen stellen. Omdat veel toepassingen van stelsels eerstegraads vergelijkingen niet meetkundig zijn, heeft het wel zin om in meer dimensies te kunnen rekenenen.

Een stelsel van *m* vergelijkingen in *n* onbekenden is een reeks eerstegraads vergelijkingen:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Het oplossen van zo'n stelsel komt neer op het berekenen van de getallen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ die aan alle vergelijkingen tegelijk voldoen. Als er een oplossing is (of meer dan een), noemen we het stelsel samenhangend. Zo niet, dan heet het stelsel onsamenhangend (of niet samenhangend; de vergelijkingen zijn dan strijdig).

Je kunt de informatie over een stelsel van vergelijkingen korter opschrijven door gebruik te maken van een *matrix*. In deze matrix worden de variabelen en de = tekens weggelaten. Alleen de relevante getallen worden vermeld.

Voorbeeld

Bij het stelsel $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 5x_3 = 8 \end{cases}$ hoort de matrix: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 8 \end{array}\right)$

Omgekeerd kun je uitgaande van een matrix altijd het oorspronkelijke stelsel vinden:
Als de variabelen *a* en *b* heten, hoort bij de matrix

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \end{array}\right)$ het stelsel $\begin{cases} 2a + b = 5 \\ -3a + 4b = -1 \end{cases}$

Hieronder zie je hoe wiskundigen dit zo opschrijven dat het algemeen geldig is.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

De matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & & \ldots \\ \ldots & & & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heet de coëfficiëntenmatrix van het stelsel.

De matrix:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

heet de aangevulde matrix van het stelsel.

In het bovenstaande heten de getallen a_{11}, a_{12} etc de coëfficiënten van het stelsel.
De indices (dit zijn de kleine getallen onderaan de letters) geven de plaats van het getal aan. De eerste index verwijst naar de rij, de tweede naar de kolom. Het getal a_{24} stelt dus het getal in de matrix op de tweede rij in de vierde kolom voor.

Opgave 1
Schrijf het stelsel vergelijkingen op dat hoort bij de volgende aangevulde matrix:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Meetkundig gezien is het oplossen van een stelsel eerstegraadsvergelijkingen in twee (of drie) onbekenden te beschouwen als het bepalen van een eventueel gemeenschappelijk punt van een aantal lijnen (of vlakken).

Als je stelsels eerstgraadsvergelijkingen oplost, maak je gebruik van het feit dat je, als je een vergelijking aan beide kanten van het "=" – teken met hetzelfde getal vermenigvuldigt, een gelijkwaardige vergelijking krijgt, met dezelfde oplossingen. Bovendien is het zo, dat de som van de linker leden van twee vergelijkingen gelijk zal moeten zijn aan de som van de rechterleden van deze vergelijkingen. Hieronder staan daarvan enkele voorbeelden, maar later zal je een betere methode leren.

Opgave 2
Gegeven is het volgende stelsel vergelijkingen : $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ -x + 3y = 6\frac{1}{2} \end{cases}$

a Druk in de bovenste vergelijking x uit in y en substitueer dit in de onderste vergelijking. (óf: tel beide vergelijkingen bij elkaar op.)
b Je houdt bij vraag a een vergelijking over waar alleen y in voorkomt. Los deze vergelijking op en bereken vervolgens ook de waarde van x.
c Wat is de meetkundige betekenis van de oplossing van dit stelsel.?

Opgave 3

Gegeven is het volgende stelsel van vergelijkingen: $\begin{cases} 3x+2y+z=12 \\ x+y+z=5 \\ -2x+4y-2z=0 \end{cases}$.

a Onderzoek welke van de volgende combinaties van x, y en z een oplossing is van dit stelsel: (–2, 9, 0) ; (1, 1, 7) ; $(\frac{8}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3})$; $(2\frac{1}{2},-\frac{3}{4},\frac{5}{8})$

b Los het stelsel op. Je kunt bijvoorbeeld proberen in de bovenste vergelijking z uit te drukken in x en y en dit zowel in de tweede als in de derde vergelijking te substitueren. Bedenk zelf hoe je vervolgens verder kunt gaan met de onderste twee vergelijkingen.

c Onderzoek of de in vraag a gevonden oplossing de enige oplossing is van het stelsel.

d Wat is de meetkundige betekenis van deze oplossing?

Opgave 4

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen: $\begin{cases} 3x+2y+z=12 \\ x+y=0 \\ -6x-4y-2z=-24 \end{cases}$

a Onderzoek welke van de volgende punten oplossingen zijn van het stelsel: (9, –9, 3); (–2, 2, 14) ; (8, 8, 4); (–5, 5, 0) en (6, –6, 6).

b Los het stelsel op en verklaar waarom je in dit geval meer dan één oplossing bij vraag a hebt kunnen vinden.

Opgave 5

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen: $\begin{cases} x-2y=6 \\ -3x+6y=0 \end{cases}$

a Los het stelsel op.

b Wat is hier meetkundig aan de hand?

In de bovenstaande opgaven heb je gezien dat stelsels vergelijkingen soms precies één oplossing kunnen hebben.
Als een stelsel meer dan één oplossing heeft, zijn er meteen oneindig veel oplossingen.
In opgave 4 liggen alle oplossingen op een rechte lijn. De vergelijkingen uit het stelsel van opgave 4 zijn afhankelijk van elkaar. De derde vergelijking is een veelvoud van de eerste zodat je ‘eigenlijk’ maar twee vergelijkingen bij drie onbekenden hebt.
Tenslotte kan een stelsel ook geen enkele oplossing hebben. Zo'n stelsel is strijdig.

Voorbeeld 1
In dit voorbeeld zie je hoe een stelsel van vergelijkingen kan ontstaan dat geen meetkundige betekenis heeft. De probleemstelling luidt:

> Bepaal een polynoom van de vorm: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ waarbij de bijbehorende grafiek door de punten $(-3,-2), (-1, 2), (1, 5)$ en $(2,1)$ gaat.

Oplossing:
Vul de gegeven combinaties van *x* en *y* in in de vergelijking van de polynoom. Je krijgt dan het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 = -2 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 2 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 5 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 1 \end{cases}$$

Als je dit stelsel oplost, vind je waarden voor de variabelen a_0 tot en met a_3 die je kunt invullen in de vergelijking van het polynoom. Zo vind je de volgende oplossing:

$$y = \tfrac{93}{20} + \tfrac{139}{120}x - \tfrac{23}{20}x^2 - \tfrac{41}{120}x^3$$

(de oplosmethode wordt op de volgende bladzijden toegelicht)

Later kom je nog meer praktische toepassingen tegen.

1.2 Het oplossen van stelsels eerstegraads vergelijkingen.

Matrixnotatie
Het oplossen van stelsels vergelijkingen zoals in de voorbeelden hiervoor levert heel wat minder schrijfwerk (en meer inzicht) op als je het noteert met behulp van de bij het stelsel behorende aangevulde matrix. De acties die bij vergelijkingen toegestaan zijn (beide leden met hetzelfde getal vermenigvuldigen en/of vergelijkingen bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken) zijn binnen de aangevulde matrix ook toegestaan (**waarom?**) en worden logischerwijs toegepast op de rijen van de aangevulde matrix.

Opgave 6
a Leg uit waarom de oplossing van een stelsel niet verandert als je binnen de aangevulde matrix een rij met een willekeurig getal vermenigvuldigt.
b Leg uit waarom de oplossing van een stelsel niet verandert als je binnen de aangevulde matrix rijen bij elkaar optelt of van elkaar aftrekt.

Voorbeeld 2
In voorbeeld 1 werd gevraagd om een polynoom van de vorm: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ te bepalen waarbij de bijbehorende grafiek door de punten $(-3,-2), (-1, 2), (1, 5)$ en $(2,1)$ gaat. Hieronder zie je hoe je dit probleem oplost met behulp van matrices.

Oplossing**.**
Vul de gegeven combinaties van *x* en *y* in in de vergelijking van de polynoom.
Je krijgt dan het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 = -2 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 2 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 5 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 1 \end{cases}$$

Dit levert de volgende aangevulde matrix op:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -3 & 9 & -27 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 1 \end{array}\right)$$

De rijen van deze matrix noemen we R_1, R_2, R_3 *en* R_4

De $\boxed{1}$ linksboven gebruik je om te ‘vegen’. Als je namelijk de bovenste rij (R_1) van alle andere rijen aftrekt, beginnen de nieuwe rijen R_2, R_3, en R_4 die zo ontstaan allemaal met een nul. Men zegt dat de eerste kolom is "schoongeveegd"

Met: $\begin{cases} R_1 \to R_1 \\ R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{cases}$ wordt dit: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 9 & -27 & -2 \\ 0 & 2 & -8 & 26 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & 28 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & 35 & 3 \end{array}\right)$

Als je rij 2 door 2 deelt krijg je:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 9 & -27 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 13 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & 28 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & 35 & 3 \end{array}\right)$$

Nu gebruik je de $\boxed{1}$ in de tweede rij en tweede kolom om de tweede kolom schoon te vegen.. Belangrijk is dat deze 1 in een andere kolom staat en in een andere rij dan de eerste 1. Het is weliswaar gemakkelijk dat je na de eerste rij en eerste kolom kunt kiezen voor de tweede rij en tweede kolom, maar het is niet noodzakelijk.
Als je rij 2 driemaal optelt bij rij 1, viermaal aftrekt van rij 3 en vijfmaal aftrekt van rij 4 staan er onder en boven de gekozen 1 alleen nog maar nullen.

Met: $\begin{cases} R_1 \to R_1 + 3 \cdot R_2 \\ R_2 \to R_2 \\ R_3 \to R_3 - 4 \cdot R_2 \\ R_4 \to R_4 - 5 \cdot R_2 \end{cases}$ krijg je: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 13 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -24 & -1 \\ 0 & 0 & 15 & -30 & -7 \end{array}\right)$

Als je de derde rij door 8 deelt, krijg je:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 13 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 15 & -30 & -7 \end{array}\right)$$

Je kunt de $\boxed{1}$ op de derde rij en derde kolom gebruiken om kolom 3 te vegen:

met: $\begin{cases} R_1 \to R_1 + 3 \cdot R_3 \\ R_2 \to R_2 + 4 \cdot R_3 \\ R_3 \to R_3 \\ R_4 \to R_4 - 15 \cdot R_3 \end{cases}$ krijg je: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & \frac{29}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -\frac{41}{8} \end{array}\right)$

Tenslotte deel je de vierde rij door 15. Je krijgt dan:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & \frac{29}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{41}{120} \end{array}\right)$$

De laatste stap is vegen met de $\boxed{1}$ op regel vier, kolom vier:

met: $\begin{cases} R_1 \to R_1 - 3 \cdot R_4 \\ R_2 \to R_2 - R_4 \\ R_3 \to R_3 + 3 \cdot R_4 \\ R_4 \to R_4 \end{cases}$ krijg je: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{93}{20} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{139}{120} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{23}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{41}{120} \end{array}\right)$

Bij de matrix die nu ontstaan is hoort het volgende stelsel:

$$\begin{cases} 1 \cdot a_0 + 0 + 0 + 0 = \frac{93}{20} \\ 0 + 1 \cdot a_1 + 0 + 0 = \frac{139}{120} \\ 0 + 0 + 1 \cdot a_2 + 0 = -\frac{23}{20} \\ 0 + 0 + 0 + 1 \cdot a_3 = -\frac{41}{120} \end{cases}$$

Hier kun je de oplossing voor de variabelen a_0 tot en met a_3 zo uit aflezen.
Als je die invult in de vergelijking van het polynoom, vind je als oplossing:

$$y = \frac{93}{20} + \frac{139}{120}x - \frac{23}{20}x^2 - \frac{41}{120}x^3$$

Als je goed naar de stappen van dit voorbeeld kijkt, zie je een zekere systematiek. Deze systematiek wordt hierna beschreven. Als je werkt met meer vergelijkingen en variabelen is het wenselijk een vast systeem toe te passen om vast te stellen of een stelsel samenhangend is en om alle oplossingen te vinden (**bedenk zelf waarom**).

1.3 Enkele afspraken en definities.

Een methode die altijd tot een oplossing leidt (niet altijd de snelste methode, maar absoluut trefzeker) is het zogenaamde algoritme (oplosmethode) van Gauss-Jordan. Voordat deze methode beschreven wordt, volgen eerst een paar afspraken over terminologie.

Afspraak:
Kolommen met louter nullen (een variabele die geen invloed heeft) laat je weg. Ook voeg je geen rijen met louter nullen toe als je te weinig vergelijkingen hebt.

Definitie 1.
Een matrix is in *rij-echelon vorm* indien de rijen zo zijn geordend dat elke volgende rij met meer nullen start dan de vorige.

Zo is de matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ wel in rij-echelon vorm en de matrix: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ niet.

Opgave 7
Leg uit waarom de rechter matrix hierboven niet in rij-echelonvorm staat.

Definitie 2.
Een matrix is in *gereduceerde rij-echelon vorm* (ook wel kanonieke vorm genoemd) indien:

1. de matrix in rij-echelon vorm is
2. in iedere rij het leidende element (het eerste element ongelijk aan nul) een 1 is
3. alle elementen in de kolom waarin de leidende 1 staat gelijk aan 0 zijn

Voorbeelden van matrices in gereduceerde rij-echelon vorm zijn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden van matrices die wel in rij-echelon vorm zijn maar niet in gereduceerde rij-echelon vorm zijn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 8
Ga zelf na waarom bovenstaande matrices niet in gereduceerde rij-echelonvorm staan.

Definitie 3.
(elementaire rij-bewerkingen) Er zijn drie elementaire rij-bewerkingen die op een matrix kunnen worden uitgevoerd:

1 twee rijen verwisselen (notatie: $R_i \leftrightarrow R_j$ verwisselt de rijen i en j)
2 een rij vermenigvuldigen met een getal ongelijk nul (notatie: $R_i \rightarrow tR_i$ vermenigvuldigt rij i met het getal t)
3 het veelvoud van een rij optellen bij een andere rij (notatie: $R_j \rightarrow R_j + tR_i$ telt t maal rij i op bij rij j)

Bovenstaande bewerkingen veranderen een stelsel eerstegraads vergelijkingen in een gelijkwaardig stelsel eerstegraads vergelijkingen, waarmee bedoeld wordt dat het nieuwe stelsel dezelfde oplossingsverzameling oplevert. De tweede en de derde heb je al gebruikt. De eerste bewerking, het verwisselen van rijen, levert natuurlijk een gelijkwaardig stelsel op en kan soms handig zijn om een rij met eenvoudige getallen (liefst met een1 en wat nullen) bovenaan te zetten.

Definitie 4.
(rij-equivalentie) Twee matrices A en B zijn *rij-equivalent* met elkaar als ze uit elkaar kunnen ontstaan door een rij elementaire rij-bewerkingen.

Voorbeeld 3

De matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ zijn rij-equivalent.

