

III Lineaire Transformaties in $\mathbb{R}^2$

III.0 Meetkundige inleiding

Bij een *transformatie* $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt aan elke vector $\vec{a}$ uit $\mathbb{R}^2$ een nieuwe vector $\vec{a}'$ uit $\mathbb{R}^2$ toegevoegd. (Meer in het algemeen kan men dit in $\mathbb{R}^n$ definiëren.)

Voor zo'n transformatie wordt zowel de *pijlnotatie* gebruikt:

$$\vec{a} \xrightarrow{\mathcal{L}} \vec{a}'$$

als de *haakjesnotatie*: $\vec{a}' = \mathcal{L}(\vec{a})$

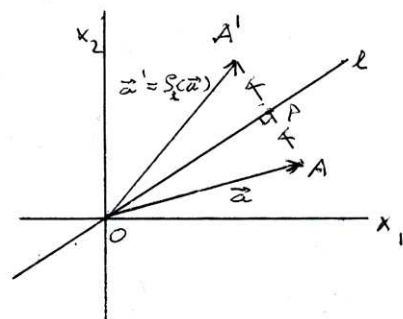
De vectoren $\vec{a}$ heten hierbij de *originelen* en de vectoren $\vec{a}'$ heten de *beelden*.

Een *voorbeeld* van zo'n transformatie is de *spiegeling* S_l ten opzichte van de lijn l door de oorsprong O . Aan elk punt A niet liggend op l wordt een ander punt A' toegevoegd zodanig dat de lijn door A en A' loodrecht staat op de lijn l en zodanig dat de afstand van A tot l gelijk is aan de afstand van A' tot l . In de figuur betekent dit laatste $AP = A'P$. Op de lijn l vallen de punten A en A' samen.

De verplaatsingsvectoren en de positievectoren ondergaan hierdoor alle een spiegeling S_l . Zo is in de figuur $\vec{a}$ de positievector van het punt A en $\vec{a}'$ de positievector van A' . Dit wordt genoteerd als

pijlnotatie $\vec{a} \xrightarrow{S_l} \vec{a}'$

haakjesnotatie: $\vec{a}' = S_l(\vec{a})$



Stelling

De spiegeling S_l in $\mathbb{R}^2$ vormt een zogenoemde *lineaire transformatie* omdat voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en voor alle scalars λ geldt

$$S_l(\vec{a} + \vec{b}) = S_l(\vec{a}) + S_l(\vec{b})$$

behoud vectoroptelling

$$S_l(\lambda \vec{a}) = \lambda S_l(\vec{a})$$

behoud schaling

Bewijs

Het behoud van de vectoroptelling is in de eerste figuur weergegeven. Het parallellogram $OACB$ gaat na spiegeling in l over in het parallellogram $OA'C'B'$.

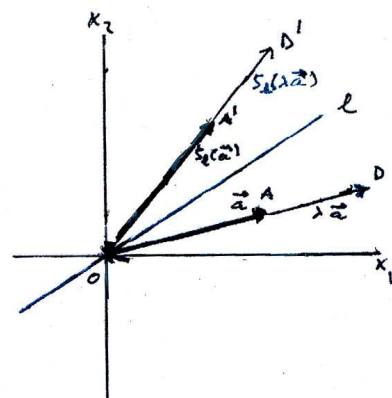
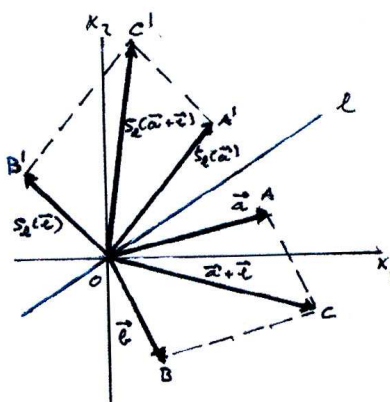
In het parallellogram $OACB$ geldt $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$, hetgeen betekent dat de som $\vec{a} + \vec{b}$ van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ wordt gevormd.

In het parallellogram $OA'C'B'$ geldt

$$\vec{OC'} = \vec{OA'} + \vec{OB'}$$

en dus

$$S_l(\vec{a} + \vec{b}) = S_l(\vec{a}) + S_l(\vec{b})$$



In de tweede figuur het punt D' de gespiegelde van het punt D in de lijn l . Er geldt $\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OA}$ en na spiegeling $\overrightarrow{OD'} = \lambda \overrightarrow{OA'}$.
Dus geldt na spiegeling $S_l(\lambda \vec{a}) = \lambda S_l(\vec{a})$

□

Een ander voorbeeld van een transformatie in $\mathbb{R}^2$ vormt de rotatie over een hoek θ , notatie $\mathcal{R}_\theta$. Er geldt hierbij een vergelijkbare stelling als bij spiegeling.

Stelling

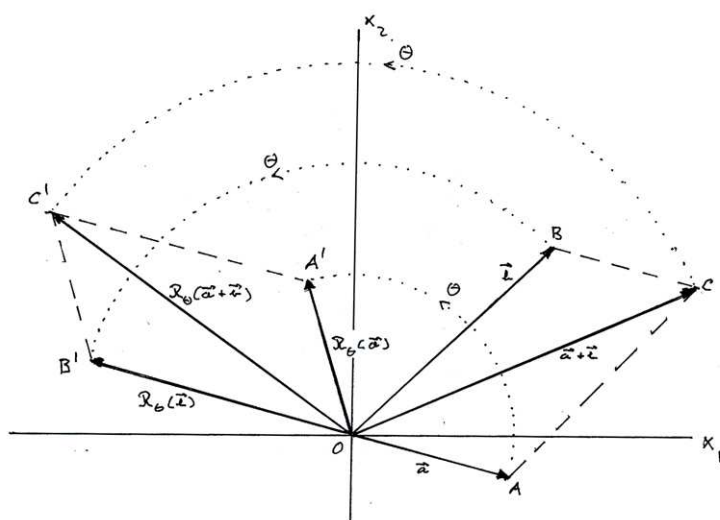
Voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ en voor alle scalars λ geldt bij een rotatie over een hoek θ :

$$\mathcal{R}_\theta(\vec{a} + \vec{b}) = \mathcal{R}_\theta(\vec{a}) + \mathcal{R}_\theta(\vec{b}) \quad \text{behoud vectoroptelling}$$

$$\mathcal{R}_\theta(\lambda \vec{a}) = \lambda \mathcal{R}_\theta(\vec{a}) \quad \text{behoud schaling}$$

Bewijs

In de linker figuur is het parallellogram $OA'C'B'$ het beeld van de rotatie over een hoek θ om de oorsprong O van het parallellogram $OACB$ voor de optelling van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.



Uit deze figuur blijkt
en dus

$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$$

$$\mathcal{R}_\theta(\vec{a} + \vec{b}) = \mathcal{R}_\theta(\vec{a}) + \mathcal{R}_\theta(\vec{b})$$

In de rechter figuur is het punt D' het beeld van het punt D bij de rotatie over de hoek θ om de oorsprong O . Er geldt $\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OA}$ en na rotatie geldt

$$\overrightarrow{OD'} = \lambda \overrightarrow{OA'}$$

en dus

$$\mathcal{R}_\theta(\lambda \vec{a}) = \lambda \mathcal{R}_\theta(\vec{a})$$

□

Deze twee voorbeelden leiden tot de volgende algemene definitie

Definitie

Een transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ heet *lineair* als voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en voor alle scalars λ geldt

$$\mathcal{L}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathcal{L}(\vec{a}) + \mathcal{L}(\vec{b})$$

behoud vectoroptelling

$$\mathcal{L}(\lambda \vec{a}) = \lambda \mathcal{L}(\vec{a})$$

behoud schaling

In deze inleiding is een lineaire transformatie *meetkundig* geïntroduceerd. In de volgende paragraaf zullen we aan de hand van de rotatie onderzoeken hoe een lineaire transformatie *algebraïsch* kan worden gekarakteriseerd door een *matrix*. Door middel van matrices kunnen lineaire transformaties als de spiegeling en de draaiing van vectoren ook worden *berekend*. Naast spiegelingen en rotaties zullen we ook andere lineaire transformaties tegenkomen als *projecties* en *glijdschuivingen*.

Opgaven

III.0.1 Een belangrijk voorbeeld van een *niet-lineaire* transformatie is de *translatie* in een plat vlak. Als alle punten van een plat vlak over dezelfde afstand worden verplaatst en in dezelfde richting dan heet dit translatie of verschuiving in dat vlak. Door aanleg van het standaard assenstelsel (x_1, x_2) kan dit worden beschreven met behulp van vectoren in $\mathbb{R}^2$. Er is dan sprake van een *translatie over een vector* $\vec{d}$, notatie $\mathcal{T}_{\vec{d}}$, hetgeen betekent dat bij iedere positievector $\vec{a}$ van het vlak een vaste vector $\vec{d}$ opgeteld. Dus

$$\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{a}) = \vec{a} + \vec{d}$$

Stel $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. We laten $\mathcal{T}_{\vec{d}}$ werken op de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

- Teken in een assenstelsel (x_1, x_2) het parallellogram van de optelling $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ en geef de kentallen van de vector $\vec{c}$
- Bereken $\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{a})$, $\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{b})$ en $\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{c})$
- Teken in een ander assenstelsel (x_1, x_2) het parallellogram van de optelling $\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{a}) + \mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{b})$. Teken in dit diagram ook $\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{c})$
- Teken in nog een ander assenstelsel (x_1, x_2) het de vectoren $\mathcal{T}_{\vec{d}}(3\vec{b})$ en $3\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{b})$
- Hoe blijkt uit c) en uit d) dat een translatie niet-lineair is?

III.0.2 Toon aan dat bij een translatie $\mathcal{T}_{\vec{d}}$ in $\mathbb{R}^2$ voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en voor alle scalars λ geldt

- $$\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$$

$$\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{a}) + \mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{d}$$
- $$\mathcal{T}_{\vec{d}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\vec{a} + \vec{d}$$

$$\lambda\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{a}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{d}$$

- Verklaar dat een translatie dan en slechts dan lineair is als $\vec{d} = \vec{0}$

III.0.3 Voor iedere vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt de projectie op de x_1 -as geven door

$$\mathcal{P}_{x_1}(\vec{a}) = a_1\vec{e}_1$$

Toon aan dat $\mathcal{P}_{x_1}$ een lineaire transformatie is.

III.1 Algebraïsche beschrijving van rotaties door matrices

In deze paragraaf zullen we laten zien hoe rotaties algebraïsch beschreven kunnen worden. Het zal blijken dat door de lineariteit het rotatiebeeld van een willekeurige vector volledig is vastgelegd door het rotatiebeeld van de vectoren van de standaardbasis.

Verder zal aan de orde komen dat uit de beelden van de vectoren van de standaardbasis een zogenoemde *rotatiematrix* kan worden gevormd. Met zo'n rotatiematrix kan het rotatiebeeld van een vector snel worden berekend.

In de volgende paragraaf komt aan de orde dat ook in het algemeen bij lineaire transformaties het beeld van een willekeurige vector is vastgelegd door de beelden van de standaardbasis en dat ook dan uit deze beelden een matrix kan worden gevormd die ons in staat stelt de beelden van andere vectoren eenvoudig te berekenen.

Uitgangspunt voor de berekeningen bij rotaties in $\mathbb{R}^2$ is de volgende stelling

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ kan bij een rotatie $\mathcal{R}_\theta$ over een hoek θ vanuit de beelden $\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_2)$ van de standaard basisvectoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ het beeld van iedere andere vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ worden berekend volgens

$$\mathcal{R}_\theta(\vec{a}) = a_1\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_2)$$

Bewijs 1 (vanuit de lineariteit van $\mathcal{R}_\theta$)

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\theta(\vec{a}) &= \mathcal{R}_\theta(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) \\ &= \mathcal{R}_\theta(a_1\vec{e}_1) + \mathcal{R}_\theta(a_2\vec{e}_2) && \text{behoud vectoroptelling} \\ &= a_1\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_2) && \text{behoud schaling}\end{aligned}$$

□

Bewijs 2 (vanuit de draaiing van het standaard assenstelsel)

De figuur rechts wordt het standaard assenstelsel (x_1, x_2) met de bijbehorende standaard basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ gedraaid over een hoek θ .

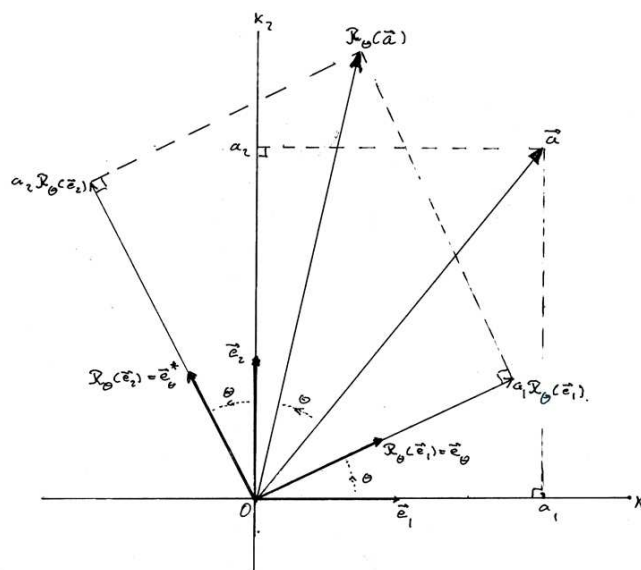
Ook de vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ wordt gedraaid over deze hoek θ

Het resultaat is een orthonormaal assenstelsel met basis $\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_1) = \vec{e}_\theta$, $\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_2) = \vec{e}_\theta^*$ en met het beeld $\mathcal{R}_\theta(\vec{a})$ van $\vec{a}$.

In het gedraaide assenstelsel heeft de vector $\mathcal{R}_\theta(\vec{a})$ dezelfde kentallen ten opzichte $\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_1)$, $\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_2)$ als de vector $\vec{a}$ ten opzichte van $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ in het standaard assenstelsel, dus

$$\mathcal{R}_\theta(\vec{a}) = a_1\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_2)$$

□



Voorbeeld

Gegeven: de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

Gevraagd: het beeld van deze vector bij een draaiing over een hoek van $36,9^\circ$

Oplossing:

Voor de beelden van de standaard basis geldt

$$\mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{e}_1) = \vec{e}_{36,9^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 36,9 \\ \sin 36,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{e}_2) = \vec{e}_{36,9^\circ}^* = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Volgens de stelling geldt voor de draaiing van een vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ over een hoek van $36,9^\circ$

$$\mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{a}) = a_1 \mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{e}_1) + a_2 \mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{e}_2) = a_1 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

en dus als $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{a}) = 10 \mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{e}_1) - 5 \mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{e}_2) = 10 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Om de berekeningen met rotaties zoals in dit voorbeeld *overzichtelijk* te maken voeren we het begrip *matrix* in. Ook in de volgende paragraaf, waarin zal worden uitgewerkt hoe in het algemene geval van lineaire transformaties in $\mathbb{R}^2$ wordt gerekend, zullen matrices de berekeningen doorzichtiger maken.

Definitie

Een getallenblok $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ heet een 2×2 *matrix*.

Opmerkingen

1) De kolommen in de matrix zijn op te vatten als vectoren in $\mathbb{R}^2$.

De eerste kolom levert aldus de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ en de tweede de vector $\vec{w} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$.

en de 2×2 matrix wordt in dit geval ook genoteerd als $[\vec{v}, \vec{w}]$.

Er geldt daarom

$$[\vec{v}, \vec{w}] = \left[\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \right]$$

De matrix in de definitie valt op te vatten als een vereenvoudigde notatie van het rechter lid in deze uitdrukking.

- 2) De matrix van een vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ in $\mathbb{R}^2$ wordt genoteerd als $[\vec{a}]$ en heet een 2×1 matrix die wordt gegeven door de kolom

$$[\vec{a}] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Een 2×1 matrix heet ook wel een *kolommatrix*.

- 3) In het geval van de rotatie over $36,9^\circ$ in $\mathbb{R}^2$ kan het beeld van iedere vector worden

berekend met behulp van de beelden $\mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ $\mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ van de

vectoren van de standaard basis.

Dit betekent dat deze rotatie geheel wordt vastgelegd door de 2×2 matrix

$$[\mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{e}_1), \mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{e}_2)] = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Deze matrix, die wordt genoteerd als $R_{36,9^\circ}$, heet de matrix behorend bij de lineaire transformatie $\mathcal{R}_{36,9^\circ}$. Er geldt dus

$$R_{36,9^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Voor de *rotatieoperator* wordt een *kalligrafische* hoofdletter gebruikt en voor de bijbehorende *rotatiematrix* een *gewone* scheve hoofdletter, dus resp. $\mathcal{R}_{36,9^\circ}$ en $R_{36,9^\circ}$ bij een draaiing over $36,9^\circ$

- 4) De vraag is nu hoe vanuit de rotatiematrix $R_{36,9^\circ}$ het rotatiebeeld wordt berekend van een vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ bij een draaiing over $36,9^\circ$ in $\mathbb{R}^2$. Volgens bovenstaand voorbeeld geldt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{a}) &= a_1\mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{R}_{36,9^\circ}(\vec{e}_2) = a_1 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{5}a_1 - \frac{3}{5}a_2 \\ \frac{3}{5}a_1 + \frac{4}{5}a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In termen van matrices wordt de rotatie van $\vec{a}$ geschreven als

$$R_{36,9^\circ} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

De 2×2 matrix $R_{36,9^\circ}$ werkt dus op een kolommatrix met als resultaat

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}a_1 - \frac{3}{5}a_2 \\ \frac{3}{5}a_1 + \frac{4}{5}a_2 \end{pmatrix}$$

In het linkerlid staat de vermenigvuldiging van een 2×2 matrix met een kolommatrix. Het resultaat in het rechterlid wordt als volgt verkregen:

Om het *eerste* kental in het rechterlid te vinden wordt de *eerste rij* van de 2×2 matrix gecombineerd met de *kolommatrix*

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}a_1 - \frac{3}{5}a_2 \\ \times \end{pmatrix}$$

Het eerste getal in de rij wordt vermenigvuldigd met het eerste getal in de kolom, het tweede getal in de rij wordt vermenigvuldigd met het tweede getal in de kolom en dan wordt er opgeteld.

