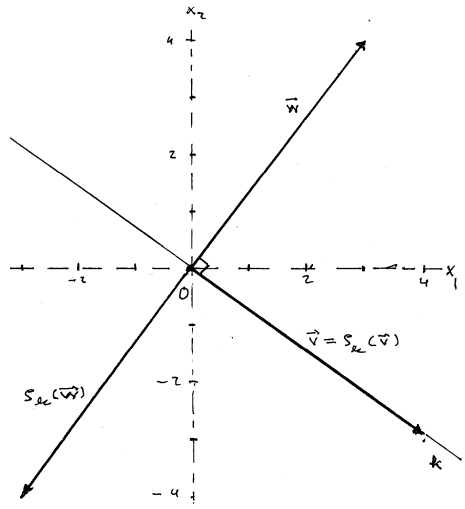
IV Eigenvectoren en Eigenwaarden bij Lineaire Transformaties in $\mathbb{R}^2$

IV.0 Meetkundige inleiding: deklijnen en eigenvectoren

Bij veel toepassingen van de Gauss-Jordan methode gaat men uit van de *deklijnen* van een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ om de matrix L van deze lineaire transformatie op te stellen. Zoals we verderop in deze paragraaf zullen zien hangen deklijnen samen met de zogenoemde *eigenvectoren* en *eigenwaarden* van een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$.

Een eerste voorbeeld van dit gebruik van deklijnen bij de Gauss-Jordan methode vormt de spiegeling $\mathcal{S}_k$ in $\mathbb{R}^2$ in een lijn *k*.



Voorbeeld
Dit voorbeeld is reeds in §III.5 aan de orde gekomen. Er is daar in $\mathbb{R}^2$ sprake van de spiegeling $\mathcal{S}_k$ in de lijn $k : x_2 = -\frac{3}{4}x_1$.

De vectoren langs de lijn *k* liggen na spiegeling nog steeds langs die lijn. Een voorbeeld van zo'n vector is $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ waarvan het beeld na spiegeling dezelfde vector is $\mathcal{S}_k(\vec{v}) = \vec{v}$

Ook langs de lijn *l* loodrecht op *k* liggen de vectoren na spiegeling langs diezelfde lijn. De vectoren die langs *l* staan hebben hun tegengestelde vector als spiegelbeeld. Een voorbeeld vormt de vector $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ waarvan het beeld na spiegeling is $\mathcal{S}_k(\vec{w}) = -\vec{w}$.

Uitgaande van deze vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ met hun resp. spiegelbeelden levert de Gauss-Jordan methode (zie ook §III.5)

$$\begin{array}{c} \left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \end{matrix}\right] \\ I \quad II \end{array} \xrightarrow[II' = 3I - 4II]{I' = 4I + 3II} \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} \end{matrix}\right] \\ I' \quad II' \end{array} \xrightarrow[II'' = -\frac{1}{25}II']{I'' = \frac{1}{25}I'} \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix} \end{matrix}\right] \\ I'' \quad II'' \end{array}$$

Dit levert voor de matrix van de spiegeling

$$S_k = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$$

De lijnen *k* en *l* vormen de zogenoemde *deklijnen* van de spiegeling $\mathcal{S}_k$

Definitie
In het platte vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) is een *deklijn van een lineaire transformatie* een lijn door de oorsprong met de eigenschap dat als een vector volgens die lijn is gericht dan ook het beeld van die vector volgens de lijn is gericht.

Anders gezegd:
Die lijnen door de oorsprong die door een lineaire transformatie op zichzelf worden afgebeeld heten de *deklijnen van de lineaire transformatie*.

Voordat we verder gaan met de definities van eigenwaarden en eigenvectoren nog een

Voorbeeld

Gegeven In een standaard assenstelsel (x_1, x_2) de lijnen $l: x_2 = \frac{1}{2}x_1$ en $m: x_2 = -\frac{1}{3}x_1$.

Voor een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt dat *l* een *deklijn* is De vectoren die langs *l* liggen hebben ook hun $\mathcal{L}$-beeld langs *l*. De beeldvectoren zijn 3 keer zo lang als de originelen.
Ook de lijn *m* vormt een *deklijn* voor $\mathcal{L}$. De beeldvectoren langs deze lijn zijn de tegengestelden van de originelen langs deze lijn.

Gevraagd

a) Verklaar dat de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ het beeld $\mathcal{L}(\vec{v}) = 3\vec{v}$ heeft.

b) Geef het $\mathcal{L}$-beeld van de vector $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Bepaal met behulp van de Gauss-Jordan methode de matrix *L* van de lineaire transformatie.

d) Geef de kentallen van beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ resp. $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de standaardbasis $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$.
Bereken ook de lengtes van deze beeldvectoren.

e) Teken naast elkaar twee keer het standaard assenstel (x_1, x_2)

In het linker assenstelsel zullen de originelen worden getekend en in het rechter de $\mathcal{L}$-beelden.

f) Teken in het linker assenstelsel de vectoren $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ van de standaardbasis en arceer het vierkant dat zij opspannen. Teken daarin ook de lijnen *l* en *m* en verder de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ als positievectoren

g) De vectoren $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ resp. $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ leggen een scheef assenstelsel (k_1, k_2) vast. Teken deze assen in het rechter diagram als streepjes lijnen. Teken ook de vectoren $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ en arceer het parallellogram dat zij opspannen.Teken de lijnen *l* en *m* ook in het rechter assenstelsel.

h) De vector $\vec{v}'$ heeft kentallen 2 en 1 ten opzichte van het scheve assenstelsel (k_1, k_2), dus $\vec{v}' = 2\mathcal{L}(\vec{e}_1) + 1\mathcal{L}(\vec{e}_2)$. Teken $\vec{v}'$ als positievector in het rechter assenstelsel.
Teken ook de vector $\vec{w}' = -3\mathcal{L}(\vec{e}_1) + 1\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ die kentallen -3 en 1 heeft ten opzichte van (k_1, k_2)

j) Bereken de kentallen van $\vec{v}'$ ten opzichte van de standaard basis en laat met behulp hiervan zien dat $\vec{v}'$ het $\mathcal{L}$-beeld is van $\vec{v}$
Bereken de kentallen van $\vec{w}'$ ten opzichte van de standaard basis en laat met behulp hiervan $\vec{w}' = \mathcal{L}(\vec{w})$.

Oplossing

a) Op de lijn $l: x_2 = \frac{1}{2}x_1$ geldt als $x_1 = 2$ dan $x_2 = 1$. De vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ is dus gericht volgens *l*. Voor de vectoren langs *l* geldt dat de $\mathcal{L}$-beelden 3 keer zo lang zijn, dus $\mathcal{L}(\vec{v}) = 3\vec{v}$

b) De vector $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ is gericht volgens de lijn *m*. De $\mathcal{L}$-beelden zijn hierbij tegengesteld gericht dus $\mathcal{L}(\vec{w}) = -\vec{w}$

c) De Gauss-Jordan methode levert uitgaande van de gegevens uit a) en b)

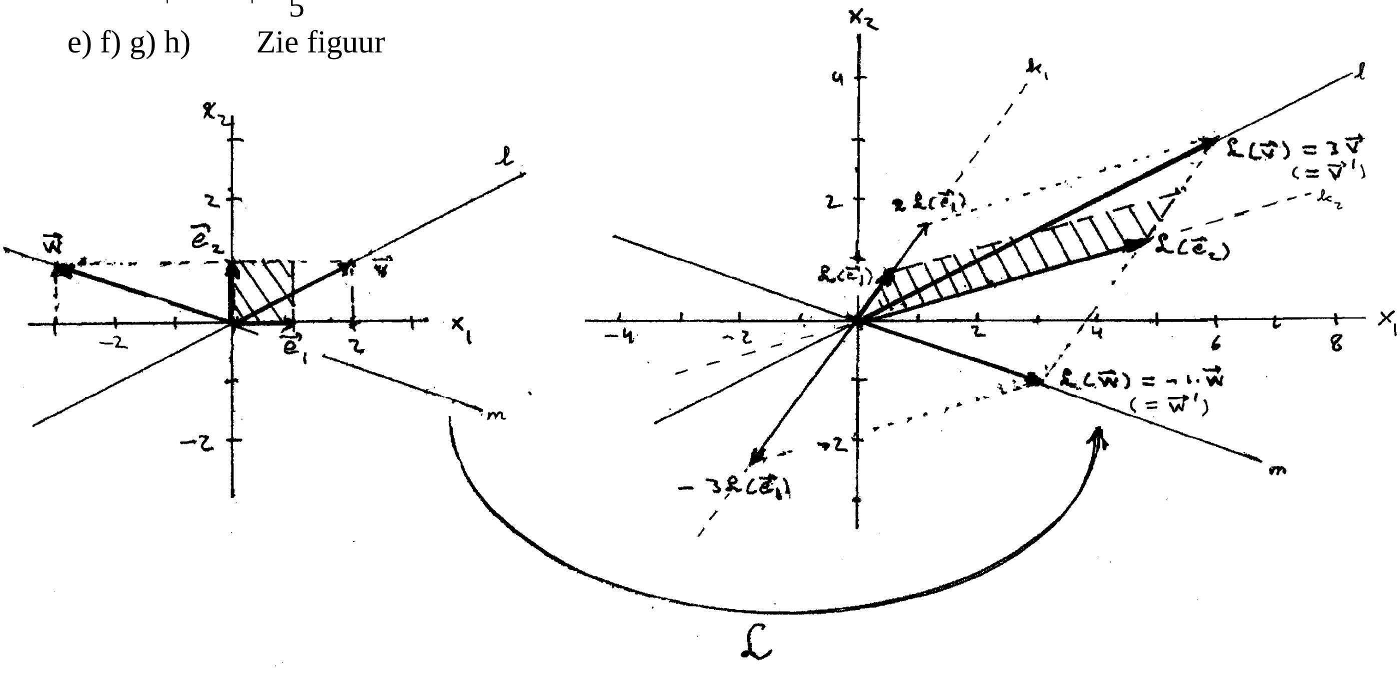
$$\underset{I \quad II}{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}} \xrightarrow[II' = 3I + 2II]{I' = I - II} \underset{I' \quad II'}{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 24 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \end{bmatrix}} \xrightarrow[II'' = \frac{1}{5}II']{I'' = \frac{1}{5}I'} \underset{I'' \quad II''}{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 24 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \end{bmatrix}}$$

De matrix van de lineaire transformatie is dus

$$L = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 24 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

d) $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$ met lengtes $|\mathcal{L}(\vec{e}_1)| = \frac{1}{5}\sqrt{3^2 + 4^2} = 1$ resp. $|\mathcal{L}(\vec{e}_2)| = \frac{1}{5}\sqrt{24^2 + 7^2} = 5$

e) f) g) h) Zie figuur



h) $\vec{v}\,' = 2\mathcal{L}(\vec{e}_1) + 1\mathcal{L}(\vec{e}_2) = 2 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\vec{v} = \mathcal{L}(\vec{v})$

$\vec{w}\,' = -3\mathcal{L}(\vec{e}_1) + 1\mathcal{L}(\vec{e}_2) = -3 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{w} = \mathcal{L}(\vec{w})$

Opmerkingen

1) Het antwoord op vraag h) bevestigt de lineariteit van $\mathcal{L}$ zoals besproken in §III.2. Immers $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ met $\mathcal{L}(\vec{v}) = 2\mathcal{L}(\vec{e}_1) + \mathcal{L}(\vec{e}_2)$, en $\vec{w} = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ met $\mathcal{L}(\vec{w}) = -3\mathcal{L}(\vec{e}_1) + \mathcal{L}(\vec{e}_2)$.

2) De lijnen *l* en *m* zijn de enige deklijnen van $\mathcal{L}$. Zo is de vector $\vec{p} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p\vec{e}_1$ gericht volgens de x_1-as terwijl zijn beeld $\mathcal{L}(\vec{p}) = \mathcal{L}(p\vec{e}_1) = p\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ gericht is volgens de k_1-as. De x_1-as valt niet samen met k_1-as. Op vergelijkbare manier is het $\mathcal{L}$-beeld van de x_2-as en de niet ermee samenvallende k_2-as, want $\vec{q} = q\vec{e}_2$ is gericht volgens de x_2-as en $\mathcal{L}(\vec{q}) = \mathcal{L}(q\vec{e}_2) = q\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ volgens de k_2-as.

Met het bestaan van deklijnen hangt de volgende definitie samen

Definitie

De *eigenvergelijking* van een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ is de vergelijking

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \tau\vec{x}$$

Als er waarden van de scalar τ zijn waarbij er vectoren $\neq \vec{0}$ zijn die aan de eigenvergelijking voldoen, dan heten deze waarden van de scalar de *eigenwaarden* van de transformatie $\mathcal{L}$ en de betreffende vectoren heten *eigenvectoren* van de transformatie $\mathcal{L}$

Opmerkingen

1) In het laatste voorbeeld is $\mathcal{L}(\vec{x}) = 3\vec{x}$ een eigenvergelijking met eigenwaarde $\tau = 3$ en een oplossing ervan is de eigenvector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
In het voorbeeld is de tweede eigenvergelijking $\mathcal{L}(\vec{x}) = -\vec{x}$, die dus de eigenwaarde $\tau = -1$ heeft, en een oplossing ervan is de eigenvector $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Als een vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ eigenvector is bij een eigenwaarde τ dan zijn ook de vectoren $\vec{x} = \lambda\vec{v}$ eigenvectoren bij dezelfde eigenwaarde. Immers
$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \mathcal{L}(\lambda\vec{v}) = \lambda\mathcal{L}(\vec{v}) = \lambda \cdot \tau\vec{v} = \tau\vec{x}$$
Gezien als positievectoren liggen zowel de eigenvectoren en als hun beelden alle langs de deklijn $m: \vec{x} = \lambda\vec{v}$. Hierbij ligt eindpunt van een beeldvector $\mathcal{L}(\vec{x})$ een factor τ verder van de oorsprong dan het eindpunt van de bijbehorende origineelvector $\vec{x}$.

3) Niet alle lineaire transformaties in $\mathbb{R}^2$ hebben eigenwaarden en eigenvectoren. De rotatie $\mathcal{R}_\theta$ over een hoek θ in $\mathbb{R}^2$ heeft bijna nooit eigenwaarden en eigenvectoren. (Zie opgave IV.0.2)

In deze paragraaf hebben we vanuit gegeven deklijnen en gegeven eigenvectoren met behulp van de Gauss-Jordan methode matrices opgesteld van lineaire transformaties in $\mathbb{R}^2$.
De *centrale vraag in de volgende paragraaf* is het omgekeerde:
Als van een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ de matrix gegeven is hoe valt dan na te gaan of deze transformatie eigenwaarden heeft, en zo ja wat zijn dan de bijbehorende eigenvectoren?