Dit kan je na gaan door op A de volgende elementaire rij-bewerkinge toe te passen:

$R_1 \to 2R_1$
$R_2 \to R_3$
$R_3 \to R_2 + 2R_3$,

Met de omgekeerde bewerkingen in omgekeerde volgorde kom je van B naar A.
Als A en B rij-equivalente aangevulde matrices zijn bij twee stelsels eerstegraads vergelijkingen kun je gemakkelijk aantonen dat de oplossingen van deze twee stelsels hetzelfde moeten zijn.

Opgave 9

Gegeven zijn de matrices $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right)$ en $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & 8 \\ 4 & -1 & 5 & 25 \end{array}\right)$

a Geef de stelsels vergelijkingen die horen bij deze matrices.
b Los beide stelsels op door de matrices te vegen op de manier van voorbeeld 2. Lukt dit niet, los de stelsels dan op je eigen manier op.
c Zijn de matrices A en B rij-equivalent?

1.4 Het Gauss-Jordan algoritme

Het Gauss-Jordan algoritme is een methode om bij een gegeven matrix A een matrix B in gereduceerde rij-echelon vorm te bepalen, die rij-equivalent is met A. Als A dan de aangevulde matrix is van een stelsel eerstegraads vergelijkingen, dan kan je aan B snel zien of het stelsel oplosbaar is en de oplossing is dan ook heel eenvoudig te bepalen.

Voorbeeld 4
Hieronder wordt uitgelegd hoe je met behulp van deze methode kunt aantonen

dat de matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rij-equivalent zijn.

STAP 1
Zorg, zonodig door de rijen te verwisselen, dat er op positie a_{11} (eerste rij, eerste kolom) een getal ongelijk nul komt te staan (het liefst natuurlijk een 1). Als dit getal niet gelijk is aan 1, deel je de gehele eerste rij door het getal a_{11} zodat er wel een 1 komt te staan.

Matrix A $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ wordt met $R_1 \leftrightarrow R_2$: $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Vervolgens wordt rij 1 een zodanig aantal keren van de andere rijen afgetrokken of erbij opgeteld dat er onder de 1 alleen nog maar nullen staan.

Met $\begin{cases} R_3 \to R_3 - 2 \cdot R_1 \\ R_4 \to R_4 + 6 \cdot R_1 \end{cases}$ krijg je $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 7 & 13 \end{pmatrix}$. Noem dit matrix C

STAP 2

Bepaal vervolgens de eerstvolgende kolom waarin in de tweede tot en met laatste rij een getal ongelijk aan nul voor komt. Verwissel zonodig de rijen om te zorgen dat dit getal in de tweede rij komt te staan. Dit getal heet het leidende getal in rij 2.

Opmerking: vaak is dit niet nodig, omdat er op positie a_{22} al een getal ongelijk nul staat; in ons voorbeeld staat er zelfs al een 1, wat ideaal is. Gevallen waar het wel nodig is zijn bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix} \text{ waar je het liefst door gaat met: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

of:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \text{ waar je verder kan gaan met: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Staat het eerste getal ongelijk nul op positie a_{22} dan deel je vervolgens rij 2 door a_{22}, staat het pas op positie a_{23} dan deel je rij 2 door a_{23}, enzovoorts. Daarna tel je geschikte veelvouden van rij 2 op bij de onderliggende rijen zodat de overige elementen in kolom van het leidende element uit rij 2 allemaal gelijk aan nul worden.

Dit proces stopt uiteindelijk omdat er geen rijen meer zijn of omdat er geen kolommen met getallen ongelijk aan nul meer zijn. Uiteindelijk zal de matrix in gereduceerde rij-echelon vorm zijn.

Matrix C uit het voorbeeld (zie onderaan pagina 10) pak je zo aan. Omdat er op plaats c_{22} een 1 staat hoef je geen rijen te verwisselen en kun je zonder de rij ergens door te delen met deze 1 verder gaan vegen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 7 & 13 \end{pmatrix} \text{ met } \begin{cases} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_3 \to R_3 + 3 \cdot R_2 \\ R_4 \to R_4 - 4 \cdot R_2 \end{cases} \text{ wordt: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ met } \begin{cases} R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_4 \to R_4 - 7 \cdot R_3 \end{cases} \text{ wordt: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$R_4 \to -\frac{1}{9} \cdot R_4$ levert: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} R_1 \to R_1 + 2 \cdot R_4 \\ R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_4 \\ R_3 \to R_3 - 2 \cdot R_4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opmerking: Men kan aantonen dat er bij een gegeven matrix één en slechts één matrix in gereduceerde echelon-vorm is die er rij-equivalent mee is.

Opgave 10

Gegeven zijn de matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bepaal bij alle drie de matrices de bijbehorende matrix in gereduceerde echelon-vorm die er rij-equivalent mee is.

1.5 Bijzondere situaties

Stel dat een stelsel van *m* eerstegraads vergelijkingen in *n* variabelen $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ als aangevulde matrix matrix A heeft en dat A rij-equivalent is met een aangevulde matrix B die in gereduceerde rij-echelon vorm is (eventueel via het Gauss-Jordan algoritme).

Dan zijn er drie mogelijkheden:

- Je houdt bij matrix B onder andere een rij nullen over met achter de streep een getal ongelijk aan nul. De bijbehorende vergelijking is, na deling door het getal achter de streep:

  $$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$$

  en deze vergelijking heeft geen oplossingen. Het oorspronkelijke stelsel heeft dan natuurlijk ook geen oplossingen.De vergelijkingen zijn *strijdig* met elkaar.
  Zo'n stelsel heet *niet samenhangend* of *vals* .

- Er is één en slechts één oplossing die aan alle vergelijkingen voldoet. De ‘geveegde’matrix B is:

  $$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & d_n \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  We laten natuurlijk de rijen met alleen nullen buiten beschouwing. Deze ontstaan als er onderling afhankelijke vergelijkingen in het stelsel zaten. Sommige vergelijkingen zijn blijkbaar te schrijven als lineaire combinaties van andere vergelijkingen uit het stelsel en dus overbodig. We komen daar later op terug.
  Er is één en slechts één oplossing: $x_1 = d_1, x_2 = d_2, ..., x_n = d_n$.
  Zo'n stelsel heet een *samenhangend stelsel* en is *bepaald.*

- Er zijn meer dan een oplossingen (en dan automatisch oneindig veel). Je hebt dan te maken met teveel afhankelijke vergelijkingen. Te veel vergelijkingen zijn blijkbaar te schrijven als lineaire combinaties van andere vergelijkingen uit het stelsel en dus overbodig. Als je ze weg laat, houd je minder vergelijkingen over dan er variabelen zijn. Hoe je dan te werk gaat zie je onder andere in de komende voorbeelden.
  Het *samenhangende stelsel* is nu *onbepaald.*

Voorbeeld 5

Los het volgende stelsel op: $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=1 \\ 4x+2y=1 \end{cases}$

Oplossing:

De aangevulde matrix van dit stelsel is: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{array}\right)$

Deze matrix is rij-equivalent met: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Bij deze matrix hoort het stelsel: $\begin{cases} 1\cdot x+0\cdot y=\frac{1}{2} \\ 0\cdot x+1\cdot y=-\frac{1}{2} \\ 0\cdot x+0\cdot y=0 \end{cases}$

Je ziet hier dat de oorspronkelijke vergelijkingen *afhankelijk* van elkaar waren (noemen we de oorspronkelijke vergelijkingen V_1, V_2 *en* V_3 dan geldt bijvoorbeeld: $3\cdot V_1+V_2=V_3$) zodat er uiteindelijk twee vergelijkingen met twee onbekenden overblijven.

Er is dus precies een oplossing, die uit de aangevulde matrix in rij-echelon vorm gemakkelijk af te lezen is: $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}$

Voorbeeld 6

Los het volgende stelsel op: $\begin{cases} 3a-4b+2c=-1 \\ a+2b+c=2 \\ -2a+6b-2c=1 \end{cases}$

Oplossing:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & -2 & 1 \end{array}\right)$ $\quad R_1 \leftrightarrow R_2 \quad$ $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & -1 \\ -2 & 6 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{cases} R_2 \to R_2-3\cdot R_1 \\ R_3 \to R_3+2\cdot R_1 \end{cases}$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & -1 & -7 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \end{array}\right)$

$$\begin{cases} R_2 \to \frac{1}{10} \cdot R_3 \\ R_3 \to R_2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -10 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

Opmerking: het verwisselen van rij 2 en 3, naast het delen, is niet noodzakelijk voor het oplossen van het stelsel, maar wel voor het consequent toepassen van Gauss-Jordan om in rij-echelon vorm uit te komen.

$$\begin{cases} R_1 \to R_1 - 2 \cdot R_2 \\ R_3 \to R_3 + 10 \cdot R_2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} R_3 \to -R_3 \\ R_1 \to R_1 - R_3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

en hier lees je gemakkelijk de oplossing uit af: $a = -1, b = \frac{1}{2}$ *en* $c = 2$.

Opgave 11

Toon zelf aan dat de matrices $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{array}\right)$ en $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ rij-equivalent zijn.

Opgave 12

Los het volgende stelsel op: $\begin{cases} 5a + 2b + c = 2 \\ a + 3b + 2c = 0.2 \\ b + 2c = -4 \end{cases}$

Opgave 13

a Los het volgende stelsel vergelijkingen op. $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$

b Hoe blijkt dat de vergelijkingen in dit stelsel strijdig zijn?

Voorbeeld 7

Los het volgende stelsel op: $\begin{cases} 2x+3y-2z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 3x+8y-7z=8 \end{cases}$

Oplossing: door te vegen in de aangevulde matrix krijg je:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & -7 & 8 \end{array}\right) \quad \text{(bepaal zelf de stappen)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 8 & -7 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 14 & -16 & 2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{8}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 14 & -16 & 2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{7} & 2\frac{2}{7} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{8}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Deze laatste matrix is in gereduceerde rij-echelon vorm, maar met twee vergelijkingen en drie onbekenden zijn er oneindig veel oplossingen mogelijk. Uit de bovenste regel volgt namelijk: $x+\frac{5}{7}z=2\frac{2}{7}$, dus $x=2\frac{2}{7}-\frac{5}{7}z$.
Uit de tweede regel volgt: $y-\frac{8}{7}z=\frac{1}{7}$, dus $y=\frac{1}{7}+\frac{8}{7}z$

De totale oplossing is: $\begin{cases} x=2\frac{2}{7}-\frac{5}{7}z \\ y=\frac{1}{7}+\frac{8}{7}z \end{cases}$.

Voor iedere waarde van z is er een oplossing voor x en y. Omdat er oneindig veel mogelijkheden voor z zijn, zijn er dus oneindig veel oplossingen van dit stelsel.

Voorbeeld 8

Bepaal voor welke waarde van t het stelsel samenhangend is: $\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=3 \\ 3x-y=t \end{cases}$

Oplossing: $\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & t \end{array}\right)$ wordt $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & t-6 \end{array}\right)$, dan $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -4 & t-6 \end{array}\right)$

en tenslotte: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2\frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & t-7\frac{1}{3} \end{array}\right)$.

Dit stelsel heeft alleen oplossingen als de laatste rij geheel uit nullen bestaat.
Het stelsel is daarom samenhangend is als: $t=7\frac{1}{3}$.

Opgave 14

De laatste matrix uit voorbeeld 7 was $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2\frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & t-7\frac{1}{3} \end{array}\right)$.

a Leg uit waarom het stelsel wél een oplossing heeft als $t-7\frac{1}{3}$ gelijk is aan 0.

b Bepaal de oplossing van het stelsel in dat geval.

c Wat is er aan de hand met het stelsel als $t-7\frac{1}{3}$ ongelijk is aan 0?

Voorbeeld 9

Bepaal voor welke waarden van a en b het stelsel $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ x+2y-az=7 \\ 2x-y+z=b \end{cases}$

a geen oplossingen heeft
b één oplossing heeft
c oneindig veel oplossingen heeft

Oplossing: $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -a & 7 \\ 2 & -1 & 1 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -a-1 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & b-10 \end{array}\right) \to$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & a+1 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & b-10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3a-2 & 11 \\ 0 & \boxed{1} & a+1 & -2 \\ 0 & 0 & 7a+6 & b-24 \end{array}\right)$$

Van de laatste regel kunnen we aflezen:

a geen oplossingen als $a=-\frac{6}{7}$ *en* $b \neq 24$

b één oplossing als $a \neq -\frac{6}{7}$

c oneindig veel oplossingen als $a=-\frac{6}{7}$ *en* $b=24$.

Opgave 15

Leg duidelijk uit waarom er:

a geen oplossingen zijn als $a=-\frac{6}{7}$ *en* $b \neq 24$.

b één oplossing is als $a \neq -\frac{6}{7}$

c oneindig veel oplossingen zijn als $a=-\frac{6}{7}$ *en* $b=24$.

Opgave 16
Los de volgende stelsels vergelijkingen op door de aangevulde matrix die erbij hoort om te zetten naar de bijbehorende matrix in gereduceerde rij-echelon vorm:

a $\begin{cases} 2x+y-3z=5 \\ 3x-2y+2z=5 \\ 5x-3y-z=16 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 5x+4y+3z=4 \end{cases}$

c $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=10 \\ 3x_1-x_2+7x_3+4x_4=1 \\ -5x_1+3x_2-15x_3-6x_4=9 \end{cases}$

d $\begin{cases} 2b+3c-4d=1 \\ 2c+3d=4 \\ 2a+2b-6c+2d=4 \\ 2b-6c+9d=36 \end{cases}$

Opgave 17

Gegeven is het stelsel: $\begin{cases} x+y-z+w=1 \\ ax+y+z+w=b \\ 3x+2y+aw=1+a \end{cases}$

a Toon aan dat de onderstaande matrix rij-equivalent is met dit stelsel:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & a-2 & -1+a \\ 0 & 1 & -3 & 3-a & 2-a \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-a^2+3a-2}{4-2a} & \dfrac{-a^2+2a+b-2}{4-2a} \end{array}\right)$$

b Bepaal de waarden van *a* en *b* waarvoor het gegeven stelsel samenhangend is (dus minstens één oplossing); de variabelen zijn *x, y, z* en *w*.

c Bepaal de oplossing van het stelsel als $a=b=2$.

1.6 Homogene stelsels

Een homogeen stelsel eerstegraads vergelijkingen is een stelsel van de vorm:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Zo'n stelsel is altijd samenhangend aangezien $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n = 0$ een oplossing is.
Deze oplossing noemt men de *triviale oplossing*. Iedere andere oplossing is een *nontriviale oplossing.*

Bij een homogeen stelsel eerstegraads vergelijkingen heb je maar twee mogelijkheden, namelijk één oplossing of oneindig veel oplossingen. Het stelsel kan niet vals (zonder oplossingen) zijn.

