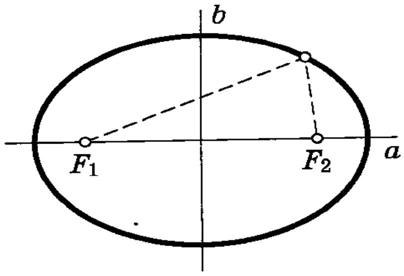
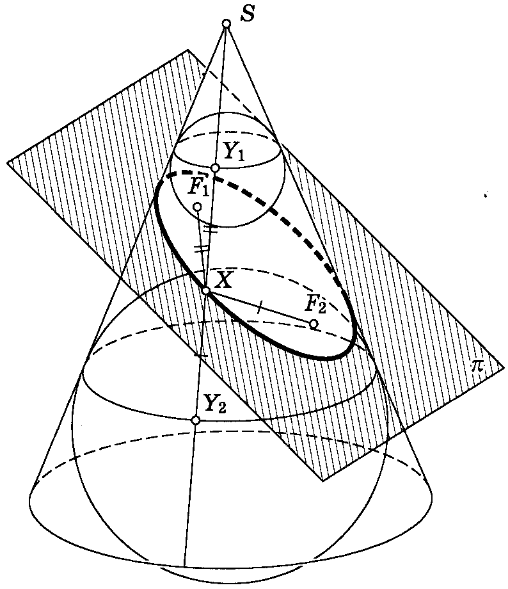
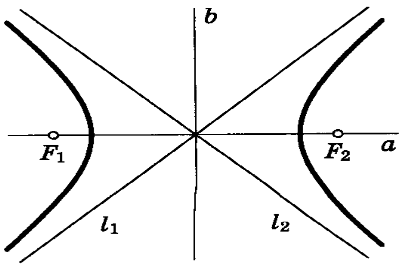
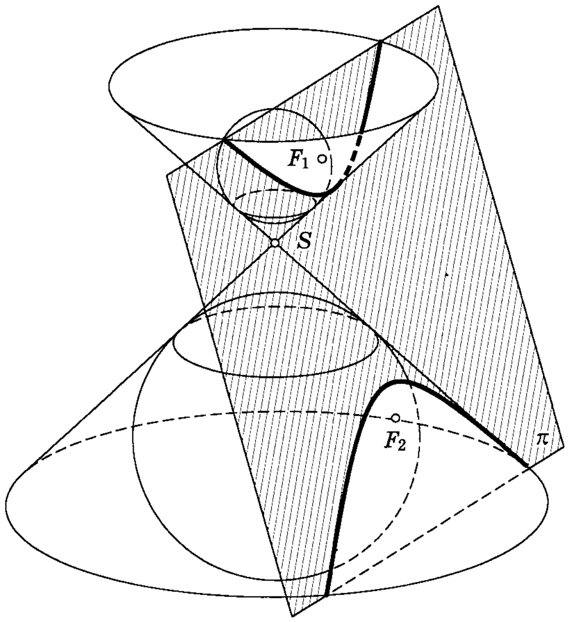
V Kegelsneden en Kwadratische Vormen in $\mathbb{R}^2$

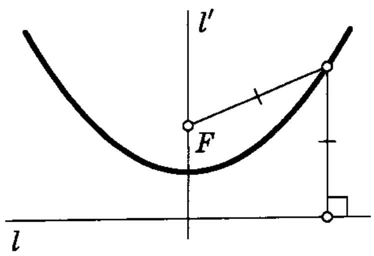
IV.0 Inleiding

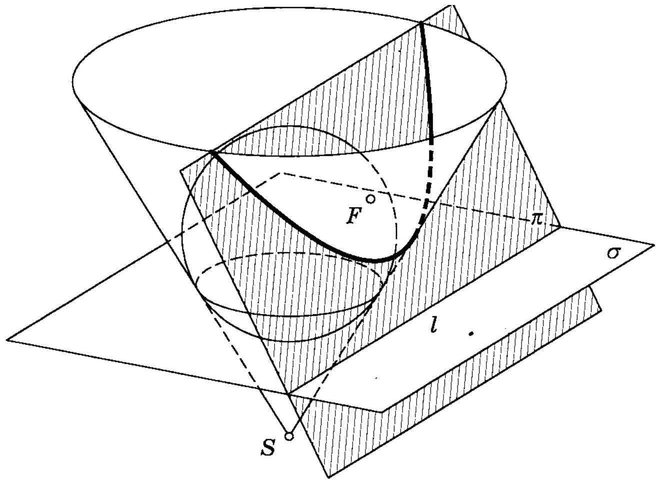












V.1 Homogene kwadratische vormen

Een vorm als

$$H(x_1,x_2)=5x_1^{\ 2}-4x_1x_2+8x_2^{\ 2}$$

heet een *homogene kwadratische vorm* naar de twee variabelen x_1 en x_2.
Een vorm als

$$K(x_1,x_2)=16x_1^{\ 2}+24x_1x_2+9x_2^{\ 2}-50x_1-100x_2-150$$

heet een *inhomogene kwadratische vorm* naar de twee variabelen x_1 en x_2.
Bij homogene kwadratische vormen komen de variabelen alleen in de macht 2 voor, d.w.z. alleen $x_1^{\ 2}$, x_1x_2 en $x_2^{\ 2}$ kunnen in de vorm voorkomen. Bij inhomogene kwadratische vormen kunnen de variabelen ook in de macht 1 aanwezig zijn, d.w.z. x_1 en x_2 kunnen voorkomen, en de variabelen kunnen in de macht 0 aanwezig zijn. Bij de tweede vorm komt bij het getal -150 de variabele voor in de macht 0 omdat $x_1^{\ 0}=1$ en $x_2^{\ 0}=1$.

In deze en in de volgende paragraaf zijn we geïnteresseerd in de *isolijnen van een homogene kwadratische vorm*. Een isolijn is de *kromme* die in een assenstelsel (x_1,x_2) ontstaat als een *homogene kwadratische vorm* in twee variabelen x_1 en x_2 *constant* is. Zo levert $H(x_1,x_2)=36$ bij het bovenstaande voorbeeld de vergelijking

$$5x_1^{\ 2}-4x_1x_2+8x_2^{\ 2}=36$$

Het zal blijken dat dit de vergelijking is voor een *ellips*.
De isolijnen van de inhomogene kwadratische vormen komen in §V.3 aan bod.

Bij het onderzoek naar *homogene kwadratische vormen* zullen we gebruiken dat dergelijke vormen kunnen worden gedefinieerd met behulp van *symmetrische transformaties* in $\mathbb{R}^2$.

Voorbeeld

Gegeven: De homogene kwadratische vorm

$$H(x_1,x_2)=5x_1^{\ 2}-4x_1x_2+8x_2^{\ 2}$$

Gevraagd: Toon aan dat $H(x_1,x_2)$ kan worden uitgedrukt als het een inproduct $\langle\vec{x},\mathcal{A}(\vec{x})\rangle$, waarbij $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ en $\mathcal{A}$ een symmetrische transformatie in $\mathbb{R}^2$ met symmetrische matrix

$$A=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&8\end{pmatrix}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}5x_1^{\ 2}-4x_1x_2+8x_2^{\ 2}&=5x_1^{\ 2}-2x_1x_2-2x_1x_2+8x_2^{\ 2}\\&=x_1(5x_1-2x_2)+x_2(-2x_1+8x_2)\\&=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}5x_1-2x_2\\-2x_1+8x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}5&-2\\-2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\bullet A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\langle\vec{x},\mathcal{A}(\vec{x})\rangle\end{aligned}$$

Uit het voorbeeld blijkt dus dat een homogene kwadratische vorm in twee variabelen kan worden gedefinieerd met behulp van een symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$.

Definitie
De met een *symmetrische transformatie* $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ *geassocieerde homogene kwadratische vorm* H in de variabele vector $\vec{x}$ wordt gedefinieerd door

$$H(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x}) \rangle$$

dus door het inproduct van de vector $\vec{x}$ met zijn $\mathcal{A}$-beeld $\mathcal{A}(\vec{x})$

Stelling
Als $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & s \end{pmatrix}$ *de matrix is bij de symmetrische transformatie* $\mathcal{A}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *en* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *dan is de geassocieerde homogene kwadratische vorm*

$$H(\vec{x}) = H(x_1, x_2) = px_1^{\,2} + 2qx_1x_2 + sx_2^{\,2}$$

Bewijs

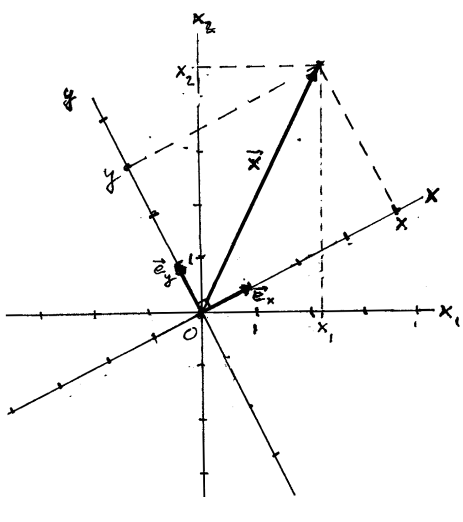
$$\langle \vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x}) \rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \bullet A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p & q \\ q & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} px_1 + qx_2 \\ qx_1 + sx_2 \end{pmatrix}$$
$$= x_1(px_1 + qx_2) + x_2(qx_1 + sx_2) = px_1^{\,2} + 2qx_1x_2 + sx_2^{\,2}$$

□

Het belang van het definiëren van een homogene kwadratische vorm via een *symmetrische transformatie* $\mathcal{A}$ *in* $\mathbb{R}^2$ ligt in de *eigenwaarden* τ_x *en* τ_y, en in de *orthonormale eigenvectoren* $\vec{e}_x$ *en* $\vec{e}_y$ van de symmetrische transformatie . In §IV.3 is besproken, en met een voorbeeld toegelicht, dat deze eigenvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ een orthonormaal assenstelsel (x, y) vastleggen die de zogenoemde *haakse assen* van de symmetrische transformatie vormen.