Om het *tweede* kental in het rechterlid te vinden wordt de *tweede rij* van de 2×2 matrix gecombineerd met de *kolommatrix*

$$\begin{pmatrix} \times & \times \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times \\ \frac{3}{5}a_1 + \frac{4}{5}a_2 \end{pmatrix}$$

Opnieuw wordt het eerste getal in de rij vermenigvuldigd met het eerste getal in de kolom en het tweede getal in de rij wordt vermenigvuldigd met het tweede getal in de kolom en opnieuw wordt er opgeteld.

In geval van het voorbeeld was er sprake van de rotatie van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$ en

volgens de hier beschreven matrixvermenigvuldiging geldt dan

$$R_{36,9^\circ} \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}10 - \frac{3}{5}(-5) \\ \frac{3}{5}10 + \frac{4}{5}(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De kentallen in de kolom rechts zijn de kentallen van het beeld van de vector $\vec{a}$ na de rotatie over $36,9^\circ$.

Bovenstaande opmerkingen geven aanleiding tot de volgende definitie van vermenigvuldiging van matrices

Definitie

Het *matrixproduct* van de 2×2 matrix $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ met de kolommatrix $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ wordt gegeven door

$$\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa_1 + ra_2 \\ qa_1 + sa_2 \end{pmatrix}$$

Opmerking

Bij dit matrixproduct wordt dus de *eerste rij* van de 2×2 matrix met de kolom van de 2×1 matrix (dus van de kolommatrix) gecombineerd om het *eerste kental* van het product te verkrijgen. Om het *tweede kental* van het product te verkrijgen wordt de *tweede rij* van de 2×2 matrix gecombineerd met de kolom van de 2×1 matrix.

Het resultaat is de 2×1 matrix in het rechter lid.

(Voor nadere details zie opmerking 4) hierboven.)

Alvorens algemeen in te gaan op rotaties in $\mathbb{R}^2$ geven we eerst het volgende voorbeeld om meer vertrouwd te raken met matrixberekeningen.

Voorbeeld

Gegeven: de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

Gevraagd:

- a) De matrix R_{30° behorend bij een draaiing $\mathcal{R}_{30^\circ}$ over 30° in $\mathbb{R}^2$
 b) Het beeld $\mathcal{R}_{30^\circ}(\vec{a})$ van de vector $\vec{a}$ bij deze draaiing

Oplossing:

- a) De beelden $\mathcal{R}_{30^\circ}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{R}_{30^\circ}(\vec{e}_2)$ van de vectoren van de standaard basis leggen deze rotatie geheel vast. De rotatiematrix R_{30° wordt uit deze vectoren gevormd.

$$R_{30^\circ} = [\mathcal{R}_{30^\circ}(\vec{e}_1), \mathcal{R}_{30^\circ}(\vec{e}_2)] = [\vec{e}_{30^\circ}, \vec{e}_{30^\circ}^*] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

- b) Voor het beeld van de vector $\vec{a}$ geldt

$$R_{30^\circ} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dus $\mathcal{R}_{30^\circ}(\vec{a}) = 2\vec{e}_2$

(Dit resultaat valt ook meetkundig in te zien, zie opgave III.1.2)

We vatten de gevonden resultaten over rotaties in $\mathbb{R}^2$ samen met de volgende definitie en de volgende stelling

Definitie

De *rotatiematrix* R_θ behorend bij een $\mathcal{R}_\theta$ over een hoek θ in $\mathbb{R}^2$ is de matrix gevormd door de rotatiebeelden $\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_2)$ van de standaard basis, dus

$$R_\theta = [\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_1), \mathcal{R}_\theta(\vec{e}_2)]$$

Stelling

De rotatiematrix R_θ behorend bij een rotatie $\mathcal{R}_\theta$ over een hoek θ in $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

en het beeld $\mathcal{R}_\theta(\vec{a})$ van iedere vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ wordt berekend volgens de matrixvermenigvuldiging

$$R_\theta \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Bewijs

$$\begin{aligned} R_\theta &= [\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_1), \mathcal{R}_\theta(\vec{e}_2)] = [\vec{e}_\theta, \vec{e}_\theta^*] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ \mathcal{R}_\theta(\vec{a}) &= a_1\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{R}_\theta(\vec{e}_2) = a_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cdot a_1 - \sin \theta \cdot a_2 \\ \sin \theta \cdot a_1 + \cos \theta \cdot a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Aanhangsel

Een belangrijke toepassing van rotatiematrices is een afleiding van de zogenoemde *som- en verschilregels voor cosinus en sinus* (zie §II.2 voor een andere afleiding).

Stelling (Somregel voor cosinus en sinus)

Er geldt voor de som $\alpha + \beta$ van twee hoeken

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Bewijs

Als de eenheidsvector met hoek β met de x_1 -as $\vec{e}_\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$ een rotatie

$\mathcal{R}_\alpha$ ondergaat over de hoek α , ontstaat de eenheidsvector met hoek $\alpha + \beta$

met de x_1 -as $\vec{e}_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$.

Dus

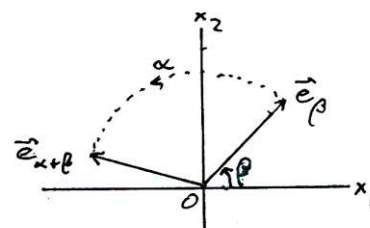
$$\vec{e}_{\alpha+\beta} = \mathcal{R}_\alpha(\vec{e}_\beta)$$

In matrixtaal

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} &= R_\alpha \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De stelling volgt uit de gelijkheid van de kentallen van de eerste en de laatste vector uit deze formule.

□



Stelling (Verschilregel voor cosinus en sinus)

Er geldt voor het verschil $\alpha - \beta$ van twee hoeken

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Bewijs

De eenheidsvector $\vec{e}_{-\beta}$ is de gespiegelde in de x_1 -as van de vector $\vec{e}_\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$. De

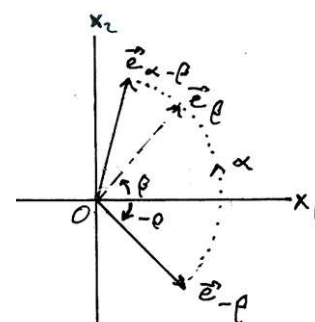
vectoren $\vec{e}_{-\beta}$ en $\vec{e}_\beta$ hebben daarom dezelfde x_1 -kentallen en tegengestelde x_2 -kentallen. Dus

$\vec{e}_{-\beta} = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix}$. Ondergaat de vector $\vec{e}_{-\beta}$ een rotatie $\mathcal{R}_\alpha$ over de hoek α dan

ontstaat de vector $\vec{e}_{\alpha-\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$.

Dus

$$\vec{e}_{\alpha-\beta} = \mathcal{R}_\alpha(\vec{e}_{-\beta})$$



In matrixtaal

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) \end{pmatrix} = R_\alpha \begin{pmatrix} \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{pmatrix}$$

De stelling volgt uit de gelijkheid van de kentallen in de eerste en de laatste kolommatrix uit deze formule.

□

Opgaven

III.1.1 De vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5, 7 \\ -3, 8 \end{pmatrix}$ wordt gedraaid over een hoek van 147°

- Teken in een assenstelsel (x_1, x_2) de vector $\vec{a}$ en zijn $\mathcal{R}_{147^\circ}$ -beeld
- Bereken de kentallen van $\mathcal{R}_{147^\circ}(\vec{a})$ met behulp van de rotatiematrix R_{147°

III.1.2 Gegeven de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

- Bereken de norm van deze vector en een draaihoek α van deze vector.
- Verklaar dat $\mathcal{R}_{30^\circ}(\vec{a})$ langs de x_2 -as is gericht. Geef de kentallen van $\mathcal{R}_{30^\circ}(\vec{a})$ met behulp van dit gegeven en de norm uit a)

III.1.3 a) Geef de matrices R_{90° en R_{180° van de draaiingen over resp. 90° en 180°

- Welke matrix behoort bij de lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ waarbij $-\vec{a}^*$ het beeld is van $\vec{a}$?

III.1.4 De vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ wordt gedraaid over een hoek van 60°

- Bereken de exacte kentallen van het beeld $\mathcal{R}_{60^\circ}(\vec{a})$ met behulp van de rotatiematrix R_{60°

(Aanwijzing: $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ en $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$)

Bij een draaiing verandert de lengte van een vector niet.

- Toon door berekening van de exacte waarden van $|\vec{a}|$ en van $|\mathcal{R}_{30^\circ}(\vec{a})|$ aan dat dit ook nu het geval is

III.1.5 Een rotatie $\mathcal{R}_\theta$ in $\mathbb{R}^2$ over een hoek θ wordt algebraïsch vastgelegd door de matrix

$$R_\theta = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Bereken de draaihoek θ .

- III.1.6 a) Geef de exacte waarden van $\cos 45^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\cos 150^\circ$ en $\sin 150^\circ$.
 b) Geef de matrices R_{45° en R_{150° van de draaiingen over resp. 45° en 150°
- III.1.7 a) Gebruik de somregels voor cosinus en sinus om te bewijzen

$$\cos 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$
 en
$$\sin 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

 b) Gebruik de verschilregels voor cosinus en sinus om de exacte waarden te berekenen van $\cos 15^\circ$ en $\sin 15^\circ$
- III.1.8 Voor $\alpha = \beta$ geldt $\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$, dus:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

 a) Leid een vergelijkbare formule af voor $\sin 2\alpha$
 b) Beredeneer dat uit het verband tussen $\vec{e}_\alpha$ met $\cos \alpha$ en $\sin \alpha$ volgt

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

 c) Leid af vanuit het bovenstaande af

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

 d) Als $\alpha = 22,5^\circ$ bereken dan met behulp van c) de exacte waarden van $\cos 22,5^\circ$ en $\sin 22,5^\circ$
- III.1.9 a) Bereken de exacte waarden van $\cos 37,5^\circ$ en $\sin 37,5^\circ$
 (Aanwijzing $2 \cdot 37,5^\circ = 75^\circ$)
 b) Bereken de exacte waarden van $\cos 52,5^\circ$ en $\sin 52,5^\circ$
 (Aanwijzing $2 \cdot 52,5^\circ = 60^\circ + 45^\circ$)

III.2 Algebraïsche beschrijving van lineaire transformaties door matrices

Op een geheel vergelijkbare manier als bij rotaties wordt een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ volledig vastgelegd door de beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de standaardbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Evenals bij rotaties wordt vanuit deze beeldvectoren van de standaardbasis een matrix L gedefinieerd behorend bij de lineaire transformatie $\mathcal{L}$. Met behulp van deze matrix kan dan de lineaire transformatie $\mathcal{L}$ van iedere andere vector worden berekend.

Het vastleggen van een lineaire transformatie met behulp van de beelden van de vectoren van de standaard basis komt tot uitdrukking in de volgende twee stellingen.

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ kan bij een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ vanuit de beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de standaard basisvectoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ het beeld van iedere andere vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ worden berekend volgens

$$\mathcal{L}(\vec{a}) = a_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{L}(\vec{e}_2)$$

Bewijs

De lineariteit van $\mathcal{L}$ levert.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{a}) &= \mathcal{L}(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) \\ &= \mathcal{L}(a_1\vec{e}_1) + \mathcal{L}(a_2\vec{e}_2) && \text{behoud vectoroptelling} \\ &= a_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{L}(\vec{e}_2) && \text{behoud schaling}\end{aligned}$$

□

Stelling

Als in $\mathbb{R}^2$ bij een transformatie $\mathcal{L}$ de beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de standaard basisvectoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bekend zijn en het beeld van iedere andere vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ kan worden berekend volgens

$$\mathcal{L}(\vec{a}) = a_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{L}(\vec{e}_2)$$

dan is de transformatie $\mathcal{L}$ lineair.

Bewijs

Voor het behoud van de vectoroptelling beschouwen we de vectoren $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ en $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$. Voor hun som geldt

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 = a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + b_2\vec{e}_2 \\ &= (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2\end{aligned}$$

Gevolg

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{a} + \vec{b}) &= (a_1 + b_1)\mathcal{L}(\vec{e}_1) + (a_2 + b_2)\mathcal{L}(\vec{e}_2) \\ &= a_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + b_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{L}(\vec{e}_2) + b_2\mathcal{L}(\vec{e}_2) \\ &= a_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{L}(\vec{e}_2) + b_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + b_2\mathcal{L}(\vec{e}_2) \\ &= \mathcal{L}(\vec{a}) + \mathcal{L}(\vec{b})\end{aligned}$$

Voor het *behoud van schaling* gebruiken we $\lambda \vec{a} = \lambda(a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) = \lambda a_1 \vec{e}_1 + \lambda a_2 \vec{e}_2$

Gevolg

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\lambda \vec{a}) &= \lambda a_1 \mathcal{L}(\vec{e}_1) + \lambda a_2 \mathcal{L}(\vec{e}_2) \\ &= \lambda(a_1 \mathcal{L}(\vec{e}_1) + a_2 \mathcal{L}(\vec{e}_2)) \\ &= \lambda \mathcal{L}(\vec{a})\end{aligned}$$

□

Voorbeeld

Gegeven: Voor een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt voor de beelden van de

standaard basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ dat $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gevraagd: Het $\mathcal{L}$ -beeld van de vector $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, dus van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Oplossing:

$$\mathcal{L}(\vec{a}) = 2\mathcal{L}(\vec{e}_1) + 3\mathcal{L}(\vec{e}_2) = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Meetkundig beeld van de stellingen

Het voorbeeld leidt tot het beeld rechts

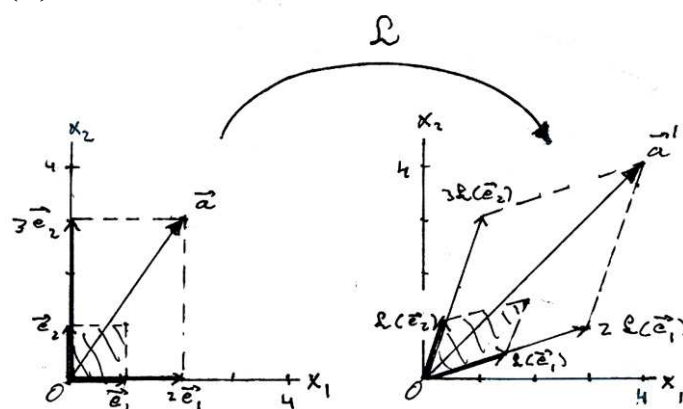
In het linker plaatje zijn de standaard basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

en het origineel $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ getekend. De

standaard basis spant een vierkantje op.

Door de lineaire transformatie ontstaat er een scheef assenstelsel behorend bij de basis

$\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathcal{L}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dit is in het plaatje



rechts weergegeven. Deze nieuwe basis spant het getekende parallellogram op

De beeldvector $\vec{a}' = \mathcal{L}(\vec{a})$ van het origineel $\vec{a}$ heeft dezelfde kentallen 2 en 3 ten opzichte van het scheve assenstelsel als het origineel ten opzichte van het standaard assenstelsel, want

$$\mathcal{L}(\vec{a}) = 2\mathcal{L}(\vec{e}_1) + 3\mathcal{L}(\vec{e}_2) \quad \text{bij} \quad \vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$

De *meetkundige betekenis van een lineaire transformatie* kan daarom bondig als volgt worden geformuleerd:

Bij een lineaire transformatie *verandert men wel van basis* (wel van assenstelsel), maar *niet van kentallen* ten opzichte van de basis (ten opzichte van het assenstelsel).

De matrix behorend bij een lineaire transformatie wordt, net als bij de rotatie, gedefinieerd vanuit de beelden van de standaard basis.

Definitie

De *matrix* L behorend bij een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ is de matrix gevormd door de $\mathcal{L}$ -beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de standaard basis, dus geldt

$$L = [\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)]$$

Voorbeeld

Gegeven: De $\mathcal{L}$ -beelden van de standaard basis $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ uit het laatste voorbeeld.

Gevraagd: De matrix van deze lineaire transformatie

Oplossing:
$$L = [\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)] = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

In de volgende stelling wordt aangegeven hoe met behulp van *matrixvermenigvuldiging* een lineaire transformatie kan worden berekend.

Stelling

Als $L = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ de matrix is behorend bij de lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ dan kan het $\mathcal{L}$ -beeld van een vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ worden berekend door het matrixproduct

$$L \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Bewijs

Omdat
$$L = [\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)] = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

geldt
$$\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

en samen met $\mathcal{L}(\vec{a}) = a_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ levert dit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{a}) &= a_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{L}(\vec{e}_2) = a_1 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pa_1 + ra_2 \\ qa_1 + sa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Voorbeeld

Gegeven: De lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ uit de voorgaande voorbeelden, dus met matrix

$$L = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Gevraagd: Bereken het beeld van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ door matrixvermenigvuldiging

Oplossing:
$$L \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dit is de vector $\mathcal{L}(\vec{a})$ die we reeds eerder in deze paragraaf gevonden hebben.

Opmerkingen over de notatie.

- 1) Er wordt een onderscheid gemaakt tussen de notatie van een lineaire transformatie en de notatie van de bijbehorende matrix. Voor de *lineaire transformatie* wordt een *kalligrafische* hoofdletter gebruikt en voor de bijbehorende *matrix* een *gewone* scheve hoofdletter. In het bovenstaande voorbeeld $\mathcal{L}$ resp. L . Verder komt de kalligrafische notatie alleen voor in combinatie met de pijlnotatie van een vector en de gewone alleen in combinatie met de kolommatrix van de kentallen van een vector.