Voor het antwoord op deze vraag zullen we in die paragraaf de zogenoemde *karakteristieke vergelijking* afleiden.

In de *volgende paragrafen spelen die eigenvergelijkingen de hoofdrol waarbij één van de eigenwaarden gelijk is aan* 0. Het volgende voorbeeld gaat in op de meetkundige aspecten bij eigenwaarde 0, die ook worden besproken in het aanhangsel van §IV.3

Aanhangsel 1: Eigenwaarde 0, een voorbeeld

De *scheve projectie* is een voorbeeld van een lineaire transformatie met eigenwaarde 0.

Voorbeeld

Gegeven De lijnen $k: x_2 = \frac{1}{2}x_1$ en $l: x_2 = 3x_1$ in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) en de scheve projectie $\mathcal{P}_{k,\|l}$ in $\mathbb{R}^2$, die ook §III.5 al aan de orde is gekomen.

Gevraagd

a) Licht toe: Voor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ geldt $P_{k,\|l}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Voor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ geldt $P_{k,\|l}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Bereken volgens de Gauss-Jordan methode de matrix van $\mathcal{P}_{k,\|l}$.

c) Teken in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) de lijnen *k* en *l*. Teken ook de vectoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ van de standaardbasis. Teken ook de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ als positievectoren

d) Verklaar dat de lijnen *k* en *l* deklijnen zijn van de lineaire transformatie $\mathcal{P}_{k,\|l}$

e) Langs welke lijn liggen de vectoren die een oplossing zijn van de eigenvergelijking

$$\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{x}) = 0\vec{x} \quad (= \vec{0})$$

met eigenwaarde $\tau = 0$. Welke van de in c) getekende vectoren is een oplossing (een eigenvector) bij deze eigenwaarde $\tau = 0$?

f) Langs welke lijn liggen de vectoren die een oplossing zijn van de eigenvergelijking

$$\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{x}) = 1\vec{x}$$

met eigenwaarde $\tau = 1$. Welke van de in c) getekende vectoren is een oplossing (een eigenvector) bij deze eigenwaarde $\tau = 1$?

g) Geef in de figuur de beelden $\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{v})$ en $\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{w})$ aan.

h) De vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ hebben alle hetzelfde $\mathcal{P}_{k,\|l}$-beeld. Toon dit aan door berekening met de matrix $P_{k,\|l}$

i) Teken in de figuur de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ als positievectoren en geef ook hun $\mathcal{P}_{k,\|l}$-beeld aan.

j) Teken een streepjeslijn langs de koppen van de vectoren uit i). Verklaar de richting van deze lijn.

k) Teken tenslotte de beeldvectoren $\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{e}_2)$ van de standaardbasis.

l) Toon aan dat geldt $\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{e}_1) = -3\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{e}_2)$, dus dat de beelden van de standaardbasis afhankelijk zijn. Hoe blijkt deze afhankelijkheid ook uit de figuur?

Oplossing

a) De vectoren langs *k* blijven bij de projectie $\mathcal{P}_{k,\|l}$ onveranderd. De vector $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ligt langs *k* en er geldt dus $\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{v})=\vec{v}$.

De vectoren langs *l* worden bij de projectie $\mathcal{P}_{k,\|l}$ afgebeeld op de vector $\vec{0}$. De vector $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ is zo'n vector en er geldt dus $\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{w})=\vec{0}=0\vec{w}$

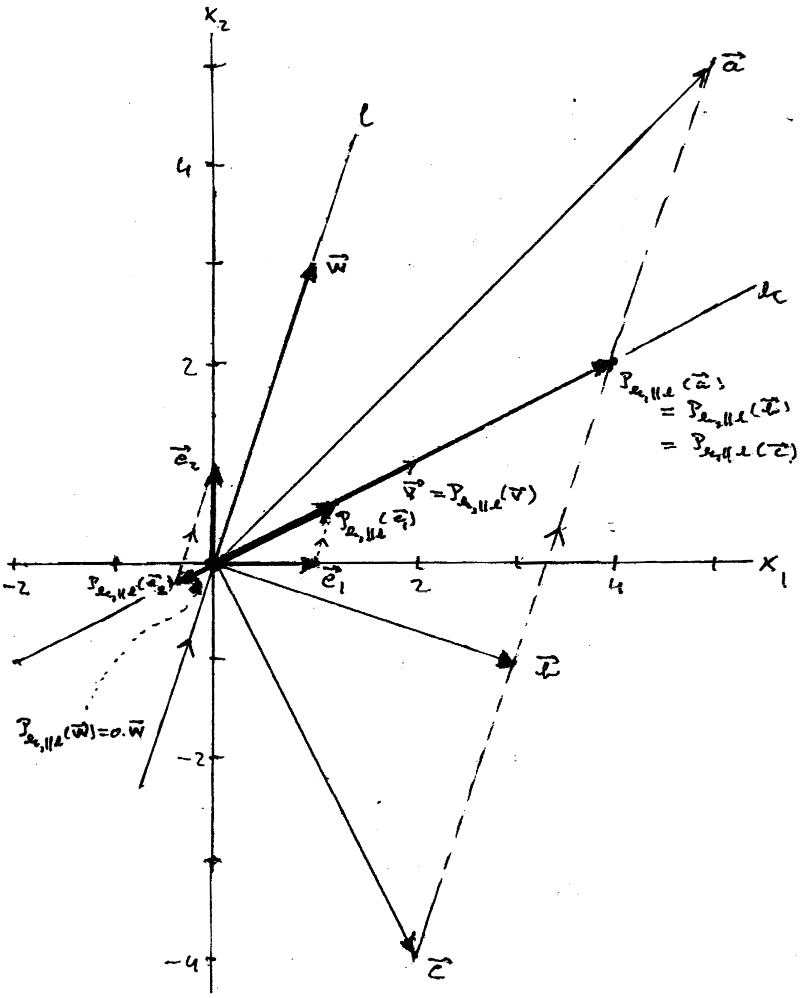
b) $$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}\end{bmatrix} \xrightarrow[II'=1I-2II]{I'=3I-1II} \begin{bmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\0&-5\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}6&2\\3&\end{pmatrix}\end{bmatrix} \xrightarrow[II''=-\frac{1}{5}II']{I''=\frac{1}{5}I'} \begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6&-2\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

$I \quad II \qquad\qquad l$

De matrix van $\mathcal{P}_{k,\|l}$ is dus

$$P_{k,\|l}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6&-2\\3&-1\end{pmatrix}$$

c) Zie figuur



d) De positievectoren langs *k* zijn voor en na de projectie $\mathcal{P}_{k,\|l}$ hetzelfde. De originelen en beelden zijn beide langs deze lijn gericht en dus is *k* een deklijn.
De positievectoren langs *l* hebben alle als beeld de vector $\vec{0}$. Originelen en beeld liggen dus op één lijn en daarom is ook *l* een deklijn.

e) De vector $\vec{w}$ ligt langs *l* en er geldt $\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{w})=0\vec{w}$. De vector $\vec{x}=\vec{w}$ is dus een oplossing van de eigenvergelijking $\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{x})=0\vec{x}$.
Ook $\vec{x}=2\vec{w}$ of $\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{w}$ zijn oplossingen.
Alle oplossingen zijn dus volgens *l* gericht.

f) De vector $\vec{v}$ is volgens *k* gericht en is oplossing van de eigenvergelijking $\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{x})=1\vec{x}$. Alle vectoren $\vec{x}=\lambda\vec{v}$, met λ een nader te bepalen scalar, zijn oplossingen van deze vergelijking en zijn alle gericht volgens *k*.

g) Zie figuur.

h) $$\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{a})=P_{k,\|l}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6&-2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6\cdot5+(-2)5\\3\cdot5+(-1)5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_{k,\|l}(\vec{b})=P_{k,\|l}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6&-2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6\cdot3+(-2)(-1)\\3\cdot3+(-1)(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_{k,||l}(\vec{c}) = P_{k,||l}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}6 & -2\\3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}6\cdot 2+(-2)(-4)\\3\cdot 2+(-1)(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

i) Zie figuur.

j) De lijn door al deze koppen is evenwijdig aan *l*. Deze vectoren hebben daarom als beeld eenzelfde positievector op de lijn *k* waarvan de kop ook op deze lijn ligt.

k) Teken vanuit de koppen van de standaardbasis $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ lijnen evenwijdig aan *l*. Dit levert op *k* de resp. positievectoren $\mathcal{P}_{k,||l}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{P}_{k,||l}(\vec{e}_2)$

l) Uit de matrix *L* volgt $\mathcal{P}_{k,||l}(\vec{e}_1) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ en $\mathcal{P}_{k,||l}(\vec{e}_2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Dus $\mathcal{P}_{k,||l}(\vec{e}_1) = -3\mathcal{P}_{k,||l}(\vec{e}_2)$.

In de figuur liggen deze vectoren beide langs de deklijn *k*, wat ook beteken dat zij van elkaar afhankelijk zijn

Opmerkingen

1) Uit de vragen k) en l) blijkt dat de beelden van standaardbasis $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ afhankelijk zijn. In de volgende paragraaf zal blijken dat dit altijd geldt als een lineaire transformatie eigenwaarde 0 heeft.

2) Uit de vragen i) en j) blijkt dat er verschillende vectoren zijn hetzelfde beeld hebben. In het aanhangsel van §IV.3 zal besproken worden dat alleen bij lineaire transformaties met een eigenwaarde 0 het geval is. Is er geen eigenwaarde 0 dan hebben verschillende vectoren verschillende beelden.

Aanhangsel 2

Als afronding van deze paragraaf één stelling die we verder in het vervolg niet nodig hebben en die dus kan worden overgeslagen.

Stelling

Heeft een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ twee verschillende eigenwaarden dan zijn de bijbehorende eigenvectoren onafhankelijk.

Bewijs

Stel een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ heeft eigenwaarden τ_1 en τ_2 met $\tau_1 \neq \tau_2$.

Laat $\vec{v} \neq \vec{0}$ een eigenvector zijn bij eigenwaarde τ_1, dus

$$\mathcal{L}(\vec{v}) = \tau_1\vec{v}$$

Laat $\vec{w} \neq \vec{0}$ een eigenvector zijn bij eigenwaarde τ_2, dus

$$\mathcal{L}(\vec{w}) = \tau_2\vec{w}$$

We bewijzen vanuit het *ongerijmde* dat $\vec{v}$ en $\vec{w}$ onafhankelijk zijn.
Stel het *tegendeel*. De vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ zijn wel afhankelijk. Er is dan een scalar $\lambda \neq 0$ zodanig dat $\vec{w} = \lambda\vec{v}$

De vector $\vec{x} = \lambda\vec{v} \neq \vec{0}$ heeft eigenwaarde τ_1, dus

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \tau_1\vec{x}$$

De vector $\vec{x} = \vec{w} \neq \vec{0}$ heeft eigenwaarde τ_2, dus

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \tau_2 \vec{x}$$

Gevolg

$$\tau_1 \vec{x} = \tau_2 \vec{x} \;\Rightarrow\; \tau_1 \vec{x} - \tau_2 \vec{x} = 0$$
$$\Rightarrow\; (\tau_1 - \tau_2)\vec{x} = 0$$
$$\Rightarrow\; \tau_1 - \tau_2 = 0 \;\Rightarrow\; \tau_1 = \tau_2$$

Dit is *strijdig* met de aanname $\tau_1 \neq \tau_2$, dus is er een zogenoemde ongerijmdheid.
De eigenvectoren bij τ_1 en τ_2 zijn dus onafhankelijk.

□

Opgaven

IV.0.1 De vermenigvuldiging $\mathcal{V}_{k,\lambda}$ in $\mathbb{R}^2$ ten opzichte van een lijn *k* door de oorsprong met een factor λ heeft eigenwaarden 1 en λ . Verklaar dit meetkundig.

IV.0.2 a) Verklaar meetkundig dat rotatie $\mathcal{R}_\theta$ in $\mathbb{R}^2$ over een hoek θ geen eigenvectoren heeft behalve als $\theta = k \cdot 180^0$, waarbij *k* een geheel getal is.

b) Verklaar meetkundig voor welke hoeken θ de rotatie $\mathcal{R}_\theta$ eigenwaarde -1 heeft.

c) Verklaar meetkundig voor welke hoeken θ de rotatie $\mathcal{R}_\theta$ eigenwaarde 1 heeft.

IV.0.3 Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ heeft als deklijnen $l : x_2 = x_1$ en $m : x_2 = -3x_1$.
De eigenvectoren behorend bij de deklijn *l* hebben eigenwaarde $\tau = 2$ en de eigenvectoren behorend bij de deklijn *m* hebben eigenwaarde $\tau = -1$

a) Geef een eigenvector $\vec{v}$ met eigenwaarde $\tau = 2$ en een eigenvector $\vec{w}$ met eigenwaarde $\tau = -1$

b) Toon met behulp van de Gauss-Jordan methode aan dat de matrix van deze lineaire transformatie is

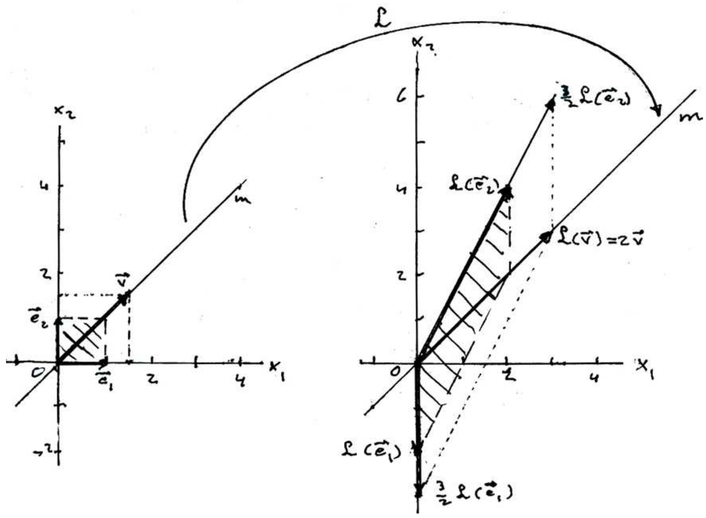
$$L = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Licht de situatie meetkundig toe met een figuur als in het tweede voorbeeld

IV.0.4 Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix $L = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Voor de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ geldt

$$L\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} \\ -2 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$



a) Waarom is $\vec{v}$ een eigenvector van $\mathcal{L}$ en welke eigenwaarde behoort bij deze vector?

b) Toon door berekening aan dat ook $\vec{v}' = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ een eigenvector is met dezelfde eigenwaarde

c) Geef de formule van de bijbehorende deklijn *m*.

d) Geef de kentallen van debeelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de standaardbasis.

e) Toon door berekening aan dat $\frac{3}{2}\mathcal{L}(\vec{e}_1) + \frac{3}{2}\mathcal{L}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ en bespreek het verband met de gegeven figuur

Opmerking: In opgave IV.1.2 zal met behulp van de zogenoemde *karakteristieke vergelijking* blijken dat deze lineaire transformatie slechts één eigenwaarde en één deklijn heeft.