Definitie
De *hoofdassen van de homogene kwadratische vorm* $H(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x}) \rangle$ in $\mathbb{R}^2$ zijn de *haakse assen van de symmetrische transformatie* $\mathcal{A}$.

Opmerking
De *ontbinding* de variabele vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ *naar de hoofdassen* van de homogene kwadratische vorm $H(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x}) \rangle$ in $\mathbb{R}^2$ wordt *genoteerd* als $\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ waarbij $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ *de orthonormale eigenvectoren* zijn van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ bij resp. de *eigenwaarden* τ_x *en* τ_y.



Stelling
Als de variabele vector $\vec{x}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *van de homogene kwadratische vorm* $H(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x}) \rangle$ *wordt ontbonden naar de hoofdassen van de symmetrische transformatie* $\mathcal{A}$ *dan geldt* $H(\vec{x}) = h(x, y)$ *waarbij*

$$h(x, y) = \tau_x x^2 + \tau_y y^2$$

Bewijs
Er geldt

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\vec{x}) &= \mathcal{A}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \\
&= \mathcal{A}(x\vec{e}_x) + \mathcal{A}(y\vec{e}_y) && \textit{behoud optelling transformatie} \\
&= x\mathcal{A}(\vec{e}_x) + y\mathcal{A}(\vec{e}_y) && \textit{behoud schaling transformatie} \\
&= x\tau_x\vec{e}_x + y\tau_y\vec{e}_y && \textit{eigenwaarden transformatie}
\end{aligned}$$

Gevolg

$$\begin{aligned}
H(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x}) \rangle &= \langle x\vec{e}_x + y\vec{e}_y, x\tau_x\vec{e}_x + y\tau_y\vec{e}_y \rangle \\
&= x^2\tau_x\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle + xy\tau_y\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle + yx\tau_x\langle \vec{e}_y, \vec{e}_x \rangle + y^2\tau_y\langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle && \textit{lineariteit inproduct} \\
&= x^2\tau_x \cdot 1 + xy\tau_y \cdot 0 + yx\tau_x \cdot 0 + y^2\tau_y \cdot 1 && \textit{orthonormaliteit} \\
&= x^2\tau_x + y^2\tau_y
\end{aligned}$$

Hierbij is dus gebruikt dat $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ orthonormale eigenvectoren van $\mathcal{A}$ zijn.

□

Opmerking
De vergelijking van de *isolijn* $H(\vec{x}) = c$ wordt *ten opzichte van de hoofdassen*, dus ten opzichte van de haakse assen van $\mathcal{A}$

$$h(x, y) = c$$

d.w.z.

$$\tau_x x^2 + \tau_y y^2 = c$$

Het is juist deze hoofdassengedaante van de vergelijking van een isolijn van een homogene kwadratische vorm die ons in staat stelt de algemene kenmerken ervan te analyseren

Voorbeeld
Gegeven Gegeven de isolijn van een homogene kwadratische vorm in $\mathbb{R}^2$

$$5x_1^{\,2} - 4x_1x_2 + 8x_2^{\,2} = 36$$

Gevraagd
a) De matrix van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ waarmee deze vergelijking is geassocieerd.
b) De eigenwaarden en de orthonormale eigenvectoren van $\mathcal{A}$
c) De hoofdassengedaante van de kwadratische vergelijking.
d) Teken in een figuur het standaard assenstelsel (x_1, x_2), de hoofdassen (x, y) en de kromme gegeven door de vergelijking in c).

Oplossing

a) $$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

b) De eigenwaarden van deze symmetrische transformatie zijn $\tau_x = 4$ en $\tau_y = 9$, en bijbehorende orthonormale eigenvectoren:

$$\vec{e}_x = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{e}_y = \vec{e}_x^{\,*} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(zie opgave V.1.1 of het voorbeeld van §IV.3.)

c) Volgens de stelling levert de ontbinding $\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ naar de hoofdassen voor de kwadratische vergelijking

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

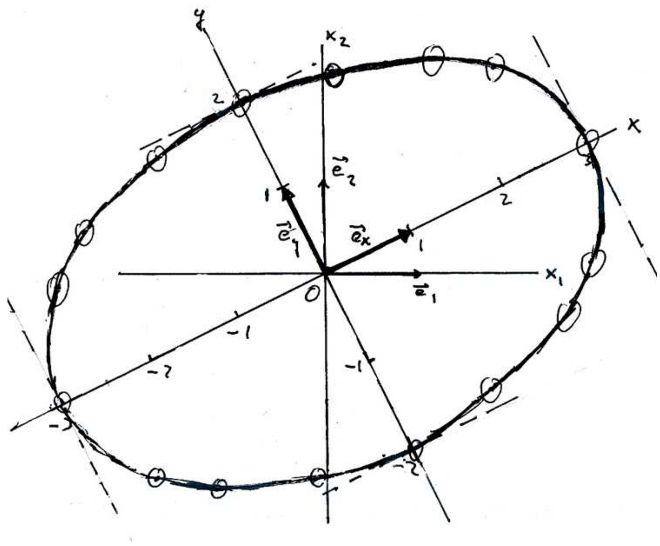
waaruit de zogenoemde *hoofdassenvorm* volgt

$$(\frac{x}{3})^2 + (\frac{y}{2})^2 = 1$$

d) De *x*-hoofdas ligt in de richting van de eigenvector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bij de eigenwaarde $\tau_x = 4$.

De *y*-hoofdas is hierop loodrecht getekend. De hoofdassen *x* en *y* zijn van dezelfde schaal voorzien als het standaard assenstelsel.
De *x*-waarden variëren van -3 tot 3 en de *y*-waarden van -2 tot 2, zoals ook uit de volgende tabel blijkt. (Zie ook opgave V.1.2). Met behulp van deze tabel kan de kromme worden getekend ten opzichte van de hoofdassen *x* en *y*

x	*y*	*y*
-3	0	0
-2,5	1,11	-1,11
-2	1,49	-1,49
-1	1,80	-1,80
0	2	-2
1	1,80	-1,80
2	1,49	-1,49
2,5	1,11	1,11
3	0	0



Bij het tekenen van de kromme is verder gebruikt dat x zijn maximum bereikt in $x = 3$ en zijn minimum in $x = -3$. De raaklijnen staan daar loodrecht op de *x*-as.
Verder is gebruikt dat y zijn maximum bereikt in $y = 2$ en zijn minimum in $y = -2$. De raaklijnen staan daar loodrecht op de *y*-as.

Opmerkingen

1) De kromme blijkt een scheef staande *ellips* te zijn. De lijnen door het midden 0 bezitten snijpunten met de ellips waarvan de grootste afstand 6 is (langs de *x*-as) en de kleinste afstand 4 (langs de *y*-as). Men zegt dat de *lange as* van de ellips lengte 6 heeft

en de *korte as* lengte 4. De *hoofdassen* van de symmetrische transformatie *vallen dus hier samen met de korte en lange as van de gevonden ellips*.

2) De algemene gedaante van de *hoofdassenvorm* van een ellips is

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Hierin zijn *a* en *b* positieve reële getallen.
Als $a>b$ is de lange as langs *x*-as met lengte $2a$ en de korte as langs de *y*-as met lengte $2b$. Als $a<b$ is de korte as langs *x*-as met lengte $2a$ en de lange as langs de *y*-as met lengte $2b$. Als $a=b$ is er sprake van een cirkel met straal *a*.

3) De ellips is niet de enige isolijn die kan ontstaan bij een homogene kwadratische vorm. In de volgende paragraaf worden de *isolijnen van homogene kwadratische vormen in* $\mathbb{R}^2$ *geclassificeerd* met behulp van de ontbinding van de variabele vector $\vec{x}$ naar de hoofdassen en de laatste stelling.