Opgave 18
Leg uit waarom een homogeen stelsel niet vals kan zijn.

Stelling 1
Een homogeen stelsel van *m* eerstegraads vergelijkingen met *n* variabelen heeft altijd een nontriviale oplossing als $m < n$, dus als je minder vergelijkingen dan variabelen hebt.

Voorbeeld 9

Gegeven is het stelsel: $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$

Dit stelsel kan je via substitutie terugbrengen tot $\begin{cases} y = -4x \\ z = -5x \end{cases}$ waarmee bij iedere waarde van x bijbehorende waarden van y en z te bepalen zijn.

(Opmerking: dit kan ook via: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{array}\right)$ en $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \end{array}\right)$

wat $\begin{cases} x + \frac{1}{5}z = 0 \\ y - \frac{4}{5}z = 0 \end{cases}$ oplevert.)

Opgave 19
Leg uit waarom de oplossing die bij de opmerking tussen haakjes wordt genoemd in feite dezelfde is als de oplossing die eerder door substitutie werd gevonden.

Voorbeeld 10

Gegeven is het stelsel: $\begin{cases} a+2b-3c=0 \\ 2a-b+2d=0 \\ -3a+b-c+d=0 \end{cases}$

Oplossen met: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{5} & \frac{19}{5} & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{8} & 0 \end{array}\right)$

De oplossing is dan te schrijven als: $\begin{cases} a=\frac{5}{8}d \\ b=\frac{13}{4}d \\ c=\frac{19}{8}d \end{cases}$

Opgave 20
Laat zien hoe we aan de gegeven oplossing komen en leg uit dat uit deze oplossing volgt dat er oneindig veel getallencombinaties (a,b,c,d) aan het gegeven stelsel vergelijkingen voldoen.

Opgave 21
Los de volgende stelsels vergelijkingen op:

a $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3+4x_4=0 \\ x_1+3x_2-2x_3-6x_4=0 \end{cases}$

b $\begin{cases} b+3c-4d=0 \\ 2c+3d=0 \\ 2a+2b-c+2d=0 \\ 2b-6c+3d=0 \end{cases}$

Als je meer vergelijkingen dan variabelen hebt of als het aantal vergelijkingen gelijk is aan het aantal variabelen weet je nog niet zeker dat er geen nontriviale oplossing is; er kunnen immers onderling afhankelijke vergelijkingen aanwezig zijn. Pas als het stelsel in (gereduceerde) rij-echelonvorm is gebracht zie je hoeveel onafhankelijke vergelijkingen je hebt en kan je bepalen of je (eigenlijk) minder vergelijkingen dan variabelen hebt of niet.

Opgave 22
Herleid bij de volgende stelsels vergelijkingen de bijbehorende matrix (bedenk waarom het aanvullen van de matrix hier zinloos is) tot de (gereduceerde) rij-echelonvorm en bepaal hieruit of het stelsel een nontriviale oplossing heeft.

a $\begin{cases} x+y-3z=0 \\ x-2y+2z=0 \\ 5x-3y-2z=0 \end{cases}$

c $\begin{cases} 5x_1+x_2-18x_3+2x_4=0 \\ 3x_1-x_2+7x_3+4x_4=0 \\ -33x_1+3x_2-5x_3-6x_4=0 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ 3x+3y+5z=0 \\ 5x+4y+3z=0 \end{cases}$

d $\begin{cases} 2b+3c-4d=0 \\ 2c+3d=0 \\ 2a+2b-5c+2d=0 \\ 2b-2c+15d=0 \end{cases}$

Beschouw een inhomogeen stelsel (S) met het bijbehorende homogene stelsel (S*):

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+.......+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+.......+a_{2n}x_n=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+.......+a_{3n}x_n=b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.......+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad S^* = \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+.......+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+.......+a_{2n}x_n=0 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+.......+a_{3n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.......+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

Dan geldt:

Stelling 2
Stel dat $u=(u_1,u_2,u_3,......,u_n)$ een oplossing is van S (een zogenaamde particuliere oplossing). De verzameling van alle oplossingen van S* (dat kan er 1 zijn of het kunnen er oneindig veel zijn) noemen we W. Dus: $w=(w_1,w_2,w_3,......,w_n)\in W$.
Dan vormen alle sommen $u+w=(u_1+w_1,u_2+w_2,......,u_n+w_n)$ met $w\in W$ samen de volledige oplossing van S.

In de stelling en het bijbehorende bewijs gebruiken we het teken $\in$ uit de verzamelingleer. Het betekent 'is element van'. De notatie $w\in W$ betekent dus dat w een element is van W (en dus een oplossing van S*).

Deze stelling is theoretisch van groot belang. De achterliggende gedachte kom je bij bijna alle vervolgonderwerpen wel tegen. We gebruiken het resultaat niet om stelsels inhomogene vergelijkingen op te lossen. Het instrumentarium daarvoor hebben we in de voorafgaande paragrafen ruimschoots de revue laten passeren.

Bewijs van stelling 2:
Je moet twee kanten van de stelling beschouwen en bewijzen. Eerst bewijs je dat iedere som $u+w$, waarbij $w \in W$, een oplossing is van S. Daarna bewijs je dat er geen andere oplossingen van S zijn.

Stel: u is oplossing van S, dan geldt voor iedere toepasselijke waarde van *i*:

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3 + ... + a_{in}u_n = b_i \qquad (*)$$

Stel: w is een willekeurig element van *W*, dan geldt voor iedere toepasselijke waarde van *i*:

$$a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + a_{i3}w_3 + ... + a_{in}w_n = 0 \qquad (**)$$

Opgave 23

a Toon aan dat het optellen van vergelijkingen (*) en (**) tot het volgende resultaat leidt: $a_{i1}(u_1+w_1) + a_{i2}(u_2+w_2) + a_{i3}(u_3+w_3) + ... + a_{in}(u_n+w_n) = b_i$

b Waarom volgt hieruit dat $u + w$ een oplossing is van *S*?

Het tweede gedeelte van het bewijs is een bewijs vanuit het ongerijmde. Ga uit van het tegendeel van wat je wilt bewijzen en toon aan dat dit een tegenstrijdigheid oplevert.

Stel: p is een oplossing van S die niet te schrijven is als $u+w$ met u een oplossing van S en w een oplossing van S*.

Dan geldt voor iedere toepasselijke waarde van *i*:

$$a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + ... + a_{in}p_n = b_i \qquad (***)$$

Bovendien geldt nog steeds: $a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3 + ... + a_{in}u_n = b_i \qquad (*)$

Trek de betrekkingen (***) en (*) van elkaar af, dan krijg je:

$$a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + ... + a_{in}p_n - a_{i1}u_1 - a_{i2}u_2 - a_{i3}u_3 - .... - a_{in}u_n = 0$$

Oftewel: $a_{i1}(p_1-u_1) + a_{i2}(p_2-u_2) + a_{i3}(p_3-u_3) + ... + a_{in}(p_n-u_n) = 0$

Opgave 24

a Wat volgt uit de laatste regel hierboven voor $p - u$?

b Waarom volgt uit vraag *a* dat $p - u$ gelijk is aan w?

c Wat volgt uit vraag b voor $u + w$?

d Waarom levert het antwoord van vraag c een tegenstrijdigheid op?

e Welke conclusie kun je dus trekken?

Voorbeeld 11

Gegeven is het stelsel S = $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$

Enig puzzelen levert hier op dat $u = (1,1,1,1)$ een oplossing van dit stelsel is.

Het bijbehorende homogene stelsel S* = $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

Dit stelsel los je op met $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Merk op dat we nu niet de aangevulde matrix opschrijven omdat achter de streep alleen maar nullen zouden staan.

Dit wordt $\begin{pmatrix} 1 & 0.2 & -0.4 & -0.4 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0.2 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & -1.6 & 3.2 & 5.2 \\ 0 & 2.6 & -4.2 & -1.2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0.2 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & -2 & -3.25 \\ 0 & 2.6 & -4.2 & -1.2 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & -2 & -3.25 \\ 0 & 0 & 1 & 7.25 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 & 11.25 \\ 0 & 0 & 1 & 7.25 \end{pmatrix}$ met als resultaat dat voor een oplossing

$w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ geldt dat: $\begin{cases} w_1 = -0.25w_4 \\ w_2 = -11.25w_4 \\ w_3 = -7.25w_4 \end{cases}$.

Noemen we w_4 nu λ dan geldt:

$w = (-0.25\lambda, -11.25\lambda, -7.25\lambda, \lambda) = \lambda(-0.25, -11.25, -7.25, 1)$ zodat alle oplossingen van S

te schrijven zijn als: $u + w = (1,1,1,1) + \lambda \cdot (-0.25, -11.25, -7.25, 1)$.

Je kunt dit wat hanteerbaarder opschrijven als: $u + w = (1,1,1,1) + \mu \cdot (1, 45, 29, -4)$.

Opgave 25

a Kies in het antwoord van voorbeeld 11 voor λ de waarde 1. Welke oplossing levert dit?

b Er bestaat een waarde voor μ (onderaan in voorbeeld 11) die dezelfde oplossing levert als je in vraag a berekend hebt. Welke waarde is dat?

c Leg nu uit waarom de oplossingsverzamelingen $u + w = (1,1,1,1) + \lambda \cdot (-0.25, -11.25, -7.25, 1)$ en $u + w = (1,1,1,1) + \mu \cdot (1, 45, 29, -4)$ equivalent zijn.

Opgave 26

Gegeven is het stelsel: $\begin{cases} 2a + 3b - c = 4 \\ -a + 3b + 2d = 4 \\ 2b + c - 2d + e = 2 \\ a + 2b + d - 2e = 2 \end{cases}$

a Laat zien dat $a = b = c = d = e = 1$ een oplossing is van dit stelsel.

b Waarom zal dit niet de enige oplossing zijn?

c Geef de volledige oplossing van het bijbehorende homogene stelsel

d Geef de volledige oplossing van het gegeven stelsel

Hoofdstuk 2 Inleiding matrixrekening

2.1 Matrices

Zoals in het eerste hoofdstuk al is opgemerkt wordt een (rechthoekig) getallenschema een matrix genoemd (de Engelsen kennen dezelfde term, maar men spreekt ook wel over een array). De matrix wordt tussen haken gezet.

Onder de afmetingen van een matrix verstaat men de aantallen rijen en kolommen van de matrix. Zo is $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ een 4×3 matrix met 4 rijen en 3 kolommen.

Een $n\times1$ matrix wordt ook wel een vector genoemd. In $\mathbf{R_2}$ en $\mathbf{R_3}$ (het platte vlak en de driedimensionale ruimte) kennen we het begrip vector al.

De notatie is vergelijkbaar: de vector in $\mathbf{R_3}$ die loopt van de oorsprong (0, 0, 0) naar het punt (*a, b, c*) wordt dan aangegeven met $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Matrixvermenigvuldiging
Je kunt een rijmatrix en een kolommatrix als volgt met elkaar vermenigvuldigen:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

Dit kan natuurlijk alleen als het aantal elementen van de rijvector (hier 3) gelijk is aan het aantal elementen van de kolomvector (hier ook 3).
Merk op dat de uitkomst van deze vermenigvuldiging een *getal* is.

Als je meerdere rijen met dezelfde kolom wilt vermenigvuldigen, kun je deze rijen links in een matrix onder elkaar zetten. De uitkomst is per rij één getal; de getallen worden samen vermeld in een kolomvector.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ px+qy+rz \end{pmatrix}$$

Hierboven is een ***2*** × 3 matrix vermenigvuldigd met een 3× ***1*** matrix.
De uitkomst is een ***2*** × ***1*** matrix.

Algemeen geldt: een $m \times p$ matrix keer een $p \times n$ matrix levert een $m \times n$ matris op.

Voorbeeld

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + -1 \cdot -4 \quad 2 \cdot 5 + 3 \cdot -2 + -1 \cdot 0) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \end{pmatrix}$$

De uitkomst van een 1 × 3 matrix keer een 3 × 2 matrix is een 1 × 2 matrix (vector)

Opgave 1
Vermenigvuldig de volgende matrices:

a $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ **c** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Opgave 2.
Bereken voor welke *x* geldt:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & x & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ 3 \\ 2-x \end{pmatrix} = 0$$

In hoofdstuk 1 ben je de coëfficiëntenmatrix van een stelsel vergelijkingen al tegengekomen.

Het stelsel:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots\dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

heeft als coëfficiëntenmatrix de matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \dots \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Om van matrix naar vergelijking te komen kun je nu gebruik maken van de volgende matrixvermenigvuldiging:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots + a_{1n}x_n$$

Wil je dit voor het gehele stelsel vergelijkingen doen dan krijg je de matrixvermenigvuldiging:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \dots \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots\dots + a_{3n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots\dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

wat dan alleen kan als het aantal kolommen van de linker matrix (n) gelijk is aan het aantal elementen van de kolomvector (n). Het aantal elementen van de kolomvector die ontstaat is altijd gelijk aan het aantal rijen van de linkermatrix (m). Kortweg: een $m \times n$ matrix vermenigvuldigd met een $n \times 1$ matrix (vector) levert een $m \times 1$ matrix (vector) op. De vermenigvuldigingspunt wordt meestal weggelaten.

Het stelsel:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots\dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

kun je nu schrijven als:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \dots \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Opgave 3
Schrijf het stelsel vergelijkingen op dat hoort bij de volgende matrixvermenigvuldiging:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 2 \\ 11 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Opgave 4

Bereken: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Opgave 5
Waarom is de volgende matrixvermenigvuldiging niet uitvoerbaar?

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 3 & -7 & 13 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2.2 Vierkante matrices

Extra interessant zijn de vierkante matrices, dat wil zeggen matrices met evenveel rijen als kolommen. Kijk je naar stelsels eerstegraads vergelijkingen, dan heb je het over coëfficiënten-matrices die horen bij een stelsel met evenveel vergelijkingen als onbekenden.
Bij een vierkante matrix noemt men het aantal rijen (of kolommen) de *orde* van de matrix.

Als zo'n stelsel precies één oplossing heeft (de vergelijkingen zijn dan onderling niet afhankelijk of strijdig) dan is de bijbehorende coëfficiëntenmatrix rij-equivalent met de zogenaamde *eenheidsmatrix* van dezelfde orde. De *eenheidsmatrix* van elke orde is gedefinieerd als een vierkante matrix met enen op de *hoofddiagonaal* (bij matrix $\left(a_{ij}\right)$ wordt deze gevormd door de getallen: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots, a_{nn}$) en verder louter nullen. Of een bepaalde vierkante matrix rij-equivalent is met de bijbehorende eenheidsmatrix is goed na te gaan met het algoritme van Gauss-Jordan uit het eerste hoofdstuk; hij is namelijk in gereduceerde rij-echelonvorm.