IV.0.5 De lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) De vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zijn eigenvectoren van lineaire transformatie. Toon dit door berekening met de matrix aan en geef de bijbehorende eigenwaarden.

b) De vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is geen eigenvector van de lineaire transformatie. Toon dit aan.

c) Geef de formules van de deklijnen bij deze transformatie.

d) Licht de situatie meetkundig toe met een figuur als in het tweede voorbeeld

Opmerking: In de volgende paragraaf komt in opgave IV.1.5 aan de orde hoe men de eigenvectoren van deze lineaire transformatie kan vinden met behulp van de zogenoemde *karakteristieke vergelijking*

IV.0.6 De *glijschuiving* $\mathcal{G}_{x_1,\frac{1}{2}}$ in $\mathbb{R}^2$ in de richting van de x_1-as met een factor $\frac{1}{2}$ wordt vastgelegd door de matrix $G_{x_1\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) De vectoren $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, met $\lambda \neq 1$, langs de x_1-as zijn eigenvectoren van deze glijschuiving. Toon dit aan en geef de bijbehorende eigenwaarde(n).

b) Verklaar meetkundig dat deze glijschuiving alleen deze vectoren als eigenvectoren heeft en geen andere,

IV.1 De karakteristieke vergelijking

In deze paragraaf bewijzen we een twee stellingen die, samen met de determinant (zie aanhangsel), direct leiden de zogenoemde *karakteristieke vergelijking* van een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$, waarmee de eventuele eigenwaarden van de lineaire transformatie kunnen worden berekend. Als de eigenwaarden eenmaal bekend zijn dan is het niet al te lastig om van een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ de eigenvectoren te bepalen.

Stelling
Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ heeft een eigenwaarde 0 dan en slechts dan als de beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de standaardbasis afhankelijk zijn.

Bewijs
- Stel de transformatie heeft eigenwaarde 0.

Er is dan een vector $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 \neq \vec{0}$ zodanig dat $\mathcal{L}(\vec{v}) = 0\vec{v}$. Ook geldt voor het beeld van $\vec{v}$ dat $\mathcal{L}(\vec{v}) = v_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + v_2\mathcal{L}(\vec{e}_2)$. Gevolg

$$v_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + v_2\mathcal{L}(\vec{e}_2) = \vec{0}$$

Omdat $\vec{v} \neq \vec{0}$ is ten minste één van de kentallen v_1 en v_2 ongelijk 0. Als $v_2 \neq 0$ dan geldt

$$\mathcal{L}(\vec{e}_2) = -\frac{v_1}{v_2}\mathcal{L}(\vec{e}_1)$$

De beelden van de standaardbasis zijn dan dus afhankelijk. Het geval $v_1 \neq 0$ levert een vergelijkbaar resultaat.

- Stel de beelden van de standaardbasis zijn afhankelijk.

Er is dan een scalar λ zodanig dat $\mathcal{L}(\vec{e}_2) = \lambda\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ of een scalar μ zodanig dat $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \mu\mathcal{L}(\vec{e}_2)$. In het eerste geval is de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ een eigenvector $\vec{v} \neq \vec{0}$ met eigenwaarde 0 want

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{v}) &= -\lambda\mathcal{L}(\vec{e}_1) + 1\mathcal{L}(\vec{e}_2) = \vec{0} \\ &= 0\vec{v} \end{aligned}$$

In het tweede geval is de vector $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix}$ een eigenvector $\vec{w} \neq \vec{0}$ met eigenwaarde 0.

□

In de volgende stelling wordt het begrip *determinant van een lineaire transformatie* gebruikt, dat al eerder in de paragrafen §I.8, §I.9 en §III.6 aan de orde is gekomen. Voor wie niet op de hoogte is van dit begrip wordt in het aanhangsel van deze paragraaf een korte herhaling gegeven die onafhankelijk van de eerdere paragrafen kan worden bestudeerd.

Stelling
Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ heeft een eigenwaarde 0 *dan en slechts dan als de determinant van de transformatie gelijk is aan* 0, *dus als* $|\mathcal{L}| = 0$.

Bewijs

- Stel de lineaire transformatie heeft geen eigenwaarde 0.

Volgens de vorige stelling zijn de beeldvectoren $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de standaardbasis onafhankelijk en liggen dus niet volgens één lijn. Zij spannen dan een oppervlak ongelijk 0 op, dus $O(\mathcal{L}(\vec{e}_1),\mathcal{L}(\vec{e}_2)) \neq 0$. In dat geval geldt dus $\left|\mathcal{L}\right| \neq 0$

- Stel de lineaire transformatie heeft een eigenwaarde 0.

Volgens de vorige stelling zijn de beeldvectoren $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de standaardbasis afhankelijk en liggen dus volgens één lijn. Zij spannen dan een oppervlak gelijk 0 op, dus $O(\mathcal{L}(\vec{e}_1),\mathcal{L}(\vec{e}_2)) = 0$. In dat geval geldt dus $\left|\mathcal{L}\right| = 0$

□

Deze laatste stelling levert direct de *karakteristieke vergelijking* die we nodig hebben om de eventuele eigenwaarden van een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ te vinden. Het basisinzicht bij het bewijs is dat zodra een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ een eigenwaarde τ bezit dan kan er een nieuwe lineaire transformatie $\mathcal{L} - \tau\mathcal{I}$ worden gevormd die eigenwaarde 0 heeft.

Stelling

De eigenwaarden τ van een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ zijn alle de oplossingen van de vergelijking

$$\left|\mathcal{L} - \tau\mathcal{I}\right| = 0,$$

de zogenoemde karakteristieke vergelijking van $\mathcal{L}$.

Bewijs

Bij iedere eigenwaarde τ van $\mathcal{L}$ is er een vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ zodanig dat $\mathcal{L}(\vec{v}) = \tau\vec{v}$ dus zodanig dat $\mathcal{L}(\vec{v}) - \tau\vec{v} = \vec{0}$. Of iets anders gesteld

$$(\mathcal{L} - \tau\mathcal{I})(\vec{v}) = 0\vec{v}$$

Dit betekent dat bij iedere eigenwaarde τ de lineaire transformatie $\mathcal{L} - \tau\mathcal{I}$ een eigenwaarde 0 heeft omdat $\vec{v} \neq \vec{0}$. Volgens de vorige stelling is dit dan en slechts dan het geval als voor de determinant geldt

$$\left|\mathcal{L} - \tau\mathcal{I}\right| = 0$$

□

Dat het eenvoudig is om bij een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ vanuit bekende eigenwaarden de eigenvectoren te vinden blijkt uit het volgende

Voorbeeld

Gegeven: Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Gevraagd: a) De eigenwaarden van $\mathcal{L}$

b) De eigenvectoren van $\mathcal{L}$

Oplossing

a) Er geldt

$$L-\tau I=\begin{pmatrix}3&1\\4&3\end{pmatrix}-\tau\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-\tau&1\\4&3-\tau\end{pmatrix}$$

Dit levert als karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix}3-\tau&1\\4&3-\tau\end{vmatrix}=0$$

Dus $\qquad (3-\tau)^2-4\cdot 1=0$

De oplossingen van deze vergelijking zijn (zie opgave V.1.1)

$$\tau=1 \text{ of } \tau=5$$

b) *De eigenwaarde* $\tau=1$. Laat $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ een eigenvector zijn bij deze eigenwaarde .

Er is aldus de vergelijking

$$L\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

Dus

$$\begin{pmatrix}3&1\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3v_1+v_2\\4v_1+3v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3v_1+v_2=v_1 & \Rightarrow v_2=-2v_1\\4v_1+3v_2=v_2 & \Rightarrow v_2=-2v_1\end{cases}$$

Als $v_1=1$ dan is $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ een eigenvector bij eigenwaarde $\tau=1$. Een andere eigenvector bij $\tau=1$ worden gegeven door $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

Algemeen geldt dat de eigenvectoren bij $\tau=1$ worden gegeven door $\vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, waarbij $\lambda\neq 0$ een nader te kiezen scalar is.

De eigenwaarde $\tau=5$. Laat $\vec{w}\neq\vec{0}$ een eigenvector zijn bij $\tau=5$. Om de berekening te vereenvoudigen kunnen we de waarde 1 voor het kental in de x_1-richting kiezen. Door deze keuze geldt $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\w\end{pmatrix}$ en is er slechts één onbekende, te weten w. Er is dus de vergelijking

$$L\begin{pmatrix}1\\w\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\w\end{pmatrix}$$

Dus

$$\begin{pmatrix}3&1\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\w\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\w\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3+w\\4+3w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5w\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3+w=5 & \Rightarrow w=2\\4+3w=5w & \Rightarrow w=2\end{cases}$$

De vector $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ is dus een eigenvector bij eigenwaarde $\tau=5$. De andere eigenvectoren bij $\tau=5$ worden gegeven door $\vec{x}=\mu\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, waarbij $\mu\neq 0$ een nader te kiezen scalar is.

Opmerking
Bij de berekening van de tweede eigenvector hebben we het kental in de x_1-richting gelijk 1 gekozen om de berekening te vereenvoudigen. We hadden uiteraard ook de kentallen in de x_2-richting gelijk 1 kunnen kiezen om de berekening te vereenvoudigen(zie opgave V.1.1)

Aanhangsel: Het begrip determinant van een lineaire transformatie in het kort.

We geven definitie van de *determinant*, die al eerder in de paragrafen §I.8, §I.9 en §III.6 aan de orde is gekomen. Zoals hierboven gesteld kan het onderstaande kan onafhankelijk van deze paragrafen worden gelezen. We leiden derhalve nogmaals een stelling af over de *meetkundige betekenis* van de determinant als *oppervlakte* opgespannen door de beelden van de vectoren van de standaard basis.

Definitie
Stel een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

De *determinant* van deze matrix L is een getal dat genoteerd wordt als $\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$, waarvoor geldt

$$\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} = ps - qr$$

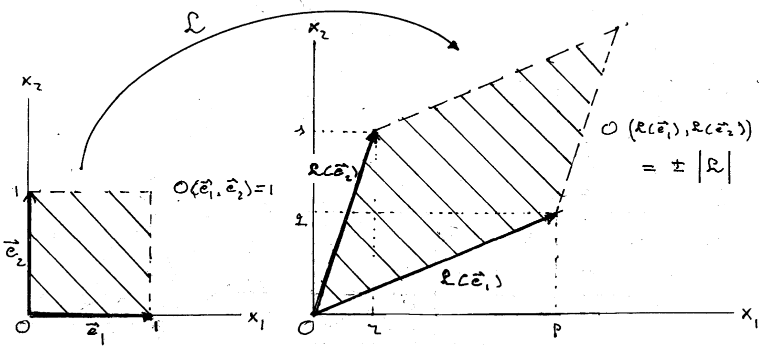
Opmerking
Er is hier sprake van *kruiselings vermenigvuldigen*: Van linksboven naar rechtsonder, dus van *p* naar *s*, met een + teken; van rechtsonder naar linksboven, dus van *q* naar *r*, met een $-$teken. Vervolgens wordt er opgeteld.

Definitie
De *determinant* van de lineaire transformatie, notatie $|\mathcal{L}|$ of $|L|$, is de determinant van de matrix die de transformatie vastlegt. Dus

$$|\mathcal{L}| = \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$$

De volgende stelling geeft, misschien nogmaals, de meetkundige betekenis van de determinant.

Stelling
De determinant $|\mathcal{L}|$ *van de lineaire transformatie* $\mathcal{L}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *is, op het teken na, gelijk aan de oppervlakte opgespannen door de beeldvectoren* $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ *en* $\mathcal{L}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ *van de standaardbasis* $\vec{e}_1$ *en* $\vec{e}_2$.



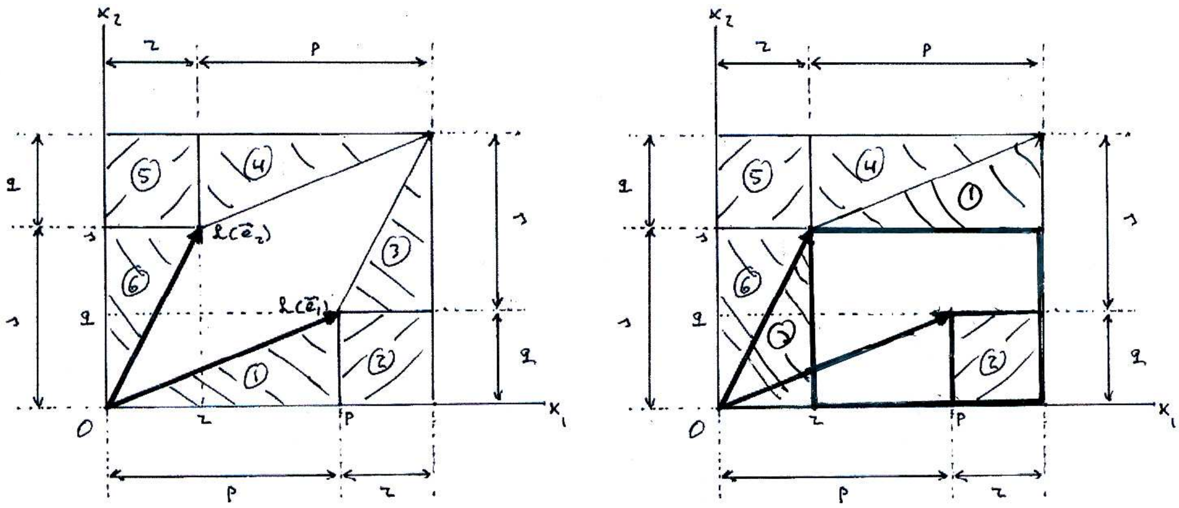
Bij positieve oriëntatie van de vector $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ *naar de vector* $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$*, dus als* $\angle(\mathcal{L}(\vec{e}_1) \to \mathcal{L}(\vec{e}_2)) > 0$*, geldt*

$$O(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)) = \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$$

Bij negatieve oriëntatie van de vector $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ *naar de vector* $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$*, dus als* $\angle(\mathcal{L}(\vec{e}_1) \to \mathcal{L}(\vec{e}_2)) < 0$*, geldt*

$$O(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)) = -\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$$

Bewijs
We bekijken de vectoren $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ in het eerste kwadrant.
Eerst het geval van positieve oriëntatie van de vector $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ naar de vector $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$, dus als $\angle(\mathcal{L}(\vec{e}_1) \to \mathcal{L}(\vec{e}_2)) > 0$. In de volgende figuur links is de oppervlakte $O(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2))$ van het parallellogram opgespannen door de vectoren $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ wit aangegeven.
Verschuiving van de oppervlakten O_1 en O_3 levert de figuur rechts.