Opgaven

V.1.1 De homogene kwadratische vorm

$$H(x_1,x_2)=5x_1{}^2-4x_1x_2+8x_2{}^2$$

is geassocieerd met de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ vastgelegd door de matrix

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{pmatrix}$$

a) Toon met behulp van de karakteristieke vergelijking aan dat voor de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ geldt $\tau_x=4$ en $\tau_y=9$

b) Toon aan dat de vectoren $\vec{e}_x=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ en $\vec{e}_y=\vec{e}_x{}^*=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

eigenvectoren van $\mathcal{A}$ zijn bij resp. $\tau_x=4$ en $\tau_y=9$

V.1.2 Ga door berekening na of de tabel bij het laatste voorbeeld juist is

V.1.3 Gegeven is de vergelijking voor de isolijn bij een homogene kwadratische vorm

$$9x_1{}^2-6x_1x_2+17x_2{}^2=72$$

a) Teken in een assenstelsel (x_1,x_2) de hoofdassen van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ waarmee deze vergelijking is geassocieerd.

b) Toon aan dat ten opzichte van de hoofdassen geldt, bij geschikte keuze van de variabelen *x* en *y*

$$(\frac{x}{3})^2+(\frac{y}{2})^2=1$$

c) Teken met behulp van deze hoofdassen de elliptische kromme gegeven door homogene kwadratische vergelijking

d) Hoe groot is de lange as van de ellips en hoe groot de korte?

V.1.4 Gegeven is de vergelijking voor de isolijn bij een homogene kwadratische vorm

$$2x_1{}^2-2\sqrt{2}\cdot x_1x_2+3x_2{}^2=16$$

a) Teken in een assenstelsel (x_1, x_2) de hoofdassen van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ waarmee deze vergelijking is geassocieerd.

b) Toon aan dat ten opzichte van de hoofdassen geldt, bij geschikte keuze van de variabelen *x* en *y*

$$(\frac{x}{4})^2 + (\frac{y}{2})^2 = 1$$

c) Teken met behulp van deze hoofdassen de elliptische kromme gegeven door homogene kwadratische vergelijking

d) Hoe groot is de lange as van de ellips en hoe groot de korte?

V.1.5 Gegeven is de homogene kwadratische vorm

$$H(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$$

a) Bepaal de matrix A die de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ vastlegt waarmee deze homogene kwadratische vorm is geassocieerd

b) Bereken de eigenwaarden van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$

c) Bereken twee eigenvectoren van lengte 1 behorend bij deze twee eigenwaarden

d) Teken in een assenstelsel (x_1, x_2) de hoofdassen van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$

e) Toon aan dat voor $H(\vec{x}) = h(x, y)$ bij geschikte keuze van *x* en *y* geldt

$$h(x, y) = 10x^2$$

f) Teken de isolijn gegeven door $x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 = 0$

g) Teken de isolijn gegeven door $x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 = 40$

h) Wat geldt voor isolijn geven door $x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 = -10$?

V.1.6 Gegeven is de homogene kwadratische vorm

$$H(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 7x_2^2$$

a) Bepaal de matrix A die de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ vastlegt waarmee deze homogene kwadratische vorm is geassocieerd

b) Bereken de eigenwaarden van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$

c) Bereken twee eigenvectoren van lengte 1 behorend bij deze twee eigenwaarden

d) Teken in een assenstelsel (x_1, x_2) de hoofdassen van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$

e) Toon aan dat voor $H(\vec{x}) = h(x, y)$ bij geschikte keuze van *x* en *y* geldt

$$h(x, y) = 2x^2 - 8y^2$$

V.2 Classificatie vergelijkingen in $\mathbb{R}^2$ voor isolijnen van homogene kwadratische vormen

In de voorgaande paragraaf zijn als isolijnen bij een homogene kwadratische vorm in twee variabelen *ellipsen* getekend. Voordat we tot een classificatie van dergelijke isolijnen overgaan zullen we aan de hand van een voorbeeld laten zien dat er ook *hyperbolen* mogelijk zijn. Uit de classificatie zal blijken dat de isolijn bij een homogene kwadratische vorm soms punt is en soms ook een paar van rechte lijnen, naast de mogelijkheden van ellips en hyperbool.

Voorbeeld

Gegeven: De vergelijking van een isolijn bij een homogene kwadratische vorm

$$11x_1^2 + 24x_1x_2 + 5x_2^2 = -20$$

Gevraagd: Teken de kromme in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) met behulp van de hoofdassen van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ waarmee de homogene kwadratische vorm is geassocieerd.

Oplossing: Voordat er kan worden getekend moeten er een aantal stappen worden uitgevoerd.

Stap 1: *De matrix A die de symmetrische transformatie vastlegt*

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Stap 2: *De eigenwaarden van de symmetrische transformatie* $\mathcal{A}$

Er geldt $\quad A - \tau I = \begin{pmatrix} 11-\tau & 12 \\ 12 & 4-\tau \end{pmatrix}$

Uit $\quad |A - \tau I| = 0$

volgt (opgave V.2.1) $\quad \tau_x = 20 \quad$ en $\quad \tau_y = -5$

Stap 3: *Eigenvectoren en de hoofdassen.*

Stel $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}$ is eigenvector bij $\tau_x = 20$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = 20\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 11+12v \\ 12+4v \end{pmatrix} = 20\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 11+12v = 20 & \Rightarrow v = \frac{3}{4} \\ 12+4v = 20v & \Rightarrow v = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Dus $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ is eigenvector bij $\tau_x = 20$ en ook $4\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ is zo'n eigenvector.

De lijn $x : x_2 = \frac{3}{4}x_1$ is hoofdas van $\mathcal{A}$ bij $\tau_x = 20$

De vector $4\vec{v}^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ is eigenvector bij $\tau_y = -5$

De lijn $y : x_2 = -\frac{4}{3}x_1$ is hoofdas van $\mathcal{A}$ bij $\tau_y = -5$

Stap 4: *De vergelijking van de isolijn ten opzichte van de hoofdassen.*

Uit $h(x, y) = \tau_x x^2 + \tau_y y^2$ en $h(x, y) = -20$ volgt

$$20x^2 - 5y^2 = -20$$

dus $$-x^2+(\frac{y}{2})^2=1$$

Dit is de *hoofdassengedaante van een hyperbool*

Stap 5: *De asymptoten van de hyperbool.*

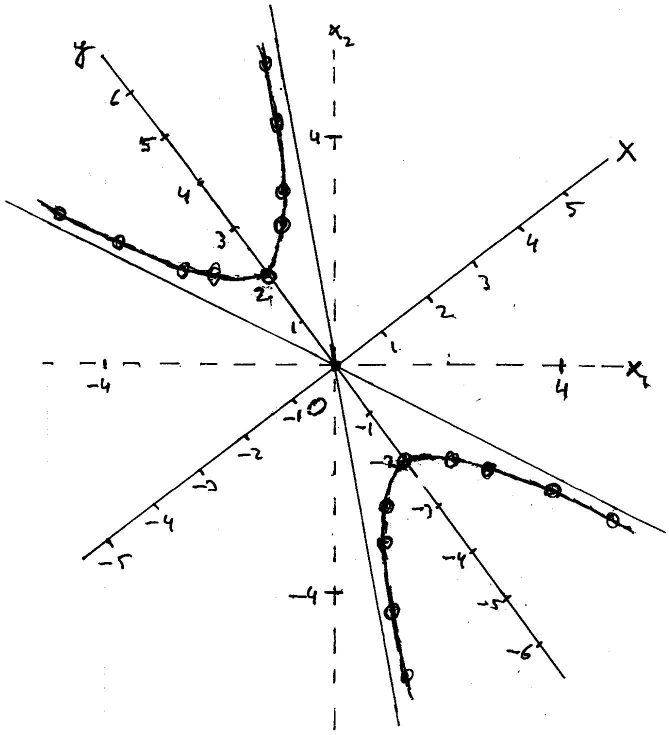
De asymptoten (d.w.z. rechte lijnen waartoe een kromme steeds meer nadert naar mate men verder van de oorsprong *O* is verwijderd) worden volgens de tweede hierna volgende stelling gegeven door

$$-x^2+(\frac{y}{2})^2=0 \;\Rightarrow\; (x+\frac{y}{2})(-x+\frac{y}{2})=0 \;\Rightarrow\; x=-\frac{y}{2} \text{ of } x=\frac{y}{2} \;\Rightarrow\; y=-2x \text{ of } y=2x$$

Stap 6: *Tabel en grafiek*

Teken de hoofdassen (x,y) met behulp van de eigenvector $4\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ en breng op deze assen een schaal aan die dezelfde is als die van de standaard assen (x_1,x_2). Teken de asymptoten en bereken enkele punten.

y	x	x
-5	2.29	-2.29
-4	1,73	-1,73
-3	1,12	-1,12
-2,5	0,75	-0,75
-2	0	0
0	-	-
2	0	0
2,5	0,75	-0,75
3	1,12	-1,12
4	1,73	-1,73
5	2.29	-2.29



Bij het tekenen is verder gebruikt dat de hyperbool de *y*-hoofdas op twee plaatsen loodrecht doorsnijdt.

Uit de laatste stelling van de vorige paragraaf volgt direct

Stelling

Als de variabele vector $\vec{x}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *uit de homogene kwadratische vergelijking* $\langle\vec{x},\mathcal{A}(\vec{x})\rangle=c$ *wordt ontbonden naar de hoofdassen van de symmetrische transformatie* $\mathcal{A}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *dan ontstaat de vergelijking*

$$\tau_x x^2+\tau_y y^2=c$$

waarbij τ_x *en* τ_y *de eigenwaarden van de symmetrische transformatie* $\mathcal{A}$

Bewijs

Direct gevolg van de laatste stelling uit de vorige paragraaf

□

Opmerkingen bij de tabel

1) De volgende tabel geeft een overzicht van de mogelijke vergelijkingen en krommen die ten opzichte van de hoofdassen kunnen ontstaan bij isolijnen van homogene kwadratische vormen. In de hoofdasgedaante zijn *a* en *b* positieve getallen die worden gedefinieerd met behulp van τ_x, τ_y en *c*.