Dus: wel $\mathcal{L}(\vec{a})$ en niet $L(\vec{a})$,
 wel $L \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en niet $\mathcal{L} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$,

Verder geldt voor de notatie van de matrix

wel $L = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ en niet $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$

- 2) Bij onze opbouw van de lineaire algebra komt dit onderscheid in notatie overeen met het onderscheid tussen *meetkundige* beschouwingen, waarbij de een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ van een origineelvector $\vec{a}$ naar een beeldvector $\vec{a}'$ met $\vec{a}' = \mathcal{L}(\vec{a})$ wordt aangegeven, en *algebraïsche* berekeningen die met matrices worden uitgevoerd. In matrixnotatie is de genoemde transformatie $\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ waarbij

$L = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ de matrix is waardoor de lineaire transformatie algebraïsch wordt vastgelegd.

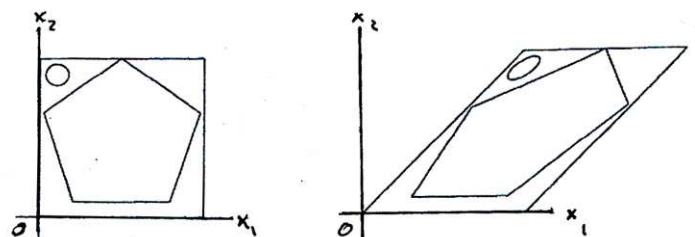
- 3) Bij een iets abstractere opbouw van de lineaire algebra dan wij doen via $\mathbb{R}^2$, en meer algemeen via $\mathbb{R}^n$, komt dit verschil in notatie overeen met *abstracte algemene beschouwingen* over vectoren (kalligrafisch en pijlen) en meer *concrete berekeningen* via matrices (gewoon scheef en kolommatrices). $\mathcal{L}$ heet bij deze benadering de *lineaire operator* op de abstracte vectorruimte en L is dan de bijbehorende *matrix* (getallenblok) ten opzichte van een gekozen basis in deze vectorruimte

Ter afsluiting van deze paragraaf geven we twee voorbeelden: De zogenoemde *glijschuiving* volgens de x_1 -as en de *verbreding* vanuit de x_2 -as

In de volgende paragraaf zal de *projectie* van vectoren worden besproken als een lineaire transformatie van die vectoren en zal de matrix voor zo'n projectie worden afgeleid.

Voorbeeld: Glijschuiving volgens de x_1 -as.

Gegeven: In de figuur rechts is er sprake van een *glijschuiving* in de richting van de x_1 -as.



Op dezelfde hoogte ondergaan alle punten dezelfde verplaatsing naar rechts, dus dezelfde verplaatsing in de richting van de x_1 -as. Op grotere hoogte boven de x_1 -as groter is deze verplaatsing evenredig groter.

Bij de glijdschuiving $\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}$ verandert de positievector $\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$ met hoogte h in de richting van de x_1 -as over een afstand $\frac{1}{2}h$, d.w.z. volgens de vector $\frac{1}{2}h\vec{e}_1$.

$$\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{h}) = \vec{h} + \frac{1}{2}h\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}h \\ h \end{pmatrix}$$

Op de x_1 -as zelf is er geen verschuiving. Dit betekent dat de vectoren $\vec{p} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ langs deze as niet veranderen door de glijdschuiving

$$\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{p}) = \vec{p}$$

Gevraagd

- De kentallen van de $\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}$ -beelden van de standaardbasis
- De matrix van de glijdschuiving.
- Bereken met behulp van de matrix het $\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}$ -beeld van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Bereken voor de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ de resp. vectoren $\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{a}) - \vec{a}$, $\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{b}) - \vec{b}$ en $\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{c}) - \vec{c}$
- Bereken voor de vectoren $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ en $\vec{c}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ de resp. vectoren $\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{a}') - \vec{a}'$, $\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{b}') - \vec{b}'$ en $\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{c}') - \vec{c}'$
- Licht aan de hand van d) en e) de naam “glijdschuiving” meetkundig toe.

Oplossing

- $$\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

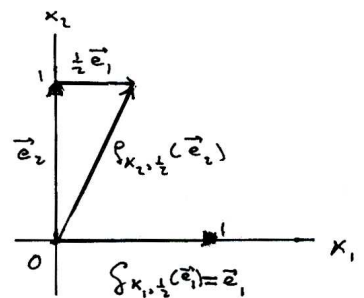
- De matrix van deze glijdschuiving $\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}$

$$G_{x_1, \frac{1}{2}} = [\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{e}_1), \mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{e}_2)] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Voor het beeld $\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{a})$ van de vector $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ geldt

$$G_{x_1, \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $$\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{a}) - \vec{a} = G_{x_1, \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\vec{e}_1$$



$$\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{b}) - \vec{b} = G_{x_1, \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \vec{e}_1$$

$$\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{c}) - \vec{c} = G_{x_1, \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \vec{e}_1$$

d) $\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{a}') - \vec{a}' = G_{x_1, \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\vec{e}_1$

$$\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{b}') - \vec{b}' = G_{x_1, \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\vec{e}_1$$

$$\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{c}') - \vec{c}' = G_{x_1, \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\vec{e}_1$$

e) Alle positievectoren in c) geven een hoogte 3 aan een al deze vectoren veranderen over een afstand $\frac{3}{2}$ volgens de vector $\vec{e}_1$ langs de x_1 -as.

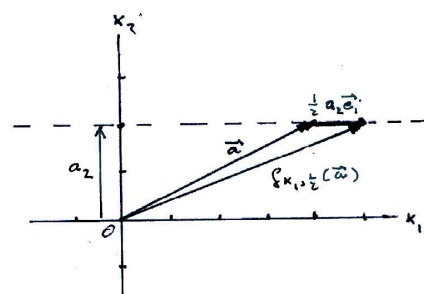
Alle positievectoren in c) geven een hoogte 6 aan een al deze vectoren veranderen over een afstand 3 volgens de vector $\vec{e}_1$ langs de x_1 -as.

Alle positievectoren met dezelfde hoogte ondergaan dus dezelfde verandering van afstand volgens de vector $\vec{e}_1$ in richting van de x_1 -as en op grotere hoogte boven de x_1 -as groter is deze verandering evenredig groter. Dit verklaart de naam glijdschuiving.

Dit blijkt ook bij een willekeurige vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

$$\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{a}) = G_{x_1, \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_1 + \frac{1}{2} \cdot a_2 \\ 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{1}{2} a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}(\vec{a}) - \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{1}{2} a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} a_2 \vec{e}_1$$



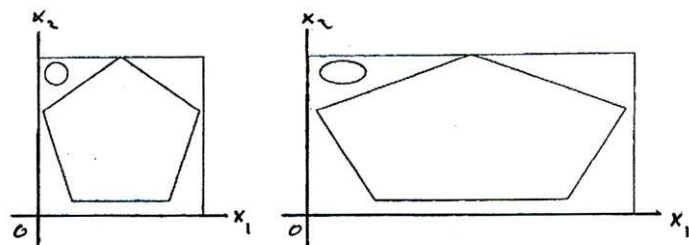
De kop van iedere positievector $\vec{a}$ wordt over een afstand $\frac{1}{2} a_2$ verplaatst in de horizontale richting van de basisvector $\vec{e}_1$. Het is duidelijk dat deze verplaatsing groter is naar mate de hoogte a_2 boven de x_1 -as groter is

Voorbeeld: Verbreding vanuit de x_2 -as

Gegeven In de figuur rechts is er sprake van een verbreding waarbij alle punten λ keer zo ver van de x_2 -as komen te staan. Deze transformatie wordt genoteerd als $\mathcal{V}_{x_2, \lambda}$.

De matrix die deze transformatie vastlegt is

$$V_{x_2, \lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Gevraagd

a) De $\mathcal{V}_{x_2, \lambda}$ -beelden van de vectoren van de standaardbasis.

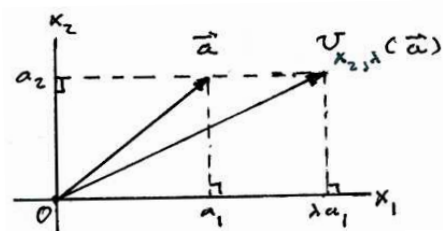
- b) De kentallen van het $\mathcal{V}_{x_2, \lambda}$ -beeld een vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- c) Een meetkundige toelichting op het resultaat uit b) aan de hand van een tekening met de standaard assen (x_1, x_2) , een vector $\vec{a}$ en zijn beeld $\mathcal{V}_{x_2, \lambda}(\vec{a})$.

Oplossing

a) $\mathcal{V}_{x_2, \lambda}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{V}_{x_2, \lambda}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dus $\mathcal{V}_{x_2, \lambda}(\vec{e}_1) = \lambda \vec{e}_1$ en $\mathcal{V}_{x_2, \lambda}(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$.

b) $\mathcal{V}_{x_2, \lambda}(\vec{a}) = \mathcal{V}_{x_2, \lambda} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 \\ 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

- c) Bij deze verbreding wordt de x_1 -component van een vector dus λ keer zo groot en blijft de x_2 -component van de vector ongewijzigd.



Opgaven

III.2.1 Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt algebraïsch gekarakteriseerd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- a) Bereken met behulp van matrixvermenigvuldiging de kentallen van de $\mathcal{L}$ -beelden van de vectoren $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- b) Leg uit dat de beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de basisvectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ onafhankelijk zijn.
- c) Teken in een assenstelsel (x_1, x_2) de vectoren $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ en het bijbehorende scheve assenstelsel.
- d) Teken ook $\mathcal{L}(\vec{a})$ en toon door ontbinding meetkundig aan dat $\mathcal{L}(\vec{a}) = 3\mathcal{L}(\vec{e}_1) - \mathcal{L}(\vec{e}_2)$

III.2.2 a) Dezelfde vraag als III.1.1 .a) in het geval dat

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- b) Leg uit dat de beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de basisvectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ afhankelijk zijn.
- c) Teken in een assenstelsel (x_1, x_2) de lijn door de oorsprong die volgens $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ is gericht. Geef ook de formule van deze lijn

- c) Toon aan dat voor het $\mathcal{L}$ -beeld van een vector $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ geldt

$$\mathcal{L}(\vec{d}) = (d_1 - 2d_2)\mathcal{L}(\vec{e}_1)$$

Dus het beeld van iedere vector is gericht volgens de lijn langs $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$

- d) Voor welke waarden van d_1 en d_2 is het $\mathcal{L}$ -beeld van de vector $\vec{d}$ de nulvector?

III.2.3 a) Dezelfde vraag als III.1.1.a) in het geval dat

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Verklaar de naam *nulafbeelding* voor deze lineaire transformatie

III.2.4 De lineaire transformatie $\mathcal{P}_{x_1}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$P_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Bereken kentallen van de $\mathcal{P}_{x_1}$ -beelden van de vectoren $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- b) Teken in een assenstelsel (x_1, x_2) deze vectoren en hun bijbehorende $\mathcal{P}_{x_1}$ -beelden

Uit b) blijkt dat $\mathcal{P}_{x_1}$ de projectie op de x_1 -as is. Dit blijkt algemeen uit het volgende.

- c) Toon aan dat geldt voor een willekeurige vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt

$$\mathcal{P}_{x_1}(\vec{a}) = a_1\vec{e}_1$$

- d) Geef de matrix voor de projectie $\mathcal{P}_{x_2}$ in $\mathbb{R}^2$ op de x_2 -as

III.2.5 De lineaire transformatie $\mathcal{S}_{x_1}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$S_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Bereken kentallen van de $\mathcal{S}_{x_1}$ -beelden van de vectoren $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- b) Teken in een assenstelsel (x_1, x_2) deze vectoren en hun bijbehorende $\mathcal{S}_{x_1}$ -beelden

- c) Van welke transformatie is hier sprake?
d) Geef de matrix van de spiegeling in de x_2

III.2.6 De lineaire transformatie $\mathcal{S}_{x_2=x_1}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$S_{x_2=x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Bereken kentallen van de $\mathcal{S}_{x_2=x_1}$ -beelden van de vectoren $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,
 $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- b) Teken in een assenstelsel (x_1, x_2) deze vectoren en hun bijbehorende $\mathcal{S}_{x_2=x_1}$ -beelden
- c) Van welke transformatie is hier sprake?

III.2.7 De lineaire transformatie $\mathcal{V}_\lambda$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$V_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- a) Toon aan dat geldt voor een willekeurige vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt
- $$\mathcal{V}_\lambda(\vec{a}) = \lambda \vec{a}$$
- b) Verklaar de naam *schaafttransformatie* voor $\mathcal{V}_\lambda$
- c) Verklaar de naam *identiteitsafbeelding* voor de lineaire transformatie $\mathcal{I} = \mathcal{V}_1$ en geef de matrix behorend bij de transformatie

III.2.8 De glijdschuiving $\mathcal{G}_{x_1, \lambda}$ in de richting van de x_1 -as met een factor λ wordt vastgelegd

door de matrix
$$G_{x_1, \lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Toon door berekening aan dat het voor $\mathcal{G}_{x_1, \lambda}$ -beeld een vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ geldt

$$G_{x_1, \lambda} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Dus $\mathcal{G}_{x_1, \lambda}(\vec{a}) = \vec{a} + a_2 \lambda \vec{e}_1$)

- b) Geef de matrix voor de glijdschuiving $\mathcal{G}_{x_2, \lambda}$ en toon aan $\mathcal{G}_{x_2, \lambda}(\vec{a}) = \vec{a} + a_1 \lambda \vec{e}_2$

III.2.9 Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt algebraïsch gekarakteriseerd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Toon door berekening aan dat hier het $\mathcal{L}$ -beeld een vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ de
 nevenvector $\vec{a}^*$ is van de vector $\vec{a}$
- b) Bereken de matrix R_{90° behorend bij een rotatie over 90°

III.3 De matrix van een projectie in $\mathbb{R}^2$

Veelal ongemerkt komen we vaak met projecties in aanraking. Denk bijvoorbeeld aan een foto: hier is sprake van projectie van ruimtelijke voorwerpen in een plat vlak (de foto). Of bij landkaarten in de aardrijkskunde: delen van onze aarde zijn geprojecteerd op een landkaart. Een belangrijke tak van de wiskunde, de zogenoemde *projectieve meetkunde*, is zelfs geheel gewijd aan projecties, en wel specifiek aan projecties vanuit een punt. Binnen het kader van lineaire transformaties speelt vooral de *loodrechte* of *orthogonale projectie* een rol, die we hier kortweg projectie zullen noemen.

Het volgende is een meetkundige definitie van projectie op een lijn.

Definitie

Laat k een lijn in $\mathbb{R}^2$ zijn. Als $\vec{a}$ een vector is in $\mathbb{R}^2$ dan is de *projectie* van $\vec{a}$ langs de lijn k , notatie $\mathcal{P}_k(\vec{a})$, de pijl die ontstaat door de pijl van $\vec{a}$ loodrecht op deze lijn te projecteren.

Om over de matrix behorend bij een projectie te kunnen spreken moeten we eerst aantonen dat de projectie langs een lijn een lineaire transformatie is.

Stelling

De projectie $\mathcal{P}_k$ in $\mathbb{R}^2$ langs een lijn k is een lineaire transformatie, d.w.z. voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ en voor iedere scalar λ geldt:

$$\mathcal{P}_k(\vec{a} + \vec{b}) = \mathcal{P}_k(\vec{a}) + \mathcal{P}_k(\vec{b})$$

behoud vectoroptelling

$$\mathcal{P}_k(\lambda \vec{a}) = \lambda \mathcal{P}_k(\vec{a})$$

behoud schaling

Bewijs

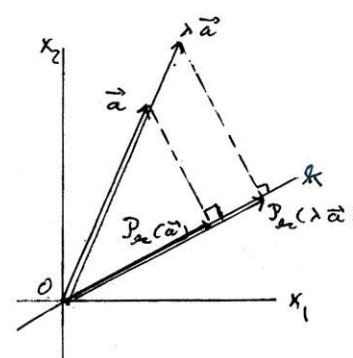
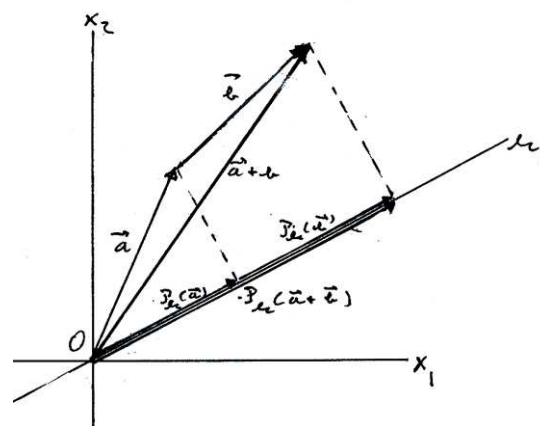
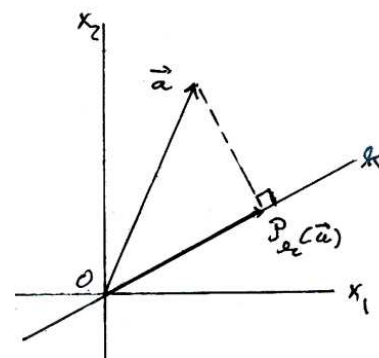
Behoud *vectoroptelling* valt het eenvoudigst in te zien met de kop-staart methode van vectoroptelling. In de figuur rechts is de staart van de vector $\vec{b}$ in de kop van de vector $\vec{a}$ geplaatst. De pijl van de staart van $\vec{a}$ naar de kop van $\vec{b}$ is de somvector $\vec{a} + \vec{b}$.