Opgave 6
Laat, met behulp van elementaire rij-bewerkingen, zien dat

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ rij-equivalent is met de eenheidsmatrix } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 7

a Laat, met behulp van elementaire rij-bewerkingen, zien dat

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ rij-equivalent is met } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b Wat betekent dit voor een stelsel vergelijkingen waar A de coëfficiëntenmatrix van is?

2.3 Determinanten

Als twee vergelijkingen met twee onbekenden afhankelijk van elkaar zijn dan moet de ene een veelvoud zijn van de andere. De bijbehorende coëfficiënten zijn dan evenredig met elkaar.

Dus als: $\begin{cases} ax+by=u \\ cx+dy=v \end{cases}$ niet precies één oplossing heeft dan geldt: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

Hieruit volgt: $ad=bc$, oftewel $ad-bc=0$.

De term $ad-bc$ noemt men de **determinant** van de matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

genoteerd als $\det A$ of $|A|$.

Wij zullen de laatste notatie gebruiken.

Opgave 8

Gegeven is het stelsel is $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=4 \end{cases}$.

a Bereken de determinant van de bij dit stelsel behorende matrix.

b Hoeveel oplossingen heeft dit stelsel?l Leg uit hoe je dit ziet.

Opgave 9

Gegeven is het stelsel is $\begin{cases} 3x-2y=10 \\ -6x+4y=4 \end{cases}$.

a Bereken de determinant van de bij dit stelsel behorende matrix.

b Hoeveel oplossingen heeft dit stelsel?l Leg uit hoe je dit ziet.

c Wat kun je op grond van de antwoorden op de opgaven 8 en 9a/b concluderen over het aantal oplossingen van een stelsel als de determinant van de bijbehorende matrix gelijk is aan 0?

Stelling 1

Als $|A| \neq 0$ dan heeft het stelsel $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ precies één oplossing.

Als $u = v = 0$ is deze oplossing $x = y = 0$ (de zogenaamde triviale oplossing).

Stelling 2

Als $|A| = 0$ dan heeft het stelsel $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ géén oplossingen óf oneindig veel oplossingen

Opgave 10

De volgende matrices zijn coëfficiëntenmatrices van stelsels eerstegraads vergelijkingen.Bereken van iedere matrix de determinant en trek hieruit een conclusie over het aantal oplossingen van het bijbehorende stelsel vergelijkingen.

a $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$ **c** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ook bij matrices van hogere orde is een determinant te berekenen waarbij stelling 1 geldt. Bij matrices van de derde orde gaat dat als volgt:

Neem de matrix: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Je kunt de determinant van deze matrix *ontwikkelen* volgens de eerste rij.
Bij ieder element van de eerste rij hoort een deelmatrix op de tweede en derde rij.
Kijk naar de plaats van de gemarkeerde elementen in de matrix hieronder.

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}$$

Bij het element a_{11} hoort de deelmatrix: $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

De determinant van deze deelmatrix heet de **onderdeterminant** van a_{11}.
De onderdeterminant van a_{11} is dus $a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$.

Hieronder zie je alle elementen van de eerste rij met de bijbehorende getallen van de 2e en 3e rij.

a_{11} met de elementen voor zijn onderdeterminant: $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}$

a_{12} met de elementen voor zijn onderdeterminant: $\begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}$

a_{13} met de elementen voor zijn onderdeterminant: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}$

Determinant van een 3 x 3 matrix

Stel $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

dan is $|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

Hierbij is de determinant ontwikkeld volgens de eerste rij.

Voor de elementen van die rij komen alternerend een plus en een min (volgens het schema hiernaast) en ieder element wordt vermenigvuldigd met zijn onderdeterminant.

$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Als een determinant ontwikkeld wordt naar een andere rij, moet voor die rij steeds alternerend een + en een − geschreven worden volgens bovenstaand schema.

Nuttige toepassingen.

De belangrijkste toepassingen zijn de eerder genoemde eigenschap dat als $|A| = 0$, dan bestaat het bijbehorende stelsel vergelijkingen uit onderling strijdige of afhankelijke vergelijkingen.

In hoofdstuk 3 wordt nader ingegaan op de betekenis van determinanten. Daar kun je aantonen dat geldt:

Als $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dan is: $\frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

waar dan automatisch uit volgt dat een stelsel van 2 vergelijkingen met 2 onbekenden met A als coëfficiëntenmatrix alleen oplosbaar is als $|A| \neq 0$.

De betekenis van het bovenstaande is als volgt:
Als x_1 en x_2 de variabelen zijn in een stelsel van vergelijkingen, levert de tweede betrekking direct de oplossingen van dat stelsel!

De uitwerking voor hogere ordes, bewijzen en andere toepassingen van determinanten van matrices komen bij de beantwoording van de verschillende onderzoeksvragen ter sprake.

Opgave 11

Gegeven is nogmaals de matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

a Ontwikkel de determinant van deze matrix volgens de middelste rij.
b Toon aan dat je antwoord overeenkomt met het antwoord uit het grijze vlak hierboven, waar de determinant is ontwikkeld volgens de bovenste rij..

Opgave 12
Bereken van de volgende matrices de determinant.

a $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Opgave 13

De vergelijkingen van het stelsel $\begin{cases} 2a+3b-c=5 \\ 3a-b+2c=-3 \\ 5a+2b+c=2 \end{cases}$ zijn afhankelijk van elkaar. .

Immers, als je de eerste twee bij elkaar optelt krijg je de derde.

a Wat betekent dit voor de determinant van de coëfficiëntenmatrix?
b Bereken deze determinant en ga na of je voorspelling juist was.

Opgave 14

De vergelijkingen van het stelsel $\begin{cases} 2a+3b-c=5 \\ 3a-b+2c=-3 \\ 5a+2b+c=0 \end{cases}$ zijn strijdig met elkaar.

Immers, als je de eerste twee bij elkaar optelt krijg je $5a+2b+c=2$ wat strijdig is met de derde vergelijking.

a Wat betekent dit voor de determinant van de coëfficiëntenmatrix?
b Je hebt deze determinant bij vraag 13 al berekend. Klopt het met je voorspelling?

Hoofdstuk 3. Toepassingen in de ruimtemeetkunde

3.1 Vectoren.

In het platte vlak $\mathbf{R_2}$ en de ruimte $\mathbf{R_3}$ werk je vaak met vectoren, gerichte verbindingen tussen twee punten ("pijltjes"). Deze vectoren worden ook gebruikt om vectoriële grootheden, grootheden met grootte en richting, mee weer te geven.

De vector $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ is een pijl waarvan het beginpunt $O(0,0)$ is en het eindpunt $P(p_1, p_2)$.

De vector $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ hoeft zijn beginpunt niet in O te hebben. Als het beginpunt van vector $\vec{p}$ het punt (a, b) is, dan is het eindpunt $(a + p_1, b + p_2)$.

Voor $\mathbf{R_3}$ geldt iets dergelijks:

De vector van $O(0,0,0)$ naar $P(p_1, p_2, p_3)$ is $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, terwijl de vector $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ van ieder beginpunt (a, b, c) kan lopen naar het bijbehorende eindpunt $(a + p_1 , b + p_2 , c + p_3)$.

Je zal je bij deze onderzoeksvraag vooral bezig houden met vectoren in $\mathbf{R_3}$. Voor $\mathbf{R_2}$ gelden vergelijkbare (eenvoudigere) regels.

Opgave 1

Het optellen van vectoren werkt volgens: $\vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + q_1 \\ p_2 + q_2 \\ p_3 + q_3 \end{pmatrix}$

Laat aan de hand van een ruimtelijke tekening zien, dat deze vectoroptelling hetzelfde resultaat geeft als de kop-staartmethode. In de tekening moeten de getallen p_1, q_1 etc. duidelijk aangegeven zijn.

Opgave 2
Het aftrekken van vectoren gaat als volgt:

$$\vec{p}-\vec{q}=\vec{p}+(\overrightarrow{-q})=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1-q_1 \\ p_2-q_2 \\ p_3-q_3 \end{pmatrix}$$

Laat, in een vlakke tekening, zien dat de vector $\vec{p}-\vec{q}$ te tekenen is als een pijl van Q naar P.

3.2 Het inproduct

Het *inproduct* (dot product) van twee vectoren $\vec{p}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{q}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ is gedefinieerd als:

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=p_1\cdot q_1+p_2\cdot q_2+p_3\cdot q_3$$

Opmerking: als je dit als een matrixvermenigvuldiging ziet, dan wordt het:

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}=p_1\cdot q_1+p_2\cdot q_2+p_3\cdot q_3$$

Opgave 3

a Bewijs, met behulp van de cosinusregel, dat

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=p_1\cdot q_1+p_2\cdot q_2+p_3\cdot q_3=|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos\alpha,$$

waarbij $|\vec{p}|=\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}$ de lengte van vector $\vec{p}$ is en α de hoek is die de vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ met elkaar maken.
(Tip: bereken de lengte van PQ op twee manieren).

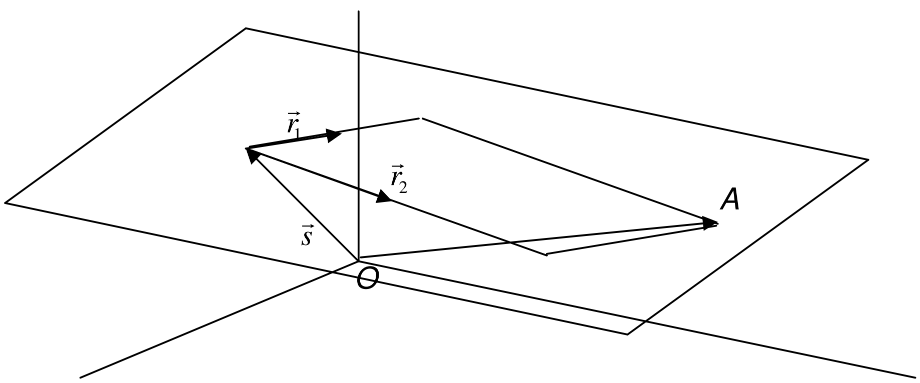
b Leid hier vervolgens uit af dat, als $\vec{p}\perp\vec{q}$, dan is: $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$.

3.3 Vergelijking en vectorvoorstelling van een vlak

Van een vlak in $\mathbf{R}_3$ kun je een vergelijking geven in de vorm $ax + by + cz = d$ maar je kunt alle punten van het vlak ook vastleggen met een zogenaamde vectorvoorstelling. Hierbij ga je eerst vanaf de oorsprong naar een willekeurig punt van het vlak (langs de zogenaamde steunvector $\vec{s}$) en vervolgens kun je alle andere punten van het vlak bereiken met lineaire combinaties van twee niet evenwijdige vectoren die zich in het vlak bevinden (de zogenaamde richtingsvectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$). In het algemeen ziet een vectorvoorstellingen er als volgt uit:

$$\vec{x} = \vec{s} + \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2$$

Voorbeeld



In de tekening hierboven zie je dat je via steunvector $\vec{s}$ vanaf de oorsprong *O* in het vlak terecht komt. Door bij $\vec{s}$ 2 maal $\vec{r}_1$ en en 2,5 maal $\vec{r}_2$ op te te tellen, kom je in punt *A*.
Punt *A* hoort dus bij $\lambda = 2$ en $\mu = 2,5$.
Wiskundig genoteerd: de vector $\overrightarrow{OA} = \vec{s} + 2\vec{r}_1 + 2,5\vec{r}_2$

Voor een uitgebreidere uitleg met plaatjes zie o.a.: www.win.tue/6BP20/lijnenvlak.pdf.

Van vergelijking naar vectorvoorstelling.

Als voorbeeld dient het vlak met vergelijking $2x+3y-z=5$.
Met enig proberen vindt je drie punten van dit vlak: $P(1,1,0)$, $Q(1,0,-3)$ en $R(0,0,-5)$. Je kunt er dan voor kiezen om $\vec{p}$ als steunvector te kiezen (de andere punten mogen ook gekozen worden) en de vectoren $\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{PR}=\vec{r}-\vec{p}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix}$ als richtingsvectoren (gelukkig zijn ze niet een veelvoud van elkaar en dus evenwijdig; anders moet je een ander punt van het vlak zoeken en het opnieuw doen).

De vectorvoorstelling wordt dan: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix}$

Van vectorvoorstelling naar vergelijking.

Bij één vlak kunnen oneindig veel vectorvoorstellingen gemaakt worden. Niet alleen zijn er oneindig veel mogelijke steunvectoren, maar ook zijn er oneindig veel combinaties van twee richtingsvectoren mogelijk. Bij elk vlak is er echter maar één richting die loodrecht op dat vlak staat. Een lijn die loodrecht op een vlak staat heet een *normaal* van dat vlak.

Bij de afleiding van de vectorvoorstelling is gebruik gemaakt van het feit dat $\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}$ en $\overrightarrow{PR}=\vec{r}-\vec{p}$ vectoren zijn in het vlak.

Dit betekent dat er een vector $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ bestaat die loodrecht op het vlak staat en dus loodrecht op deze twee richtingsvectoren. Deze vector heet een *normaalvector* van het vlak.
Als *P* en *Q* punten zijn van een vlak dat beschreven wordt met de vergelijking $ax+by+cz=d$ volgt daaruit dat: $ap_1+bp_2+cp_3=d$ en ook: $aq_1+bq_2+cq_3=d$ zodat $a(q_1-p_1)+b(q_2-p_2)+c(q_3-p_3)=0$

Dit laatste kan je schrijven als: $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}q_1-p_1\\q_2-p_2\\q_3-p_3\end{pmatrix}=0$.

Aangezien $\begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$ een richtingsvector is van het vlak en het inproduct met $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ gelijk is aan 0, volgt daaruit dat de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ een normaalvector is van het vlak.

Voorbeeld

V is het vlak: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Omdat $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ loodrecht moet staan op $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ geldt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ én $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$.

Dit levert het volgende stelsel: $\begin{cases} 2a + b + 2c = 0 \\ -a + 3b + 2c = 0 \end{cases}$.

Er zijn oneindig veel (evenwijdige) oplossingen. Je kiest nu bijvoorbeeld $a = 1$ ($a = 0$ levert de triviale oplossing $a = b = c = 0$ op, dus dat levert niets op).

Je krijgt dan: $\begin{cases} b + 2c = -2 \\ 3b + 2c = 1 \end{cases}$ wat oplevert: $b = \frac{3}{2}$ en $c = -\frac{7}{4}$. Zodoende is: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$.

Aangezien het alleen om de richting gaat, is het handiger om alle getallen met 4 te vermenigvuldigen. Je krijgt dan:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Dan is de vergelijking van het vlak: $4x + 6y - 7z = d$ en invullen van

het punt $(2, 3, 4)$ geeft de gevraagde vergelijking: $4x + 6y - 7z = -2$.

Als één van de richtingsvectoren een 0 bevat, kun je de normaalvector met zeer weinig rekenwerk bepalen.