2) Bijvoorbeeld als $\tau_x x^2 + \tau_y y^2 = c$ met $c \neq 0$ dan $\frac{\tau_x}{c} x^2 + \frac{\tau_y}{c} y^2 = 1$

Als geldt dat $\frac{\tau_x}{c} < 0$ en $\frac{\tau_y}{c} > 0$ wordt *a* gedefinieerd door $\frac{\tau_x}{c} = -\frac{1}{a^2} \;\Rightarrow\; a = \sqrt{-\frac{c}{\tau_x}}$

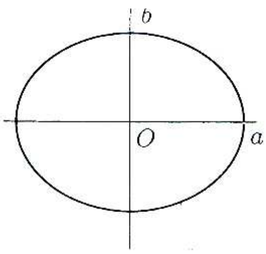
en *b* door $\frac{\tau_y}{c} = -\frac{1}{b^2} \;\Rightarrow\; b = \sqrt{\frac{c}{\tau_y}}$

3) Verder is het de gewoonte om als één van de eigenwaarden van een symmetrische transformatie $\mathscr{A}$ in $\mathbb{R}^2$ gelijk 0 is dit te noteren als $\tau_y = 0$

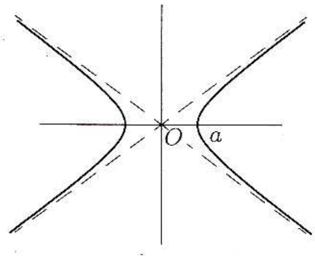
4) Ellips en hyperbool zijn kegelsneden. De parabool is ook een kegelsnede. Uit het overzicht blijkt dat bij de isolijnen van homogene kwadratische vormen de parabool niet voorkomt. Een *parabool kan alleen ontstaan als isolijn van een inhomogene kwadratische vorm*. Deze isolijnen zijn het onderwerp van de volgende paragraaf

$\tau_x x^2 + \tau_y y^2 = c$		**Hoofdasgedaante**	**Naam**	**Bijzonderheden**
$c = 0$	$\tau_x \neq 0$ $\tau_x = \pm\frac{1}{a^2}$ $\tau_y \neq 0$ $\tau_y = \pm\frac{1}{b^2}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Puntkegelsnede	Alleen de oorsprong voldoet
		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Twee snijdende lijnen	Vergelijkingen $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$
	$\tau_x \neq 0$ $\tau_y = 0$	$x^2 = 0$	Twee samenvallende lijnen	Vergelijking $x = 0$
$c \neq 0$	$\tau_x \neq 0$ $\frac{\tau_x}{c} = \pm\frac{1}{a^2}$ $\tau_y \neq 0$ $\frac{\tau_y}{c} = \pm\frac{1}{b^2}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ellips	Lengte halve lange assen *a* en *b*
		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hyperbool	Snijdt de *x*-as in $(\pm a, 0)$ Asymptoten $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$
		$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hyperbool	Snijdt de *y*-as in $(0, \pm b)$ Asymptoten $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$
		$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Lege kegelsnede	Geen oplossingen
	$\tau_x \neq 0$ $\frac{\tau_x}{c} = \pm\frac{1}{a^2}$ $\tau_y = 0$	$x^2 = a^2$	Twee evenwijdige lijnen	Vergelijkingen $x = \pm a$
		$x^2 = -a^2$	Lege kegelsnede	Geen oplossingen

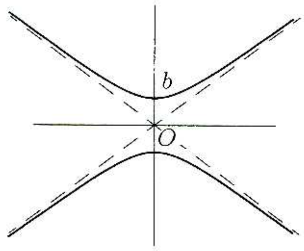
In de volgende figuren zijn een aantal kegelsneden gegeven. Hierbij is de *x*-hoofdas horizontaal genomen en de *y*-hoofdas verticaal



Ellips: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



Hyperbool: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



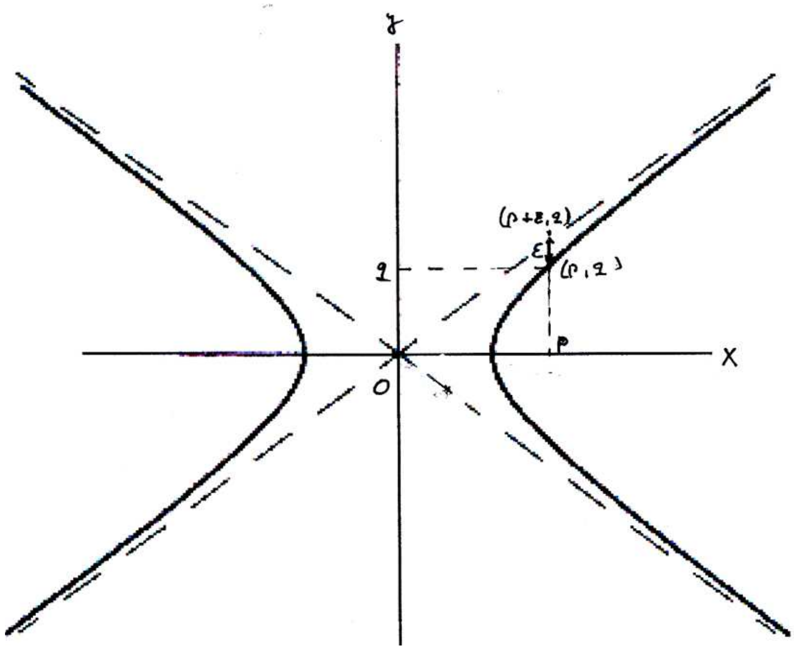
Hyperbool: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Bij de hyperbolen is te zien dat er rechte lijnen zijn waartoe deze krommen steeds dichter naderen naar mate de punten op de krommen verder van de oorsprong *O* verwijderd zijn. Als dergelijke lijnen bij een kromme bestaan dan heten deze lijnen de *asymptoten* van een kromme.

Voor de asymptoten van een hyperbool geldt de volgende stelling

Stelling

De asymptoten van de hyperbool met vergelijking $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *worden gegeven door de vergelijking* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$



Bewijs

We geven het bewijs voor het eerste kwadrant.

Laat ten opzichte van de hoofdassen het punt (p,q) op de hyperbool $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ liggen en laat $(p,q+\varepsilon)$ een punt zijn op $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$. De verticale afstand tussen deze punten is ε.

Voor het punt $(p,q+\varepsilon)$ geldt

$$\frac{p^2}{a^2}-\frac{(q+\varepsilon)^2}{b^2}=0$$

Gevolg
$$\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}=\frac{2q\varepsilon}{b^2}+\frac{\varepsilon^2}{b^2}$$

Omdat (p,q) op de hyperbool ligt volgt hier weer uit

$$\frac{2q\varepsilon}{b^2}+\frac{\varepsilon^2}{b^2}=1 \qquad \text{(oplossing hierbij } \varepsilon=-q+\sqrt{q^2+b^2}>0 \text{)}$$

met als gevolg
$$0<\varepsilon=\frac{b^2}{2q}-\frac{\varepsilon^2}{2q}<\frac{b^2}{2q}$$

Als $p \to \infty$ dan $q \to \infty$ waardoor $\frac{b^2}{2q} \to 0$. Omdat ε ligt tussen 0 en $\frac{b^2}{2q}$ betekent dit ook $\varepsilon \to 0$. Naar mate het punt (p, q) op de hyperbool verder is verwijderd van de oorsprong O wordt de verticale afstand ε tussen dit punt op de hyperbool en de lijn $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ dus steeds kleiner.

□

Opgaven

V.2.1 De symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vastgelegd door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bereken de eigenwaarden van deze transformatie.

V.2.2 Gegeven de vergelijking $11x_1^{\ 2} + 24x_1x_2 + 5x_2^{\ 2} = 20$ van de isolijn van een homogene kwadratische vorm in $\mathbb{R}^2$. Gebruik de resultaten uit het voorbeeld van deze paragraaf om deze isolijn te tekenen in een standaard assenstelsel (x_1, x_2)

V.2.2 Bewijs dat uit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ volgt $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$

V.2.3 Formuleer een vergelijkbare stelling als boven voor de asymptoten van de hyperbool $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

V.2.4 Gegeven de vergelijking van een isolijn bij een homogene kwadratische vorm

$$-8x_1^{\ 2} + 34x_1x_2 - 8x_2^{\ 2} = 225$$

Teken de kromme in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) met behulp van de hoofdassen van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ waarmee de vergelijking is geassocieerd.

V.2.5 Gegeven de vergelijking van een isolijn bij een homogene kwadratische vorm

$$4x_1x_2 + 3x_2^{\ 2} = -4$$

Teken de kromme in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) met behulp van de hoofdassen van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ waarmee de vergelijking is geassocieerd.