De geprojecteerde van $\vec{a}$ langs k is de vector $\mathcal{P}_k(\vec{a})$ en de geprojecteerde van $\vec{b}$ langs k is de vector $\mathcal{P}_k(\vec{b})$. Deze geprojecteerde vectoren liggen ook kop-staart. De vector van de staart van $\mathcal{P}_k(\vec{a})$ naar de kop van $\mathcal{P}_k(\vec{b})$ is de geprojecteerde $\mathcal{P}_k(\vec{a} + \vec{b})$ van $\vec{a} + \vec{b}$.

Aldus zien we meetkundig in:

$$\mathcal{P}_k(\vec{a} + \vec{b}) = \mathcal{P}_k(\vec{a}) + \mathcal{P}_k(\vec{b})$$

Behoud *schaling* volgt uit het gegeven dat als een vector $\lambda \vec{a}$ ontstaat door schaling met een scalar λ uit de vector $\vec{a}$ dan geldt ook dat de geprojecteerde $\mathcal{P}_k(\lambda \vec{a})$ van $\lambda \vec{a}$ langs k ontstaat door een schaling



met de scalar λ uit de geprojecteerde $\mathcal{P}_k(\vec{a})$ van $\vec{a}$ langs k , zoals met de figuur rechts valt in te zien. Dus:

$$\mathcal{P}_k(\lambda \vec{a}) = \lambda \mathcal{P}_k(\vec{a})$$

□

Om matrix van de projectie overzichtelijk te kunnen noteren maken we gebruik van het volgende

Definitie

De *sommatrix* $L + M$ van de 2×2 matrices

$$L = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad M = \begin{pmatrix} t & v \\ u & w \end{pmatrix}$$

wordt gedefinieerd door

$$L + M = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & v \\ u & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+t & r+v \\ q+u & s+w \end{pmatrix}$$

De *schaling* van de matrix L met een scalar λ wordt gegeven door

$$\lambda L = \lambda \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p & \lambda r \\ \lambda q & \lambda s \end{pmatrix}$$

Opmerkingen

- 1) Aldus hebben de 2×2 matrices op dezelfde manier een optelling en een scalaire vermenigvuldiging als de kolommatrices in $\mathbb{R}^2$. Omdat zo'n matrix 4 kentallen heeft vormen de 2×2 matrices een zogenaemde 4-dimensionale vectorruimte.
- 2) In de volgende paragraaf wordt van deze optelling en scalaire vermenigvuldiging van 2×2 matrices verder gebruik gemaakt

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ wordt de projectie $\mathcal{P}_k$ van vectoren ten opzichte van de lijn k vastgelegd door de matrix

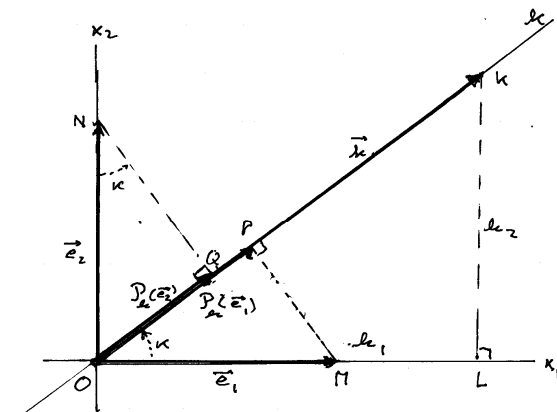
$$P_k = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & k_2^2 \end{pmatrix}$$

hierbij is $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ een vector gericht langs de lijn k .

Bewijs

Met behulp van de figuur rechts gaan we de projecties $\mathcal{P}_k(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{P}_k(\vec{e}_2)$ van de vectoren van de standaardbasis uitdrukken de lengte en de kentallen van de vector $\vec{k}$.
Er geldt

$$\mathcal{P}_k(\vec{e}_1) = \overrightarrow{OP} = OP \frac{\overrightarrow{OP}}{OP} = OP \cdot \vec{e}_k$$



$$\mathcal{P}_k(\vec{e}_2) = \overrightarrow{OQ} = OQ \frac{\overrightarrow{OQ}}{OQ} = OQ \cdot \vec{e}_k$$

waarbij voor de eenheidsvector langs k in de richting van $\vec{k}$ geldt $\vec{e}_k = \frac{1}{|\vec{k}|} \vec{k} = \frac{1}{|\vec{k}|} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$.

Met behulp van gelijkvormige driehoeken worden ook OP en OQ uitgedrukt in de lengte en de kentallen van $\vec{k}$

$$\Delta OPM \sim \Delta OLK \Rightarrow \frac{OP}{OL} = \frac{OM}{OK} \Rightarrow \frac{OP}{k_1} = \frac{|\vec{e}_1|}{|\vec{k}|} \Rightarrow OP = \frac{k_1}{|\vec{k}|}$$

$$\Delta NQO \sim \Delta OLK \Rightarrow \frac{OQ}{KL} = \frac{NO}{OK} \Rightarrow \frac{OQ}{k_2} = \frac{|\vec{e}_2|}{|\vec{k}|} \Rightarrow OQ = \frac{k_2}{|\vec{k}|}$$

Gevolg

$$\mathcal{P}_k(\vec{e}_1) = \frac{k_1}{|\vec{k}|} \cdot \vec{e}_k = \frac{k_1}{|\vec{k}|} \frac{1}{|\vec{k}|} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 \\ k_1 k_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_k(\vec{e}_2) = \frac{k_2}{|\vec{k}|} \cdot \vec{e}_k = \frac{k_2}{|\vec{k}|} \frac{1}{|\vec{k}|} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1 k_2 \\ k_2^2 \end{pmatrix}$$

Resultaat

$$P_k = [\mathcal{P}_k(\vec{e}_1), \mathcal{P}_k(\vec{e}_2)] = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & k_2^2 \end{pmatrix}$$

□

Voorbeeld

Gegeven: De lijn $k: x_2 = 2x_1$

Gevraagd: Het beeld $\vec{a}'$ van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bij spiegeling in de lijn k .

Oplossing: Maak zelf een tekening van de situatie.

De vector $\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is een vector langs de lijn k met $|\vec{k}|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$. Voor de matrix van de projectie op k geldt daarom

$$P_k = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Het beeld $\vec{a}'$ van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ is daarom

$$\vec{a}' = P_k \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Aanhangsel: Afleiding van de tweede projectiestelling

In §I.7 zijn twee projectiestellingen bewezen. Van de tweede geven we nu een ander bewijs met behulp van de projectiematrix. Aldus kunnen we zien hoe projectie met behulp van inproduct en projectie met behulp van de projectiematrix met elkaar samenhangen.

Tweede projectiestelling

Laat k een lijn in een vlak zijn door de oorsprong van een standaard assenstelsel en $\vec{k}$ een vector in $\mathbb{R}^2$ gericht volgens deze lijn.

Voor de loodrechte projectie in $\mathbb{R}^2$ van een vector $\vec{a}$ op deze lijn geldt

$$\mathcal{P}_k(\vec{a}) = \frac{\langle \vec{k}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle} \vec{k}$$

Bewijs

Uit de projectiematrix bij $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$ volgt

$$\begin{aligned} P_k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & k_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 a_1 + k_1 k_2 a_2 \\ k_1 k_2 a_1 + k_2^2 a_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Omdat $|\vec{k}|^2 = \langle \vec{k}, \vec{k} \rangle$ betekent dit

$$\mathcal{P}_k(\vec{a}) = \frac{\langle \vec{k}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle} \vec{k}$$

□

Opmerking

In opgave III.3.5 komt aan de orde hoe omgekeerd vanuit $\mathcal{P}_k(\vec{a}) = \frac{\langle \vec{k}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle} \vec{k}$ de projectiematrix kan worden afgeleid.

Opgaven

III.3.1 De vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ondergaat een projectie $\mathcal{P}_k$ in $\mathbb{R}^2$ de projectie $\mathcal{P}_k$ op de lijn

$$k: x_2 = \frac{3}{4} x_1$$

- Bereken de projectiematrix P_k
- Bereken de kentallen van het beeld $\mathcal{P}_k(\vec{a})$

III.3.2 In $\mathbb{R}^2$ is $\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ een vector die de richting vastlegt van een lijn k door de oorsprong

- Welke hoek maakt lijn k met de x_1 -as?

De vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ wordt op deze lijn geprojecteerd

- Bereken de exacte kentallen van het beeld $\mathcal{P}_k(\vec{a})$
- Verklaar het resultaat uit b) meetkundig

- III.3.3 a) Bereken exact de matrix die in $\mathbb{R}^2$ de projectie $\mathcal{P}_k$ vastlegt op een lijn k door de oorsprong die een hoek van 30° maakt met de x_1 -as
- b) Bereken exact de matrix die in $\mathbb{R}^2$ de projectie $\mathcal{P}_k$ vastlegt op een lijn k door de oorsprong die een hoek van 45° maakt met de x_1 -as
- c) Bereken exact de matrix die in $\mathbb{R}^2$ de projectie $\mathcal{P}_k$ vastlegt op een lijn k door de oorsprong die een hoek van 60° maakt met de x_1 -as

III.3.4 In $\mathbb{R}^2$ is $\mathcal{P}_k$ de projectie op de lijn $k : x_2 = -\frac{1}{2} \cdot x_1$

De vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ verandert niet door de projectie, dus er geldt $\mathcal{P}_k(\vec{a}) = \vec{a}$

- a) Verklaar dit meetkundig
- b) Toon ook met behulp van de projectiematrix P_k aan dat $\mathcal{P}_k(\vec{a}) = \vec{a}$
- c) Geef nog enkele vectoren $\vec{v}$ met de eigenschap $\mathcal{P}_k(\vec{v}) = \vec{v}$

De vector $\vec{a}^* = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ is na projectie de nulvector dus er geldt $\mathcal{P}_k(\vec{a}^*) = \vec{0}$

- d) Verklaar dit meetkundig
- e) Toon ook met behulp van de projectiematrix P_k aan dat $\mathcal{P}_k(\vec{a}^*) = \vec{0}$
- f) Geef nog enkele vectoren $\vec{w}$ met de eigenschap $\mathcal{P}_k(\vec{w}) = \vec{0}$

III.3.5 Voor de loodrechte projectie in $\mathbb{R}^2$ van een vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ op een lijn k geldt volgens de tweede projectiestelling uit §I.7

$$\mathcal{P}_k(\vec{a}) = \frac{\langle \vec{k}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle} \vec{k}$$

waarbij $\vec{k} = k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2$ een vector is gericht volgens deze lijn.

Dit betekent ook, met $\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle = |\vec{k}|^2$, dat geldt

$$P_k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Toon uitgaande van deze laatste uitdrukking aan dat geldt voor alle vectoren $\vec{a}$

$$P_k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & k_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

(Omdat dit voor alle vectoren $\vec{a}$ geldt levert dit voor $\mathcal{P}_k$ de matrix

$$P_k = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & k_2^2 \end{pmatrix} \quad)$$

III.4 De spiegeling in $\mathbb{R}^2$ via het complement van een projectie in $\mathbb{R}^2$

In de inleiding van §III.0 is al meetkundig aangetoond dat de *spiegeling* $\mathcal{S}_k$ in $\mathbb{R}^2$ ten opzichte van een lijn k een lineaire transformatie is. Dus volgens §III.2 legt matrix $S_k = [\mathcal{S}_k(\vec{e}_1), \mathcal{S}_k(\vec{e}_2)]$ deze lineaire transformatie algebraïsch vastlegt, waarbij $\mathcal{S}_k(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{S}_k(\vec{e}_2)$ de spiegelingen zijn van de standaard basis.

In het eerste aanhangsel van deze paragraaf, met de bijbehorende opgaven, zal echter blijken dat het algebraïsch nogal gecompliceerd is om rechtstreeks vanuit $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ geschikte uitdrukkingen voor $\mathcal{S}_k(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{S}_k(\vec{e}_2)$ af te leiden en daarmee voor de matrix S_k .

Meetkundige argumenten via het zogenoemde *complement van een projectie* leiden op een meer eenvoudige manier tot de gewenste matrix S_k .

Definitie

Als $\mathcal{P}_k$ de projectie is in $\mathbb{R}^2$ op een lijn k vastgelegd dan heet de projectie $\mathcal{P}_l$ op een lijn l loodrecht op k het *complement* van de projectie $\mathcal{P}_k$. Dit complement van $\mathcal{P}_k$ wordt genoteerd als $\mathcal{P}_k^c$.

Dus
$$l \perp k \Rightarrow \mathcal{P}_l = \mathcal{P}_k^c$$

Met behulp van de volgende stelling kan de matrix van het complement van een projectie eenvoudig uit de matrix van de projectie worden berekend. In deze stelling is er sprake van de som van twee lineaire transformaties. Deze som wordt in het tweede aanhangsel van deze paragraaf precies gedefinieerd, maar ook zonder zo'n definitie valt de betekenis ervan goed te begrijpen via de som en het verschil van matrices.

Stelling (volledigheid bij projecties)

In $\mathbb{R}^2$ vormen een projectie en het complement van deze projectie samen de identieke transformatie, d.w.z. zijn samen volledig. Dus als $\mathcal{P}_k$ de projectie is in $\mathbb{R}^2$ op een lijn k dan geldt

$$\mathcal{P}_k + \mathcal{P}_k^c = \mathcal{I}$$

Bewijs

In een vlak is de lijn k gegeven en ook de lijn l loodrecht op k , dus $l \perp k$. Een vector $\vec{a}$ wordt ontbonden volgens deze twee lijnen. De ontbondene van de vector $\vec{a}$ langs de lijn k is de projectie $\mathcal{P}_k(\vec{a})$ van $\vec{a}$ op k en de ontbondene van deze vector langs de lijn l is de projectie $\mathcal{P}_k^c(\vec{a})$ van $\vec{a}$ op l . De vector $\vec{a}$ is de som van deze ontbondenen

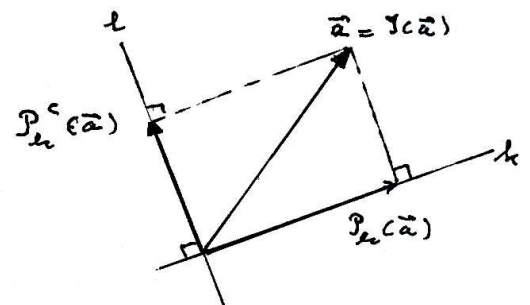
$$\mathcal{P}_k(\vec{a}) + \mathcal{P}_k^c(\vec{a}) = \vec{a}$$

Voor de identieke transformatie $\mathcal{I}$ geldt $\mathcal{I}(\vec{a}) = \vec{a}$, dus

$$\mathcal{P}_k(\vec{a}) + \mathcal{P}_k^c(\vec{a}) = \mathcal{I}(\vec{a})$$

Omdat dit voor iedere vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt wordt dit geschreven als

$$\mathcal{P}_k + \mathcal{P}_k^c = \mathcal{I}$$



□

Voorbeeld

Gegeven: De lijn $k: x_2 = \frac{2}{3} \cdot x_1$ in het standaard assenstelsel (x_1, x_2)

Gevraagd

- a) De matrix van de projectie $\mathcal{P}_k$
- b) De matrix van het complement $\mathcal{P}_k^c$ van deze projectie

Oplossing

- a) De vector $\vec{k} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ is gericht volgens de lijn k met $|\vec{k}|^2 = 3^2 + 2^2 = 13$. Voor de matrix van de projectie op k geldt daarom

$$P_k = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

- b) Uit de stelling volgt $\mathcal{P}_k^c = I - \mathcal{P}_k$. Dit betekent voor de bijbehorende matrices

$$\begin{aligned} P_k^c &= I - P_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} - \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In $\mathbb{R}^2$ kan de *spiegeling* in een lijn worden gezien als het *verschil* van de *projectie* op die lijn en het *complement* van die projectie.

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ is de spiegeling S_k in een lijn k het verschil van de projectie $\mathcal{P}_k$ in die lijn en het complement de projectie $\mathcal{P}_k^c$

$$S_k = \mathcal{P}_k - \mathcal{P}_k^c$$

Bewijs

In de vlakke figuur rechts is de lijn k gegeven en ook de lijn l loodrecht op k , dus $l \perp k$. De vector $\overrightarrow{OA'} = S_k(\vec{a})$ is de gespiegelde van de vector $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ in de lijn k .

De positievector $\vec{a}$ wordt ontbonden volgens deze twee lijnen: $\vec{a} = \mathcal{P}_k(\vec{a}) + \mathcal{P}_k^c(\vec{a})$.

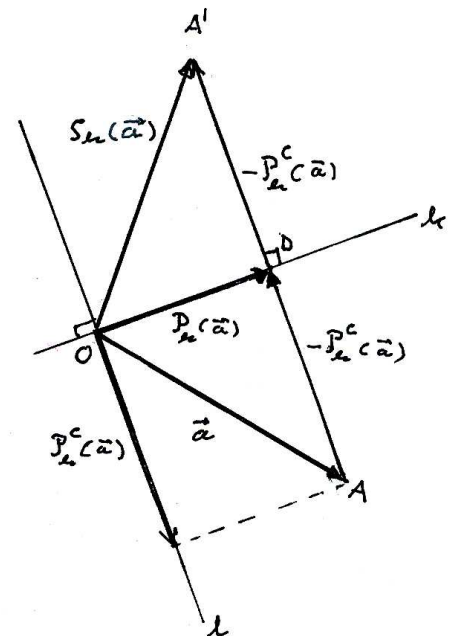
In de figuur rechts is te zien dat $\overrightarrow{OD} = \mathcal{P}_k(\vec{a})$ en $\overrightarrow{DA'} = -\mathcal{P}_k^c(\vec{a})$.