Voorbeeld

De richtingsvectoren zijn $\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$

Omdat het inproduct met de eerste vector 0 moet zijn, kun je het bovenste en de onderste getal van plaats verwisselen en één van beide getallen van een min-teken voorzien.

De normaalvector wordt dan $\begin{pmatrix}5\\b\\-1\end{pmatrix}$. Ga na dat deze inderdaad loodrecht staat op $\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$.

Vervolgens bereken je het inproduct met $\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$:

$3 \cdot 5 + 2b - 1 \cdot -1 = 0$, dus $16 + 2b = 0$. Hieruit volgt dat $b = -8$.

Ga na dat $\begin{pmatrix}5\\-8\\-1\end{pmatrix}$ inderdaad loodrecht op beide vectoren staat!

Er is ook een methode waarbij je geen gebruik van de normaalvector maakt

Bekijk opnieuw het vlak V: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$.

Hierbij hoort een stelsel vergelijkingen $\begin{cases} x = 2 + 2\lambda - \mu \\ y = 3 + \lambda + 3\mu \\ z = 4 + 2\lambda + 2\mu \end{cases}$

Hieruit elimineer je eerst de λ: $\begin{cases} x - 2y = -4 - 7\mu \\ 2y - z = 2 + 4\mu \end{cases}$

Vervolgens wordt μ geëlimineerd: $4(x - 2y) + 7(2y - z) = -2$.
Dit kan je omschrijven tot: $4x + 6y - 7z = -2$

Opgave 4
Bepaal vectorvoorstellingen van de de volgende vlakken

a $U: 3x - 2y + z = 12$
b $V: -2x + 3z = 7$
c $W: z = 2$

Opgave 5
Bepaal de vergelijkingen van de volgende vlakken:

a $U: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b $V: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c $W: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3.4 Vectorvoorstelling van een lijn

Een lijn in $\mathbf{R}_3$ is alleen weer te geven met een vectorvoorstelling, zoals: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wil je met vergelijkingen werken, dan kan je een lijn vastleggen als snijlijn van twee gegeven vlakken.

Opgave 6

a Leg uit waarom dit zo is.

b Bepaal een vectorvoorstelling van de snijlijn van de vlakken: $\begin{cases} V: 3x + 2y - z = 5 \\ W: 2x + 3z = 2 \end{cases}$

c Bepaal een vectorvoorstelling van de snijlijn van de vlakken: $\begin{cases} V: x + 2y + z = -5 \\ W: -2x + 3z = -1 \end{cases}$

TIP: zie hiervoor eventueel paragraaf 1.6

3.5 Hoeken in de ruimte

Aangezien we van het inproduct weten dat

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3 = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos\alpha ,$$

kunnen we het ook gebruiken om van twee vectoren waarvan we de kentallen weten te bepalen welke hoek ze met elkaar maken.

Opgave 7

Gegeven zijn de vectoren: $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ *en* $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

a Bereken het inproduct van deze vectoren en bereken ook de lengte van elk der vectoren.

b Bereken nu de hoek α tussen deze vectoren.

De hoek tussen twee lijnen is volgens afspraak de kleinste hoek die ze met elkaar maken. Bepaal je de hoek tussen de richtingsvectoren van twee lijnen (met behulp van het inproduct) en komt daar een stompe hoek uit, dan moet je het supplement van deze hoek (die de hoek aanvult tot 180°) als hoek tussen de bijbehorende lijnen kiezen.

Opgave 8

Bereken de hoek tussen de lijnen: $\begin{cases} l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ -23 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Voor de hoek tussen twee vlakken snijden we de vlakken met een derde vlak dat loodrecht staat op de snijlijn van deze twee vlakken. Dit derde vlak snijdt de gegeven twee volgens twee lijnen. De (scherpe) hoek tussen deze lijnen is de gevraagde hoek die de vlakken met elkaar maken. Gemakkelijk is deze hoek te bepalen door (het supplement van) de hoek tussen de normaalvectoren van de beide gegeven vlakken te bepalen.

Opgave 9

a Maak een ruimtelijke schets van de ze situatie en geef duidelijk de gevraagde hoek aan (dit kan je eerst opzoeken in het bijbehorende materiaal).

b Teken in hetzelfde plaatse ook de normaalvectoren van beide vlakken.

c Is de hoek tussen de normaalvectoren altijd gelijk aan (het supplement van) de hoeken tussen de vlakken zelf?

Opgave 10

Bereken de hoek tussen de vlakken: $\begin{cases} \alpha : 3x+2y-z=5 \\ \beta : 2x+3z=-2 \end{cases}$

De hoek tussen een lijn en een vlak is vastgelegd door de lijn loodrecht op het vlak te projecteren. De hoek tussen de lijn en zijn projectie is dan de gevraagde hoek. Gemakkelijker is het om de hoek te bepalen tussen de normaalvector van het vlak en de richtingsvector van de lijn. Zonodig neem je eerst het supplement van deze hoek (tot hij scherp is). Daarna moet je het complement van deze hoek bepalen (die de hoek aanvult tot 90°).

Opgave 11

Maak in een duidelijke schets (eventueel weer opgezocht) duidelijk waarom hier het complement genomen moet worden.

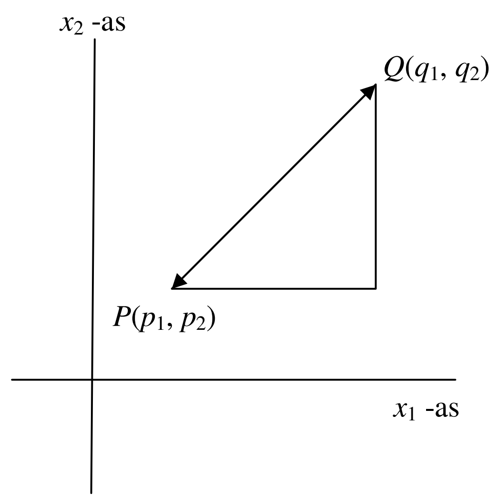
Opgave 12

Bereken de hoek tussen de lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ en het vlak

$V : 2x-3y+2z=-5$

3.6 Afstanden in de ruimte

3.6.1 De afstand tussen twee punten in $\mathbf{R}_3$ **.**



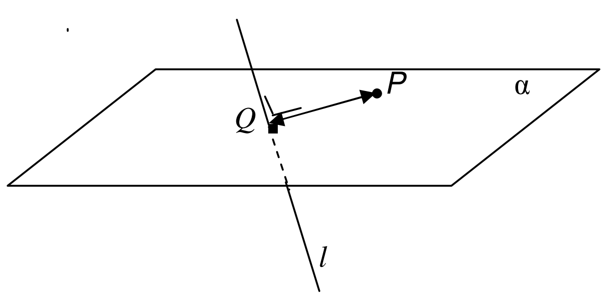
In de figuur hiernaast kun je met de stelling van Pythagoras eenvoudig afleiden dat in $\mathbf{R}_2$ de afstand tussen de punten P en Q gelijk is aan $\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$.

In de $\mathbf{R}_3$ kun je de afstand tussen twee punten op analoge wijze met de driedimensionale versie van de stelling van Pythagoras berekenen. De afstand tussen de punten $P(p_1, p_2, p_3)$ en $Q(q_1, q_2, q_3)$ wordt dan gegeven door:

$$PQ = d(P,Q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+(p_3-q_3)^2}$$

Opgave 13
Bewijs de driedimensionale versie van de stelling van Pythagoras met behulp van een duidelijke tekening en een berekening.

3.6.2 De afstand tussen een punt P en een lijn ***l*** in $\mathbf{R}_3$ is de kortst mogelijke afstand tussen P en een punt Q op lijn *l*. Punt Q kun je vinden door vanaf P loodrecht naar lijn *l* te gaan. Dit doe je door een normaalvlak α van lijn *l* te bepalen dat door P gaat. Het snijpunt van lijn *l* met vlak α is dan het gezochte punt Q.



Voorbeeld:

Je zoekt de afstand tussen punt $P(3,-2,4)$ en de lijn *l* met vectorvoorstelling:

$l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$. Hiertoe maak je een vlak α dat loodrecht staat op *l*.

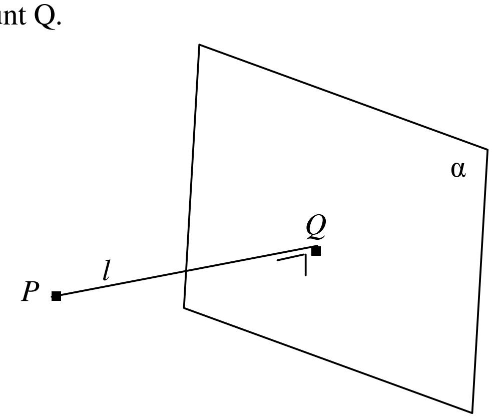
De richtingsvector $\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ van *l* is normaalvector van vlak α,

dus een vergelijking van α kan zijn: $-2x+y+2z=C$, waarbij de constante C bepaald wordt door de coördinaten van *P* in te vullen (α moet immers door *P* gaan).
Je vindt voor C de waarde 0.

Nu moet je vlak α: $-2x+y+2z=0$ snijden met lijn $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ om punt Q te vinden. Dit doe je door de vectorvoorstelling van *l* in te vullen in de vergelijking van α.
Je krijgt dan: $-2(2-2\lambda)+(-3+\lambda)+2(4+2\lambda)=0$, wat $\lambda=-\frac{1}{9}$ oplevert.
Vul je deze waarde van λ in in de vectorvoorstelling van lijn *l*, dan krijg je de coördinaten van punt *Q:* $\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}+-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\frac{2}{9}\\-3\frac{1}{9}\\3\frac{7}{9}\end{pmatrix}$

De gevraagde afstand tussen *P*en lijn *l* is de lengte van vector *PQ*:
$PQ=\sqrt{(3-2\frac{2}{9})^2+(-2+3\frac{1}{9})^2+(4-3\frac{7}{9})^2}$ is ongeveer gelijk aan: $1,3744$

3.6.3 De afstand tussen een punt P en een vlak α in **R_3** is de kortst mogelijke afstand tussen P en een punt Q op vlak . Punt Q kun je vinden door vanaf P loodrecht naar vlak α te gaan. Dit doe je door een normaalvector $\vec{n}$ van vlak α te bepalen. Met behulp van die normaalvector maak je een lijn *l* die loodrecht op vlak α staat en door P gaat. Het snijpunt van lijn *l* met vlak α is dan het gezochte punt Q.



Voorbeeld:

Je zoekt de afstand tussen punt $P(3,-2,4)$ en de vlak α met vergelijking: $3x-y+2z=5$.

Een normaalvector van α is $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ en de gezochte lijn l die loodrecht staat op α en door P gaat wordt: $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$

Je snijdt l met α door de vectorvoorstelling van l in te vullen in de vergelijking van α:

$3(3+3\lambda)-(-2-\lambda)+2(4+2\lambda)=5$ levert dan $\lambda=-1$ zodat $Q=(0,-1,2)$ en $d(P,\alpha)=\sqrt{14}$.

(loop deze stappen allemaal na!).

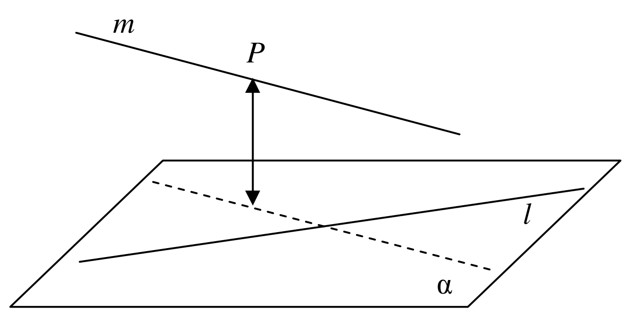
3.6.4 De afstand tussen een lijn *l* en een vlak α in $\mathbf{R}_3$ is alleen interessant als lijn l evenwijdig is aan vlak α, anders is de afstand 0 (waarom?). De kortst mogelijke afstand tussen l en α is dan de afstand van een willekeurig punt P op l tot vlak α (zie 4.6.3).

3.6.5 De afstand tussen twee vlakken α en β in $\mathbf{R}_3$ is alleen interessant als de vlakken evenwijdig zijn, anders is de afstand 0 (waarom?). De kortst mogelijke afstand tussen α en β is dan de afstand van een willekeurig punt P op α tot β (of andersom: kies een willekeurig punt op β en bepaal de afstand van dit punt tot vlak α). Zie 4.6.3.

3.6.6 De afstand tussen twee lijnen in $\mathbf{R}_3$. Hier kun je 3 verschillende situaties onderscheiden:

- de lijnen snijden. De afstand is dan gelijk aan 0.
- de lijnen zijn evenwijdig. Dan kies je een willekeurig punt op een van de lijnen en bepaal je de afstand van dat punt tot de andere lijn (zie 4.6.2).
- de lijnen kruisen. Dit behoeft enige toelichting:

De afstand tussen twee kruisende lijnen *l* en *m* in $\mathbf{R}_3$. Hierbij construeer je een vlak α dat de ene lijn (zeg l) bevat en evenwijdig is aan de andere lijn (dat is dan m). Nu kies je een willekeurig punt P op lijn m (dit kan willekeurig zijn dankzij de evenwijdigheid) en bepaal je de afstand van P tot vlak α. Dit is dan de gevraagde afstand.



Voorbeeld:

Als voorbeeld dienen de lijnen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Het vlak α kies je zo, dat het l bevat en evenwijdig is aan m.

Vlak α wordt dan: $\alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ (kijk even goed hoe eenvoudig dit kan!)

Als punt op lijn m kies je maar gewoon het steunpunt $P(2,-1,5)$. Om nu een lijn te maken door P die loodrecht op α staat, bepaal je eerst een vergelijking van $\alpha: x+4y+6z=31$ (ga dit na!)

De lijn die loodrecht op α staat en door P gaat wordt: $n: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Je snijdt deze lijn weer met α: $(2+\lambda)+4(-1+4\lambda)+6(5+6\lambda)=31$ zodat $\lambda = \frac{3}{53}$ en het snijpunt van lijn n met vlak α wordt: $Q = (2\frac{3}{53}, -\frac{41}{53}, 5\frac{18}{53})$.
De (loodrechte) afstand van de oorspronkelijke lijnen $d(l,m) = PQ = \frac{1}{53}\sqrt{477} \approx 0{,}412$

Opgave 14

Bepaal de onderlinge afstand van:

a. $P(2,-1,-5)$ en $Q(-2,4,-2)$

b. $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Pas op!)

c. $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\beta: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

d. $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ (Pas op!)

e. $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $n: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

f. $P(2,-1,-5)$ en $\beta: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

g. $P(2,-1,-5)$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

h. $\alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\beta: 2x - y + 3z = 8$

3.7 Het uitproduct

In hoofdstuk 2 is het inproduct (inwendig product) van twee vectoren ter sprake gekomen bij de introductie van de matrixrekening. De uitkomst van een inproduct is een scalar (getal).
Je kunt twee vectoren ook uitwendig vermenigvuldigen (uitproduct). Het uitproduct van twee vectoren is zelf ook een vector en heeft dus een grootte en een richting.