Uit de figuur rechts volgt dat voor $O(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2))$ geldt

$$O(\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)) = ps - O_2 = ps - qr = \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$$

Vervolgens het geval $\angle(\mathcal{L}(\vec{e}_1) \to \mathcal{L}(\vec{e}_2)) < 0$. We verwisselen we in de figuur de vectoren $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ met als resultaat

$$O(\mathcal{L}(\vec{e}_2), \mathcal{L}(\vec{e}_1)) = rq - sp = -(ps - qr) = -\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$$

□

Opgaven

IV.1.1 Verdergaand bij het laatste voorbeeld

a) Toon aan dat $(3-\tau)^2 - 4 \cdot 1 = 0$ als oplossingen heeft $\tau = 1$ of $\tau = 5$.

b) Bereken in het laatste voorbeeld de eigenvectoren bij keuze voor het kental in de x_2-richting gelijk 1.

IV.1.2 De lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ uit opgave IV.0.4 die wordt vastgelegd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

heeft slechts één eigenwaarde.

a) Bewijs dit met behulp van de karakteristieke vergelijking.

b) Bereken enkele eigenvectoren bij deze eigenwaarde.

IV.1.4 Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Bereken de eigenwaarde(n).

b) Bereken de bijbehorende eigenvectoren.

c) Geef de vergelijkingen van de deklijnen van deze lineaire transformatie.

IV.1.5 De lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ uit opgave IV.0.5 wordt vastgelegd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bereken de eigenwaarden van $\mathcal{L}$ met behulp van de karakteristieke vergelijking.

b) Bereken bij ieder van de eigenwaarden twee eigenvectoren.

IV.1.6 Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) De vector $\vec{e}_2$ is een eigenvector met eigenwaarde $\tau = 2$.
Hoe volgt direct dit uit de matrix *L*, dus zonder berekening met de karakteristieke vergelijking?

b) Bereken de tweede eigenwaarden van $\mathcal{L}$ met behulp van de karakteristieke vergelijking.

c) Bereken bij ieder van de eigenwaarden twee eigenvectoren.

IV.1.7 De rotatie in $\mathbb{R}^2$ over 60^0 vastgelegd door de matrix

$$R_{60^0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Toon dit aan

b) Deze rotatie heeft geen eigenvectoren. Bewijs dit met behulp van de karakteristieke vergelijking

IV.1.8 De *glijschuiving* $\mathcal{G}_{x_1,\mu}$ in $\mathbb{R}^2$ in de richting van de x_1-as met een factor μ wordt vastgelegd door de matrix

$$G_{x_1,\mu} = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bereken met behulp van de karakteristieke vergelijking de eigenwaarde(n) en bereken de bijbehorende eigenvectoren.

IV.1.9 Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

a) Bereken de eigenwaarde(n).
b) Bereken de bijbehorende eigenvectoren.
c) Toon aan dat eigenvectoren van verschillende eigenwaarden onderling loodrecht staan.
d) Leg dat $\mathcal{L}$ een projectie moet zijn.
e) Op welke lijn is deze projectie? (Geef de formule en de hoek met de x_1-as vanuit het antwoord in b.)

IV.1.10 Verklaar meetkundig dat de determinant van een projectie in $\mathbb{R}^2$ gelijk is aan 0.

IV.1.11 De spiegeling $\mathcal{S}_k$ in $\mathbb{R}^2$ in een lijn *k* die een hoek van 30^0 maakt met de x_1-as heeft als matrix

$$S_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Toon dit aan met de Gauss-Jordan methode
b) Bereken de eigenwaarden met behulp van de karakteristieke vergelijking.
c) Geef de formules voor de deklijnen.

IV.1.12 De eigenvectoren van een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ kunnen ook worden berekend met behulp van de volgende

Stelling
De karakteristieke vergelijking

$$|\mathcal{L} - \tau\mathcal{I}| = 0\,,$$

van een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ heeft dan en slechts een oplossing τ als de vectoren $\mathcal{L}(\vec{e}_1) - \tau\vec{e}_1$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2) - \tau\vec{e}_2$ afhankelijk zijn.
Verder geldt dat als deze vectoren afhankelijk zijn dan zijn er scalars v_1 en v_2, niet beide gelijk 0, zodanig dat

$$v_1(\mathcal{L}(\vec{e}_1) - \tau\vec{e}_1) + v_2(\mathcal{L}(\vec{e}_2) - \tau\vec{e}_2) = \vec{0}$$

en is de vector

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$$

een eigenvector van $\mathcal{L}$ behorend bij de eigenwaarde τ

a) Bewijs deze stelling
b) Bereken de eigenvectoren bij het laatste voorbeeld met behulp van deze stelling

Opmerking
De bestudering van §IV.3, die onafhankelijk is van de volgende paragraaf §IV.2, geeft meer inzicht in deze stelling en wel in het bijzonder het aanhangsel ervan.

IV.2 Symmetrische transformaties

Een belangrijke klasse van lineaire transformaties wordt gevormd door de zogenoemde *symmetrische* transformaties. In $\mathbb{R}^2$ blijken deze transformaties altijd *twee onafhankelijke eigenvectoren* te bezitten die bovendien altijd *onderling loodrecht* staan.
Het grote belang van de symmetrische transformaties komt vooral naar voren in het volgende hoofdstuk over *kegelsneden*.

Definitie
Een lineaire transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ heet *symmetrisch* als bij alle vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^2$ voor het inproduct geldt

$$\langle \mathcal{A}(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{w}) \rangle$$

Opmerking
Voor een herhaling van het inproduct zie aanhangsel 2.

Definitie
Een 2×2 matrix $A = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ heet *symmetrisch* als $q = r$, dus als de matrix *A* van de vorm is

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & s \end{pmatrix}$$

Stelling
Een lineaire transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ is symmetrisch dan en slechts dan als de 2×2 matrix A die de lineaire transformatie vastlegt symmetrisch is.

Bewijs
- Stel de lineaire transformatie $\mathcal{A}$ is symmetrisch.

Om de bijbehorende matrix $A = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ te onderzoeken bekijken we het effect van $\mathcal{A}$ op de basisvectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$. Uit de definitie van de symmetrie van $\mathcal{A}$ volgt

$$\langle \mathcal{A}(\vec{e}_1), \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_1, \mathcal{A}(\vec{e}_2) \rangle$$

Nu geldt

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Dus $\quad \langle \mathcal{A}(\vec{e}_1), \vec{e}_2 \rangle = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = q$

Verder geldt

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

Dus $\quad \langle \vec{e}_1, \mathcal{A}(\vec{e}_2) \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = r$

Resultaat $\quad q = r$

De matrix A is dus symmetrisch.

- Stel de matrix A is symmetrisch, dus $A=\begin{pmatrix} p & q \\ q & s \end{pmatrix}$. We onderzoeken nu het effect op twee willekeurige vectoren $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{w}=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

Er geldt
$$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pv_1+qv_2 \\ qv_1+sv_2 \end{pmatrix}$$

Gevolg
$$\langle \mathcal{A}(\vec{v}),\vec{w}\rangle = A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pv_1+qv_2 \\ qv_1+sv_2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=(pv_1+qv_2)w_1+(qv_1+sv_2)w_2$$
$$= pv_1w_1+q(v_1w_2+v_2w_1)+sv_2w_2$$

Verder geldt
$$A\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pw_1+qw_2 \\ qw_1+sw_2 \end{pmatrix}$$

Gevolg
$$\langle \vec{v},\mathcal{A}(w)\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\bullet A\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} pw_1+qw_2 \\ qw_1+sw_2 \end{pmatrix}=v_1(pw_1+qw_2)+v_2(qw_1+sw_2)$$
$$= pv_1w_1+q(v_1w_2+v_2w_1)+sv_2w_2$$

Voor ieder tweetal vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ geldt dus
$$\langle \mathcal{A}(\vec{v}),\vec{w}\rangle = \langle \vec{v},\mathcal{A}(\vec{w})\rangle$$
en daarom is de lineaire transformatie $\mathcal{A}$ symmetrisch

□

We bewijzen vervolgens twee stellingen over resp. de eigenwaarden en de eigenvectoren van een symmetrische transformatie er vervolgens een omgekeerde stelling.

Stelling

Een symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ heeft altijd twee verschillende eigenwaarden, behalve als de symmetrische transformatie de schaaltransformatie is.

Bewijs

Laat $A=\begin{pmatrix} p & q \\ q & s \end{pmatrix}$ de matrix zijn die de transformatie $\mathcal{A}$ vastlegt.

Er geldt dan
$$A-\tau I=\begin{pmatrix} p-\tau & q \\ q & s-\tau \end{pmatrix}$$

Dit levert als karakteristieke vergelijking
$$\begin{vmatrix} p-\tau & q \\ q & s-\tau \end{vmatrix}=0$$

Gevolg (opgave III.2.2) $\quad \tau^2-(p+s)\tau+ps-q^2=0$

Voor de discriminant geldt

$$D = (-(p+s))^2 - 4\cdot 1\cdot (ps - q^2) = p^2 - 2ps + s^2 + 4q^2$$
$$= (p-s)^2 + 4q^2$$

Deze discriminant is altijd groter of gelijk nul, dus $D \geq 0$. De discriminant is alleen dan nul, $D = 0$, als $p = s$ en $q = 0$ In alle andere gevallen geldt $D > 0$.

De eigenwaarden

$$\tau_+ = \frac{p + s + \sqrt{(p-s)^2 + 4q^2}}{2}$$

en
$$\tau_- = \frac{p + s - \sqrt{(p-s)^2 + 4q^2}}{2}$$

bestaan dus altijd.

Deze eigenwaarden zijn altijd verschillend, behalve als $p = s$ en $q = 0$.

Bij twee dezelfde eigenwaarden geldt dus voor de matrix die de transformatie $\mathcal{A}$ vastlegt

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

Dit is de schaaltransformatie $\mathcal{V}_p$ met een scalar *p*.

□

Stelling

Als $\mathcal{A}$ *een symmetrische transformatie is in* $\mathbb{R}^2$ *en* $\vec{v}$ *en* $\vec{w}$ *zijn eigenvectoren van* $\mathcal{A}$ *bij twee verschillende eigenwaarden* τ_+ *en* τ_- *dan zijn deze eigenvectoren orthogonaal (loodrecht).*

Bewijs

Er geldt $\quad \langle \mathcal{A}(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{w}) \rangle$

waarbij $\quad \langle \mathcal{A}(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \tau_+\vec{v}, \vec{w} \rangle = \tau_+ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

en $\quad \langle \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \tau_-\vec{w} \rangle = \tau_- \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

Gevolg $\quad \tau_+ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \tau_- \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad \Rightarrow \quad (\tau_+ - \tau_-)\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$

Omdat $\tau_+ \neq \tau_-$ volgt hieruit $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ en dus zijn de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ onderling loodrecht.

□

In verband met de toepassing van symmetrische transformaties op kwadratische vormen en kegelsneden (zie §V.1) de volgende

Definitie

De *deklijnen van een symmetrische transformatie in* $\mathbb{R}^2$ voorzien van dezelfde schaal als die van het standaard assenstelsel heten *haakse assen*.

Opmerkingen

1) De haakse assen van een symmetrische transformatie geven we met *x* en *y* aan. De reden is dat deze *eigenassen* een *orthonormaal assenstelsel* vormen.
(Zie ook aanhangsel 2.)

Stel $\vec{v}$ en $\vec{w}$ zijn orthogonale eigenvectoren van een symmetrische transformatie in $\mathbb{R}^2$, dus met $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. Definieer hieruit eigenvectoren met lengte één door $\vec{e}_x = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ en $\vec{e}_y = \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w}$.

Deze vectoren vormen een *orthonormaal stelsel basisvectoren* in $\mathbb{R}^2$, want

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle &= \langle \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}, \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} \rangle \\
&= \frac{1}{|\vec{v}|^2}\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle && \textit{behoud schaling inproduct} \\
&= \frac{1}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 1 && \textit{definitie norm}
\end{aligned}
$$

en

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle &= \langle \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}, \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w} \rangle \\
&= \frac{1}{|\vec{v}||\vec{w}|}\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle && \textit{behoud schaling inproduct} \\
&= \frac{1}{|\vec{v}||\vec{w}|}0 = 0 && \textit{orthogonaliteit}
\end{aligned}
$$

Analoog $\langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle = 1$

De schaal die door deze vectoren langs de deklijnen van de symmetrische transformatie ontstaat is gelijk aan de schaal bij het standaard assen stelsel. Het orthonormale stel basisvectoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ is daarom de basis behorend bij de haakse assen..

2) We zullen de eigenwaarde bij de eigenvector $\vec{e}_x = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ in het vervolg aangeven met τ_x en de eigenwaarde bij de eigenvector $\vec{e}_y = \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w}$ in het vervolg aangeven met τ_y.

Voorbeeld

Gegeven: De symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ vastgelegd door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Gevraagd

a) De eigenwaarden van deze symmetrische transformatie
b) Een orthormale basis behorend bij de haakse assen van $\mathcal{A}$.
c) Een figuur met het standaard assenstelsel en met de eigenassen van $\mathcal{A}$.