Omdat $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA'}$ volgt hieruit

$$S_k(\vec{a}) = \mathcal{P}_k(\vec{a}) - \mathcal{P}_k^c(\vec{a})$$

Omdat dit voor iedere vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt wordt dit geschreven als

$$S_k = \mathcal{P}_k - \mathcal{P}_k^c$$



□

Voorbeeld

Gegeven: De lijn $k: x_2 = \frac{2}{3} \cdot x_1$ in het standaard assenstelsel (x_1, x_2)

Gevraagd: De matrix van de spiegeling $\mathcal{S}_k$

Oplossing:

Voor de matrices van de projectie $\mathcal{P}_k$ en van het complement $\mathcal{P}_k^c$ geldt volgens het vorige voorbeeld

$$P_k = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad P_k^c = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Het verband $\mathcal{S}_k = \mathcal{P}_k - \mathcal{P}_k^c$ betekent voor de matrices:

$$S_k = P_k - P_k^c = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Samenvatting

Voor het berekenen van de matrix van een spiegeling $\mathcal{S}_k$ in een lijn k in $\mathbb{R}^2$ hebben we dus volgens de volgende procedure gewerkt

- 1) Bereken voor de projectie $\mathcal{P}_k$ de matrix met behulp van

$$P_k = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & k_2^2 \end{pmatrix}$$

- 2) Bereken de matrix P_k^c van het complement $\mathcal{P}_k^c$ van deze projectie met behulp van

$$P_k^c = I - P_k$$

- 3) Bereken tenslotte de matrix S_k van de spiegeling met behulp van

$$S_k = P_k - P_k^c$$

Opmerking: Vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn

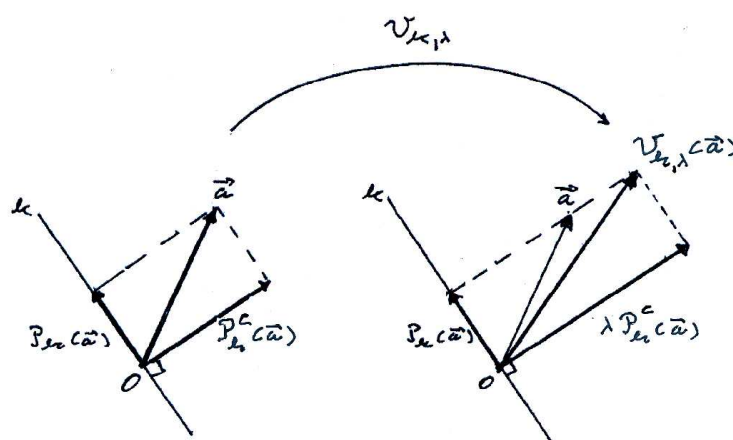
Niet alleen de spiegeling in $\mathbb{R}^2$ in een lijn k kan worden geformuleerd met behulp van de projectie in die lijn en het complement van die projectie, maar ook de *vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn k met een factor λ* .

- In de figuur rechts wordt de vector $\vec{a}$ ontbonden naar een component $\mathcal{P}_k(\vec{a})$ langs de lijn k en een component $\mathcal{P}_k^c(\vec{a})$

loodrecht op die lijn, dus $\vec{a} = \mathcal{P}_k(\vec{a}) + \mathcal{P}_k^c(\vec{a})$

- Bij vermenigvuldiging van een vector $\vec{a}$ ten opzichte van de lijn k met een factor λ , notatie $\mathcal{V}_{k,\lambda}(\vec{a})$, blijft de component $\mathcal{P}_k(\vec{a})$ langs de lijn k onveranderd en wordt de component $\mathcal{P}_k^c(\vec{a})$ loodrecht op de lijn k met een scalar λ vermenigvuldigd. Aldus

$$\mathcal{V}_{k,\lambda}(\vec{a}) = \mathcal{P}_k(\vec{a}) + \lambda \mathcal{P}_k^c(\vec{a})$$



Omdat dit voor iedere vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt kunnen we de vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn k als volgt definiëren

Definitie

In $\mathbb{R}^2$ wordt de vermenigvuldiging $\mathcal{V}_{k,\lambda}$ ten opzichte van een lijn k met een factor λ vanuit de projectie $\mathcal{P}_k$ in deze lijn gegeven door

$$\mathcal{V}_{k,\lambda} = \mathcal{P}_k + \lambda \mathcal{P}_k^c$$

Opmerking

In $\mathbb{R}^2$ geldt voor het berekenen van de matrix behorend bij de vermenigvuldiging $\mathcal{V}_{k,\lambda}$ ten opzichte van een lijn k eenzelfde procedure in drie stappen als die voor de matrix van de spiegeling $\mathcal{S}_k$ in een lijn k .

Aanhangsel 1: De matrix van een spiegeling vanuit de beelden van de standaard basis

Bij het bewijs van de volgende stelling wordt de matrix van een spiegeling $\mathcal{S}_k$ in $\mathbb{R}^2$ direct afgeleid vanuit de spiegelbeelden $\mathcal{S}_k(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{S}_k(\vec{e}_2)$ van de standaard basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ wordt de spiegeling $\mathcal{S}_k$ van vectoren ten opzichte van de lijn k vastgelegd door de matrix

$$\mathcal{S}_k = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 - k_2^2 & 2k_1k_2 \\ 2k_1k_2 & k_2^2 - k_1^2 \end{pmatrix}$$

hierbij is $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ een vector langs de lijn k .

Bewijs

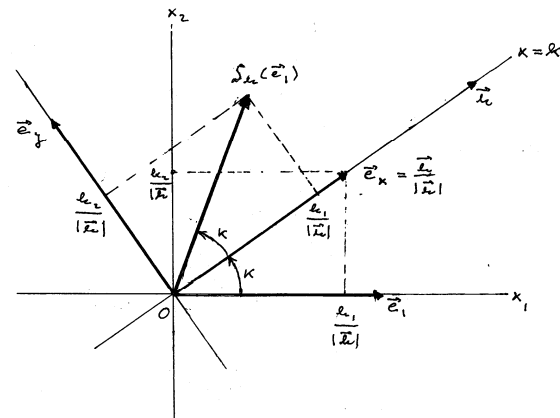
We leggen een orthonormaal assenstelsel (x, y) aan met de x -as gericht volgens de vector $\vec{k}$, dus volgens de spiegellijn k . De eenheidsvector volgens de x -as is daarom $\vec{e}_x = \frac{1}{|\vec{k}|} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$.

De y -as is gericht volgens de nevenvector van $\vec{e}_x$ en dus geldt voor de eenheidsvector langs de y -as $\vec{e}_y = \vec{e}_x^* = \frac{1}{|\vec{k}|} \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 \end{pmatrix}$

Vanwege de spiegeling zijn de kentallen van het spiegelbeeld $\mathcal{S}_k(\vec{e}_1)$ ten opzichte van het assenstelsel (x, y) gelijk aan de

kentallen van de vector $\vec{e}_x$ ten opzichte van het standaard assenstelsel (x_1, x_2) . Derhalve

$$\mathcal{S}_k(\vec{e}_1) = \frac{k_1}{|\vec{k}|} \vec{e}_x + \frac{k_2}{|\vec{k}|} \vec{e}_y = \frac{k_1}{|\vec{k}|} \cdot \frac{1}{|\vec{k}|} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \frac{k_2}{|\vec{k}|} \cdot \frac{1}{|\vec{k}|} \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 - k_2^2 \\ 2k_1k_2 \end{pmatrix}$$

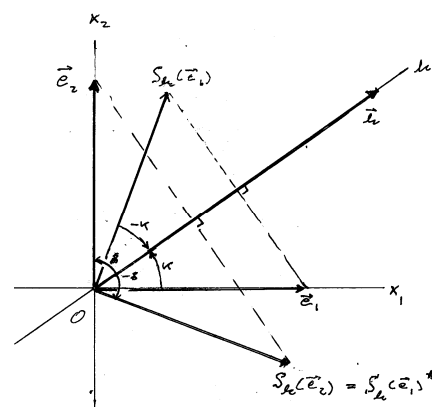


Voor de hoek van $\vec{e}_1$ naar $\vec{e}_2$ geldt $\angle(\vec{e}_1 \rightarrow \vec{e}_2) = \kappa + \delta = 90^\circ$ en voor de hoek van $\mathcal{S}_k(\vec{e}_1)$ naar $\mathcal{S}_k(\vec{e}_2)$ geldt $\angle(\mathcal{S}_k(\vec{e}_1) \rightarrow \mathcal{S}_k(\vec{e}_2)) = -\kappa - \delta = -90^\circ$. Dit betekent dat $\mathcal{S}_k(\vec{e}_2)$ minus de nevenvector van $\mathcal{S}_k(\vec{e}_1)$ is, met als gevolg

$$\mathcal{S}_k(\vec{e}_2) = -\mathcal{S}_k(\vec{e}_1)^* = -\frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 - k_2^2 \\ 2k_1k_2 \end{pmatrix}^* = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} 2k_1k_2 \\ k_2^2 - k_1^2 \end{pmatrix}$$

Resultaat

$$\mathcal{S}_k = [\mathcal{S}_k(\vec{e}_1), \mathcal{S}_k(\vec{e}_2)] = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 - k_2^2 & 2k_1k_2 \\ 2k_1k_2 & k_2^2 - k_1^2 \end{pmatrix}$$



□

Opmerkingen

- 1) In de opgave III.4.8 wordt uitgewerkt hoe men vanuit de formule in deze stelling tot de relatie $\mathcal{S}_k = \mathcal{P}_k - \mathcal{P}_k^c$ kan komen.
- 2) In de opgaven III.4.6 en III.4.8 wordt een andere afleiding van deze formule van de spiegelmatrix gegeven. Hierbij worden de somregels voor cosinus en sinus gebruikt (zie hiervoor bijv. opgave III.1.8).

Aanhangsel 2: Optelling en schaling van lineaire transformaties

Voor de volledigheid volgen hier de formele definities van optelling en schaling van lineaire transformaties. De daarna volgende stellingen geven aan dat bij optelling en schaling van lineaire transformaties er sprake is van behoud van lineariteit van de transformatie.

Definitie

In $\mathbb{R}^2$ heet een transformatie $\mathcal{A}$ de *som* van twee lineaire transformaties $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ als voor alle vectoren $\vec{a}$ geldt

$$\mathcal{A}(\vec{a}) = \mathcal{M}(\vec{a}) + \mathcal{N}(\vec{a})$$

Voor de somtransformatie $\mathcal{A}$ wordt de notatie $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ gebruikt

Definitie

In $\mathbb{R}^2$ heet een transformatie $\mathcal{A}$ een *schaling* met een factor μ van een lineaire transformatie $\mathcal{M}$ als voor alle vectoren $\vec{a}$ geldt

$$\mathcal{A}(\vec{a}) = \mu \mathcal{M}(\vec{a})$$

Voor de schaaltransformatie $\mathcal{A}$ wordt de notatie $\mu \mathcal{M}$ gebruikt

Stelling

De som van twee lineaire transformaties in $\mathbb{R}^2$ is een lineaire transformatie

Bewijs

Laat $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ lineaire transformaties in $\mathbb{R}^2$ zijn. Er moet dan worden bewezen worden

$$\begin{aligned} (\mathcal{M} + \mathcal{N})(\vec{a} + \vec{b}) &= (\mathcal{M} + \mathcal{N})(\vec{a}) + (\mathcal{M} + \mathcal{N})(\vec{b}) && \text{behoud optelling} \\ (\mathcal{M} + \mathcal{N})(\lambda \vec{a}) &= \lambda (\mathcal{M} + \mathcal{N})(\vec{a}) && \text{behoud schaling} \end{aligned}$$

Behoud optelling

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{M} + \mathcal{N})(\vec{a} + \vec{b}) &= \mathcal{M}(\vec{a} + \vec{b}) + \mathcal{N}(\vec{a} + \vec{b}) && \text{definitie optelling } \mathcal{M} + \mathcal{N} \\
 &= \mathcal{M}(\vec{a}) + \mathcal{M}(\vec{b}) + \mathcal{N}(\vec{a}) + \mathcal{N}(\vec{b}) && \text{behoud optelling van } \mathcal{M} \text{ en van } \mathcal{N} \\
 &= \mathcal{M}(\vec{a}) + \mathcal{N}(\vec{a}) + \mathcal{M}(\vec{b}) + \mathcal{N}(\vec{b}) \\
 &= (\mathcal{M} + \mathcal{N})(\vec{a}) + (\mathcal{M} + \mathcal{N})(\vec{b}) && \text{definitie optelling } \mathcal{M} + \mathcal{N}
 \end{aligned}$$

Behoud schaling

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{M} + \mathcal{N})(\lambda \vec{a}) &= \mathcal{M}(\lambda \vec{a}) + \mathcal{N}(\lambda \vec{a}) && \text{definitie optelling } \mathcal{M} + \mathcal{N} \\
 &= \lambda \mathcal{M}(\vec{a}) + \lambda \mathcal{N}(\vec{a}) && \text{behoud schaling van } \mathcal{M} \text{ en van } \mathcal{N} \\
 &= \lambda(\mathcal{M}(\vec{a}) + \mathcal{N}(\vec{a})) \\
 &= \lambda(\mathcal{M} + \mathcal{N})(\vec{a}) && \text{definitie optelling } \mathcal{M} + \mathcal{N}
 \end{aligned}$$

□

Stelling

De schaling van een lineaire transformaties in $\mathbb{R}^2$ is een lineaire transformatie

Bewijs

Laat $\mathcal{M}$ een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ zijn die met een scalar μ wordt geschaald. Er moet dan worden bewezen worden

$$\begin{aligned}
 \mu \mathcal{M}(\vec{a} + \vec{b}) &= \mu \mathcal{M}(\vec{a}) + \mu \mathcal{M}(\vec{b}) && \text{behoud optelling} \\
 \mu \mathcal{M}(\lambda \vec{a}) &= \lambda \mu \mathcal{M}(\vec{a}) && \text{behoud schaling}
 \end{aligned}$$

Behoud optelling

$$\begin{aligned}
 \mu \mathcal{M}(\vec{a} + \vec{b}) &= \mu(\mathcal{M}(\vec{a}) + \mathcal{M}(\vec{b})) && \text{behoud optelling van } \mathcal{M} \\
 &= \mu \mathcal{M}(\vec{a}) + \mu \mathcal{M}(\vec{b})
 \end{aligned}$$

Behoud schaling

$$\begin{aligned}
 \mu \mathcal{M}(\lambda \vec{a}) &= \mu \lambda \mathcal{M}(\vec{a}) && \text{behoud schaling van } \mathcal{M} \\
 &= \lambda \mu \mathcal{M}(\vec{a})
 \end{aligned}$$

□

Opmerking

Het is min of meer vanzelfsprekend dat deze twee stellingen leiden tot de optelling en de schaling van de matrices behorend bij deze lineaire transformaties. Om dit formeel aan te tonen is echter een wat vervelende klus die we hier achterwege laten.

Opgaven

III.4.1 Bereken de matrix die in $\mathbb{R}^2$ de spiegeling $\mathcal{S}_k$ in een lijn $k : x_2 = -\frac{3}{4}x_1$ vastlegt

III.4.2 De vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ondergaat een spiegeling $\mathcal{S}_k$ in een lijn k door de oorsprong die een hoek van 30° maakt met de x_1 -as

a) Bereken de exacte kentallen van het beeld $\mathcal{S}_k(\vec{a})$

Bij een spiegeling verandert de lengte van een vector niet.

b) Toon door berekening van de exacte waarden van $|\vec{a}|$ en van $|\mathcal{S}_k(\vec{a})|$ aan dat dit ook nu het geval is.

III.4.3 a) Verklaar meetkundig dat bij de spiegeling $\mathcal{S}_{x_2=x_1}$ in $\mathbb{R}^2$ voor iedere vector

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ geldt: } \mathcal{S}_{x_2=x_1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

b) Bereken met behulp van a) $\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{e}_2)$ en geef de matrix $S_{x_2=x_1}$ behorend bij deze spiegeling

III.4.4 Gegeven in $\mathbb{R}^2$ de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ en de lijn $k: x_2 = -\frac{1}{3}x_1$

a) Bereken de matrix behorend bij de projectie $\mathcal{P}_k$ op de lijn k .

b) Bereken de matrix behorend bij $\mathcal{V}_{k,3}$, de vermenigvuldiging ten opzichte van de lijn k met een factor 3.

c) Bereken ook de kentallen van het $\mathcal{V}_{k,3}$ -beeld van de vector $\vec{a}$.

III.4.5 Verklaar dat in $\mathbb{R}^2$ geldt $\mathcal{V}_{k,-1} = \mathcal{S}_k$ en dat geldt $\mathcal{V}_{k,0} = \mathcal{P}_k$

III.4.6 In deze opgave bewijzen we een stelling waarin een andere uitdrukking wordt gegeven voor de matrix van een spiegeling in een lijn k . In de volgende opgave wordt deze matrix met behulp van de somregels voor cosinus en sinus omgewerkt naar de omgewerkte uitdrukking voor de spiegelmatrix in aanhangsel 1.

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ wordt de spiegeling $\mathcal{S}_k$ van vectoren ten opzichte van de lijn k vastgelegd door de matrix

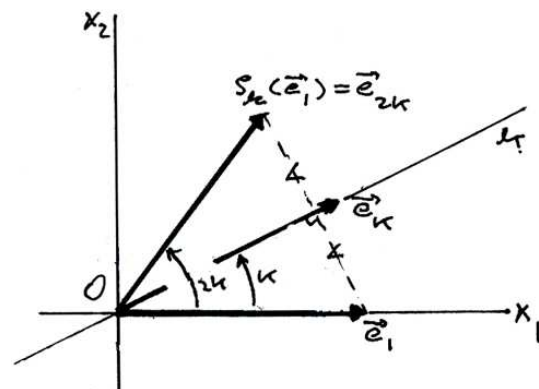
$$S_\kappa = \begin{pmatrix} \cos 2\kappa & \sin 2\kappa \\ \sin 2\kappa & -\cos 2\kappa \end{pmatrix}$$

hierbij is κ de richtinghoek van een eenheidsvector $\vec{e}_\kappa = \begin{pmatrix} \cos \kappa \\ \sin \kappa \end{pmatrix}$ langs de lijn k .

a) De hoek κ is de georiënteerde hoek van de vector $\vec{e}_1$ naar de eenheidsvector $\vec{e}_\kappa$, die gericht is langs de lijn k .