Opdracht 15
Zoek op internet of in de (pdf-)bestanden die wij op It’s learning hebben gezet op wat wordt verstaan onder het uitproduct van twee vectoren (ook wel uitwendig product genoemd of cross-product). Ga met name na hoe een uitproduct genoteerd wordt, hoe je de grootte ervan berekent en hoe je de richting ervan bepaalt. Het uitproduct levert een vector op. Ga ook na hoe je de kentallen van deze vector kunt berekenen.

Opdracht 16

Zoek op internet of in de (pdf-)bestanden die wij op It's Learning hebben gezet een toepassing van het uitproduct uit de natuurkunde. Als je zelf geen toepassing kunt vinden, zoek dan op wat de Lorentzkracht is en hoe je deze met behulp van een uitproduct kunt berekenen.

Opdracht 17

Bepaal met het uitproduct de vergelijking van vlak $\alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Opdracht 18

Bewijs de volgende stelling: $|\vec{x} \times \vec{y}| = \sqrt{|\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2}$

Hoofdstuk 4. Oplossingsmethoden automatiseren

Het oplossen van stelsels eerstegraads vergelijkingen gaat goed met de methoden die in hoofdstuk 1 behandeld worden. Er blijven echter momenten dat je het oplossen kan versnellen door slimme keuzes te maken (rijen verwisselen, vegen met een klein getal liever dan met breuken en dergelijke). Heb je daar geen behoefte aan, maar wil je een methode die je in een computer stopt die dan de oplossing genereert, dan ga je te werk zoals bij deze onderzoeksvraag.

4.1 Een bewijs

In paragraaf 2.1 wordt gesteld dat, als $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

en: $|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = 0$ (***),

impliceert dat het stelsel vergelijkingen: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

bestaat uit onderling strijdige of afhankelijke vergelijkingen. Dit impliceert dat een van de rijen van de bijbehorende coëfficiëntenmatrix een lineaire combinatie is van de andere twee.

Als je de coëfficiënten voor het gemak in kolomvectoren zet betekent dit dat er een

α en een β te vinden zijn zo, dat: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ (*)

Opgave 1
Toon aan dat in ieder geval betrekking (***) volgt uit betrekking (*).

4.2 De inverse van een 2x2-matrix

Hier ga je al op zoek naar de inverse matrix A^{-1} die een kant en klare oplossing kan genereren. Deze inverse matrix is als volgt gedefinieerd:

Stel dat A een $n \times n-$matrix is en v en w zijn $n \times 1-$matrices (of vectoren).
Als nu geldt dat: $A \cdot v = w$ dan geldt voor de inverse matrix A^{-1}: $A^{-1} \cdot w = v$ (als die inverse matrix bestaat en het bijbehorende stelsel oplosbaar is).

De betekenis hiervan is als volgt:
Als v een vector is met de variabelen x_1 en x_2, stelt $A \cdot v = w$ het stelsel voor dat je wilt oplossen en $v = A^{-1} \cdot w$ is de vector met de oplossingen van dit stelsel.

Opgave 2

Toon aan, dat als: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, dan is: $\frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Met andere woorden, de inverse matrix van $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$,

waar dan automatisch uit volgt dat een stelsel van 2 vergelijkingen met 2 onbekenden met A als coëfficiëntenmatrix alleen oplosbaar is als $|A| \neq 0$.

De matrix $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ is de (klassiek) geadjungeerde matrix van A, genaamd $adj\ A$.

4.3 Determinant en (klassiek) geadjungeerde van een 3x3-matrix

Ook bij vierkante matrices van hogere rang zijn de determinant en een (klassiek) geadjungeerde matrix als volgt gedefinieerd:

Beschouw de vierkante $n \times n-$matrix $A = (a_{ij})$, dat wil zeggen: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

M_{ij} is de vierkante $(n-1)\times(n-1)-$matrix die ontstaat door uit matrix A de $i-$de rij en de $j-$de kolom weg te laten. De determinant $|M_{ij}|$ noemen we de ***minor*** van element a_{ij} van A.
De ***cofactor*** van a_{ij}, genaamd A_{ij} is de minor met een bijbehorende plus of min:
$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$

Opmerkingen

- De waarden van $(-1)^{i+j}$ vormen het volgende schema: $\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

- M_{ij} is een matrix en A_{ij} is een scalar (getal).

Nu geldt:

$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ voor iedere waarde van i (ontwikkeling volgens rij i)

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ voor iedere waarde van j (ontwikkeling volgens rij j)

De (klassiek) geadjungeerde van een $3\times 3-$matrix A, genaamd *adj A*, is de matrix die wordt gevormd door ieder element van *A* te vervangen door zijn cofactor en vervolgens de rijen en kolommen van deze nieuwe matrix te verwisselen.

Zodoende geldt: $adj\ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Opgave 3 Laat aan de hand van enkele voorbeelden (waarden van i en j) zien, dat de ontwikkeling van de determinant van een $3\times 3-$matrix onafhankelijk is van de keuze van de rij of kolom volgens welke de determinant ontwikkeld wordt.

4.4 De inverse van een 3x3-matrix

Voor iedere $n \times n$ matrix waarvoor $|A| \neq 0$, is een inverse matrix A^{-1} te berekenen volgens: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A)$.

Opgave 4

a Laat zien dat dit overeen komt met het resultaat van deel 2 (toen was $n = 2$).

b Laat zien dat voor iedere $3 \times 3 -$ matrix A waarvoor $|A| \neq 0$, geldt: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A)$

4.5 De regel van Cramer

Opgave 5

a Zoek op internet (zie bronnenlijst) de 'regel van Cramer' op. Los m.b.v. deze regel het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 14 \\ x - 2y + 2z = -5 \\ 5x - 3y - 2z = 20 \end{cases}$$

b Leg uit waarom deze regel niet veel praktisch nut heeft (theoretisch is deze regel heel nuttig).

Hoofdstuk 5. Lineair programmeren

Lineair programmeren staat voor optimalisatieproblemen (minimale kosten, maximale winst e.d.) waarbij zowel de doelstellingsfunctie als de voorwaarden van de eerste graad zijn. Het is een belangrijk onderdeel van het wiskundevak 'Operationele Analyse' dat bij veel vervolgopleidingen onderwezen wordt. Gezien de aard van de problemen die ermee opgelost worden zal het zeker een belangrijk onderdeel zijn van bedrijfswetenschappelijke of economische vervolgopleidingen.

5.1 Een toegestaan gebied (tweedimensionaal)

Als je uit gaat van twee variabelen kun je alles in het platte vlak tekenen. Bekijk het volgende sterk vereenvoudigde voorbeeld.

Een boer heeft 20 ha grond. Hij kan die grond gebruiken om aardappels te telen of uien. De bewerking van de aardappels kost gemiddeld 5 manuren per week per hectare. Bij de uien is dat 8 manuren per week per hectare. Hij heeft totaal 120 manuren per week ter beschikking.

Opgave 1

a Leg uit, dat dit, met a hectare aardappels en u hectare uien, leidt tot de voorwaarden:

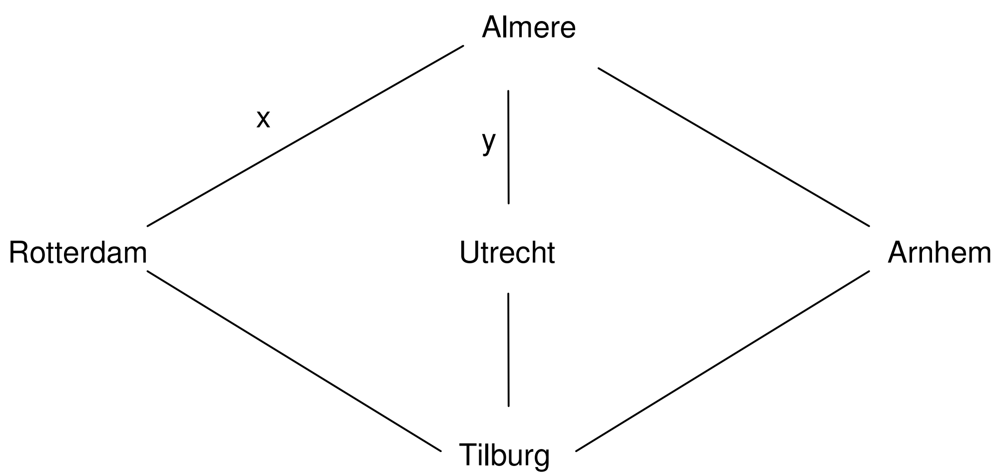
$$\begin{cases} a \geq 0 \\ u \geq 0 \\ a + u \leq 20 \\ 5a + 8u \leq 120 \end{cases}$$

b Arceer het gebied dat aan deze voorwaarden voldoet in een a,u-assenstelsel.

5.2 Een transportprobleem

Een belangrijke toepassing vind je bij de logistiek en met name transportproblemen. Bekijk het volgende voorbeeld.

Een warenhuis heeft distributiecentra in Almere (waar 80 pallets aanwezig zijn) en Tilburg (waar de totale voorraad 130 pallets is). Deze pallets moeten worden verdeeld over winkels in Rotterdam, Arnhem en Utrecht die allemaal 70 pallets hebben aangevraagd. Omdat de kosten van het vervoer afhankelijk zijn van de gebruikte route (en het soort vervoer) moet hier een plan voor op worden gesteld. Als we dit slim aanpakken kunnen we alle hoeveelheden beschrijven met twee variabelen. We noemen het aantal pallets dat van Almere naar Rotterdam gaat x en het aantal dat van Almere naar Utrecht gaat y (zie ook het schema op de volgende bladzijde).



Opgave 2

a Leid uit de gegevens af welke hoeveelheden bij de andere verbindingen moeten staan, uitgedrukt in x en y.

b Door te eisen dat alle hoeveelheden positief zijn ontstaan 6 voorwaarden. Geef deze 6 voorwaarden en arceer het gebied dat aan deze voorwaarden voldoet in een x,y-assenstelsel.

5.3 Maximaliseren en minimaliseren (randenwandelmethode)

Zodra je een doelstellingsfunctie hebt kun je bepalen waar deze een gevraagd maximum of minimum bereikt binnen het gearceerde toegestane gebied. Als deze doelstellingsfunctie lineair is, wordt dat maximum bereikt in een van de hoekpunten van het gebied of langs een van de grenzen.

Opgave 3
Als in § 5.1 de winst op 1 ha aardappels 80 eenheden is en de winst op 1 ha uien 30 eenheden, kun je de totale winst berekenen met de formule $W = 80a + 30u$.
Deze formule wordt de doelstellingsfunctie genoemd en omdat het om winst gaat wil je dat deze maximaal wordt.

a Teken een aantal isowinstlijnen $80a + 30u = C$, waarbij je de waarden van C zelf mag kiezen.
b Leg aan de hand van de isolijnen in vraag a uit dat een maximum altijd in een hoekpunt moet worden gevonden. Bepaal ook de maximale winst in dit geval.

De zogeheten randenwandelmethode stelt dat er een minimum te vinden is zodra de waarde van de doelstellingsfunctie in een hoekpunt (of op een rand) van het toegestane gebied lager is dan in de punten die er aan grenzen. Voor een maximum geldt iets dergelijks.

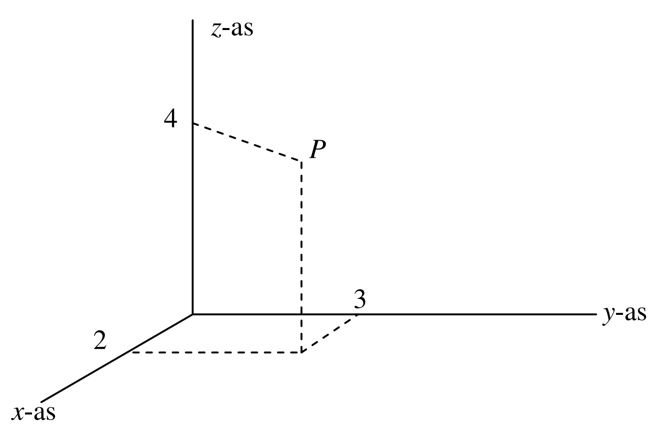
Opgave 4
Bij het probleem uit opgave 2 hoort onderstaande transportkostentabel.
Stel de formule op voor de totale transportkosten als functie van x en y en bepaal met de randenwandelmethode de minimale transportkosten.

In deze tabel staan de transportkosten per verbinding in eenheden per pallet.

Van	**naar**	Rotterdam	Utrecht	Arnhem
Almere		30	50	40
Tilburg		20	35	20

5.4 Een toegestaan gebied (driedimensionaal)

Hiernaast zie je hoe een assenstelsel in de ruimte wordt getekend. De x-as steekt eigenlijk het papier uit, maar wordt schuin naar linksonder getekend. Je ziet hier alleen de positieve x-a, y-as en z -as.
In dit assenstelsel is het punt $P(2, 3, 4)$ getekend.



Zodra je met drie variabelen werkt moet je iets meer weten van tekeningen in de ruimte.
In $\mathbf{R}_3$ (met x-as, y-as en z-as) is $ax+by+cz=d$ de vergelijking van een vlak en beschrijft de ongelijkheid $ax+by+cz\le d$ de ruimte onder of boven dat vlak (of links en rechts ervan).
Als in de vergelijking van zo'n vlak $a=0$ dan komt x niet in de vergelijking voor en kan dus willekeurig gekozen worden. Het vlak is daarom evenwijdig aan de x-as. Is bijvoorbeeld $a=b=0$ dan is het vlak evenwijdig aan het xy-vlak (dat zelf de vergelijking $z=0$ heeft).
Hier kan je je kennis uit de meetkunde hoofdstukken van begin klas 5 gebruiken in combinatie met coördinaten in de ruimte (zie bijvoorbeeld Wikipedia); er is ook informatie te halen uit de wiskunde boeken van wiskunde A1,2.
Een hoekpunt van zo'n toegestaan gebied vind je door het stelsel vergelijkingen dat hoort bij de drie vlakken die dit punt bevatten op te lossen. Natuurlijk snijdt niet ieder drietal vlakken elkaar, maar als je dat in de tekening niet ziet, blijkt vanzelf dat de vergelijkingen strijdig zijn (of afhankelijk, als de drie gekozen vlakken evenwijdig zijn).

Opgave 5

a Teken in een $Oxyz$-assenstelsel het gebied dat voldoet aan de ongelijkheden:

$$\begin{cases} 0\le x\le 10 \\ 0\le y\le 20 \\ 0\le z\le 25 \\ 0\le x+y+z\le 15 \end{cases}$$

b Bepaal de coördinaten van alle hoekpunten van dit gebied.