Oplossing

a) Er geldt

$$A - \tau I = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\tau & -2 \\ -2 & 8-\tau \end{pmatrix}$$

Dit levert als karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} 5-\tau & -2 \\ -2 & 8-\tau \end{vmatrix} = 0$$

Dus

$$(5-\tau)(8-\tau)-(-2)(-2)=0 \;\Rightarrow\; \tau^2-13\tau+36=0 \;\Rightarrow\; (\tau-4)(\tau-9)=0$$

De eigenwaarden van deze symmetrische transformatie zijn $\tau_x = 4$ en $\tau_y = 9$

(We zijn vrij in de keuze van wat *x* is en wat *y* is. We hadden dus ook kunnen kiezen $\tau_x = 9$ en $\tau_y = 4$.)

b) Laat $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}$ een eigenvector zijn bij $\tau_x = 4$.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}$$

Dus

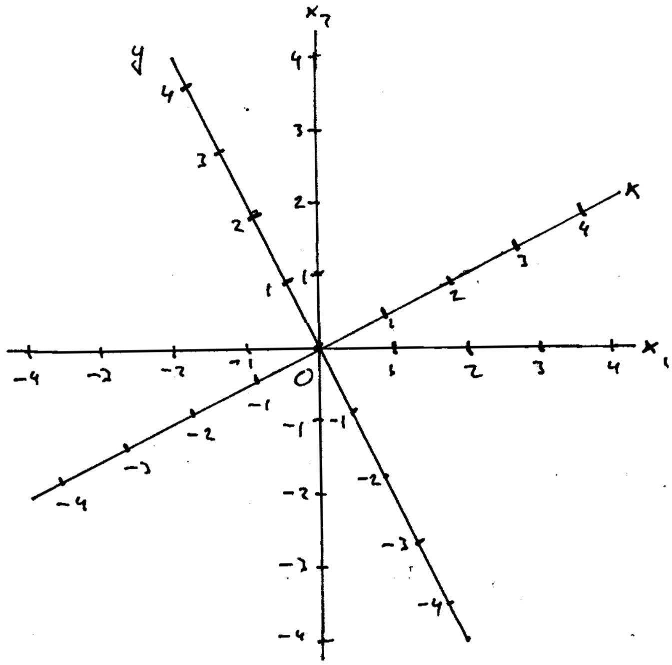
$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 5v-2 \\ -2v+8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 5v-2=4v & \Rightarrow\; v=2 \\ -2v+8=4 & \Rightarrow\; v=2 \end{cases}$$

De vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ is dus een eigenvector bij eigenwaarde $\tau_x = 4$. De eigenvector met lengte één hierbij is $\vec{e}_x = \dfrac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vanwege de orthogonaliteit van de eigenvectoren vinden we een eigenvector met lengte één bij $\tau_y = 9$ met de nevenvector van $\vec{e}_x$

$$\vec{e}_y = \vec{e}_x^{\,*} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) De eigenvector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ is voldoende om de haakse assen te tekenen.
De richting van de *x*-as in het standaard assenstel (x_1, x_2) ligt hiermee vast. Teken met de geodriehoek loodrecht hierop de *y*-as. Teken verder met behulp van de geodriehoek langs de *x*-as en langs de *y*-as dezelfde schaal als langs de standaard assen x_1 en x_2



Omgekeerd is het de vraag of er bij ieder orthonormaal assenstelsel (x, y) en ieder tweetal scalars τ_x en τ_y er een lineaire transformatie $\mathcal{A}$ bestaat waarvan de scalars de eigenwaarden zijn en waarvan de haakse assen het gegeven assenstelsel (x, y) zijn.
Het anwoord is ja vanwege de volgende

Stelling

Als $\vec{v}$ en $\vec{w}$ vectoren zijn in $\mathbb{R}^2$, onderling orthogonaal en beide $\neq \vec{0}$, en er zijn twee willekeurige scalars τ_x en τ_y, dan bestaat er een symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ waarvan $\vec{v}$ en $\vec{w}$ eigenvectoren zijn behorend bij de resp. eigenwaarden τ_x en τ_y.

Bewijs

Laat $\tau_x\vec{v}$ het beeld zijn van de vector $\vec{v}$ en $\tau_y\vec{w}$ het beeld van de vector $\vec{w}$.

Toepassing van de Gauss-Jordan methode op de 4×2 matrix $\begin{bmatrix} [\vec{v},\vec{w}] \\ [\tau_x\vec{v},\tau_y\vec{w}] \end{bmatrix}$ levert de matrix van de transformatie $\mathcal{A}$. Van deze transformatie zijn $\vec{v}$ en $\vec{w}$ de eigenvectoren behorend bij de resp. eigenwaarden τ_x en τ_y.

Rest ons de symmetrie van de transformatie te bewijzen.

Kies als orthonormale basis $\vec{e}_x = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$, $\vec{e}_y = \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w}$. Voor een willekeurige vector $\vec{a}$ geldt $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$ met $a_x = \langle\vec{e}_x,\vec{a}\rangle$ en $a_y = \langle\vec{e}_y,\vec{a}\rangle$ (zie aanhangsel 2 en §I.5) Voor willekeurige vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{A}(\vec{a}),\vec{b}\rangle &= \langle\mathcal{A}(a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y),\vec{b}\rangle \\
&= \langle a_x\mathcal{A}(\vec{e}_x) + a_y\mathcal{A}(\vec{e}_y),\vec{b}\rangle && \textit{lineariteit operator} \\
&= \langle a_x\tau_x\vec{e}_x + a_y\tau_y\vec{e}_y,\vec{b}\rangle && \textit{eigenwaarden} \\
&= a_x\tau_x\langle\vec{e}_x,\vec{b}\rangle + a_y\tau_y\langle\vec{e}_y,\vec{b}\rangle && \textit{lineariteit inproduct} \\
&= \tau_x a_x b_x + \tau_y a_y b_y && \textit{orthormaliteit}
\end{aligned}$$

en analoog

$$\begin{aligned}
\langle\vec{a},\mathcal{A}(\vec{b})\rangle &= \langle\mathcal{A}(\vec{b}),\vec{a}\rangle && \textit{symmetrie inproduct} \\
&= \tau_x b_x a_x + \tau_y b_y a_y
\end{aligned}$$

Gevolg $\quad \langle\mathcal{A}(\vec{a}),\vec{b}\rangle = \langle\vec{a},\mathcal{A}(\vec{b})\rangle$

□

Aanhangsel 1: Spectraalstelling

De twee *eigenwaarden* τ_x en τ_y van een *symmetrische* transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ vormen het zogenoemde *spectrum* van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$.

Verder geldt volgens het voorgaande dat iedere symmetrische transformatie in $\mathbb{R}^2$ twee eigenvectoren $\neq \vec{0}$ heeft die orthogonaal zijn.

Volgens de laatste stelling geldt omgekeerd in $\mathbb{R}^2$ dat bij ieder tweetal vectoren $\neq \vec{0}$ die onderling loodrecht staan en bij ieder tweetal scalars er een symmetrische transformatie bestaat waarvan het tweetal vectoren eigenvectoren zijn en de twee scalars de eigenwaarden. Dit is hierboven bewezen met de Gauss-Jordan methode, maar wordt op een meer meetkundige manier bewezen via de volgende stelling.

Spectraalstelling

Als x en y twee willekeurige lijnen zijn in $\mathbb{R}^2$ *door de oorsprong die orthogonaal staan en* τ_x *en* τ_y *zijn twee scalars dan*

1) *De lineaire transformatie in* $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{A} = \tau_x \mathcal{P}_x + \tau_y \mathcal{P}_y ,$$

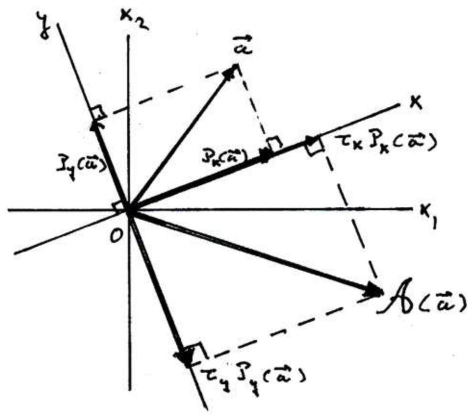
met $\mathcal{P}_x$ *de projectie op de lijn x en* $\mathcal{P}_y$ *de projectie op de lijn y, heeft* τ_x *en* τ_y *als eigenwaarden en verder zijn de positievectoren* $\neq \vec{0}$ *langs de lijn x eigenvectoren bij* τ_x *en zijn de positievectoren* $\neq \vec{0}$ *langs de lijn y eigenvectoren bij* τ_y

2) *De lineaire transformatie* $\mathcal{A}$ *is symmetrisch*

Meetkundige toelichting op de stelling

In de figuur heeft de vector $\vec{a}$ de projectie $\mathcal{P}_x(\vec{a})$ op de lijn *x* en de projectie $\mathcal{P}_y(\vec{a})$ op de lijn *y*. Er geldt hierbij

$$\vec{a} = \mathcal{P}_x(\vec{a}) + \mathcal{P}_y(\vec{a})$$



De projectie op de lijn *x* wordt vermenigvuldigd met de scalar τ_x waardoor de vector $\tau_x \mathcal{P}_x(\vec{a})$ ontstaat. De projectie op de lijn *y* wordt vermenigvuldigd met de scalar τ_y waardoor de vector $\tau_y \mathcal{P}_y(\vec{a})$ ontstaat.

De som van deze vectoren levert het beeld $\mathcal{A}(\vec{a})$ van de origineelvector $\vec{a}$ bij de transformatie $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}(\vec{a}) = \tau_x \mathcal{P}_x(\vec{a}) + \tau_y \mathcal{P}_y(\vec{a})$$

(In de figuur geldt $\tau_x > 0$ en $\tau_y < 0$)

Bewijs van de stelling

1) Laat $\vec{v} \neq \vec{0}$ een positievector zijn gericht langs de lijn *x*. Dan geldt $\mathcal{P}_x(\vec{v}) = \vec{v}$ en $\mathcal{P}_y(\vec{v}) = \vec{0}$. Gevolg

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{v}) &= \tau_x \mathcal{P}_x(\vec{v}) + \tau_y \mathcal{P}_y(\vec{v}) = \tau_x \vec{v} + \tau_y \vec{0} \\ &= \tau_x \vec{v} \end{aligned}$$

Dus $\vec{v} \neq \vec{0}$ langs de lijn *x* is eigenvector bij eigenwaarde τ_x

Laat $\vec{w} \neq \vec{0}$ een positievector zijn gericht langs de lijn *y*. Dan geldt $\mathcal{P}_x(\vec{w}) = \vec{0}$ en $\mathcal{P}_y(\vec{w}) = \vec{w}$. Gevolg

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{w}) &= \tau_x \mathcal{P}_x(\vec{w}) + \tau_y \mathcal{P}_y(\vec{w}) = \tau_x \vec{0} + \tau_y \vec{w} \\ &= \tau_y \vec{w} \end{aligned}$$

Dus $\vec{w} \neq \vec{0}$ langs de lijn *y* is eigenvector bij eigenwaarde τ_y

2) Volgens § III.3 wordt in $\mathbb{R}^2$ wordt de projectie $\mathcal{P}_k$ van vectoren ten opzichte van de lijn *k* vastgelegd door de matrix

$$P_k = \frac{1}{|\vec{k}|^2}\begin{pmatrix} k_1^2 & k_1k_2 \\ k_1k_2 & k_2^2 \end{pmatrix}$$

hierbij is $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ een vector gericht langs de lijn *k*.

De matrix P_k is symmetrisch dus is de projectie $\mathcal{P}_k$ symmetrisch.

(Voor een *meetkundig argument* van de symmetrie van $\mathcal{P}_k$ zie opgave IV.3.5)

Omdat de projecties $\mathcal{P}_x$ en $\mathcal{P}_y$ symmetrische transformaties zijn is ook de lineaire transformatie $\mathcal{A} = \tau_x\mathcal{P}_x + \tau_y\mathcal{P}_y$ symmetrisch. Want de bilineariteit van het inproduct levert voor alle vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}(\vec{v}), \vec{w}\rangle &= \langle (\tau_x\mathcal{P}_x + \tau_y\mathcal{P}_y)(\vec{v}), \vec{w}\rangle \\
&= \tau_x\langle \mathcal{P}_x(\vec{v}), \vec{w}\rangle + \tau_y\langle \mathcal{P}_y(\vec{v}), \vec{w}\rangle \quad \textit{lineariteit inproduct} \\
&= \tau_x\langle \vec{v}, \mathcal{P}_x(\vec{w})\rangle + \tau_y\langle \vec{v}, \mathcal{P}_x(\vec{w})\rangle \quad \textit{symmetrie projectie} \\
&= \langle \vec{v}, (\tau_x\mathcal{P}_x + \tau_y\mathcal{P}_y)(\vec{w})\rangle \quad \textit{lineariteit inproduct} \\
&= \langle \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{w})\rangle
\end{aligned}$$

□

Aanhangsel 2: Herhaling inproduct

Hieronder volgen op een iets ander manier de definities en stellingen van §I.5, maar zonder toelichting met getallenvoorbeelden.

Definitie

Aan ieder tweetal vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ is een reëel getal toegevoegd, genaamd het *inproduct* van deze vectoren en genoteerd als $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle$, gegeven door

$$\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2$$

Opmerking

Uitgedrukt in alleen de kentallen van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ noteert men het inproduct met een punt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$$

De volgende stelling geeft de *algemene algebraïsche eigenschappen van het inproduct*.

Stelling

Voor alle vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ *en* $\vec{c}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *en voor iedere scalar* λ *geldt voor het inproduct*

	$\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = \langle \vec{b},\vec{a}\rangle$	*commutativiteit*
	$\langle \vec{a},\vec{b}+\vec{c}\rangle = \langle \vec{a},\vec{b}\rangle + \langle \vec{a},\vec{c}\rangle$	*behoud optelling*
	$\langle \vec{a},\lambda\vec{b}\rangle = \lambda\langle \vec{a},\vec{b}\rangle$	*behoud schaling*
Verder geldt	$\langle \vec{a},\vec{a}\rangle \geq 0$ met	*nuleigenschap*
	$\vec{a}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \vec{a},\vec{a}\rangle = 0$	

Bewijs

Commutativiteit

Voor $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt

$$\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 = b_1a_1 + b_2a_2 = \langle \vec{b},\vec{a}\rangle$$

Behoud vectoroptelling

Als verder geldt $\vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix} b_1+c_1 \\ b_2+c_2 \end{pmatrix}$ en dus

$$\langle \vec{a},\vec{b}+\vec{c}\rangle = a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2) = a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2$$
$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_2 = \langle \vec{a},\vec{b}\rangle + \langle \vec{a},\vec{c}\rangle$$

Behoud schaling

$$\langle \vec{a},\lambda\vec{b}\rangle = a_1(\lambda b_1) + a_2(\lambda b_2) = \lambda(a_1b_1 + a_2b_2) = \lambda\langle \vec{a},\vec{b}\rangle$$

Nuleigenschap

$$\langle \vec{a},\vec{a}\rangle = a_1a_1 + a_2a_2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2}$$

Dit is altijd positief behalve als zowel $a_1 = 0$ als $a_2 = 0$, dus behalve als $\vec{a}=\vec{0}$

□

Opmerkingen

1) Voor alle vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^2$ en voor iedere scalar λ geldt verder

$\langle \vec{a}+\vec{b},\vec{c}\rangle = \langle \vec{a},\vec{b}\rangle + \langle \vec{b},\vec{c}\rangle$	*behoud optelling*
$\langle \lambda\vec{a},\vec{b}\rangle = \lambda\langle \vec{a},\vec{b}\rangle$	*behoud schaling*

Dit kan net als hierboven worden bewezen, maar volgt ook direct uit de stelling vanwege de *commutativiteit*

$$\langle \vec{a}+\vec{b},\vec{c}\rangle = \langle \vec{c},\vec{a}+\vec{b}\rangle = \langle \vec{c},\vec{a}\rangle + \langle \vec{c},\vec{b}\rangle = \langle \vec{a},\vec{c}\rangle + \langle \vec{b},\vec{c}\rangle$$

en $\quad \langle \lambda\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle \vec{b},\lambda\vec{a}\rangle = \lambda\langle \vec{b},\vec{a}\rangle = \lambda\langle \vec{a},\vec{b}\rangle$

2) Als een bewerking op vectoren zowel optelling behoud als schaling dan noemt men een dergelijke bewerking lineair. Omdat behoud optelling en behoud schaling tussen de haken zowel links als rechts van de komma geldt, dus dubbel, noemt men het inproduct van twee vectoren ook wel een <u>bi</u>*lineaire vorm*.