V.2.6 Gegeven de vergelijking van een isolijn bij een homogene kwadratische vorm

$$4x_1x_2 = 4$$

Teken de kromme in een assenstelsel (x_1, x_2) met behulp van de hoofdassen van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ waarmee de vergelijking is geassocieerd.

V.2.7 Gegeven de vergelijking van een isolijn bij een homogene kwadratische vorm

$$x_1^{\,2} + 10x_1x_2 + 25x_2^{\,2} = 25$$

a) Teken de kromme in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) met behulp van de hoofdassen van de symmetrische transformatie $\mathscr{A}$ in $\mathbb{R}^2$ waarmee de vergelijking is geassocieerd.

b) Gebruik $x_1^{\,2} + 10x_1x_2 + 25x_2^{\,2} = (x_1 + 5x_2)^2$ om de in a) gevonden lijnen direct in x_1 en x_2 uit te drukken.

V.2.8 Gegeven de vergelijking van een isolijn bij een homogene kwadratische vorm

$$px_1^{\,2} + 4x_1x_2 + px_2^{\,2} = 6$$

Ten opzichte van de hoofdassen (x, y) wordt deze vergelijking

$$(p+2)x^2 + (p-2)y^2 = 6$$

a) Toon dit aan.

Voor verschillende waarden van p ontstaan er andere soorten kegelsneden.

b) Classificeer deze kegelsneden naar de waarden van p.

V.2.9 Gegeven de vergelijking van een isolijn bij een homogene kwadratische vorm

$$px_1^{\,2} + 2qx_1x_2 + px_2^{\,2} = c$$

a) Bewijs dat ten opzichte van de hoofdassen (x, y) geldt van de symmetrische transformatie in $\mathbb{R}^2$ waarmee de vergelijking is geassocieerd:

$$(p+q)x^2 + (p-q)y^2 = c$$

b) Stel $p = 2$ en $c = 8$. Bespreek welke soort krommen door de vergelijking worden gegeven bij verschillende waarden van q.

V.2.10 Bij de homogene kwadratische vorm

$$H(x_1, x_2) = px_1^{\,2} + 2qx_1x_2 + sx_2^{\,2}$$

heeft de bijbehorende symmetrische transformatie $\mathscr{A}$ in $\mathbb{R}^2$ determinant 0 en geldt $p > 0$.

Bewijs dat geldt $\quad H(x_1, x_2) = \left(\sqrt{p}\cdot x_1 + \sqrt{s}\cdot x_2\right)^2 \quad$ als $\quad q > o$

$$H(x_1, x_2) = \left(\sqrt{p}\cdot x_1 - \sqrt{s}\cdot x_2\right)^2 \quad \text{als} \quad q < 0$$

Dit betekent dat de homogene kwadratische vorm waarvan de bijbehorende symmetrische transformatie determinant nul heeft het kwadraat is van een homogene lineaire vorm.

V.2.11 Gebruik het resultaat uit opgave V.2.10 om direct de lijnen te tekenen in een assenstelsel (x_1, x_2) behorend bij de vergelijking $4x_1^{\,2} - 12x_1x_2 + 9x_2^{\,2} = 9$, dus niet met behulp van de hoofdassen (x, y).

V.3 Isolijnen bij inhomogene kwadratische vormen

In de vorige paragraaf is gebleken dat als *isolijn van een homogene kwadratische vorm* de kegelsneden *ellips* en *hyperbool* kunnen ontstaan.
Ook de *parabool* is een kegelsnede, maar die kan alleen ontstaan als de *isolijn van een inhomogene kwadratische vorm* en niet als isolijn van een homogene kwadratische vorm.

Bij de analyse van dergelijke vormen wordt gebruik gemaakt van het homogene deel ervan, terwijl er verder sprake is van een lineair deel en een scalair deel.

Voorbeeld

Gegeven: De *inhomogene* kwadratische vorm

$$K(x_1,x_2)=16x_1^2+24x_1x_2+9x_2^2-50x_1-100x_2+100$$

Gevraagd: Toon aan dat $K(x_1,x_2)=K(\vec{x})$ kan worden uitgedrukt als de *som* van

een homogeen deel $H(\vec{x})=\langle\vec{x},\mathcal{A}(\vec{x})\rangle$,

waarbij $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ en $\mathcal{A}$ een symmetrische transformatie in $\mathbb{R}^2$, een

een lineair deel $L(\vec{x})=\langle\vec{b},\vec{x}\rangle$

en een scalair deel d

Oplossing

- Homogeen deel

$$\begin{aligned}H(x_1,x_1)&=16x_1^2+24x_1x_2+9x_2^2\\&=16x_1^2+12x_1x_2+12x_1x_2+9x_2^2\\&=x_1(16x_1+12x_2)+x_2(12x_1+9x_2)\\&=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}16x_1+12x_2\\12x_1+9x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}16&12\\12&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\bullet A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\langle\vec{x},\mathcal{A}(\vec{x})\rangle\end{aligned}$$

De matrix van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ is dus $A=\begin{pmatrix}16&12\\12&9\end{pmatrix}$

- Lineair deel

$$L(x_1,x_2)=-50x_1-100x_2=\begin{pmatrix}-50\\-100\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\langle\vec{b},\vec{x}\rangle$$

De bijbehorende vector is dus $\vec{b}=\begin{pmatrix}-50\\-100\end{pmatrix}$

- Scalair deel $d=100$

Het voorbeeld leidt tot de

Definitie
In $\mathbb{R}^2$ wordt vanuit een *symmetrische transformatie* $\mathcal{A}$, een vector $\vec{b}$ en een scalar *d* de met deze grootheden *geassocieerde inhomogene kwadratische vorm* K in de variabele vector $\vec{x}$ gedefinieerd door

$$K(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x})\rangle + \langle \vec{b}, \vec{x}\rangle + d$$

dus door een som van het inproduct van de vector $\vec{x}$ met zijn $\mathcal{A}$-beeld $\mathcal{A}(\vec{x})$, het inproduct van de vector $\vec{b}$ met de vector $\vec{x}$ en de scalar *d*.
$H(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x})\rangle$ heet het *homogene deel* van de kwadratische vorm $K(\vec{x})$.
$L(\vec{x}) = \langle \vec{b}, \vec{x}\rangle$ heet het *lineaire deel* van de kwadratische vorm $K(\vec{x})$.

Met behulp van het homogene deel $H(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x})\rangle$ stelt men de *haakse assen* (x, y) op van de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ door eigenwaarden τ_x en τ_y van deze transformatie te bepalen en vervolgens de orthonormale eigenvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. Dit gaat hetzelfde als in de vorige paragrafen.
Echter nu moet ook het inproduct van het lineaire deel $L(\vec{x}) = \langle \vec{b}, \vec{x}\rangle$ worden uitgedrukt ten opzichte van deze haakse assen.
Dit blijkt uit de volgende

Stelling
Als bij de inhomogene kwadratische vorm $K(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x})\rangle + \langle \vec{b}, \vec{x}\rangle + d$ *in* $\mathbb{R}^2$ *de variabele vector* $\vec{x}$ *wordt ontbonden naar de haakse assen van de symmetrische transformatie* $\mathcal{A}$ *volgens* $\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, *waarbij* $\vec{e}_x$ *en* $\vec{e}_y$ *de orthonormale eigenvectoren zijn van de symmetrische transformatie bij resp. de eigenwaarden* τ_x *en* τ_y, *dan geldt* $K(\vec{x}) = k(x, y)$ *met*

$$k(x, y) = \tau_x x^2 + \tau_y y^2 + b_x x + b_y y + d$$

en met $b_x = \langle \vec{e}_x, \vec{b}\rangle$ *en* $b_y = \langle \vec{e}_y, \vec{b}\rangle$

Bewijs
Het bewijs dat $H(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x})\rangle = \tau_x x^2 + \tau_y y^2$ is reeds gegeven in §V.1
Als $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ geldt voor het lineaire deel $L(\vec{x}) = \langle \vec{b}, \vec{x}\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b_1 x_1 + b_2 x_2$.
Ten opzichte van de orthonormale haakse assen geldt $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y$ waarbij de kentallen worden berekend met de inproducten $b_x = \langle \vec{e}_x, \vec{b}\rangle$ en $b_y = \langle \vec{e}_y, \vec{b}\rangle$.
(Zie over het inproduct aanhangsel 2 van §IV.3 of meer uitgebreid §I.5.)
Het inproduct van $\vec{b}$ en $\vec{x}$ is ten opzichte van de haakse assen $L(\vec{x}) = \langle \vec{b}, \vec{x}\rangle = b_x x + b_y y$, wat ook wordt genoteerd als $l(x, y) = b_x x + b_y y$.

□

Het volgende laat zien hoe met deze stelling kan worden gewerkt.

Voorbeeld

Gegeven: Een standaard assenstelsel (x_1, x_2) en de inhomogene kwadratische vorm

$$K(x_1,x_2) = 16x_1^{\,2} + 24x_1x_2 + 9x_2^{\,2} - 50x_1 - 100x_2 + 100$$

Gevraagd

a) Toon met behulp van de haakse assen van de met de vorm geassocieerde symmetrische lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ aan dat de isolijn

$$K(x_1,x_2) = -50$$

van deze inhomogene kwadratische vorm een parabool is.

b) Teken deze parabool in het assenstelsel (x_1, x_2) met behulp van de haakse assen van de symmetrische lineaire transformatie.