5.5 De randenwandelmethode driedimensionaal

Ook in het driedimensionale geval werkt een variant van de randenwandelmethode. Als je de waarde van de doelstellingsfunctie in de hoekpunten bepaalt en je vindt een punt waar de waarde groter is (of kleiner) dan in ieder van de aangrenzende punten dan heb je het maximum (of minimum) bepaald.

Opgave 6

a Gegeven is bij het voorbeeld uit opgave 5 de doelstellingsfunctie: $M=2x+3y+5z$.
Bepaal de maximale waarde die M bereikt binnen het toegestane gebied.

b Gegeven is bij het voorbeeld uit opgave 5 de doelstellingsfunctie: $N=x+y+z$.
Bepaal de maximale waarde die N bereikt binnen het toegestane gebied.

5.6 De Simplex-methode toegepast

Opgave 7
Zoek op internet (zie bronnenlijst) wat de Simplex methode is en ga na welke rol het oplossen van stelsels eerstegraadsvergelijkingen speelt bij lineair programmeren. Geef een voorbeeld van een transportprobleem waarbij dit een rol speelt. Leg ook uit waarom de Simplexmethode in deze tijd wel/niet heel erg nuttig is.
(een nuttig onderwerp voor diegenen die praktijktoepassingen belangrijk vinden).

Hoofdstuk 6. Lineaire transformaties

6.1 Inleiding.

In het platte vlak $\mathbf{R_2}$ werk je vaak met vectoren, gerichte verbindingen tussen twee punten ("pijltjes"). Deze vectoren worden ook gebruikt om vectoriële grootheden, grootheden met grootte en richting, mee weer te geven.

De vector $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ is een pijl waarvan het beginpunt $O(0,0)$ is en het eindpunt $P(p_1, p_2)$.

De vector $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ hoeft zijn beginpunt niet in *O* te hebben. Als het beginpunt van vector $\vec{p}$ het punt (*a*, *b*) is, dan is het eindpunt ($a + p_1, b + p_2$).

Voor $\mathbf{R_3}$ geldt iets dergelijks:

De vector van $O(0,0,0)$ naar $P(p_1, p_2, p_3)$ is $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, terwijl de vector $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ van ieder beginpunt (*a*, *b*, *c*) kan lopen naar het bijbehorende eindpunt ($a + p_1$, $b + p_2$, $c + p_3$).

Opgave 1

Het optellen van vectoren werkt volgens: $\vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + q_1 \\ p_2 + q_2 \end{pmatrix}$

Laat zien, dat deze vectoroptelling hetzelfde resultaat geeft als de kop-staartmethode.

Opgave 2

Het aftrekken van vectoren gaat als volgt: $\vec{p} - \vec{q} = \vec{p} + (\overrightarrow{-q}) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \end{pmatrix}$

Laat, in een vlakke tekening, zien dat de vector $\vec{p} - \vec{q}$ te tekenen is van Q naar P.

6.2 Overgangsmatrices bij lineaire operatoren

De vector $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ met beginpunt $O(0,0)$ noemen we ook wel de plaatsvector van punt $P(p_1, p_2)$. Als je een 2×2-matrix loslaat op $\overrightarrow{OP}$ krijg je een nieuwe vector met ‘ eindpunt $P^{'} : \overrightarrow{OP^{'}} = \begin{pmatrix} p_1^{'} \\ p_2^{'} \end{pmatrix}$. Zie desnoods ook hoofdstuk 2.

De matrix $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ legt hiermee een afbeelding vast waarbij ieder punt (x, y) wordt afgebeeld op het punt $(ax + by, cx + dy)$.

Opgave 2

a Bepaal de matrix die hoort bij een spiegeling in de $x - as$.
b Bepaal de matrix die hoort bij een spiegeling in de $y - as$.
c Bepaal de matrix die hoort bij een puntspiegeling in $O(0,0)$.
d Bepaal de matrix die hoort bij een spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$.
e Bepaal de matrix die hoort bij een rotatie om $O(0,0)$ over 90^0 linksom (tegen de wijzers van de klok in; zoek even op wat een rotatie is).
f Bepaal de matrix die hoort bij een rotatie om $O(0,0)$ over 90^0 rechtsom.

6.3 Rotatiematrices

Bij een rotatie om $O(0,0)$ blijft de lengte van vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ even groot. Bij de afbeelding bepaald door: $\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ is hier voor iedere *x* en *y* aan voldaan als:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Opgave 3

a Toon de stelling op de vorige bladzijde aan. (TIP: vergelijk de lengte van $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ met die van $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$)

b Laat zien dat aan deze voorwaarden is voldaan als $L = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

c Laat zien, dat $|L| = 1$

6.4 Eigenwaarden en eigenvectoren

Een ander bijzonder geval is als de lineaire transformatie beschreven door de matrix L in een of meer richtingen alleen de lengte van de vectoren met een factor λ vermenigvuldigt. Deze factor λ noemt men een eigenwaarde van L.
Definitie: een getal λ heet een eigenwaarde van de $n \times n$-matrix L als er een vector $\vec{x} \neq \vec{0}$ (dit laatste symbool staat voor de zogenaamde nulvector, een vector waarvan alle elementen gelijk aan nul zijn) is met: $L \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$. Dan heet $\vec{x}$ een eigenvector van L (bij de eigenwaarde λ).

Het vinden van eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren gaat in $\mathbb{R}_2$ en $\mathbb{R}_3$ in principe op dezelfde manier. Je schrijft de vergelijking $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$ uit en krijgt 2 vergelijkingen met 3 variabelen. Dat dit op te lossen is volgt uit vraag a. Zie je dat nog niet zitten, zoek dan verder op internet of in onze pdf-bestanden.

Opgave 4

a Maak duidelijk dat, als $\vec{x}$ een eigenvector van matrix L is, ieder veelvoud van $\vec{x}$ dit ook is.

b Bepaal de eigenwaarden met bijbehorende eigenvectoren van de matrix $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c Bepaal de eigenwaarden met bijbehorende eigenvectoren van de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

6.5 De karakteristieke vergelijking van een matrix

Opgave 5

a Zoek op het internet (zie bronnenlijst) wat er verstaan wordt onder de *karakteristieke vergelijking** van een matrix en bepaal met behulp hiervan de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrices:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

b Bewijs de volgende stelling:

L heeft een eigenvector $\vec{x}$ dan en slechts dan als $|L - \lambda I| = 0$

Opmerking: hierbij is I de eenheidsmatrix van de *n*-de orde: I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... & 0 \\ ... & & & & ... \\ ... & & & & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 \end{pmatrix}$

Dat wil zeggen een vierkante matrix met enen op de zogenaamde hoofddiagonaal en verder louter nullen. Gevolg hiervan is dat: $I \cdot \vec{x} = \vec{x}$ *voor iedere* $\vec{x}$.

Bronnenlijst

Hieronder vind je een overzicht van een aantal internetsites waarop nadere informatie te vinden is over de onderwerpen die in deze module worden behandeld.
Bij veel onderwerpen zijn meerdere bronnen te vinden. Om een onderwerp goed te kunnen begrijpen hoef je in de meeste gevallen lang niet alle bronnen die daarbij horen te gebruiken.

http://www.cs.vu.nl/~ran/dvs.pdf

http://www.pandd.nl/downloads/transfcabri.pdf

http://www.math.ru.nl/~bosma/onderwijs/najaar04/w6.pdf

http://www.geo.vu.nl/~voom/Dictaat3.doc

http://www.math.ru.nl/~bosma/onderwijs/najaar04/w1.pdf#search=%22vectoren%20in%20platte%20vlak%22

http://www.win.tue.nl/~rvhassel/Onderwijs/2DS06/2DS06-inf.html

http://www.numbertheory.org/book/

http://homepages.vub.ac.be/~scaenepe/linea.pdf

http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/wis/wis8h.pdf#search=%22vectoren%20in%20de%20ruimte%22

http://www.cs.vu.nl/~ran/determinanten.pdf

http://www.math.unimaas.nl/personal/ralfp/mathiden/afstand.pdf#search=%22vectoren%20in%20platte%20vlak%22

http://nl.wikibooks.org/wiki/Lineaire_algebra/Eenvorm

http://nl.wikipedia.org/wiki/Vector_(wiskunde)

Uitwerkingen bij Lineaire Algebra hoofdstuk 1

1 $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_1 + 5x_2 = -5 \\ 3x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_5 = 0 \end{cases}$

2 **a** Tel deze vergelijkingen bij elkaar op, zodat de x wegvalt.
Je houdt dan over: $5y = 12{,}5$, dus $y = 2{,}5$
Als je dit invult in één van beide vergelijkingen vind je: $x = 1$.

b Je kan het punt $(1, 2\frac{1}{2})$ opvatten als het snijpunt van de twee rechte lijnen met vergelijkingen $x + 2y = 6$ en $-x + 3y = 6\frac{1}{2}$

3 **a** Door de punten in te vullen in de vergelijkingen blijkt dat alleen $(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$ aan alle drie de vergelijkingen voldoet en dus is de oplossing: $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{5}{3}$ en $z = \frac{2}{3}$.

b Een mogelijke oplosmethode is:
Trek de eerste twee vergelijkingen van elkaar af. Je houdt over: $2x + y = 7$.
Tel dit weer op bij de derde vergelijking. Je krijgt dan: $5y - 2z = 7$.
Uit $2x + y = 7$ volgt $x = -\frac{1}{2}y + \frac{7}{2}$ en uit $5y - 2z = 7$ volgt $z = \frac{5}{2}y - \frac{7}{2}$.
Als je deze betrekkingen voor x en z invult in de tweede vergelijking, houd je daar alleen y als variabele over. Oplossen van deze vergelijking geeft: $y = \frac{5}{3}$
Door de gevonden waarde voor y in de andere vergelijkingen in te vullen vind je $x = \frac{8}{3}$ en $z = \frac{2}{3}$. Dit is de enige oplossing die uit deze berekening volgt.

c Hiermee heb je de coördinaten van het gemeenschappelijke punt van drie gegeven vlakken in $\mathbf{R}_3$ gevonden..

4 **a** (9, –9, 3); (–2, 2, 14) (6, –6, 6).

b $\begin{cases} x = -y \\ -3y + 2y + z = 12 \\ 6y - 4y - 2z = -24 \end{cases}$, dus $\begin{cases} x = -y \\ z = 12 + y \\ 2y - 2(12 + y) = -24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 12 + y \\ -24 = -24 \end{cases}$

Omdat de laatste vergelijking altijd waar is (voor iedere x, y en z) is er niet maar één oplossing. Elke getallenpaar waarvan de x en de y waarden tegengesteld zijn (bovenste vergelijking) en de z-waarde 12 meer is dan de y-waarde is een oplossing.

5 **a** $\begin{cases} x = 6 + 2y \\ -3(6 + 2y) + 6y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 + 2y \\ -6y - 18 + 6y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 + 2y \\ -18 = 0 \end{cases} \rightarrow$

De onderste vergelijking heeft geen enkele oplossing, dus het hele stelsel heeft geen oplossing.

b Er is geen enkel snijpunt, de lijnen lopen dus evenwijdig.

6 **a** Als je een rij met een getal vermenigvuldigt, vermenigvuldig je van de bijbehorende vergelijkingen zowel het linkerlid als het rechterlid met hetzelfde getal. Aangezien in de oorspronkelijke vergelijking links en rechts gelijk waren (als je de oplossing invult), is dat na vermenigvuldiging nog steeds zo.

b Als je de oplossing invult in de vergelijkingen, staat in alle vergelijkingen links en rechts hetzelfde getal. Tel je vergelijkingen bij elkaar op, dan tel je links en rechts hetzelfde getal op, waarmee in de nieuwe vergelijking nog steeds links en rechts hetzelfde getal staat.

7 De tweede rij begint niet met meer nullen dan de eerste.

8 Linkermatrix: derde rij staat een 2 i.p.v. een 1
Rechtermatrix: de tweede kolom bevat naast de 1 niet louter nullen

9 **a** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$ en $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = -6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 25 \end{cases}$

b A $\begin{cases} R_1 \to R_1 \\ R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{cases}$ levert: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & 2 & 9 \end{array}\right)$;

$\begin{cases} \\ R_2 \to R_2 / -3 \\ \end{cases}$ levert: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 9 \end{array}\right)$

$\begin{cases} R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_2 \to R_2 \\ R_3 \to R_3 + 3R_2 \end{cases}$ levert: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{cases} R_1 \to R_1 - \frac{2}{3}R_3 \\ R_2 \to R_2 + \frac{1}{3}R_3 \\ R_3 \to R_3 \end{cases}$ levert: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Hieruit volgt: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$ en $x_3 = 0$

B: $\begin{cases} R_1 \to R_2 \\ R_2 \to R_1 \\ R_3 \to R_3 \end{cases}$ levert: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 4 & -1 & 5 & 25 \end{array}\right)$

$\begin{cases} R_1 \to R_1 \\ R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4R_1 \end{cases}$ levert: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & -4 & -22 \\ 0 & 3 & -3 & -7 \end{array}\right)$

$\begin{cases} R_1 \to R_1 \\ R_2 \to R_2 / 6 \\ R_3 \to R_3 \end{cases}$ levert: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -3\frac{2}{3} \\ 0 & 3 & -3 & -7 \end{array}\right)$

$$\begin{cases} R_1 \to R_1 + R_2 \\ R_2 \to R_2 \\ R_3 \to R_3 - 3R_2 \end{cases} \quad \text{levert:} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1\frac{1}{3} & 4\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -3\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} R_1 \to R_1 + 1\frac{1}{3}R_3 \\ R_2 \to R_2 - \frac{2}{3}R_3 \\ R_3 \to -R_3 \end{cases} \quad \text{levert:} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -6\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Hieruit volgt: $x_1 = 9\frac{2}{3}$; $x_2 = -6\frac{1}{3}$ en $x_3 = -4$

c Nee. Ze hebben niet dezelfdde oplossing.

10 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11 $\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4 \cdot R_1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_2 \to -\frac{1}{2} \cdot R_2 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad R_1 \to R_1 - R_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

12 Door te vegen in de aangevulde matrix krijg je:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0.2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \quad R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 2 & 0.2 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$

$$R_2 \to R_2 - 5 \cdot R_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0.2 \\ 0 & -13 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0.2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -4 \\ 0 & -13 & -9 & 1 \end{array}\right)$$

Opmerking: het verwisselen van rij 2 en 3, naast het delen, is niet noodzakelijk voor het oplossen van het stelsel, maar een 1 is gemakkelijker voor het vegen en dan kunnen we ons wel aan het algoritme van Gauss-Jordan houden.

$$\begin{cases} R_1 \to R_1 - 3 \cdot R_2 \\ R_3 \to R_3 + 13 \cdot R_2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 12.2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 17 & -51 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to \tfrac{1}{17} \cdot R_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 12.2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} R_1 \to R_1 + 4 \cdot R_3 \\ R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

en hier lees je gemakkelijk de oplossing uit af: $a = 0.2, b = 2 \text{ en } c = -3$.