Definitie

De *lengte* of *norm* van een vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$, notatie $|\vec{a}|$, is per definitie $|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a},\vec{a}\rangle}$

Definitie

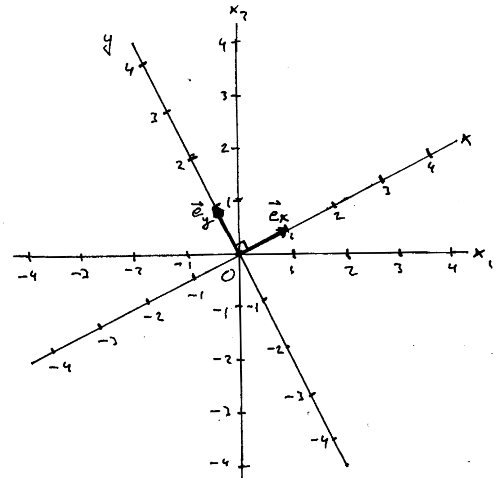
Twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ heten *orthogonaal* als hun inproduct gelijk nul is.

Dus twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ zijn orthogonaal als geldt $\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = 0$

Definitie
Twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ heten *orthonormaal* als zij orthogonaal zijn en als zij beide norm 1 hebben (beide van lengte 1 zijn).

Opmerking over notatie van orthonormale assenstelsels in $\mathbb{R}^2$
Het assenstelsel behorend bij een orthonormale basis wordt een orthonormaal assenstelsel genoemd.
Als we spreken over een *x*-as en een bijbehorende *y*-as in $\mathbb{R}^2$ dan zullen we altijd een orthonormaal assenstelsel bedoelen. De bijbehorende basisvectoren noteren we dan als $\vec{e}_x$ resp. $\vec{e}_y$.
Dit betekent dat in deze notatie altijd moet gelden

$$\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = 1$$
$$\langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle = 1$$
$$\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle = 0$$



Stelling
Als in $\mathbb{R}^2$ $\vec{e}_x$ de eenheidsvector is in de richting van een vector $\vec{k}$ en $\vec{e}_y = \vec{e}_x^{\,*}$ is de nevenvector van $\vec{e}_x$ dan vormen de vectoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ vormen een orthonormale basis in $\mathbb{R}^2$

Bewijs
We moeten aantonen dat voor de vectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ geldt

$$\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = 1, \quad \langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle = 1 \quad \text{en} \quad \langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle = 0$$

Er geldt $\vec{e}_x = \dfrac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ dus

$$\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = \langle \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \rangle = \frac{\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle}{|\vec{k}|^2} \qquad \textit{behoud schaling}$$

$$= \frac{\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle^2}} = 1 \qquad \textit{definitie norm}$$

Als $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dan $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1^{\,2} + u_2^{\,2} = 1$. Dit betekent voor de nevenvector

$$\langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = (-u_2)^2 + u_1^{\,2} = 1$$

en ook

$$\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = u_1(-u_2) + u_2 \cdot u_1 = 0$$

□

Stelling
Als in $\mathbb{R}^2$ de vector $\vec{a}$ ten opzichte van de orthonormale basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ de resp. kentallen a_x en a_y heeft en de vector $\vec{b}$ de resp. kentallen b_x en b_y, dus als geldt $\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$ en *$\vec{b} = b_x \cdot \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y$, dan geldt voor het inproduct van deze vectoren*

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y$$

Bewijs

$$\begin{aligned}\langle \vec{a},\vec{b}\rangle &= \langle a_x\cdot\vec{e}_x + a_y\cdot\vec{e}_y, b_x\cdot\vec{e}_x + b_y\cdot\vec{e}_y\rangle \\ &= \langle a_x\cdot\vec{e}_x, b_x\cdot\vec{e}_x\rangle + \langle a_x\cdot\vec{e}_x, b_y\cdot\vec{e}_y\rangle + \langle a_y\cdot\vec{e}_y, b_x\cdot\vec{e}_x\rangle + \langle a_y\cdot\vec{e}_y, b_y\cdot\vec{e}_y\rangle && \textit{behoud optelling} \\ &= a_xb_x\langle\vec{e}_x,\vec{e}_x\rangle + a_xb_y\langle\vec{e}_x,\vec{e}_y\rangle + a_yb_x\langle\vec{e}_y,\vec{e}_x\rangle + a_yb_y\langle\vec{e}_y,\vec{e}_y\rangle && \textit{behoud schaling} \\ &= a_xb_x1 + a_xb_y0 + a_yb_x0 + a_yb_y1 && \textit{orthonormaliteit} \\ &= a_xb_x + a_yb_y\end{aligned}$$

□

Opmerking: De algemene betekenis van de stelling.

Welk orthonormaal assenstelsel (x, y) *er ook wordt gekozen, altijd is er dezelfde formule voor het inproduct.*
Ten opzichte van de bijbehorende orthonormale basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ geldt immers altijd

$$\vec{a} = a_x\cdot\vec{e}_x + a_y\cdot\vec{e}_y \qquad \text{en} \qquad \vec{b} = b_x\cdot\vec{e}_x + b_y\cdot\vec{e}_y$$

met $$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = a_xb_x + a_yb_y$$

Bij het standaard-assenstelsel (x_1, x_2) levert dit nogmaals de definitie van het inproduct.

$$\vec{a} = a_1\cdot\vec{e}_1 + a_2\cdot\vec{e}_2 \qquad \text{en} \qquad \vec{b} = b_1\cdot\vec{e}_1 + b_2\cdot\vec{e}_2$$

met $$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = a_1b_1 + a_1b_1$$

Een direct gevolg van deze stelling is de volgende

Stelling
Als in $\mathbb{R}^2$ *de vectoren* $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ *een orthonormale basis vormen in* $\mathbb{R}^2$ *dan geldt voor de kentallen van een vector* $\vec{b} = b_x\cdot\vec{e}_x + b_y\cdot\vec{e}_y$

$$b_x = \langle\vec{e}_x,\vec{b}\rangle$$
$$b_y = \langle\vec{e}_y,\vec{b}\rangle$$

Bewijs
Kies in $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = a_xb_x + a_yb_y$ voor de eerste vector $\vec{a} = \vec{e}_x$, dus $\vec{a} = 1\cdot\vec{e}_x + 0\cdot\vec{e}_y$. Dit betekent $\langle\vec{e}_x,\vec{b}\rangle = 1\cdot b_x + 0\cdot b_y = b_x$
Analoog volgt uit de keuze $\vec{a} = \vec{e}_y$ dat $b_y = \langle\vec{e}_y,\vec{b}\rangle$

□

Opgaven

IV.2.1 a) Toon aan dat uit de karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} p-\tau & q \\ q & s-\tau \end{vmatrix} = 0$$

volgt $\tau^2 - (p+s)\tau + ps - q^2 = 0$

b) Toon aan dat geldt $D = (-(p+s))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (ps - q^2) = p^2 - 2ps + s^2 + 4q^2$

c) Toon aan dat geldt $D = (p-s)^2 + 4q^2$

IV.2.2 Een symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Bereken de eigenwaarden van deze transformatie

b) Bereken de eigenvectoren behorend bij deze transformatie.

c) Toon door berekening aan dat het inproduct van eigenvectoren met verschillende eigenwaarden gelijk is aan 0.

d) Teken een figuur met het standaard assenstelsel en met de eigenassen van $\mathcal{A}$.

IV.2.3 Gegeven in $\mathbb{R}^2$ de lijn $x : x_2 = 3x_1$

a) Geef de vergelijking van een lijn y door de oorsprong die orthogonaal is op de lijn *x*.

b) Bereken de matrix van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ waarvan de eigenvectoren in de *x*-richting eigenwaarde 4 hebben en de eigenvectoren in de *y*-richting eigenwaarde -1.

IV.2.4 De matrix van de projectie $\mathcal{P}_x$ in $\mathbb{R}^2$ op een lijn *x* door de oorsprong die een hoek van 45^0 maakt met de x_1-as wordt gegeven door

$$P_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Toon dit aan

b) Bereken ook de matrix van de projectie in $\mathbb{R}^2$ op een lijn *y* door de oorsprong die een hoek van 145^0 maakt met de x_1-as.

c) Stel de matrix op van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ waarvan de eigenvectoren in de *x*-richting eigenwaarde 4 hebben en de eigenvectoren in de *y*-richting eigenwaarde -2

IV.2.5 Met behulp van de projectiestelling (§I.6)

$$\begin{pmatrix} \text{inproduct van} \\ \text{twee vectoren} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{lengte van de} \\ \text{eerste vector} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{kental projectie van de tweede} \\ \text{vector langs de eerste vector} \end{pmatrix}$$

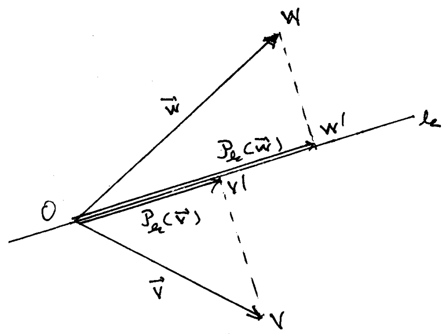
is de symmetrie van de projectie meetkundig te bewijzen.

Toon aan dat in de figuur rechts geldt $\langle \mathcal{P}_k(\vec{w}), \vec{v} \rangle = OW' \cdot OV'$ en

ook $\langle \vec{w}, \mathcal{P}_k(\vec{v}) \rangle = \langle \mathcal{P}_k(\vec{v}), \vec{w} \rangle = OV' \cdot OW'$

(In feite geldt hierbij $\langle \vec{w}, \mathcal{P}_k(\vec{v}) \rangle = \langle \mathcal{P}_k(\vec{w}), \vec{v} \rangle = \langle \mathcal{P}_k(\vec{w}), \mathcal{P}_k(\vec{v}) \rangle$.)

Met als gevolg $\langle \mathcal{P}_k(\vec{w}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{w}, \mathcal{P}_k(\vec{v}) \rangle = OW' \cdot OV'$



IV.3 Determinant, omkeerbaarheid en niet-omkeerbaarheid van een lineaire transformatie

In §IV.1 is bij de stellingen over lineaire transformaties in $\mathbb{R}^2$ de nadruk gelegd op het verband tussen eigenwaarde 0 en determinant 0, omdat dat direct leidt tot de karakteristieke vergelijking die bepaalt of een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ al of niet eigenwaarden heeft.
In deze paragraaf wordt de betekenis uitgewerkt van de volgende variant op deze stellingen.

Stelling
Bij een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt:
De beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de standaardbasis zijn afhankelijk dan en slechts dan als voor de determinant van de lineaire transformatie gelijk is aan 0, , dus als $|\mathcal{L}| = 0$.

Bewijs
Zie opgave IV.3.1

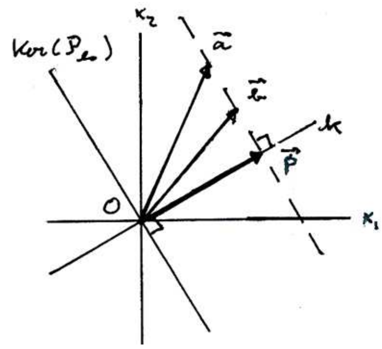
□

In deze paragraaf wordt besproken hoe deze stelling samenhangt met de zogenoemde *omkeerbaarheid* van een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ en in het aanhangsel wordt de meetkundige betekenis van deze stelling belicht voor het geval $|\mathcal{L}| = 0$.

Nu eerste de definitie van omkeerbaarheid

Definitie
Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ heet *omkeerbaar,* of ook wel *inverteerbaar,* als geldt
1) De transformatie is *surjectief*:
   Dit betekent dat iedere vector in $\mathbb{R}^2$ is beeld van een origineelvector.
   Dus voor iedere vector $\vec{p}$ uit $\mathbb{R}^2$ bestaat er een vector $\vec{a}$ uit $\mathbb{R}^2$ zodanig dat $\vec{a} = \mathcal{L}(\vec{p})$.
2) De transformatie is *injectief*:
   Dit betekent dat verschillende vectoren in $\mathbb{R}^2$ altijd een verschillend beeld hebben.
   Dus als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ uit $\mathbb{R}^2$ verschillend zijn, d.w.z. $\vec{a} \neq \vec{b}$, dan zijn ook de beelden in $\mathbb{R}^2$ verschillende vectoren, d.w.z. $\mathcal{L}(\vec{a}) \neq \mathcal{L}(\vec{b})$.

Voorbeeld van een niet-omkeerbare lineaire transformatie



Bij de projectie $\mathcal{P}_k$ in $\mathbb{R}^2$ op een lijn *k* door de oorsprong hebben die positievectoren beeld $\vec{0}$ die langs de lijn door de oorsprong liggen loodrecht op de lijn *k*. De lijn wordt loodrecht *k* wordt genoteerd als $Ker(\mathcal{P}_k)$ (zie ook het aanhangsel).
Deze *projectie* is *niet omkeerbaar* omdat
1) Niet iedere vector in $\mathbb{R}^2$ is beeld van de projectie op *k*. Alleen de vectoren langs *k* zijn beeld bij de projectie. Dus $\mathcal{P}_k$ is niet surjectief.
2) In de figuur staat de lijn door de koppen van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht op de lijn *k*. Beide vectoren hebben dezelfde beeldvector $\vec{p}$. Dus $\mathcal{P}_k$ is ook niet injectief.

Opmerking

Het *criterium voor injectiviteit* van een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ is volgens de definitie

Voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt: $\vec{a} \neq \vec{b} \;\; \Rightarrow \;\; \mathcal{L}(\vec{a}) \neq \mathcal{L}(\vec{b})$.

Een *logisch gelijkwaardig criterium voor injectiviteit* is

Voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt: $\mathcal{L}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{b}) \;\; \Rightarrow \;\; \vec{a} = \vec{b}$.

Stelling

Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ is omkeerbaar dan en slechts dan als voor de determinant geldt $|\mathcal{L}| \neq 0$.