Verklaar dat voor het spiegelbeeld $\mathcal{S}_k(\vec{e}_1)$ van de basisvector $\vec{e}_1$ geldt

$$\mathcal{S}_k(\vec{e}_1) = \vec{e}_{2\kappa} = \begin{pmatrix} \cos 2\kappa \\ \sin 2\kappa \end{pmatrix}$$



- b) Verklaar dat geldt $\mathcal{S}_k(\vec{e}_2) = -\mathcal{S}_k(\vec{e}_1)^*$ en toon hiermee aan dat

$$\mathcal{S}_k(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \sin 2\kappa \\ -\cos 2\kappa \end{pmatrix}$$

- c) Gebruik $S_k = [\mathcal{S}_k(\vec{e}_1), \mathcal{S}_k(\vec{e}_2)]$ om bovenstaande uitdrukking voor de spiegelmatrix af te leiden

III.4.7 Volgens de vorige opgave geldt in $\mathbb{R}^2$ voor de matrix van een spiegeling in een lijn k

$$S_\kappa = \begin{pmatrix} \cos 2\kappa & \sin 2\kappa \\ \sin 2\kappa & -\cos 2\kappa \end{pmatrix}$$

Volgens opgave III.1.8 gelden als somregels voor cosinus en sinus

$$\cos 2\kappa = \cos^2 \kappa - \sin^2 \kappa$$

$$\sin 2\kappa = 2 \cos \kappa \sin \kappa$$

- a) De vector $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ met richtinghoek κ , is gericht langs de lijn k .

De eenheidsvector $\vec{e}_k = \frac{1}{|\vec{k}|} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ in de richting van de vector in de richting $\vec{k}$ is

gelijk aan de eenheidsvector $\vec{e}_\kappa = \begin{pmatrix} \cos \kappa \\ \sin \kappa \end{pmatrix}$ met richtinghoek κ .

Druk $\cos \kappa$ uit in k_1 en $|\vec{k}|$, en druk $\sin \kappa$ uit in k_2 en $|\vec{k}|$.

- b) Toon met behulp het bovenstaande aan dat geldt

$$S_\kappa = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 - k_2^2 & 2k_1k_2 \\ 2k_1k_2 & k_2^2 - k_1^2 \end{pmatrix}$$

III.4.8 Voor de matrix van de projectie in een lijn k geldt in $\mathbb{R}^2$

$$P_k = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 & k_1k_2 \\ k_1k_2 & k_2^2 \end{pmatrix}$$

- a) De vector $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ ligt langs de lijn k . De nevenvector $\vec{k}^* = \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op de lijn k . Door in de matrix P_k overal k_1 te vervangen door $-k_2$ en overal k_2 door k_1 wordt de matrix P_k^c van het complement van de projectie verkregen. Geef deze matrix P_k^c in termen van de kentallen van $\vec{k}$

- b) Toon met behulp van de matrices P_k en P_k^c aan dat geldt $\mathcal{P}_k + \mathcal{P}_k^c = \mathcal{I}$

- d) Toon met behulp van de matrices P_k en P_k^c aan dat geldt en de matrix voor de spiegeling in lijn k uit aanhangsel 1 (of uit opgave II.4.7) dat geldt

$$\mathcal{S}_k = \mathcal{P}_k - \mathcal{P}_k^c$$

III.5 Gauss-Jordan kolommethode in $\mathbb{R}^2$ voor lineaire transformaties

In veel situaties is van een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ het beeld van twee onafhankelijke vectoren direct bekend terwijl de beelden van de standaardbasis niet zo eenvoudig zijn te vinden.

Voorbeeld

In opgave III.4.1 wordt de matrix gevraagd die in $\mathbb{R}^2$ de spiegeling $\mathcal{S}_k$ in een lijn

$k: x_2 = -\frac{3}{4}x_1$ vastlegt. Er is een procedure van drie stappen gebruikt om de matrix

$\mathcal{S}_k = [\mathcal{S}_k(\vec{e}_1), \mathcal{S}_k(\vec{e}_2)]$ te vinden vanuit de matrix van de projectie op k .

Van de volgende vectoren is het beeld echter direct bekend:

Alle vectoren $\vec{v}$ die *langs* de lijn k liggen blijven bij spiegeling ongewijzigd:

$$\mathcal{S}_k(\vec{v}) = \vec{v}$$

Mogelijkheden voor de vector $\vec{v}$ zijn: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Alle vectoren $\vec{w}$ die *loodrecht* de lijn k staan zijn na spiegeling tegengesteld gericht

$$\mathcal{S}_k(\vec{w}) = -\vec{w}$$

Mogelijkheden voor de vector $\vec{w}$ zijn: $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

De zogenoemde *Gauss-Jordan methode* is een procedure die vanuit dergelijke direct bekende beelden altijd de beelden oplevert van de standaard basis, in dit geval levert deze methode dus vanuit $\mathcal{S}_k(\vec{v})$ en $\mathcal{S}_k(\vec{w})$ de beelden $\mathcal{S}_k(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{S}_k(\vec{e}_2)$

Aan deze Gauss-Jordan methode liggen de volgende twee stellingen ten grondslag, die een generalisatie zijn van de eerste twee stellingen uit §III.2. Daar was sprake van de standaard basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ en van de beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$. Hier is sprake van een niet-standaard basis $\vec{v}, \vec{w}$ en van de beelden $\mathcal{L}(\vec{v})$ en $\mathcal{L}(\vec{w})$.

In essentie wijken de bewijzen hier niet af van de bewijzen in §III.2

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ kan bij een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ vanuit de beelden $\mathcal{L}(\vec{v})$ en $\mathcal{L}(\vec{w})$ van twee onafhankelijke vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ het beeld van iedere andere vector $\vec{a} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}$ worden berekend volgens

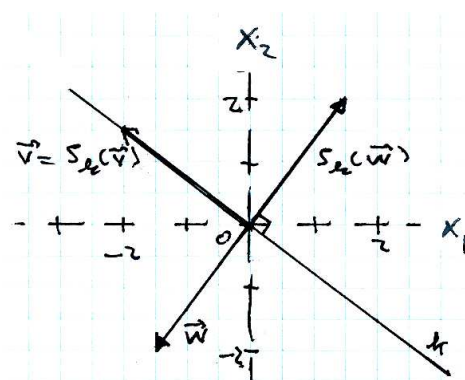
$$\mathcal{L}(\vec{a}) = \lambda_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \lambda_2 \mathcal{L}(\vec{w})$$

Bewijs

De lineariteit van $\mathcal{L}$ levert.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{a}) &= \mathcal{L}(\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}) \\ &= \mathcal{L}(\lambda_1 \vec{v}) + \mathcal{L}(\lambda_2 \vec{w}) && \text{behoud vectoroptelling} \\ &= \lambda_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \lambda_2 \mathcal{L}(\vec{w}) && \text{behoud schaling} \end{aligned}$$

□



Stelling

Als in $\mathbb{R}^2$ bij een transformatie $\mathcal{L}$ vanuit de beelden $\mathcal{L}(\vec{v})$ en $\mathcal{L}(\vec{w})$ van twee onafhankelijke vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ het beeld van iedere andere vector $\vec{a} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}$ worden berekend volgens

$$\mathcal{L}(\vec{a}) = \lambda_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \lambda_2 \mathcal{L}(\vec{w})$$

dan is de transformatie $\mathcal{L}$ lineair.

Bewijs

Voor het behoud van de vectoroptelling beschouwen de vectoren $\vec{a} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}$ en

$\vec{b} = \mu_1 \vec{v} + \mu_2 \vec{w}$. Voor hun som geldt

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} + \mu_1 \vec{v} + \mu_2 \vec{w} = \lambda_1 \vec{v} + \mu_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} + \mu_2 \vec{w} \\ &= (\lambda_1 + \mu_1) \vec{v} + (\lambda_2 + \mu_2) \vec{w}\end{aligned}$$

Gevolg

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{a} + \vec{b}) &= (\lambda_1 + \mu_1) \mathcal{L}(\vec{v}) + (\lambda_2 + \mu_2) \mathcal{L}(\vec{w}) \\ &= \lambda_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \mu_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \lambda_2 \mathcal{L}(\vec{w}) + \mu_2 \mathcal{L}(\vec{w}) \\ &= \lambda_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \lambda_2 \mathcal{L}(\vec{w}) + \mu_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \mu_2 \mathcal{L}(\vec{w}) \\ &= \mathcal{L}(\vec{a}) + \mathcal{L}(\vec{b})\end{aligned}$$

Voor het behoud van schaling gebruiken we $\delta \vec{a} = \delta(\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}) = \delta \lambda_1 \vec{v} + \delta \lambda_2 \vec{w}$

Gevolg

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\delta \vec{a}) &= \delta \lambda_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \delta \lambda_2 \mathcal{L}(\vec{w}) \\ &= \delta(\lambda_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \lambda_2 \mathcal{L}(\vec{w})) \\ &= \delta \mathcal{L}(\vec{a})\end{aligned}$$

□

Stel van de niet-standaard basis $\vec{v}, \vec{w}$ in $\mathbb{R}^2$ zijn de beelden $\mathcal{L}(\vec{v})$ en $\mathcal{L}(\vec{w})$ van een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ bekend

De essentie van de Gauss-Jordan methode is nu om in een paar stappen zodanige scalars γ_1 en γ_2 te bepalen dat uiteindelijk de vector $\vec{e}_1 = \gamma_1 \vec{v} + \gamma_2 \vec{w}$ van de standaardbasis ontstaat en daarmee de vector $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \gamma_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \gamma_2 \mathcal{L}(\vec{w})$ en om in een paar stappen zodanige scalars δ_1 en δ_2 te vinden dat uiteindelijk de vector $\vec{e}_2 = \delta_1 \vec{v} + \delta_2 \vec{w}$ van de standaardbasis ontstaat en daarmee de vector $\mathcal{L}(\vec{e}_2) = \delta_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \delta_2 \mathcal{L}(\vec{w})$. Dan is de matrix $L = [\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)]$ bekend.

Voorbeeld

We lichten dit nader toe aan de hand van het bovenstaande voorbeeld in $\mathbb{R}^2$ van spiegeling in $k: x_2 = -\frac{3}{4}x_1$. Van de volgende onafhankelijke vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ zijn de beelden bekend

$$\text{Voor } \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{geldt} \quad S_k \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Voor } \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{geldt} \quad S_k \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- We vormen eerst een vector in de richting van de vector $\vec{e}_1$ van de standaard basis

De combinatie $4\vec{v} + 3\vec{w} = 4\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix}$ is zo'n vector.

Dit levert $S_k\begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} = 4S_k\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 3S_k\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix}$

en dus $S_k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix}$

- We vormen vervolgens een vector in de richting van de vector $\vec{e}_2$ van de standaard basis

De combinatie $3\vec{v} - 4\vec{w} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \end{pmatrix}$ is zo'n vector.

Dit levert $S_k\begin{pmatrix} 0 \\ -25 \end{pmatrix} = 3S_k\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} - 4S_k\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$

en dus $S_k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -24 \\ -7 \end{pmatrix}$

- Resultaat

$$S_k = [\mathcal{S}_k(\vec{e}_1), \mathcal{S}_k(\vec{e}_2)] = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$$

Dit is de matrix die we eerder in opgave III.4.1 hebben gevonden

Om de Gauss-Jordan methode voor een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ overzichtelijker te maken wordt een 4×2 matrix gevormd met behulp van de matrix $[\vec{v}, \vec{w}]$ van de gegeven originelen boven en de matrix $[\mathcal{L}(\vec{v}), \mathcal{L}(\vec{w})]$ van de gegeven beelden onder

$$\begin{bmatrix} [\vec{v}, \vec{w}] \\ [\mathcal{L}(\vec{v}), \mathcal{L}(\vec{w})] \end{bmatrix}$$

In het geval van het voorbeeld in $\mathbb{R}^2$ met de spiegeling in $k: x_2 = -\frac{3}{4}x_1$ levert dit

$$\begin{array}{l} \text{Origineel} \\ \text{Beeld} \end{array} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Voorbeeld van de Gauss-Jordan methode met de 4×2 matrix

We bekijken weer in $\mathbb{R}^2$ de spiegeling in $k: x_2 = -\frac{3}{4}x_1$

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \end{bmatrix} & \xrightarrow[\text{II}' = 3\text{I} - 4\text{II}]{\text{I}' = 4\text{I} + 3\text{II}} & \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{II}'' = -\frac{1}{25}\text{II}']{\text{I}'' = \frac{1}{25}\text{I}'} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ \text{I} \quad \text{II} & & \text{I}' \quad \text{II}' & & \text{I}'' \quad \text{II}'' \end{array}$$

Toelichting op de berekening:

De kolom $I = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ wordt met de kolom $II = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ gecombineerd zodanig dat er een nieuwe

kolom I' ontstaat waarvan het *tweede* kentel 0 is.

$$I' = 4I + 3II = 4 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 7 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Verder wordt de kolom I gecombineerd met de kolom II zodanig dat er een nieuwe kolom II' ontstaat waarvan het *eerste* kentel 0 is

$$II' = 3I - 4II = 3 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 24 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bij de eerste pijl wordt deze combinatie van kolommen vermeld.

De *hier gegeven toelichting* kan worden gezien als een *berekening op kladpapier*. Wordt de Gauss-Jordan methode gebruikt bij de uitwerking van een opgave dan hoeft alleen het bovenstaande schema te worden opgeschreven en niet de nadere toelichting.

Bij de tweede pijl wordt aangegeven hoe uit de kolommen I' en II' de kolommen I'' en II'' ontstaan die bovenin de eenheidsvectoren bevatten. De onderste 2×2 matrix is dan de gevraagde matrix voor de spiegeling

$$S_k = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$$

De grote kracht van de Gauss-Jordan kolommethode is dat we nu één procedure hebben volgens welke we in $\mathbb{R}^2$ altijd de matrix van een lineaire transformatie kunnen vinden.

We illustreren dit aan de hand van de *scheve projectie*. In de opgaven komen opnieuw lineaire transformaties als spiegeling, glijdschuiving en loodrechte projectie aan de orde.

Voorbeeld: Een scheve projectie

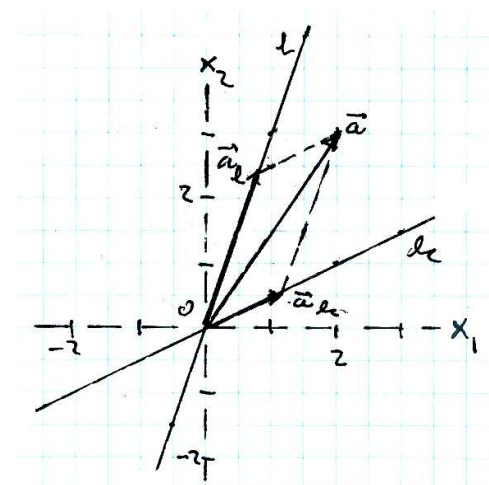
Gegeven:

De lijnen $k: x_2 = \frac{1}{2}x_1$ en $l: x_2 = 3x_1$ in een standaard assenstelsel (x_1, x_2)

Iedere vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt ontbonden volgens deze lijn k en l , waarbij $\vec{a}_k$ de ontbondene is langs k en waarbij $\vec{a}_l$ de ontbondene is langs l .

De *scheve projectie* $\mathcal{P}_{k,\parallel l}$ van een vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ op de lijn k evenwijdig aan de lijn l wordt gedefinieerd door

$$\mathcal{P}_{k,\parallel l}(\vec{a}) = \vec{a}_k$$



Gevraagd: De matrix $P_{k,\|l}$ van deze scheve projectie

Oplossing:

De volgende onafhankelijke vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$, gericht resp. langs de lijnen k en l , geldt

voor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ is het beeld $P_{k,\|l} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

voor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ is het beeld $P_{k,\|l} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

In termen van 4×2 matrices geldt nu

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ I & II \end{bmatrix} & \xrightarrow[\begin{matrix} I' = 3I - 1II \\ II' = 1I - 2II \end{matrix}]{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}} & \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ I' & II' \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} I'' = \frac{1}{5}I' \\ II'' = -\frac{1}{5}II' \end{matrix}]{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ I'' & II'' \end{bmatrix} \end{array}$$

De gevraagde matrix is dus

$$P_{k,\|l} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Controle:

$$P_{k,\|l} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad P_{k,\|l} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Opmerking

Naast de hier behandelde Gauss-Jordan methode in $\mathbb{R}^2$ voor *kolommen* bestaat er ook een Gauss-Jordan methode in $\mathbb{R}^2$ voor *rijen*. Deze laatste methode vergt echter de nodige voorbereiding in termen van zogenoemde lineaire stelsels vergelijkingen. Beide methodes kunnen worden aangepast naar hogere dimensies dus naar $\mathbb{R}^n$ met $n > 2$.