Oplossing

a) <u>Stap 1</u> *De geassocieerde symmetrische lineaire transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$.*

De matrix die deze symmetrische transformatie vastlegt is

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

<u>Stap 2</u> *De eigenwaarden van de symmetrische lineaire transformatie.*

Er geldt $$A - \tau I = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-\tau & 12 \\ 12 & 9-\tau \end{pmatrix}$$

$|A - \tau I| = 0$ levert: $(16-\tau)(9-\tau) - 12^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau^2 - 25\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = 25 \vee \tau = 0$

<u>Stap 3</u> *Orthonormale eigenvectoren van de symmetrische lineaire transformatie.*

$$A\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \tau_x \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = 25\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 16v+12 \\ 12v+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25v \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16v + 12 = 25v \\ 12v + 9 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{4}{3} \\ v = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Dus $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ is een eigenvector bij $\tau_x = 25$. Ook $3\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ is zo'n eigenvector.

$\vec{e}_x = \dfrac{1}{|3\vec{v}|} 3\vec{v} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ is een eigenvector met lengte 1 bij de eigenwaarde $\tau_x = 25$.

$\vec{e}_y = \vec{e}_x^{\,*} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ is een eigenvector met lengte 1 bij de eigenwaarde $\tau_y = 0$.

<u>Stap 4</u> *Herschrijven van het homogene deel van de kwadratische vorm.*

$$H(\vec{x}) = 16x_1^{\,2} + 24x_1x_2 + 9x_2^{\,2} = \tau_x x^2 + \tau_y y^2 = 25x^2$$

<u>Stap 5</u> *Herschrijven van het lineaire deel van de kwadratische vorm.*

$$L(\vec{x}) = -50x_1 - 100x_2 = \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle$$

Dus $\vec{b} = \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \end{pmatrix}$

Voor de kentallen van deze vector ten opzichte van de orthonormale basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ geldt

$$b_x = \langle \vec{e}_x, \vec{b} \rangle = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\big(4\cdot(-50) + 3\cdot(-100)\big) = -100$$

$$b_y = \langle \vec{e}_y, \vec{b} \rangle = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\big((-3)\cdot(-50) + 4\cdot(-100)\big) = -50$$

Dit zijn dus ook de kentallen van de vector $\vec{b}$ ten opzichte van de haakse assen van de symmetrische lineaire transformatie $\mathcal{A}$.
Gevolg voor het lineaire deel

$$L(\vec{x}) = \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle = b_x x + b_y y = -50x - 100y$$

<u>Stap 6</u> *De vergelijking van de isolijn van de inhomogene kwadratische vorm ten opzichte van de haakse assen* (x, y) *van de symmetrische transformatie* $\mathcal{A}$.

Voor de vergelijking van de gegeven isolijn geldt $H(\vec{x}) + L(\vec{x}) + 100 = -50$ en dus volgens de stappen 4 en 5:

$$25x^2 - 100x - 50y + 100 = -50 \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$

Dit is de vergelijking van een *parabool*.

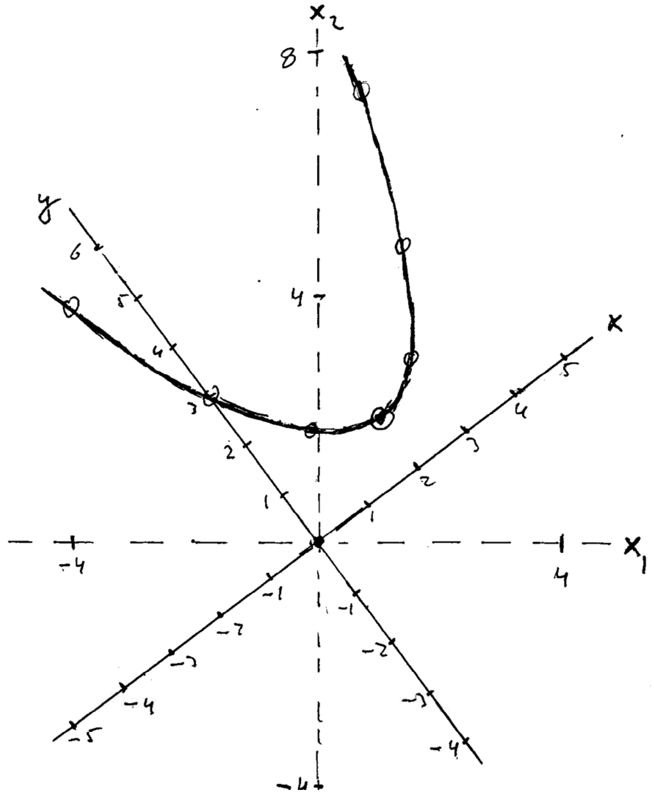
b) Teken de *x*-as in de richting van $3\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

en de *y*-as in de richting van $3\vec{v}^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en

voorzie deze assen van dezelfde schaal als de standaard assen (x_1, x_2).

Voor $y = \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ geldt de tabel

x	*y*
-1	5,5
0	3
1	1,5
2	1
3	1,5
4	3
5	5,5



Opmerkingen

1) In feite wordt het *onderzoek naar een kwadratische vorm eerst* verricht door een *onderzoek van het homogene deel* van de vorm zoals dat ook in de vorige paragrafen is gedaan. Als er ook een lineair deel is bij de kwadratische vorm wordt *vervolgens dit lineaire deel herschreven naar haakse assen* van de symmetrische transformatie die zijn gevonden bij het onderzoek van het homogene deel.

2) De parabool ontstaat dus bij de isolijn van een inhomogene kwadratische vorm in $\mathbb{R}^2$

$$K(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x}) \rangle + \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle + d$$

als de symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ een eigenwaarde 0 heeft, dus als $\tau_x \neq 0$ en $\tau_y = 0$, en als verder geldt $b_y = \langle \vec{e}_y, \vec{b} \rangle \neq 0$.

In dat geval levert de vergelijking van de isolijn $K(\vec{x}) = c$ ten opzichte van de haakse assen van de symmetrische transformatie

$$\tau_x x^2 + b_x x + b_y y + d = c \quad \Rightarrow \quad y = ax^2 + bx + \overline{c} \quad \text{met } a = -\frac{\tau_x}{b_y},\ b = -\frac{b_x}{b_y} \text{ en } \overline{c} = c - d$$

3) In het geval dat $\tau_x \neq 0$ en $\tau_y \neq 0$ levert de isolijn $K(\vec{x}) = c$ ten opzichte van de haakse assen (x, y) de vergelijking

$$\tau_x x^2 + \tau_y y^2 + b_x x + b_y y + d = c$$

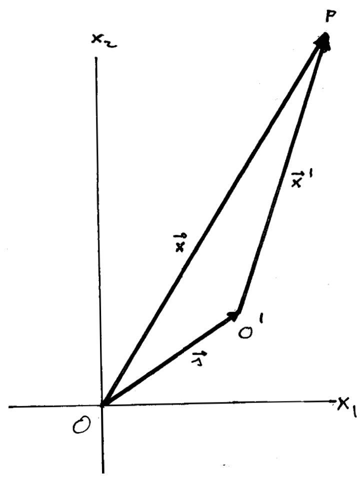
Door een *nieuwe variabele vector* $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{s}$ en een geschikte keuze van de vector $\vec{s}$ kan hierbij deze vergelijking altijd *herschreven worden naar de hoofdassengedaante*

$$\tau_x x'^2 + \tau_y y'^2 = c'$$

die in de vorige paragraaf is besproken.

Doel van de rest van deze paragraaf is te *onderzoeken wat de meetkundige betekenis is van deze nieuwe variabele vector is* en hoe de geschikte keuze voor de vector $\vec{s}$ kan worden gemaakt.

De *variabele vector* $\vec{x}$ in de vergelijking van een isolijn in een plat vlak van een kwadratische vorm is in dat vlak een *variabele positievector vanuit de oorsprong O* van het standaard assenstelsel . Dus als $\vec{x}$ in het vlak een punt *P* vastlegt geldt $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$.
Door de keuze van een andere oorsprong O' wordt hetzelfde punt *P* vastgelegd door een nieuwe positievector die we met $\vec{x}'$ aangeven en waarvoor geldt $\vec{x}' = \overrightarrow{O'P}$.