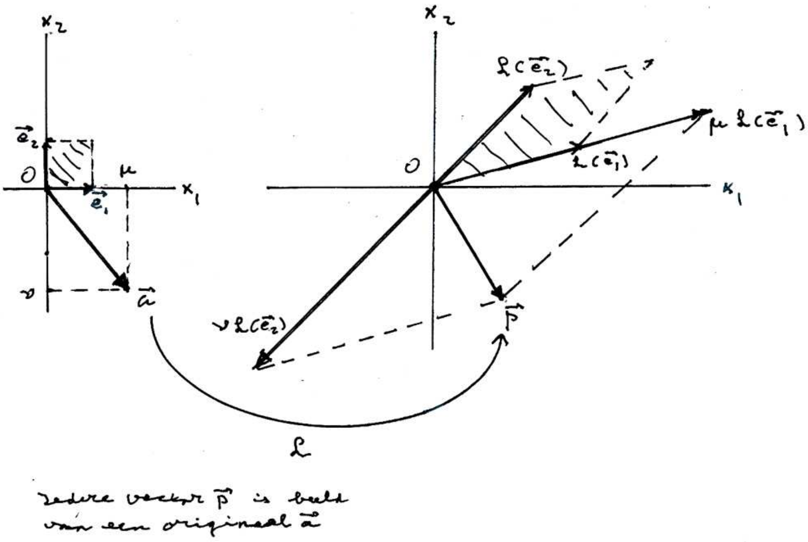
Bewijs

- Stel de $\mathcal{L}$ is *omkeerbaar*.

De beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de standaardbasis moeten dan onafhankelijk zijn.
Want stel het tegendeel: $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ zijn wel afhankelijk. Dit zou dan betekenen dat er een scalar κ bestaat zodanig dat $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \kappa\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ (en/of een scalar μ bestaat zodanig dat $\mathcal{L}(\vec{e}_2) = \mu\mathcal{L}(\vec{e}_1)$). Vanwege het behoud van schaling bij $\mathcal{L}$ geldt dan $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \mathcal{L}(\kappa\vec{e}_2)$, terwijl ook geldt $\vec{e}_1 \neq \kappa\vec{e}_2$. Dit is strijdig met de injectiviteit van $\mathcal{L}$.
Omdat $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ dus onafhankelijk zijn is volgens de voorgaande stelling $|\mathcal{L}| \neq 0$

- Stel $|\mathcal{L}| \neq 0$

De beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de standaardbasis zijn dan onafhankelijk volgens de voorgaande stelling en deze beelden vormen een nieuwe basis voor $\mathbb{R}^2$.



1) $\mathcal{L}$ is dan *surjectief* omdat:
Een willekeurige vector $\vec{p}$ in $\mathbb{R}^2$ heeft kentallen μ en ν ten opzichte van deze basis, dus
$\vec{p} = \mu\mathcal{L}(\vec{e}_1) + \nu\mathcal{L}(\vec{e}_2)$
Deze willekeurige vector $\vec{p}$ is beeld van de origineelvector
$\vec{a} = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}$, d.w.z. $\vec{p} = \mathcal{L}(\vec{a})$, omdat
$\mathcal{L}(\vec{a}) = \mu\mathcal{L}(\vec{e}_1) + \nu\mathcal{L}(\vec{e}_2)$.

2) $\mathcal{L}$ is dan *injectief* omdat:
Stel $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zijn
vectoren in $\mathbb{R}^2$ met gelijke beelden, dus met $\mathcal{L}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{b})$.
Omdat $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ een basis vormen voor $\mathbb{R}^2$ zijn daarom bij de beeldvectoren
$\mathcal{L}(\vec{a}) = a_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ en $\mathcal{L}(\vec{b}) = b_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + b_2\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ de kentallen gelijk, d.w.z.
$a_1 = b_1$ en $a_2 = b_2$. Dus geldt voor de originelen gelden $\vec{a} = \vec{b}$.

□

Definitie
Bij een omkeerbare lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ bestaat een zogenoemde *inverse transformatie,* notatie $\mathcal{L}^{-1}$, gegeven door:
Als de vector $\vec{p}$ in $\mathbb{R}^2$ het $\mathcal{L}$-beeld is van een vector $\vec{a}$, dus als $\vec{p} = \mathcal{L}(\vec{a})$, dan is $\vec{a}$ het $\mathcal{L}^{-1}$-beeld van $\vec{p}$, dus dan $\vec{a} = \mathcal{L}^{-1}(\vec{p})$.

Opmerkingen
1) Bij een *inverse transformatie* is de rol *van origineel en beeld omgekeerd*. Voor de omkeerbare lineaire transformatie $\mathcal{L}$ is in de definitie de vector $\vec{a}$ het origineel en de vector $\vec{p}$ het beeld.
   Voor de inverse transformatie $\mathcal{L}^{-1}$ is $\vec{p}$ het origineel en $\vec{a}$ het beeld.
2) Deze rolomkering van origineel en beeld is alleen mogelijk als iedere vector van $\mathbb{R}^2$ beeld is van een origineel (surjectiviteit van $\mathcal{L}$) en als ieder beeld afkomstig van slechts één origineel (injectiviteit van $\mathcal{L}$). In de definitie is de omkeerbaarheid van $\mathcal{L}$ dus een noodzaak.

Vanwege de volgende stelling over de inverse van een omkeerbare lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ bestaat ook de matrix die deze inverse transformatie vastlegt.

Stelling
De inverse $\mathcal{L}^{-1}$ van een omkeerbare lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ is ook lineair.

Bewijs
Laat $\vec{p}$ en $\vec{q}$ vectoren zijn in $\mathbb{R}^2$ met resp. $\mathcal{L}^{-1}$-beelden $\vec{a}$ en $\vec{b}$, dus met $\vec{a} = \mathcal{L}^{-1}(\vec{p})$ en $\vec{b} = \mathcal{L}^{-1}(\vec{q})$. Laat λ een scalar zijn.
- Er geldt *behoud optelling* want:

Omdat $\vec{p} = \mathcal{L}(\vec{a})$ en $\vec{q} = \mathcal{L}(\vec{b})$ geldt vanwege het behoud van optelling bij $\mathcal{L}$ dat $\vec{p} + \vec{q} = \mathcal{L}(\vec{a}) + \mathcal{L}(\vec{b}) = \mathcal{L}(\vec{a} + \vec{b})$ met als gevolg $\mathcal{L}^{-1}(\vec{p} + \vec{q}) = \vec{a} + \vec{b}$, terwijl ook geldt $\vec{a} = \mathcal{L}^{-1}(\vec{p})$ en $\vec{b} = \mathcal{L}^{-1}(\vec{q})$. Resultaat: $\mathcal{L}^{-1}(\vec{p} + \vec{q}) = \mathcal{L}^{-1}(\vec{p}) + \mathcal{L}^{-1}(\vec{q})$.
- Er geldt *behoud schaling* omdat:

Uit $\vec{p} = \mathcal{L}(\vec{a})$ volgt uit het behoud van schaling bij $\mathcal{L}$ dat $\lambda\vec{p} = \lambda\mathcal{L}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\lambda\vec{a})$ met als gevolg $\mathcal{L}^{-1}(\lambda\vec{p}) = \lambda\vec{a}$, terwijl ook geldt $\vec{a} = \mathcal{L}^{-1}(\vec{p})$. Resultaat: $\mathcal{L}^{-1}(\lambda\vec{p}) = \lambda\mathcal{L}^{-1}(\vec{p})$.

□

Opmerking
Uitgaande van bovengenoemde omkering van origineel en beeld bij de inverse kan met de *Gauss-Jordan methode* de matrix L^{-1} van de inverse transformatie $\mathcal{L}^{-1}$ worden bepaald als de matrix L van een omkeerbare lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ bekend is.
Schematisch werkt dit als volgt:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} [\vec{e}_1\ ,\ \vec{e}_2] \\ [\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)] \end{bmatrix} \\ I \quad II \end{array} \xrightarrow[II" = \mu_1 I + \mu_2 II]{I" = \lambda_1 I + \lambda_2 II} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} [\mathcal{L}^{-1}(\vec{e}_1), \mathcal{L}^{-1}(\vec{e}_2)] \\ [\vec{e}_1\ ,\ \vec{e}_2] \end{bmatrix} \\ I" \quad II" \end{array}$$

Door geschikte lineaire combinaties van de kolommen I en II wordt bij de beelden van $\mathcal{L}$ de matrix $L = [\mathcal{L}(\vec{e}_1), \mathcal{L}(\vec{e}_2)]$ omgezet in de eenheidsmatrix $I = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$.

Dit heeft tot gevolg dat bij de originelen van $\mathcal{L}$ de eenheidsmatrix $I=\left[\vec{e}_1,\vec{e}_2\right]$ wordt omgezet in de matrix $L^{-1}=\left[\mathcal{L}^{-1}(\vec{e}_1),\mathcal{L}^{-1}(\vec{e}_2)\right]$. Vanwege de genoemde verwisseling van de rollen staan bij de inverse $\mathcal{L}^{-1}$ de beelden immers boven en de originelen onder.

Voorbeeld

Gegeven: Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$L=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

Gevraagd:

a) Waarom is $\mathcal{L}$ omkeerbaar?

b) De matrix L^{-1} van de inverse transformatie $\mathcal{L}^{-1}$ met behulp van de Gauss-Jordan methode.

c) Het $\mathcal{L}^{-1}$-beeld van de vector $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ met behulp van de matrix L^{-1} .
Geef een verklaring van het resultaat.

d) Geef zonder berekening met de matrix L^{-1} het $\mathcal{L}^{-1}$-beeld van de vector $\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

Oplossing

a) Er geldt $$|L|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=-2$$

Dus $|L|\neq 0$ en volgens bovenstaand criterium is $\mathcal{L}$ omkeerbaar.

b)

$$\underset{I\quad II}{\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\end{matrix}\right]}\xrightarrow[II'=3I-1II]{I'=2I-1II}\underset{I'\quad II'}{\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\end{matrix}\right]}\xrightarrow[II''=\frac{1}{2}II']{I''=-1I'}\underset{I''\quad II''}{\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{matrix}\right]}$$

Resultaat $$L^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

c) $$L^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\cdot 1+3\cdot 2\\ 2\cdot 1+(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Dit resultaat is een voorbeeld van het algemene beginsel dat bij de inverse transformatie de rol van origineel en beeld zijn omgekeerd.
In b) is bij kolom I voor de inverse transformatie $\mathcal{L}^{-1}$ het origineel onder de vector $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en het beeld boven de vector $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

d) In kolom *II* bij b) is $\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ het origineel voor $\mathcal{L}^{-1}$ en $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ het beeld.

Dus $\mathcal{L}^{-1}(\vec{w})=\vec{e}_2$.

Opmerking
Er is bestaat nog een veel gebruikte manier om het nemen van een inverse te bezien: *De inverse* $\mathcal{L}^{-1}$ *van een omkeerbare lineaire transformatie* $\mathcal{L}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *heft de werking van* $\mathcal{L}$ *op*.
Dit valt het beste in te zien met behulp van de pijlnotatie voor een lineaire transformatie:

$$\vec{a} \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \vec{p} \xrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{} \vec{a}$$

De transformatie $\mathcal{L}$ voert een vector $\vec{a}$ over in een vector $\vec{p}$. Past men vervolgens de inverse transformatie $\mathcal{L}^{-1}$ toe dan wordt de vector $\vec{p}$ weer overgevoerd in de vector $\vec{a}$. Dus het na elkaar toepassen van de transformaties $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}^{-1}$ levert weer de oorspronkelijke vector $\vec{a}$. Iets anders genoteerd geldt
In termen van de haakjesnotatie geldt

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p} = \mathcal{L}(\vec{a}) \\ \vec{a} = \mathcal{L}^{-1}(\vec{p}) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(\vec{a})\right)$$

Aanhangsel: Meetkundige aspecten van het geval $|\mathcal{L}| = 0$.

Volgens de eerste stelling van deze paragraaf betekent dit geval dat voor een dergelijke lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ de beelden $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ van de standaardbasis afhankelijk zijn.
We gaan in dit aanhangsel verder uit van het geval dat $\mathcal{L}(\vec{e}_2) \neq \vec{0}$ en dan betekent de genoemde afhankelijkheid dat er een scalar κ bestaat zodanig dat

$$\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \kappa\mathcal{L}(\vec{e}_2)$$

Door enkele meetkundige consequenties van dit verband uit te werken zullen we langs een andere weg als hierboven in gaan zien dat in dit geval de lineaire transformatie niet-omkeerbaar is.
Dit zal gebeuren door dit verband tussen de beelden van de standaardbasis te combineren met de formule $\mathcal{L}(\vec{a}) = a_1\mathcal{L}(\vec{e}_1) + a_2\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ die geldt voor iedere vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ in $\mathbb{R}^2$ vanwege de lineariteit van $\mathcal{L}$.
Aldus: Voor het $\mathcal{L}$-beeld van iedere vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ in $\mathbb{R}^2$ geldt in dit aanhangsel

$$\mathcal{L}(\vec{a}) = (\kappa a_1 + a_2)\mathcal{L}(\vec{e}_2)$$

Het *eerste meetkundige gevolg* van deze formule betreft het *beeld van* $\mathcal{L}$.

Definitie
Het *beeld van een lineaire transformatie* $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$, notatie $Beeld(\mathcal{L})$, bestaat uit alle vectoren in $\mathbb{R}^2$ die $\mathcal{L}$-beeld zijn van een andere vector in $\mathbb{R}^2$.

Vanwege de laatste formule zijn *alle vectoren uit* $Beeld(\mathcal{L})$ van de lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in dit aanhangsel *volgens één lijn* door de oorsprong gericht, en wel die lijn die in de richting staat van de vector $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$. De lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in dit aanhangsel is daarom *niet-surjectief*, want er zijn vectoren in $\mathbb{R}^2$ die geen $\mathcal{L}$-beeld van een vector in $\mathbb{R}^2$ zijn. Immers de vectoren in $\mathbb{R}^2$ die niet gericht zijn volgens de lijn van $Beeld(\mathcal{L})$ zijn geen $\mathcal{L}$-beeld van een vector in $\mathbb{R}^2$.

Een *tweede meetkundig gevolg* betreft de *kern* van een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$.

Definitie
De *kern* van een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$, notatie $Ker(\mathcal{L})$, bestaat uit alle vectoren in $\mathbb{R}^2$ die de vector $\vec{0}$ als beeld hebben..

Stelling
Als bij een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ voor de beelden van de standaardbasis geldt dat er een scalar κ bestaat zodanig dat $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \kappa\mathcal{L}(\vec{e}_2)$, met verder met $\mathcal{L}(\vec{e}_2) \neq \vec{0}$, dan bestaat $Ker(\mathcal{L})$ uit precies die vectoren die gericht zijn volgens de lijn $x_2 = -\kappa x_1$

Bewijs
Stel $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ behoort tot $Ker(\mathcal{L})$ dan geldt per definitie $\mathcal{L}(\vec{v}) = \vec{0}$. Verder geldt

$\mathcal{L}(\vec{v}) = (\kappa v_1 + v_2)\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ met $\mathcal{L}(\vec{e}_2) \neq \vec{0}$. Dus $\kappa v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -\kappa v_1$.
Dit betekent dat alle vectoren die gericht zijn volgend de lijn $x_2 = -\kappa x_1$ tot $Ker(\mathcal{L})$ behoren.
Voor vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ die niet tot $Ker(\mathcal{L})$ behoren geldt $v_2 \neq -\kappa v_1$. Deze vectoren zijn dus niet gericht volgens de lijn $x_2 = -\kappa x_1$.