Aanhangsel: Lineariteit en combinatie van kolommen

Aan de basis van de Gauss-Jordan methode in $\mathbb{R}^2$ ligt de lineariteit van de transformatie $\mathcal{L}$. In het kort, en iets anders geformuleerd, zijn de stellingen aan het begin van deze paragraaf (zie ook opgave III.5.6)

$$\lambda_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \lambda_2 \mathcal{L}(\vec{w}) = \mathcal{L}(\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w})$$

Dit betekent voor lineaire combinaties van de kolommen I en II in de 4×2 matrix

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} [\vec{v}, \vec{w}] \\ [\mathcal{L}(\vec{v}), \mathcal{L}(\vec{w})] \end{bmatrix} & \xrightarrow[\begin{matrix} I' = \lambda_1 I + \lambda_2 II \\ II' = \mu_1 I + \mu_2 II \end{matrix}]{\begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}, \mu_1 \vec{v} + \mu_2 \vec{w} \\ [\lambda_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \lambda_2 \mathcal{L}(\vec{w}), \mu_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \mu_2 \mathcal{L}(\vec{w})] \end{pmatrix}} & \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}, \mu_1 \vec{v} + \mu_2 \vec{w} \\ [\lambda_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \lambda_2 \mathcal{L}(\vec{w}), \mu_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \mu_2 \mathcal{L}(\vec{w})] \end{pmatrix} \\ I' & II' \end{bmatrix} \\ I & II & \\ & & = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}, \mu_1 \vec{v} + \mu_2 \vec{w} \\ [\mathcal{L}(\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}), \mathcal{L}(\mu_1 \vec{v} + \mu_2 \vec{w})] \end{pmatrix} \\ I' & II' \end{bmatrix} \end{array}$$

Dus de lineaire combinatie $I' = \lambda_1 I + \lambda_2 II$ levert voor de lineaire combinatie $\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}$ het $\mathcal{L}$ -beeld $\mathcal{L}(\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w})$ van de lineaire combinatie.

Analoog levert de lineaire combinatie $II' = \mu_1 I + \mu_2 II$ voor de lineaire combinatie $\mu_1 \vec{v} + \mu_2 \vec{w}$ het $\mathcal{L}$ -beeld $\mathcal{L}(\mu_1 \vec{v} + \mu_2 \vec{w})$ van de lineaire combinatie.

Opgaven

III.5.1 In $\mathbb{R}^2$ is $\mathcal{P}_k$ de projectie op de lijn $k : x_2 = -\frac{1}{2} \cdot x_1$

De vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ verandert niet door de projectie, dus er geldt $\mathcal{P}_k(\vec{v}) = \vec{v}$

- Verklaar dit meetkundig
- Geef nog enkele vectoren $\vec{s}$ met de eigenschap $\mathcal{P}_k(\vec{s}) = \vec{s}$

De vector $\vec{v}^* = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ is na projectie de nulvector, dus er geldt $\mathcal{P}_k(\vec{v}^*) = \vec{0}$

- Verklaar dit meetkundig
- Geef nog enkele vectoren $\vec{w}$ met de eigenschap $\mathcal{P}_k(\vec{w}) = \vec{0}$

Gebruik de Gauss-Jordan methode bij

- Geef de matrix P_k van deze projectie (en vergelijk eventueel met opgave III.3.4)

III.5.2 Bereken met behulp van de Gauss-Jordan methode de matrix die in $\mathbb{R}^2$ de spiegeling $\mathcal{S}_k$ in een lijn $k : x_2 = -\frac{3}{4} x_1$ vastlegt (en vergelijk eventueel met opgave III.4.1).

(Aanwijzing: Geef aan de hand van een figuur eerst twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ met resp. $\mathcal{S}_k(\vec{v}) = \vec{v}$ en $\mathcal{S}_k(\vec{w}) = -\vec{w}$)

III.5.3 Gegeven in $\mathbb{R}^2$ de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ en de lijn $k : x_2 = -\frac{1}{3} x_1$

- Bereken met behulp van de Gauss-Jordan methode de matrix behorend bij $\mathcal{V}_{k,3}$, de *vermenigvuldiging ten opzichte van de lijn k met een factor 3*.
(Aanwijzing: Een vector $\vec{v}$ langs de lijn k verandert niet door $\mathcal{V}_{k,3}$, een vector $\vec{w}$ loodrecht op de lijn k wordt 3 keer zo lang door $\mathcal{V}_{k,3}$.)
- Bereken ook de kentallen van het $\mathcal{V}_{k,3}$ -beeld van de vector $\vec{a}$.
(Vergelijk eventueel met opgave III.4.4)
- Teken in een standaard assenstelsel de lijn k en de vectoren $\vec{a}$ en $\mathcal{V}_{k,3}(\vec{a})$
- Ontbind de vectoren $\vec{a}$ en $\mathcal{V}_{k,3}(\vec{a})$ langs en loodrecht op de lijn k .
Geef een toelichting op het resultaat.

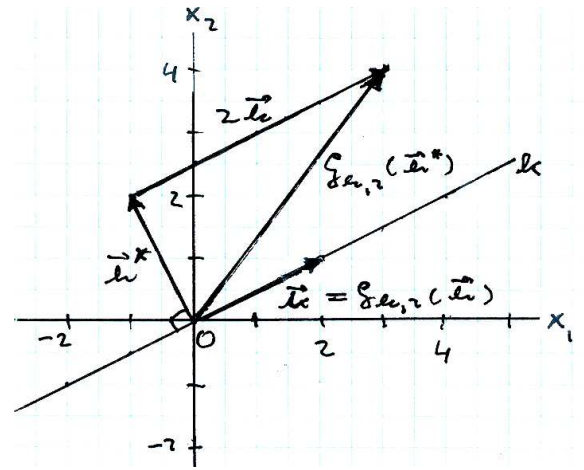
III.5.4 In deze opgave onderzoeken we in $\mathbb{R}^2$ de *glijdschuiving* $\mathcal{G}_{k,2}$ met een factor 2 ten opzichte van de lijn $k : x_2 = 2x_1$

De vector $\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ langs de lijn k blijft bij deze lineaire transformatie *ongewijzigd*

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{G}_{k,2}} \vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bij de nevenvector $\vec{k}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ loodrecht op de lijn k wordt door deze glijdschuiving 2 keer de aan k evenwijdige vector $\vec{k}$ opgeteld

$$\vec{k}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{G}_{k,2}} \vec{k}^* + 2\vec{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



a) Bereken met behulp van de Gauss-Jordan methode de matrix $G_{k,2}$ behorend bij $\mathcal{G}_{k,2}$.

b) Bereken $G_{k,2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $G_{k,2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $G_{k,2} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Geef een toelichting op dit resultaat.

Gegeven is verder de vector $\vec{a} = 3\vec{k}^* - \vec{k}$

c) Verklaar meetkundig dat moet gelden $\mathcal{G}_{k,2}(\vec{a}) = \vec{a} + 6\vec{k}$

d) Controleer het resultaat uit c) door een berekening met de matrix $G_{k,2}$

e) Verklaar meetkundig wat het $\mathcal{G}_{k,2}$ -beeld is van de vector $\vec{b} = -\vec{k}^* - \vec{k}$ is en controleer dit door een berekening met de matrix $G_{k,2}$

III.5.5 Bereken in $\mathbb{R}^2$ de glijdschuiving $\mathcal{G}_{k,-1}$ met een factor -1 ten opzichte van de lijn $k: x_2 = -\frac{1}{3}x_1$

III.5.6 Toon aan in $\mathbb{R}^2$ dat uit de lineariteit van een transformatie $\mathcal{L}$ volgt $\lambda_1 \mathcal{L}(\vec{v}) + \lambda_2 \mathcal{L}(\vec{w}) = \mathcal{L}(\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w})$

III.5.7 Bij het voorbeeld van de scheve projectie is er impliciet vanuit gegaan dat de scheve projectie $\mathcal{P}_{k,||l}$ in $\mathbb{R}^2$ op de lijn k evenwijdig aan de lijn l een lineaire transformatie is. Toon analoog §III.3 met de kopstaart methode van vectoroptelling aan dat dit inderdaad het geval is.

III.6 Lineaire transformaties in $\mathbb{R}^2$ en determinanten

In de paragrafen §I.7 en §I.9 is de oppervlakte $O(\vec{a}, \vec{b})$ van het parallellogram opgespannen door twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ besproken, die op het teken na gelijk bleek te zijn aan de determinant $D(\vec{a}, \vec{b})$ van deze vectoren. De paragraaf hier is zodanig van opzet dat hij bestudeerd kan worden zonder de voorkennis van §I.7 en §I.9.

De centrale vraag in deze paragraaf is wat een gegeven lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ doet met de oppervlakte $O(\vec{a}, \vec{b})$ van het parallellogram opgespannen door twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Nauwkeuriger uitgedrukt is de vraag: wat het verband is tussen de determinanten $D(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b}))$ en $D(\vec{a}, \vec{b})$?

Het antwoord zal blijken te zijn dat, ongeacht het tweetal onafhankelijke vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, de verhouding van deze determinanten steeds hetzelfde getal is, notatie $|\mathcal{L}|$, dus

$$\frac{D(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b}))}{D(\vec{a}, \vec{b})} = |\mathcal{L}|$$

Het wordt nu hoog tijd de determinant te definiëren en het genoemde verband met de oppervlakte te bewijzen.

Definitie

In $\mathbb{R}^2$ is de *determinant* $D(\vec{a}, \vec{b})$ van twee vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ het getal $a_1 b_2 - a_2 b_1$

dat wordt genoteerd als $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, d.w.z.

$$D(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{met} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Opmerkingen

- 1) Er is in $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ sprake van *kruiselings vermenigvuldigen*: Van linksboven naar rechtsonder, dus van a_1 naar b_2 met een + teken; van rechtsonder naar linksboven met een - teken. Vervolgens wordt er opgeteld.
- 2) In §I.7 is de determinant van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ anders gedefinieerd, en wel als het inproduct van de nevenvector $\vec{a}^*$ van $\vec{a}$ met de vector $\vec{b}$, d.w.z. door $D(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle$. Daar is ook bewezen dat de hier gegeven definitie op dezelfde resultaten leidt.

De volgende stelling geeft in $\mathbb{R}^2$ de *meetkundige betekenis* van de *determinant* die reeds op een andere manier in §I.7 is bewezen.

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ is de oppervlakte $O(\vec{a}, \vec{b})$ van het parallellogram opgespannen door twee vectoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gelijk aan de determinant $D(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, op het teken na.

Er geldt bij positieve oriëntatie van de vector $\vec{a}$ naar de vector $\vec{b}$, dus als $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) > 0$:

$$O(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Er geldt bij negatieve oriëntatie van de vector $\vec{a}$ naar de vector $\vec{b}$, dus als $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) < 0$:

$$O(\vec{a}, \vec{b}) = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Het teken van de determinant en het teken van de oriëntatie zijn dus hetzelfde.

Bewijs

We bekijken de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in het eerste kwadrant. Eerst het geval $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) > 0$.

In de figuur rechts geldt

$$O(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1 + b_1)(b_2 + a_2) - O_1 - O_2 - O_3 - O_4 - O_5 - O_6, \text{ met}$$

$$O_1 = \frac{1}{2} a_1 a_2, \quad O_2 = b_1 a_2, \quad \dots$$

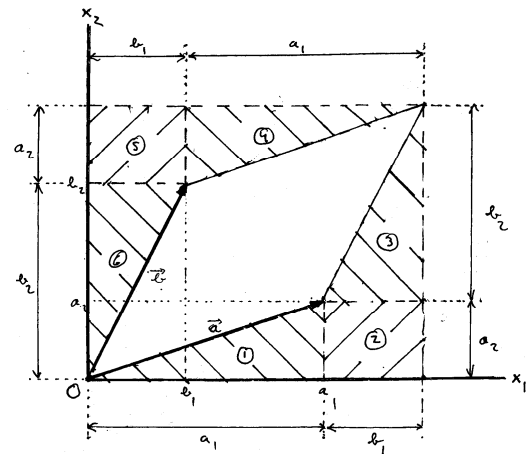
Een korte berekening levert $O(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ (zie opgave III.6.1) en dus

$$O(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

In het geval dat $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) < 0$ zijn in de figuur de vectoren $\vec{a}$

en $\vec{b}$ verwisseld en dan geldt $O(\vec{a}, \vec{b}) = b_1 a_2 - b_2 a_1 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ en dus

$$O(\vec{a}, \vec{b}) = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$



□

Het getal $|\mathcal{L}|$ dat hierboven is genoemd wordt nu gedefinieerd. Het zal een hele klus blijken

te zijn om aan te tonen dat $|\mathcal{L}|$ gelijk is aan de besproken verhouding $\frac{D(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b}))}{D(\vec{a}, \vec{b})}$.

Definitie

De *determinant* van de lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$, notatie $|\mathcal{L}|$, is de determinant van de beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de vectoren van de standaardbasis. Dus

$$|\mathcal{L}| = D(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2))$$

De definitie leidt direct tot de

Stelling

Als een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

dan wordt de determinant $|\mathcal{L}|$ van de lineaire transformatie gegeven door

$$|\mathcal{L}| = \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$$

Bewijs

De definitie $L = [\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)]$ van de matrix van $\mathcal{L}$ betekent $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$

Gevolg $D(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)) = \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$

□

Opmerkingen

1) Vanwege de laatste stelling noteert men ook

$$|L| = \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} \quad \text{i.p.v.} \quad |\mathcal{L}| = \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$$

2) De determinant $|\mathcal{L}|$ van de lineaire transformatie

$\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ heeft op grond van het bovenstaande de volgende meetkundige betekenis:

$|\mathcal{L}|$ is, op het teken na, gelijk aan de oppervlakte opgespannen door de beeldvectoren

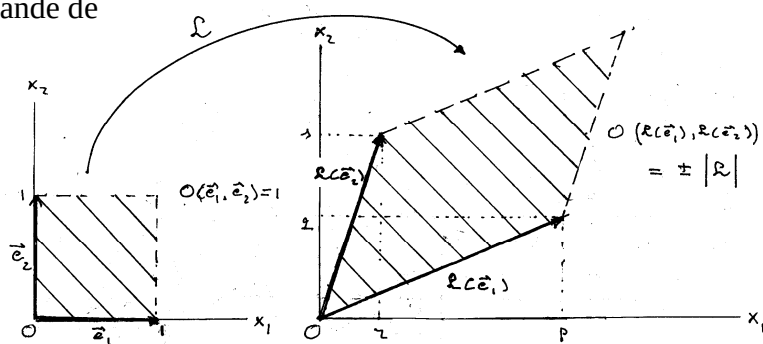
$$\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

van de standaardbasis $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$.

Want

$$O(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)) = \pm D(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)) = \pm \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$$

(+ als: $\angle(\mathcal{L}(\vec{e}_1) \rightarrow \mathcal{L}(\vec{e}_2)) > 0$ en - als: $\angle(\mathcal{L}(\vec{e}_1) \rightarrow \mathcal{L}(\vec{e}_2)) < 0$)



Het doel van de rest van deze paragraaf is dus om de volgende stelling te bewijzen.

Stelling

Voor een determinant D in $\mathbb{R}^2$ geldt voor ieder tweetal vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ bij een lineaire transformatie $\mathcal{L}$

$$D(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b})) = |\mathcal{L}| \cdot D(\vec{a}, \vec{b})$$

Om gevoel te krijgen voor deze stelling eerst een

Voorbeeld

Gegeven: De vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ en de lineaire transformatie $\mathcal{L}$ vastgelegd door de matrix

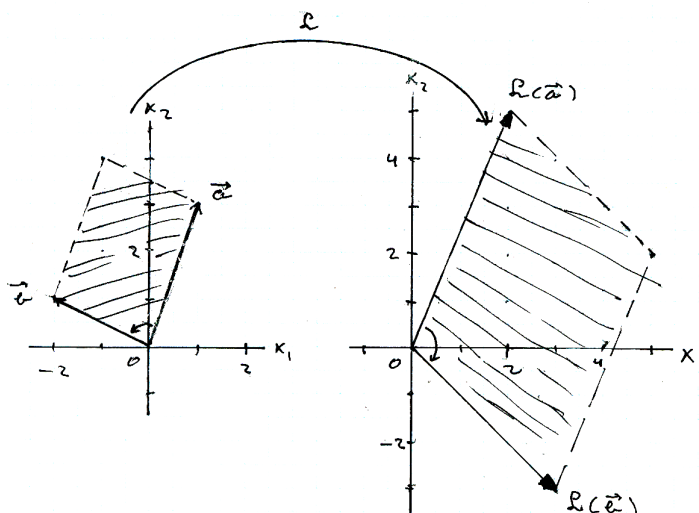
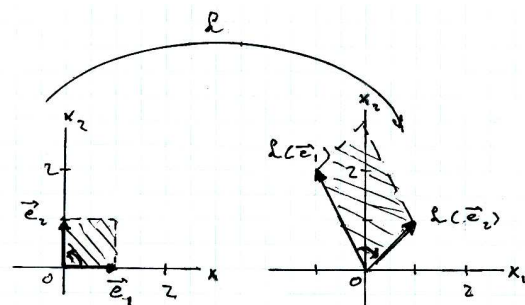
$$L = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Gevraagd

- De determinant $D(\vec{a}, \vec{b})$ van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$
 - De determinant $|\mathcal{L}|$ van de lineaire transformatie
 - De determinant $D(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b}))$ van de beeldvectoren $\mathcal{L}(\vec{a})$ en $\mathcal{L}(\vec{b})$
- De antwoorden op deze algebraïsche vragen worden hieronder meetkundig verder uitgewerkt.
- Teken twee naast elkaar gelegen standaard assenstelsels (x_1, x_2) waarbij in het linker stelsel het parallellogram opgespannen door de vectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ is gearceerd en in het tweede het parallellogram opgespannen door de beeldvectoren $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$
 - Geef de waarde van de oppervlaktes $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en $O(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2))$
 - Bereken de kentallen van de beeldvectoren $\mathcal{L}(\vec{a})$ en $\mathcal{L}(\vec{b})$
 - Teken twee naast elkaar gelegen standaard assenstelsels (x_1, x_2) waarbij in het linker stelsel het parallellogram opgespannen door de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is gearceerd en in het tweede het parallellogram opgespannen door de beeldvectoren $\mathcal{L}(\vec{a})$ en $\mathcal{L}(\vec{b})$
 - Bereken de waarde van de oppervlaktes $O(\vec{a}, \vec{b})$ en $O(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b}))$
 - Waarom heet de absolute waarde van de determinant $|\mathcal{L}|$ ook wel de oppervlaktevergrotingsfactor van de lineaire transformatie $\mathcal{L}$? Hoe blijkt dit uit e) en h)?
 - Hoe blijkt uit de figuren dat door de lineaire transformatie de oriëntatie van de vectoren vernadert? En hoe volgt dit uit b)?