Stelling
Als $\vec{x}$ een positievector is van een punt P in het platte vlak vanuit de oorsprong O en $\vec{x}'$ is de positievector van hetzelfde punt P vanuit een tweede oorsprong O' dan geldt

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{s}$$

waarbij $\vec{s}$ de positievector van O' vanuit O, dus $\vec{s} = \overrightarrow{OO'}$

Bewijs
Uit de figuur blijkt $\quad \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} \quad$ dus $\quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{s}$

□

We zijn geïnteresseerd in het verband tussen de kentallen van de vectoren $\vec{x}'$, $\vec{x}$ en $\vec{s}$ ten opzichte van de orthonormale eigenvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ van een symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$. Ten opzichte van deze basis geldt

$$\vec{x}' = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y$$

$$\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

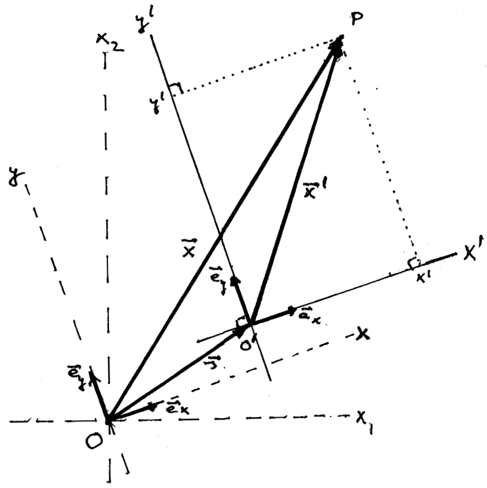
$$\vec{s} = s_x\vec{e}_x + s_y\vec{e}_y$$

Samen met $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{s}$ levert dit voor de kentallen ten opzichte van de haakse assen.

$$x' = x - s_x \qquad \text{en} \qquad y' = y - s_y$$

Definitie

In een plat vlak ontstaan de *haakse assen* (x', y') *van* $\mathcal{A}$ *door de oorsprong* O', waarbij $\mathcal{A}$ een symmetrische transformatie is in $\mathbb{R}^2$, uit een verschuiving volgens een vector $\vec{s}$ van *O* naar O' van de haakse assen (x, y) van $\mathcal{A}$ door de oorsprong *O*.



Opmerkingen

1) In de figuur zijn de staarten van de eigenvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ van een symmetrische transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$ met de staarten getekend in de nieuwe oorsprong O'. De haakse assen (x', y') door O' liggen langs deze vectoren.

2) $\vec{x}' = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y$ betekent dat deze positievector ten opzicht van de haakse assen (x', y') de kentallen x' en y' heeft.
Het is deze meetkundige eigenschap van de kentallen van de nieuwe variabele vector $\vec{x}'$ waar we mee zullen gaan werken nadat de vergelijking voor de isolijn van een inhomogene kwadratische vorm is herschreven naar de hoofdassenvorm.

Voor we verder gaan met de hoofdassengedaante van ellips en hyperbool geven we een voorbeeld van nieuwe haakse assen (x', y') bij de zojuist geanalyseerde parabool.

Voorbeeld

Gegeven Ten opzichte van de haakse assen (x, y) door O behorend bij de orthonormale eigenvectoren $\vec{e}_x = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_y = \vec{e}_x^{\,*} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ van een symmetrische transformatie in $\mathbb{R}^2$ is de isovergelijking van een inhomogene kwadratische vorm

$$x^2 - 4x - 2y + 6 = 0$$

Er wordt een nieuwe variabele vector $\vec{x}' = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y$ gevormd door

$$x' = x - 2$$
$$y' = y - 1$$

x	y	$x' = x - 2$	$y' = y - 1$
-1	5,5	-3	4,5
0	3	-2	2
1	1,5	-1	0,5
2	1	0	0
3	1,5	1	0,5
4	3	2	20
5	5,5	3	4,5

In de tabel rechts zijn enkele waarden van de oude kentallen *x* en *y* gegeven en de bijbehorende waarden van de nieuwe kentallen x' en y'. De keuze van de nieuwe variabele vector is zodanig dat de top *T* van de parabool eerst werd gegeven door $(x_T, y_T) = (2,1)$ en nu door $(x_T{}', y_T{}') = (0,0)$

Gevraagd

a) Er geldt $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{s}$. Geef de kentallen van de vector $\vec{s}$ ten opzichte van de basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$.
Geef ook de kentallen van $\vec{s}$ ten opzichte van het standaard assenstelsel (x_1, x_2)

b) Teken in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) de haakse assen (x', y') door O' van de symmetrische transformatie waarbij $\vec{s} = \overrightarrow{OO'}$.

c) Teken met behulp van de tabel de isolijn van de kwadratische vorm ten opzichte van deze haakse assen (x', y')

d) Geef de formule voor het verband tussen x' en y' bij deze isolijn.

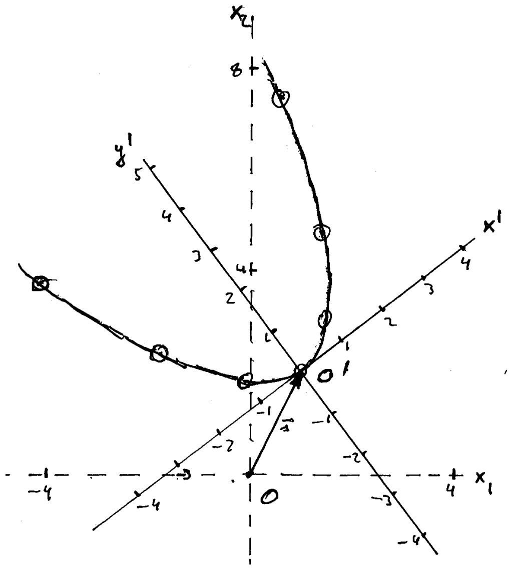
Oplossing

a) $x' = x - 2$ en $x' = x - s_x$ dus $s_x = 2$, $y' = y - 1$ en $y' = y - s_y$ dus $s_y = 1$.

Ook geldt $\vec{s} = s_x \vec{e}_x + s_y \vec{e}_y = 2 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

b) De oorsprong O' heeft als positievector $\vec{s} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

De x'-as is gericht volgens de vector $\vec{v} = 5\vec{e}_x = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ en de y'-as volgens de nevenvector $\vec{v}^*$. Op de assen (x', y') is dezelfde schaal aangebracht als op de standaard assen (x_1, x_2)



c) De punten zijn getekend met de in de tabel gegeven waarden voor x' en y'.

d) $x' = x - 2 \quad \Rightarrow \quad x = x' + 2$
$y' = y - 1 \quad \Rightarrow \quad y = y' + 1$

Invullen $x^2 - 4x - 2y + 6 = 0$ levert

$$(x'+2)^2 - 4(x'+2) - 2(y'+1) + 6 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$x'^2 + 4x' + 4 - 4x' - 8 - 2y' - 2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$x'^2 - 2y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \tfrac{1}{2}x'^2$$

Opmerkingen

1) De vorm $y' = a \cdot x'^2$ is de *standaardgedaante* voor een parabool. De bedoeling van het voorbeeld is om te laten zien dat door een geschikte keuze van de vector $\vec{s}$ in de overgang $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{s}$ van de variabele vector $\vec{x}$ naar een variabele vector $\vec{x}'$ de vergelijking voor een parabool in deze standaardgedaante kan worden gebracht.

2) De keuze van de vector $\vec{s}$ is in het voorbeeld gemaakt op grond van de tabel in x en y door ervoor te zorgen dat de top van de parabool komt te liggen in de oorsprong O' en vervolgens zijn $x = x' + s_x$ en $y = y' + s_y$ ingevuld in de isovergelijking met de variabelen x en y.
De techniek van *kwadraat afsplitsen* (zie aanhangsel) levert een *veel directere manier om tot deze standaardgedaante te komen*. Bij dit voorbeeld

$$x^2 - 4x - 2y + 6 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$(x-2)^2 - 2^2 - 2y + 6 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$(x-2)^2 - 2(y-1) = 0$$

De keuze $x' = x - 2$ en $y' = y - 1$ levert dan de standaardgedaante

$$x'^2 - 2y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \tfrac{1}{2}x'^2$$

3) Ook bij het in de *hoofdassengedaante brengen van ellips en hyperbool* zullen we na de volgende stelling gebruik maken van deze *techniek van kwadraat afsplitsen*.

Stelling
In $\mathbb{R}^2$ *is gegeven de inhomogene kwadratische vorm*

$$K(\vec{x})=\langle\vec{x},\mathcal{A}(\vec{x})\rangle+\langle\vec{b},\vec{x}\rangle+d$$

waarin $\mathcal{A}$ *een symmetrische transformatie is. Hieruit wordt met* $\vec{x}'=\vec{x}-\vec{s}$ *een vorm* $K'(\vec{x}')=K(\vec{x}'+\vec{s})$ *gedefinieerd. Voor deze laatste vorm geldt*

$$K'(\vec{x}')=\langle\vec{x}',\mathcal{A}(\vec{x}')\rangle+\langle\vec{b}',\vec{x}'\rangle+d'$$

met $\vec{b}'=2\mathcal{A}(\vec{s})+\vec{b}$ *en* $\vec{d}'=d+\langle\mathcal{A}(\vec{s})+\vec{b},\vec{s}\rangle$.
Als de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ *beide ongelijk 0 zijn bestaat er een vector* $\vec{s}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *zodanig dat* $\vec{b}'=2\mathcal{A}(\vec{s})+\vec{b}=\vec{0}$