□

De *meetkundige betekenis van de kern* van een lineaire afbeelding komt vooral naar voren door de volgende stelling, die overigens ook geldt voor het geval $|\mathcal{L}| \neq 0$

Stelling
Voor iedere lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt:
Twee vectoren hebben dan en slechts dan hetzelfde beeld als hun verschilvector tot $Ker(\mathcal{L})$ behoort.

Bewijs
Stel de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ hebben hetzelfde beeld dus $\mathcal{L}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{b})$. Hieruit volgt $\mathcal{L}(\vec{a}) - \mathcal{L}(\vec{b}) = \vec{0}$ en vanwege de lineariteit van $\mathcal{L}$ geldt daarom $\mathcal{L}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$. Het verschil $\vec{a} - \vec{b}$ behoort dus tot $Ker(\mathcal{L})$.
Stel de van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ behoort het verschil tot $Ker(\mathcal{L})$, dus $\mathcal{L}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$. Vanwege de lineariteit van $\mathcal{L}$ geldt daarom $\mathcal{L}(\vec{a}) - \mathcal{L}(\vec{b}) = \vec{0}$ en dus $\mathcal{L}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{b})$. De vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ hebben derhalve hetzelfde beeld.

□

Opmerking
Als $Ker(\mathcal{L})$ vectoren $\neq \vec{0}$ bevat dan zijn dit eigenvectoren van de lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ met eigenwaarde 0.

Met $Beeld(\mathcal{L})$ en de twee stellingen voor $Ker(\mathcal{L})$ kan de situatie waarbij $\left|\mathcal{L}\right| = 0$ als volgt meetkundig worden toegelicht:

Voorbeeld

Gegeven: Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Gevraagd:

a) Er geldt $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \kappa \mathcal{L}(\vec{e}_2)$. Wat is de waarde van de scalar κ?

b) Teken in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) de lijn door de oorsprong volgens welke de vectoren uit $Beeld(\mathcal{L})$ zijn gericht

c) Leg uit dat $\mathcal{L}$ niet-surjectief is.

d) Geef de formule van de lijn door de oorsprong volgens welke de vectoren uit $Ker(\mathcal{L})$ zijn gericht.
Teken ook deze lijn in het standaard assenstelsel

e) Teken de positievectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Teken in stippels de lijn *l* door de koppen van deze vectoren.
Teken verder de verschilvector $\vec{b} - \vec{a}$ langs deze lijn

Uit de figuur zal blijkt dat de lijn *l* en de lijn van $Ker(\mathcal{L})$ evenwijdig zijn.

Dit beteken dat de verschilvector $\vec{b} - \vec{a}$ langs *l* tot $Ker(\mathcal{L})$ behoort.

f) Toon dit ook aan met behulp van de kentallen van $\vec{b} - \vec{a}$ en de formule uit d).

Er geldt de volgende uitspraak

Alle positievectoren waarvan de koppen liggen op een lijn evenwijdig aan de lijn door de oorsprong van $Ker(\mathcal{L})$ hebben hetzelfde $\mathcal{L}$–beeld.

g) Bewijs de waarheid deze uitspraak met behulp van de laatste stelling.

h) Leg uit dat $\mathcal{L}$ niet-injectief is.

i) Bereken de $\mathcal{L}$–beelden van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$

De positievector $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ heeft zijn kop niet op de lijn *l*.

Dit blijkt uit:

j) Teken deze vector in het standaard assenstelsel

k) Hoe blijkt dit ook uit de kentallen van de verschilvector $\vec{c} - \vec{a}$?

Er geldt de volgende uitspraak

Twee positievectoren waarvan de koppen niet liggen op een lijn evenwijdig aan de lijn door de oorsprong van $Ker(\mathcal{L})$ hebben een verschillende $\mathcal{L}$–beelden.

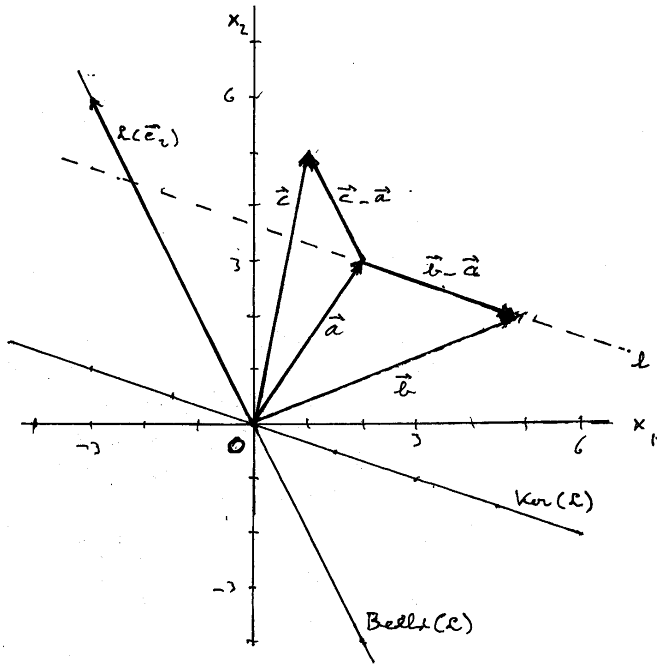
l) Bewijs de waarheid deze uitspraak met behulp van de laatste stelling.

m) Bereken het $\mathcal{L}$–beeld van de vector $\vec{c}$.

Oplossing

a) Er geldt $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Dus $\kappa = \frac{1}{3}$ omdat $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) In de figuur wordt ook de lijn door *O* in de richting $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ aangegeven met $Beeld(\mathcal{L})$



c) De vectoren in $\mathbb{R}^2$ die niet gericht zijn volgens $Beeld(\mathcal{L})$ zijn geen $\mathcal{L}$-beeld van een vector in $\mathbb{R}^2$. Dus is $\mathcal{L}$ niet-injectief.

d) De vectoren van $Ker(\mathcal{L})$ zijn volgens de voorlaatste stelling gericht volgens de lijn $x_2 = \kappa x_1$ met $\kappa = \frac{1}{3}$, dus gericht volgens de lijn $x_2 = -\frac{1}{3}x_1$. In de figuur is ook deze lijn aangeven met $Ker(\mathcal{L})$

e) Zie figuur

f) Er geldt $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Volgens $x_2 = -\frac{1}{3}x_1$ geldt als $x_1 = 3$ dan $x_2 = -1$, dus is $\vec{b} - \vec{a}$ gericht volgens deze lijn. Dit betekent dat $\vec{b} - \vec{a}$ tot $Ker(\mathcal{L})$ behoort.

e) Als van positievectoren, zoals hierboven $\vec{a}$ en $\vec{b}$, de koppen liggen op een lijn evenwijdig aan de lijn van $Ker(\mathcal{L})$ dan behoort hun verschil, zoals hierboven $\vec{b} - \vec{a}$, tot $Ker(\mathcal{L})$.

Volgens de laatste stelling hebben vectoren waarvan het verschil tot $Ker(\mathcal{L})$ behoort hetzelfde $\mathcal{L}$-beeld.

Gevolg: Positievectoren waarvan hun koppen op een lijn liggen evenwijdig aan de lijn van $Ker(\mathcal{L})$ hebben alle hetzelfde $\mathcal{L}$-beeld .

f) Volgens het meetkundige argument uit e) is voor de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ het $\mathcal{L}$-beeld gelijk. Berekening met de matrix *L* bevestigt dit.

$$\mathcal{L}(\vec{a}) = L\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 2 + (-3)\cdot 3 \\ 2\cdot 2 + 6\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(\vec{b}) = L\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 5 + (-3)\cdot 2 \\ 2\cdot 5 + 6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 22 \end{pmatrix}$$

g) Zie figuur.

h)
$$\vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Volgens de lijn $x_2 = -\frac{1}{3}x_1$ van $Ker(\mathcal{L})$ geldt als $x_1 = -1$ dan $x_2 = \frac{1}{3}$. De verschilvector $\vec{c} - \vec{a}$ is dus niet gericht volgens de lijn *l* die evenwijdig is aan deze lijn.

De kop van positievector $\vec{a}$ ligt deze lijn. De kop van positievector $\vec{c}$ ligt dus niet op *l* omdat de verplaatsingsvector $\vec{c} - \vec{a}$ van de kop van $\vec{a}$ naar de kop van $\vec{c}$ niet volgens *l* is gericht.

j) Als van twee positievectoren, zoals hierboven $\vec{a}$ en $\vec{c}$, de koppen niet liggen op een lijn evenwijdig aan de lijn van $Ker(\mathcal{L})$ dan behoort hun verschil, zoals hierboven $\vec{c} - \vec{a}$, niet tot $Ker(\mathcal{L})$.

Volgens de laatste stelling hebben twee vectoren waarvan het verschil niet tot $Ker(\mathcal{L})$ behoort ook een verschillend $\mathcal{L}$-beeld.

k) Ook volgens een berekening geldt $\mathcal{L}(\vec{a}) \neq \mathcal{L}(\vec{c})$ want

$$\mathcal{L}(\vec{c}) = L\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -3\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)\cdot 5+(-3)\cdot 1\\ 2\cdot 5+6\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\16\end{pmatrix}$$

De meetkundige resultaten van deze opgave worden samengevat in de volgende

Stelling

Als de determinant van lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ gelijk is aan 0, dus als $|\mathcal{L}| = 0$, waarbij voor de beelden van de standaardbasis geldt $\mathcal{L}(\vec{e}_1) \neq \vec{0}$ of $\mathcal{L}(\vec{e}_2) \neq \vec{0}$, dan geldt

1) De vectoren $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ zijn gericht zijn volgens dezelfde lijn door de oorsprong. Het $Beeld(\mathcal{L})$ bestaat uit alle vectoren die gericht zijn volgens deze lijn.

2) Er is een lijn door de oorsprong zodanig dat alle vectoren die gericht zijn volgens deze lijn $Ker(\mathcal{L})$ vormen.
De vergelijking van deze lijn is $x_2 = -\kappa x_1$ als $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \kappa\mathcal{L}(\vec{e}_2)$.
De vergelijking van deze lijn is $x_1 = -\mu x_2$ als $\mathcal{L}(\vec{e}_2) = \mu\mathcal{L}(\vec{e}_1)$.

3) Twee positievectoren hebben dan en slechts dan hetzelfde $\mathcal{L}$-beeld als de lijn door hun koppen evenwijdig is aan de lijn uit 2).

Opmerkingen

1) Vanwege 1) is $\mathcal{L}$ niet-surjectief
2) Vanwege 3) is $\mathcal{L}$ niet-injectief
3) Het voorbeeld uit het aanhangsel van §IV.0 vormt een verdere illustratie van deze stelling.

Opgaven

IV.3.1 Bewijs de eerste stelling van deze paragraaf
(Aanwijzing: Bestudeer de bewijzen in §IV.1)

IV.3.2 Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & 3\end{pmatrix}$$

a) Toon aan dat $\mathcal{L}$ omkeerbaar is.
b) Bereken met behulp van de Gauss-Jordan methode de matrix L^{-1} van de inverse transformatie $\mathcal{L}^{-1}$.
c) Bereken van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ het $\mathcal{L}$–beeld $\vec{p}$.
d) Bereken vervolgens met behulp van de matrix L^{-1} het $\mathcal{L}^{-1}$–beeld van de vector $\vec{p}$.

IV.3.3 Voor sommige lineaire transformaties in $\mathbb{R}^2$ valt meetkundig in te zien dat er een inverse transformatie bestaat en welke deze inverse dat dan is.
a) Geef aan de hand van een toelichting de inverse van een rotatie over een hoek θ. Geef ook de matrix van deze inverse.
b) Geef de inverse voor de spiegeling in een lijn *k* door de oorsprong .

c) De *glijschuiving* $\mathcal{G}_{x_1,\frac{1}{2}}$ in $\mathbb{R}^2$ in de richting van de x_1-as met een factor $\frac{1}{2}$ wordt vastgelegd door de matrix $G_{x_1\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Geef een meetkundig argument waarom $\mathcal{G}_{x_1,-\frac{1}{2}}$ de inverse is.

(Toon eerst aan dat voor iedere vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ geldt $\mathcal{G}_{x_1,-\frac{1}{2}}(\vec{a}) - \vec{a} = \frac{1}{2} a_2 \vec{e}_1$)

IV.3.4 Bij een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt in pijlnotatie

$$\vec{p} \xrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{} \vec{a} \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \vec{p}$$

a) Geef een uitleg van wat met deze notatie bedoeld wordt.

b) Wat moet voor de lineaire transformatie gelden opdat de bewerkingen aangegeven een dergelijke pijlnotatie wiskundig mogelijk zijn?

c) Toon aan $\vec{p} = \mathcal{L}\left(\mathcal{L}^{-1}(\vec{p})\right)$

Opmerking: In termen van de pijlnotie betekent c): $\vec{p} \xrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{} \mathcal{L}^{-1}(\vec{p}) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \vec{p}$

IV.3.5 Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Poog met behulp van de Gauss-Jordan methode de matrix van de inverse transformatie op te stellen.
Leg uit op welk punt dit vastloopt.

b) Hoe was te voorzien dat het niet mogelijk is een inverse transformatie voor $\mathcal{L}$ te vinden?

c) Teken in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) de lijn door de oorsprong volgens welke de vectoren uit $Beeld(\mathcal{L})$ zijn gericht.

d) Teken in het standaard assenstelsel (x_1, x_2) de lijn door de oorsprong volgens welke de vectoren uit $Kert(\mathcal{L})$ zijn gericht.

e) Teken in het standaard assenstelsel (x_1, x_2) de positievector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ en de lijn *l* door de kop van deze vector evenwijdig aan de lijn van $Kert(\mathcal{L})$

f) Lees in de grafiek af welke vector $\vec{b}$ langs de x_2-as hetzelfde $\mathcal{L}$–beeld als de vector $\vec{a}$.

g) Controleer het antwoord uit f) door de $\mathcal{L}$–beelden van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te berekenen met behulp van de matrix *L*.

IV.3.5 Een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bespreek welke vectoren deel uitmaken van $Beeld(\mathcal{L})$

b) Bespreek welke vectoren deel uitmaken van $Ker(\mathcal{L})$

IV.3.6 a) Licht toe wat voor $Beeld(\mathcal{L})$ en $Ker(\mathcal{L})$ geldt als $|\mathcal{L}| \neq 0$.

b) Licht toe wat voor $Beeld(\mathcal{L})$ en $Ker(\mathcal{L})$ geldt als $\mathcal{L}(\vec{e}_1) = \mathcal{L}(\vec{e}_2) = \vec{0}$.