Oplossing

- $D(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 7$
- $|L| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -3$
- $D(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b})) = |\mathcal{L}| \cdot D(\vec{a}, \vec{b}) = -3 \cdot 7 = -21$
- Zie eerste figuur rechts.
- $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$
 $O(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)) = -|\mathcal{L}| = -(-3) = 3$
- $\mathcal{L}(\vec{a}) = L \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
 $\mathcal{L}(\vec{b}) = L \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$
- Zie tweede figuur rechts.



$$\begin{aligned}
\text{h)} \quad O(\vec{a}, \vec{b}) &= D(\vec{a}, \vec{b}) = 7 \\
O(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b})) &= -D(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b})) \\
&= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\
&= -(2 \cdot (-3) - 5 \cdot 3) = 21
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad &\text{In dit geval geldt } |\mathcal{L}| = -3 \\
&\text{Volgens e) geldt } \frac{O(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2))}{O(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} = \frac{3}{1} = 3 \\
&\text{Volgens h) geldt } \frac{O(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b}))}{O(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{21}{7} = 3
\end{aligned}$$

Dus de voorbeelden bevestigen dat door de lineaire transformatie de oppervlaktes van parallellogrammen opgespannen door de vectoren een factor $-|\mathcal{L}|$ worden vergroot.

$$\begin{aligned}
\text{j)} \quad &\text{In de eerste figuur blijkt } \angle(\vec{e}_1 \rightarrow \vec{e}_2) > 0 \quad \text{en} \quad \angle(\mathcal{L}(\vec{e}_1) \rightarrow \mathcal{L}(\vec{e}_2)) < 0 \\
&\text{In de tweede figuur blijkt } \angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) > 0 \quad \text{en} \quad \angle(\mathcal{L}(\vec{a}) \rightarrow \mathcal{L}(\vec{b})) < 0 \\
&\text{In beide gevallen verandert de oriëntatie dus van teken door de lineaire transformatie.} \\
&\text{Dit hangt samen met het feit dat de determinant van de lineaire transformatie negatief} \\
&\text{is. Volgens b)} \quad |\mathcal{L}| = -3 < 0
\end{aligned}$$

Om de laatste stelling te bewijzen gaan we uit van de

Definitie

Een *Grassmann-vorm* Γ in $\mathbb{R}^2$ is de toevoeging van een getal $\Gamma(\vec{a}, \vec{b})$ aan ieder tweetal vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met de eigenschappen:

Voor alle vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^2$ en voor iedere scalar λ geldt

- | | | | |
|----|----|--|----------------------------|
| 1) | | $\Gamma(\vec{a}, \vec{b}) = -\Gamma(\vec{b}, \vec{a})$ | <i>anticommutativiteit</i> |
| 2) | a) | $\Gamma(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = \Gamma(\vec{a}, \vec{c}) + \Gamma(\vec{b}, \vec{c})$ | <i>behoud optelling</i> |
| | b) | $\Gamma(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda \Gamma(\vec{a}, \vec{b})$ | <i>behoud schaling</i> |
| 3) | a) | $\Gamma(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = \Gamma(\vec{a}, \vec{b}) + \Gamma(\vec{a}, \vec{c})$ | <i>behoud optelling</i> |
| | b) | $\Gamma(\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda \Gamma(\vec{a}, \vec{b})$ | <i>behoud schaling</i> |

Opmerkingen

- 1) De eigenschappen van de waarde $\Gamma(\vec{a}, \vec{b})$ van een Grassmann-vorm van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ zijn ook de algemene eigenschappen van de determinant (het Grassmann product) $D(\vec{a}, \vec{b})$ zoals die in §I.7 zijn bewezen. Hier functioneren zij via deze definitie als startpunt, terwijl in §I.7 zij als een stelling werden geformuleerd volgend vanuit de definitie aldaar voor $D(\vec{a}, \vec{b})$. Het zal hieronder echter blijken dat de meer algemene Grassmann-vorm maar weinig verschilt van deze determinant $D(\vec{a}, \vec{b})$.
- 2) De eigenschappen 2) a) en 2) b) vormen samen de lineariteit van de vorm naar de eerste vector. De eigenschappen 3) a) en 3) b) vormen samen de lineariteit van de vorm naar de tweede vector. Er is dus sprake van een dubbele lineariteit. Daarom noemt men een Grassman-vorm ook wel een bilineaire vorm.

- 3) Ook het *inproduct* $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ is een *bilineaire vorm*. Het wezenlijke verschil is echter dat het inproduct *commutatief* is, wat betekent dat voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$.
- 4) Uit de anticommutativiteit volgt dat voor alle vectoren $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt $\Gamma(\vec{a}, \vec{a}) = 0$, want verwisseling van de eerste vector en de tweede vector in de vorm levert $\Gamma(\vec{a}, \vec{a}) = -\Gamma(\vec{a}, \vec{a})$, dus $2\Gamma(\vec{a}, \vec{a}) = 0$ en dus $\Gamma(\vec{a}, \vec{a}) = 0$. De eigenschap van anticommutativiteit speelt in het vervolg de hoofdrol bij het onderzoek naar het verband tussen een Grassmann-vorm en de determinant.
- 5) Vanuit de eigenschappen 1) en de lineariteit in 2) kan de lineariteit in 3) worden afgeleid. We bekijken het behoud optelling

$$\begin{aligned}\Gamma(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) &= -\Gamma(\vec{b} + \vec{c}, \vec{a}) && \text{anticommutatie} \\ &= -(\Gamma(\vec{b}, \vec{a}) + \Gamma(\vec{c}, \vec{a})) = -\Gamma(\vec{b}, \vec{a}) - \Gamma(\vec{c}, \vec{a}) && \text{behoud optelling} \\ &= \Gamma(\vec{a}, \vec{b}) + \Gamma(\vec{a}, \vec{c}) && \text{anticommutatie}\end{aligned}$$

Het behoud schaling gaat op een vergelijkbare manier (zie opgave III.6.7)

Bij het bewijs van de volgende stelling zal blijken dat de anticommutativiteit en het bilineair zijn van Grassmann-vormen de determinant van twee vectoren oplevert, op een constante na.

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ geldt voor het verband van de waarde van een Grassmann-vorm Γ van de vectoren $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ en $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$ met de waarde van deze Grassmann-vorm Γ van de standaard basisvectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$

$$\Gamma(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

Bewijs

$$\begin{aligned}\Gamma(\vec{a}, \vec{b}) &= \Gamma(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) \\ &= \Gamma(a_1\vec{e}_1, b_1\vec{e}_1) + \Gamma(a_1\vec{e}_1, b_2\vec{e}_2) + \Gamma(a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1) + \Gamma(a_2\vec{e}_2, b_2\vec{e}_2) && \text{behoud optelling} \\ &= a_1b_1\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + a_1b_2\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + a_2b_1\Gamma(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + a_2b_2\Gamma(\vec{e}_2, \vec{e}_2) && \text{behoud schaling} \\ &= a_1b_1 \cdot 0 + a_1b_2\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) - a_2b_1\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + a_2b_2 \cdot 0 && \text{anticommutativiteit} \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) && \text{definitie determinant}\end{aligned}$$

□

Opmerkingen

- 1) De waarde van de Grassmann-vorm Γ in $\mathbb{R}^2$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ wordt dus geheel vastgelegd door de nader vast te stellen waarde $\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ van de standaard basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Immers voor ieder tweetal vectoren $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ en $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$ ligt de determinant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ vast.

- 2) In $\mathbb{R}^2$ kan D worden *gedefinieerd* als die Grassmann-vorm waarbij $D(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ gelijk is aan de oppervlakte $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ van het vierkantje opgespannen door de orthonormale vectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ van de standaard basis in $\mathbb{R}^2$.

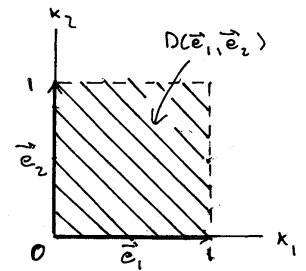
Dus *per definitie* geldt $D(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = O(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- 3) In $\mathbb{R}^2$ is D dus die Grassmann-vorm waarbij $D(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$, omdat $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$.

In het kader van Grassmann-vormen is volgens de laatste stelling D dus de speciale vorm waarbij geldt

$$D(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Aldus is de eerder gegeven definitie voor de determinant in overeenstemming met deze laatste definitie van D vanuit de Grassmann-vormen.



Stelling

Voor een Grassmann-vorm Γ in $\mathbb{R}^2$ geldt voor ieder tweetal vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ bij een lineaire transformatie $\mathcal{L}$

$$\Gamma(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b})) = |\mathcal{L}| \cdot \Gamma(\vec{a}, \vec{b})$$

Bewijs

- Volgens de voorgaande stelling geldt in $\mathbb{R}^2$ voor het verband van de waarde van een Grassmann-vorm Γ van de vectoren $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ en $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$ met de waarde van deze Grassmann-vorm Γ van de standaard basisvectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$

$$\Gamma(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

- Vanwege de lineariteit van $\mathcal{L}$ geldt $\mathcal{L}(\vec{a}) = a_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ en $\mathcal{L}(\vec{b}) = b_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + b_2\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ en dat levert op een vergelijkbare manier (zie ook opgave III.6. 8)

$$\Gamma(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b})) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \Gamma(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2))$$

- Verder geldt volgens de voorgaande stelling

$$\Gamma(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)) = \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} \cdot \Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

omdat als $L = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ dan $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2) = r\vec{e}_1 + s\vec{e}_2$

- De laatste twee formules combinerend ontstaat

$$\Gamma(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b})) = \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

en samen met de eerste formule levert dit

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b})) &= \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} \cdot \Gamma(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= |\mathcal{L}| \cdot \Gamma(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

□

Opmerkingen

- 1) Met deze laatste stelling is het doel van deze paragraaf bereikt, namelijk het verband te bewijzen tussen de determinanten $D(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b}))$ en $D(\vec{a}, \vec{b})$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ bij een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$. Omdat ook D een Grassmann-vorm is in $\mathbb{R}^2$ geldt de gewenste stelling

$$D(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b})) = |\mathcal{L}| \cdot D(\vec{a}, \vec{b})$$

- 2) De meetkundige betekenis van dit resultaat is dat, op het teken na, door een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ alle oppervlakken $O(\vec{a}, \vec{b})$ van een parallellogram opgespannen door twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met dezelfde vergrotingsfactor $|\mathcal{L}|$ veranderen, want

$$O(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b})) = |\mathcal{L}| \cdot O(\vec{a}, \vec{b}) \quad \text{als} \quad |\mathcal{L}| > 0$$

$$\text{en} \quad O(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b})) = -|\mathcal{L}| \cdot O(\vec{a}, \vec{b}) \quad \text{als} \quad |\mathcal{L}| < 0$$

Op het teken na is de determinant $|\mathcal{L}|$ dus de gemeenschappelijke

oppervlaktegroeifactor bij een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ van alle oppervlaktes van parallellogrammen opgespannen door twee vectoren.

Opgaven

III.6.1 In de figuur rechts geldt

$$O(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1 + b_1)(b_2 + a_2) - O_1 - O_2 - O_3 - O_4 - O_5 - O_6,$$

met $O_1 = \frac{1}{2}a_1a_2$, $O_2 = b_1a_2$,

Toon door berekening aan dat geldt $O(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_2 - a_2b_1$ en dus

$$O(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

III.6.2 Gegeven de lijnen $k: x_2 = \frac{1}{2}x_1$ en $l: x_2 = 3x_1$ in een standaard assenstelsel (x_1, x_2)

De scheve projectie $\mathcal{P}_{k,||l}$ van een in $\mathbb{R}^2$ op de lijn k evenwijdig aan de lijn l wordt volgens §III.5 vastgelegd door de matrix

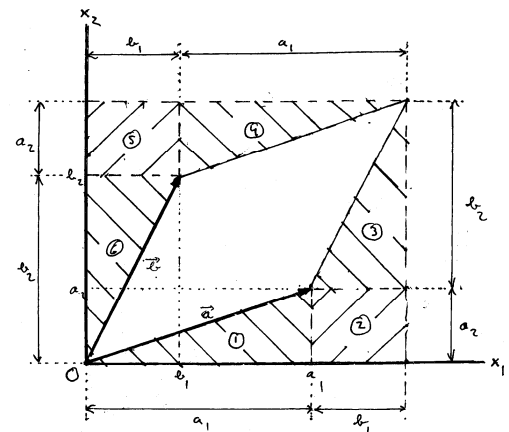
$$P_{k,||l} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- Bereken de determinant van deze projectie
- Geef een meetkundige verklaring van dit resultaat

III.6.3 a) Leg uit wat er met het oppervlak opgespannen door twee vectoren gebeurt bij een rotatie $\mathcal{R}_\theta$ over een hoek θ in $\mathbb{R}^2$?

- En wat betekent dit vervolgens voor de determinant $|\mathcal{R}_\theta|$ van de rotatie?
- Bereken de determinant van de bijbehorende rotatiematrix

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



III.6.4 In $\mathbb{R}^2$ wordt de spiegeling $\mathcal{S}_k$ van vectoren ten opzichte van de lijn k vastgelegd door de matrix

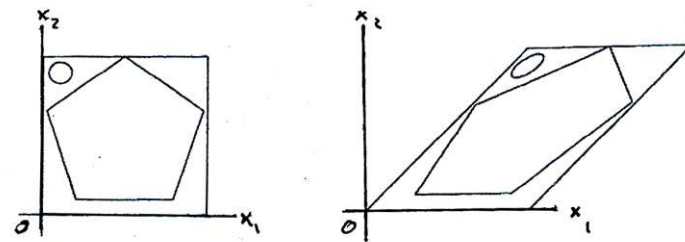
$$S_k = \frac{1}{|\vec{k}|^2} \begin{pmatrix} k_1^2 - k_2^2 & 2k_1k_2 \\ 2k_1k_2 & k_2^2 - k_1^2 \end{pmatrix}$$

hierbij is $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ een vector langs de lijn k .

- Toon door berekening aan dat voor de determinant geldt $|\mathcal{S}_k| = -1$
- Geef een meetkundige verklaring van dit resultaat.

III.6.5 In de figuur is er sprake van een *glijschuiving* in de richting van de x_1 -as. Volgens §III.2 wordt de matrix van de glijschuiving $\mathcal{G}_{x_1, \frac{1}{2}}$ in de richting van de x_1 -as met een factor $\frac{1}{2}$ geven door

$$G_{x_1, \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Bereken de determinant van deze glijschuiving
- Geef een meetkundige verklaring van dit resultaat

III.6.6 Gegeven in $\mathbb{R}^2$ de lijn $k : x_2 = -\frac{1}{3}x_1$

Volgens opgave III.5.3 is de matrix behorend bij $\mathcal{V}_{k,3}$, de vermenigvuldiging ten opzichte van de lijn k met een factor 3:

$$V_{k,3} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 28 \end{pmatrix}$$

- Bereken de determinant van deze lineaire transformatie
- Geef een meetkundige verklaring van dit resultaat.

III.6.7 Bewijs dat als bij een vorm in Γ in $\mathbb{R}^2$ voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ en voor iedere scalar λ geldt

$$\Gamma(\vec{a}, \vec{b}) = -\Gamma(\vec{b}, \vec{a}) \quad \text{anticommutativiteit}$$

$$\Gamma(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda\Gamma(\vec{a}, \vec{b}) \quad \text{behoud schaling bij de eerste vector}$$

$$\text{eruit volgt} \quad \Gamma(\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda\Gamma(\vec{a}, \vec{b}) \quad \text{behoud schaling bij de tweede vector}$$

III.6.8 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ en $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$ in $\mathbb{R}^2$, een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ en een Grassmann-vorm Γ

$$\text{Bewijs dat geldt} \quad \Gamma(\mathcal{L}(\vec{a}), \mathcal{L}(\vec{b})) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \Gamma(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2))$$

III.6.9 Gegeven twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$

- Als de twee vectoren afhankelijk zijn leg dan uit wat dit betekent voor het oppervlak $O(\vec{a}, \vec{b})$ opgespannen door deze vectoren.

- b) Als de twee vectoren onafhankelijk zijn leg dan uit wat dit betekent voor het oppervlak $O(\vec{a}, \vec{b})$ opgespannen door deze vectoren.
- c) Formuleer een stelling die het verband aangeeft tussen de determinant $D(\vec{a}, \vec{b})$ en de afhankelijkheid van deze vectoren.

III.6.10 Stel er geldt voor een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ voor een onafhankelijk stel vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ dat $\mathcal{L}(\vec{v}_1) = \tau_1 \vec{v}_1$ en $\mathcal{L}(\vec{v}_2) = \tau_2 \vec{v}_2$.

Bewijs met behulp van $D(\mathcal{L}(\vec{v}_1), \mathcal{L}(\vec{v}_2)) = |\mathcal{L}| \cdot D(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ dat $|\mathcal{L}| = \tau_1 \tau_2$

(τ_1 en τ_2 zijn de zogenoemde *eigenwaarden* van $\mathcal{L}$, $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ zogenoemde *eigenvectoren*. Zie hierover verder §IV.0.)