13 **a** Door te vegen in de aangevulde matrix krijg je:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \qquad R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4 \cdot R_1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & -7 \end{array}\right) \qquad R_3 \to R_3 - R_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

b De vergelijking die bij de derde rij hoort is: 0 = –8. Dit kan nooit, wat betekent dat het stelsel vals is. De vergelijkingen zijn strijdig en er zijn geen oplossingen.

14 **a** In dat geval is het stelsel afhankelijk. De derde vergelijking voegt geen nieuwe informatie toe. De bovenste twee rijen beschrijven een stelsel van 2 (onafhankelijke) vergelijkingen met 2 onbekenden, en dat heeft altijd een oplossing.

b De oplossing is $x = 2\frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$

c Dan krijg je op de derde rij: 0 = getal≠0. het stelsel is dan strijdig en er zijn geen oplossingen.

15 **a** Als $a = -\frac{6}{7}$ *en* $b \neq 24$ wordt de vergelijking op de onderste rij: 0 = niet 0. Deze vergelijking is strijdig, dus geen oplossing.

b Als $a \neq -\frac{6}{7}$ wordt de onderste rij: getal · x_3 = ander getal. Dit levert altijd een oplossing voor x_3. Als je deze waarde van x_3 invult in de eerste en tweede vergelijking krijg je ook altijd één oplossing voor x_1 en x_2.
Het stelsel heeft dan totaal precies één oplossing.

c Als $a = -\frac{6}{7}$ *en* $b = 24$ wordt de onderste vergelijking: 0 = 0
Daarmee ontstaat een afhankeloijk stelsel en dus zijn er oneindig veel oplossingen.

16 In de vorige opgaven is het systeem een paar keer helemaal uitgeschreven. In het vervolg volstaan we met alleen de antwoorden.

a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$ dus $x = 1$; $y = -3$ en $z = -2$

b $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$ dus $x = 1$; $y = 2$ en $z = -3$

c Dit is een strijdig stelsel, de onderste vergelijking wordt: 0 = 1, dus geen oplossing.

d $a = -9$; $b = 6$; $c = -1$ en $d = 2$

17 $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & b \\ 3 & 2 & 0 & a & 1+a \end{array}\right); \begin{cases} R_2 \to R_2 - a \cdot R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3 \cdot R_1 \end{cases} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1+a & 1-a & b-a \\ 0 & -1 & 3 & a-3 & -2+a \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} R_2 \to -R_3 \\ R_3 \to R_2 \end{cases} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3-a & 2-a \\ 0 & 1-a & 1+a & 1-a & b-a \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_3 \to R_3 - (1-a)R_2 \end{cases} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & a-2 & -1+a \\ 0 & 1 & -3 & 3-a & 2-a \\ 0 & 0 & 4-2a & -a^2+3a-2 & -a^2+2a+b-2 \end{array}\right)$$

$$\{R_3 \to R_3/(4-2a) \quad \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & a-2 & -1+a \\ 0 & 1 & -3 & 3-a & 2-a \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-a^2+3a-2}{4-2a} & \dfrac{-a^2+2a+b-2}{4-2a} \end{array}\right)$$

b Dit stelsel heeft minstens één oplossing als $a \neq 2$ (dan is de noemer in de laatste vergelijking niet 0). In dat geval laat de laatste vergelijking zich lezen als: $z = pw + q$, waarin p en q getallen zijn die afhangen van de waarden van a en b. In de oplossing voor z komt de variabele w voor. Dit is logisch, want er zijn maar drie vergelijkingen en vier onbekenden.
Als je z weet, volgen y en x door in te vullen.

c Met $a = b = 2$, gaat de één na laatste matrix (vóór deling door $(4-2a)$) bij vraag a over in:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+2z=1 \\ y-3z+w=0 \\ 0=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=-2z+1 \\ y=3z-w \\ z=z \end{cases}$$

Elke combinatie van getallen waarvoor geldt dat $x = -2z + 1$ en $y = 3z - w$, waarin w alles mag zijn, is een oplossing. Bijvoorbeeld: $(x, y, z, w) = (-19, 30 - w, 10, w)$. Bijvoorbeeld voor $w = 0$ levert dit: $(-19, 30, 0, 10, 0)$; voor $w = 5$: $(-19, 25, 10, 5)$.

18 Er is in ieder geval altijd de triviale oplossing: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$

19 Uit $\begin{cases} x + \frac{1}{5}z = 0 \\ y - \frac{4}{5}z = 0 \end{cases}$ volgt: $\begin{cases} x = -\frac{1}{5}z \\ y = \frac{4}{5}z \end{cases}$, dus $\begin{cases} -5x = z \\ y = \frac{4}{5}z \end{cases}$.

Als je de eerste vergelijking in de tweede invult krijg je: $\begin{cases} z = -5x \\ y = \frac{4}{5}z = \frac{4}{5}\cdot -5x = -4x \end{cases}$

Hiermee vind je dus: $\begin{cases} y = -4x \\ z = -5x \end{cases}$ en dit is de eerder gevonden oplossing van dit stelsel.

20 Uit $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{8} & 0 \end{array}\right)$ volgt $\begin{cases} a - \frac{5}{8}d = 0 \\ b - \frac{13}{4}d = 0 \\ c - \frac{19}{8}d = 0 \end{cases}$, dus $\begin{cases} a = \frac{5}{8}d \\ b = \frac{13}{4}d \\ c = \frac{19}{8}d \end{cases}$

Je kunt nu het getal d vrij kiezen. Bij iedere gekozen waarde van d liggen de waarden van a,b en c dan vast. Omdat er oneindig veel mogelijkheden voor d zijn, zijn er ook oneindig veel mogelijke getallencombinmaties (a,b,c,d) .
(Bijvoorbeeld: als $d = 1$, dan is $a = \frac{5}{8}$, $b = \frac{13}{4}$ en $c = \frac{19}{8}$. Kies je $d = 3$, dan worden de waarden van a, b en c ook 3 keer zo groot)

21 **a** $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -8 & 0 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right)$;

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 0 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right)$, dus $\begin{cases} x_1 = -3x_4 \\ x_2 = 7x_4 \\ x_3 = 6x_4 \end{cases}$

b $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right)$;

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3\frac{1}{2} & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 5 & 0 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3\frac{1}{2} & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 5 & 0 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3\frac{1}{2} & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right)$

Ga na dat hieruit volgt: de enige oplossing is (0, 0, 0, 0).

22 **a** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -8 & 13 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & -8 & 13 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hiermee vind je (0, 0, 0)
Hier dus geen andere niet-triviale oplossingen.

b $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1\frac{1}{2} & 8 \\ 0 & 1\frac{1}{2} & 8 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1\frac{1}{2} & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
nu twee vergelijkingen met drie onbekenden, dus wel een niet-triviale oplossing.

c Nu heb je aan het begin al één onbekende meer dan er vergelijkingen zijn, dus is er zeker een niet-triviale oplossing.

d Eerst wat rijen verwisselen: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 7\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & -2\frac{1}{2} & 9\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -12\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 3\frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{53}{5} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uit de laatste matrix volgt dat alleen (0, 0, 0, 0) een oplossing is.

23 **a** Tel de betrekkingen (*) en (**) bij elkaar op, dan krijg je:
$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3 + ... + a_{in}u_n + a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + a_{i3}w_3 + ... + a_{in}w_n = b_i + 0 = b_i$

Dus is: $a_{i1}u_1 + a_{i1}w_1 + a_{i2}u_2 + a_{i2}w_2 + a_{i3}u_3 + a_{i3}w_3 + ... + a_{in}u_n + a_{in}w_n = b_i$

Oftewel: $a_{i1}(u_1 + w_1) + a_{i2}(u_2 + w_2) + a_{i3}(u_3 + w_3) + ... + a_{in}(u_n + w_n) = b_i$

b *p* is een oplossing als $a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + ... + a_{in}p_n = b_i$
Als $p = u + w$ is dus ook u + c een oplossing.

24 **a** Dit betekent dat $p - u$ een oplossing is van S*,
b alle oplossingen van S* heten *w,* dus is er een $w \in W$ waarvoor geldt: $p - u = w$
c $p = u + w$ is een oplossing van S*.
d Uitgangspunt was: Stel: *p* is een oplossing van S die niet te schrijven is als $u + w$.
e Er zijn dus geen oplossingen van S die niet te schrijven zijn als $u + w$ met *u* een oplossing van S en *w* een oplossing van S*.Qoud erat demonstrandum

25 **a** $\lambda = 1$**,** dus $u + w = (1, 1, 1, 1) + 1 \cdot (-0.25, -11.25, -7.25, 1) = (0.75, -10.25, -6.25, 2)$
b $u + w = (1, 1, 1, 1) + \mu \cdot (1, 45, 29, -4) = (0.75, -10.25, -6.25, 2)$ voor $\mu = -\frac{1}{4}$
c Omdat je bij iedere waarde van λ altijd een bijbehorende waarde van μ kunt vinden waarbij beide schrijfwijzen dezelfde oplossing leveren.

26 **a** Als $a = b = c = d = e = 1$, dan geldt: $\begin{cases} 2+3-1=4 \\ -1+3+2=4 \\ 2+1-2+1=2 \\ 1+2+1-2=2 \end{cases}$, dus $\begin{cases} 4=4 \\ 4=4 \\ 2=2 \\ 2=2 \end{cases}$. Dit klopt.

b **O**mdat er meer onbekenden dan vergelijkingen zijn.

c $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & 18 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -15 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 23 & -27 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{170}{23} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{45}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{27}{23} \end{pmatrix}; \text{ dus: } \begin{cases} a + \frac{170}{23}e = 0 \\ b + \frac{7}{23}e = 0 \\ c - \frac{45}{23}e = 0 \\ d - \frac{27}{23}e = 0 \end{cases}$$

Hieruit volgt: $a = -\frac{170}{23}e$; $b = -\frac{7}{23}e$; $c = \frac{45}{23}e$; $d = \frac{27}{23}e$ en $e = \frac{23}{23}e$

d De volledige oplossing is: (1, 1, 1, 1, 1) + $(-\frac{170}{23}e, -\frac{7}{23}e, \frac{45}{23}e, \frac{27}{23}e, \frac{23}{23}e)$
Als je $\frac{1}{23}e$ gelijk stelt aan λ, krijg je als oplossing:
(*a, b, c, d, e*) = (1, 1, 1, 1, 1) + λ(−170, −7, 45, 27, 23)

Uitwerkingen Hoofdstuk 2

1 **a** $3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 + 6 \cdot -8 = -38$

b $\begin{pmatrix} -2\cdot 6+6\cdot 1 & -4-6 & -2\cdot 0+6\cdot -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -10 & -24 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 1\cdot 0+0\cdot -3-1\cdot 5 \\ -1\cdot 0+2\cdot -3+3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$

2 $(5 \quad 2 \quad x \quad -2)\cdot \begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ 3 \\ 2-x \end{pmatrix} = 5x+2(x-1)+3x-2(2-x)=0$; $\quad 12x-6=0$; $x=\frac{1}{2}$

3 $\begin{cases} 5x_1+3x_3+4x_4+6x_5=21 \\ 2x_1+x_2+2x_3+2x_4-x_5=2 \\ -x_1+2x_2+2x_3+2x_5=11 \\ -x_3+3x_4+2x_5=5 \\ 4x_1+x_2+2x_3-3x_5=-4 \end{cases}$

4 $\begin{pmatrix} -8+0-9 \\ 4+2+15 \\ -6-4+6 \\ 0+1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 21 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

5 Het aantal kolommen in de linkermatrix is ongelijk aan het aantal rijen in de rechtermatrix.

6 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7 **a** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b Er zijn meer onbekenden dan vergelijkingen, dus er zijn oneindig veel oplossingen.

8 **a** De determinant is gelijk aan $8 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 0$

b Er zijn oneindig veel oplossingen. De tweede vergelijking is 4 maal de eerste vergelijking, dus de vergelijkingen zijn afhankelijk. Er zijn nu meer variabelen dan vergelijkingen.

9 **a** De determinant is 12 − 12 = 0

b Het stelsel is nu strijdig, en heeft dus geen oplossingen. Je kunt dit zien door de bovenste vergelijking met −2 te vermenigvuldigen:

$$\begin{cases} -6x+4y=-20 \\ -6x+4y=4 \end{cases}$$

Als je dan de bovenste aftrekt van de onderste krijg je: $\begin{cases} -6x+4y=-20 \\ 0=24 \end{cases}$

c In dat geval zijn er oneindig veel oplossingen (afhankelijk stelsel) of helemaal geen oplossingen (strijdig stelsel).

10 **a** |*A*| = 2 · 5 − −6 · 3 = 10 − −18 = 28 ≠ 0, dus precies één oplossing.

b |*A*| = 30 − 30 = 0, dus oneindig veel oplossingen of geen oplossingen.

c |*A*| = 4 −0 = 4, dus precies één oplossing.

11 **a** a_{21} met de elementen voor zijn onderdeterminant $\begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}$

levert als onderdeterminant: $a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13}$

a_{22} met de elementen voor zijn onderdeterminant: $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}$

levert als onderdeterminant: $a_{11} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{13}$

a_{23} met de elementen voor zijn onderdeterminant: $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}$

levert als onderdeterminant: $a_{11} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{12}$

Rekening houdend met de +/− verdeling (zie grijze vlak) wordt de determinant:
|*A*| = $-a_{21} \cdot (a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13}) + a_{22}(a_{11} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{13}) - a_{23}(a_{11} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{12})$

b Ontwikkeld volgens de bovenste rij geldt (na uitwerken haakjes):
$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Haakjes uitwerken bij vraag a levert:
$|A| = -a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12}$

Herordenen van de factoren binnen iedere term levert:
$|A| = -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$

Herschikken van deze termen levert:
$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Dit laatste komt overeen met de bovenste regel.

12 a Ontwikkeld naar de bovenste rij:
$|A| = -2 \cdot (5 - 6) - 0\ (15 - -3) + 4(-6 - 1) = 2 - 0 - 28 = -26$

b Ontwikkeld naar de bovenste rij:
$|A| = 2 \cdot (6 - 5) - 1\ (0 - -10) + 4(0 - -2) = 2 - 10 + 8 = 0$

13 a De determinant zal dan 0 zijn.
b Ontwikkeld naar de bovenste rij:
$|A| = 2(-1 - 4) - 3(3 - 10) + -1(6 - -5) = -10 + 21 - 11 = 0$. Klopt!

14 a De determinant moet dan 0 zijn (anders is er één oplossing!)
b In dit antwoordmodel wel!

Uitwerkingen hoofdstuk 3 tot en met 6

De hoofdstukken 3 t/m 6 gaan over de onderzoeksvragen.
Hiervan zijn geen uitwerkingen voor leerlingen beschikbaar.