Bewijs

$$\begin{aligned}
K'(\vec{x}')=K(\vec{x}'+\vec{s})&=\langle\vec{x}'+\vec{s},\mathcal{A}(\vec{x}'+\vec{s})\rangle+\langle\vec{b},\vec{x}'+\vec{s}\rangle+d\\
&=\langle\vec{x}'+\vec{s},\mathcal{A}(\vec{x}')+\mathcal{A}(\vec{s})\rangle+\langle\vec{b},\vec{x}'+\vec{s}\rangle+d && \text{lineariteit}\mathcal{A}\\
&=\langle\vec{x}',\mathcal{A}(\vec{x}')\rangle+\langle\vec{x}',\mathcal{A}(\vec{s})\rangle+\langle\vec{s},\mathcal{A}(\vec{x}')\rangle+\langle\vec{s},\mathcal{A}(\vec{s})\rangle+\langle\vec{b},\vec{x}'\rangle+\langle\vec{b},\vec{s}\rangle+d && \text{lineariteit inproduct}\\
&=\langle\vec{x}',\mathcal{A}(\vec{x}')\rangle+\langle\vec{x}',\mathcal{A}(\vec{s})\rangle+\langle\mathcal{A}(\vec{s}),\vec{x}'\rangle+\langle\vec{b},\vec{x}'\rangle+d+\langle\vec{s},\mathcal{A}(\vec{s})\rangle+\langle\vec{b},\vec{s}\rangle && \text{symmetrie } \mathcal{A}\\
&=\langle\vec{x}',\mathcal{A}(\vec{x}')\rangle+\langle2\mathcal{A}(\vec{s})+\vec{b},\vec{x}'\rangle+d+\langle\mathcal{A}(\vec{s})+\vec{b},\vec{s}\rangle && \text{lineariteit inproduct}
\end{aligned}$$

Als $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ orthonormale eigenvectoren van $\mathcal{A}$ behorend bij de resp. eigenwaarden τ_x en τ_y, dan geldt $\vec{s}=s_x\vec{e}_x+s_y\vec{e}_y$, $\vec{b}=b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y$ en

$$\begin{aligned}
\vec{b}'=2\mathcal{A}(\vec{s})+\vec{b}&=2\mathcal{A}(s_x\vec{e}_x+s_y\vec{e}_y)+b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y\\
&=2s_x\mathcal{A}(\vec{e}_x)+2s_y\mathcal{A}(\vec{e}_y)+b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y && \text{lineariteit } \mathcal{A}\\
&=2s_x\tau_x\vec{e}_x+2s_y\tau_y\vec{e}_y+b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y && \text{eigenwaarden } \mathcal{A}\\
&=(2s_x\tau_x+b_x)\vec{e}_x+(2s_y\tau_y+b_y)\vec{e}_y && \text{haakjes maken}
\end{aligned}$$

Als de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ ongelijk nul zijn, dus als $\tau_x\neq0$ en $\tau_y\neq0$, dan is $\vec{b}'=\vec{0}$ als

$$\vec{s}=s_x\vec{e}_x+s_y\vec{e}_y=-\frac{b_x}{2\tau_x}\vec{e}_x-\frac{b_y}{2\tau_y}\vec{e}_y$$

□

Opmerkingen

1) Bij twee eigenwaarden ongelijk 0 is het dus volgens de stelling altijd mogelijk om door een geschikte keuze van de nieuwe positievector volgens $\vec{x}'=\vec{x}-\vec{s}$ het lineaire deel van een inhomogene kwadratische vorm in $\mathbb{R}^2$ weg te transformeren, omdat bij een geschikte keuze van $\vec{s}$ geldt $L'(\vec{x}')=\langle\vec{b}',\vec{x}'\rangle=\langle2\mathcal{A}(\vec{s})+\vec{b},\vec{x}'\rangle=\langle\vec{0},\vec{x}'\rangle=0$
2) In de praktijk zullen we dit *wegtransformeren* altijd uitvoeren met *behulp van kwadraat afsplitsen* en niet met de formules in het bewijs. De betekenis van de stelling is echter dat nu is bewezen dat dit altijd mogelijk is als de bijbehorende symmetrische transformatie twee eigenwaarden ongelijk 0 heeft.
3) Als het *lineaire deel is weggetransformeerd* dan *is er sprake van hoofdassen* volgens

Definitie
Als een in $\mathbb{R}^2$ gegeven de inhomogene kwadratische vorm

$$K(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x})\rangle + \langle \vec{b}, \vec{x}\rangle + d\ ,$$

waarin $\mathcal{A}$ een symmetrische transformatie is, door $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{s}$ de gedaante aanneemt

$$K'(\vec{x}') = \langle \vec{x}', \mathcal{A}(\vec{x}')\rangle + d'$$

dan heet deze gedaante de *homogene gedaante van de kwadratische vorm*.
De haakse assen van $\mathcal{A}$ door de oorsprong O', waarbij $\overrightarrow{OO'} = \vec{s}$, heten dan de *hoofdassen* van de kwadratische vorm.

Voorbeeld
Gegeven: Een standaard assenstelsel (x_1, x_2) in het platte vlak en de inhomogene kwadratische vorm

$$K(\vec{x}) = K(x_1, x_2) = 27x_1^2 + 120x_1x_2 - 92x_2^2 - 858x_1 - 104x_2 + 2600$$

Gevraagd
a) Herleid het homogene deel van de kwadratische vorm naar de haakse assen door O van de bijbehorende symmetrische transformatie
b) Herleid het lineaire deel van de kwadratische vorm naar de haakse assen door O van de bijbehorende symmetrische transformatie.
c) Herleid met behulp van kwadraatafsplitsing de kwadratische vorm naar zijn homogene gedaante.
d) Geef de hoofdassenvorm van de vergelijking van de isolijn $K(\vec{x}) = -143$.
e) Teken in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) de hoofdassen van de kwadratische vorm en teken vervolgens de isolijn.

Oplossing
a) $H(x_1, x_2) = 27x_1^2 + 120x_1x_2 - 92x_2^2$

Stap 1 *De geassocieerde symmetrische lineaire transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$.*
De matrix die deze symmetrische transformatie vastlegt is

$$A = \begin{pmatrix} 27 & 60 \\ 60 & -92 \end{pmatrix}$$

Stap 2 *De eigenwaarden van de symmetrische lineaire transformatie.*

Er geldt $$A - \tau I = \begin{pmatrix} 27 & 60 \\ 60 & -92 \end{pmatrix} - \tau\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27-\tau & 60 \\ 60 & -92-\tau \end{pmatrix}$$

$|A - \tau I| = 0$ levert: $(27-\tau)(-92-\tau) - 12^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = 52 \vee \tau = -117$

Stap 3 *Orthonormale eigenvectoren van de symmetrische lineaire transformatie.*

Dus $$A\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \tau_x \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 27 & 60 \\ 60 & -92 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = 52\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 27v+60 \\ 60v-92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52v \\ 52 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 27v + 60 = 52v \\ 60v - 92 = 52 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v = \frac{12}{5} \\ v = \frac{12}{5} \end{cases}$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ is een eigenvector bij $\tau_x = 52$. Ook $5\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ is zo'n eigenvector.

$\vec{e}_x = \frac{1}{|5\vec{v}|} 5\vec{v} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ is een eigenvector met lengte 1 bij de eigenwaarde $\tau_x = 25$.

$\vec{e}_y = \vec{e}_x^{\,*} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ is een eigenvector met lengte 1 bij de eigenwaarde $\tau_y = -117$.

<u>Stap 4</u> *Herschrijven van het homogene deel van de kwadratische vorm.*

$$H(\vec{x}) = 27x_1^2 + 120x_1x_2 - 92x_2^2 = \tau_x x^2 + \tau_y y^2 = 52x^2 - 117y^2$$

b) <u>Stap 5</u> *Herschrijven van het lineaire deel van de kwadratische vorm.*

$$L(\vec{x}) = -858x_1 - 104x_2 = \begin{pmatrix} -858 \\ -104 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle$$

Dus $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -858 \\ -104 \end{pmatrix}$

Voor de kentallen van deze vector ten opzichte van de orthonormale basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ geldt

$$b_x = \langle \vec{e}_x, \vec{b} \rangle = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -858 \\ -104 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\big(12 \cdot (-858) + 5 \cdot (-104)\big) = -832$$

$$b_y = \langle \vec{e}_y, \vec{b} \rangle = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -858 \\ -104 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\big((-5)(-1032) + 12 \cdot (-104)\big) = -234$$

Dit zijn dus ook de kentallen van de vector $\vec{b}$ ten opzichte van de haakse assen van de symmetrische lineaire transformatie $\mathcal{A}$.
Gevolg voor het lineaire deel

$$L(\vec{x}) = \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle = b_x x + b_y y = -832x - 234y$$

c)

$$K(\vec{x}) = k(x.y) = 52x^2 - 117y^2 - 832x - 234y + 2600$$

<u>Stap 6</u> *Kwadraat afsplitsen van de kwadratische vorm t.o.v. de haakse assen*

$$\begin{aligned} k(x.y) &= 52(x^2 - 16x) - 117(y^2 - 2y) + 2600 \\ &= 52(x-8)^2 - 52 \cdot 8^2 - 117(y-1)^2 + 117 \cdot 1^2 + 2600 \\ &= 52(x-8)^2 - 117(y-1)^2 - 611 \end{aligned}$$

Noem $\quad x' = x - 8$

$\qquad\quad y' = y - 1$

dan $\quad k'(x'.y') = 52x'^2 - 117y'^2 - 611$

d) <u>Stap 7</u> *Hoofdassengedaante isolijn*

$k'(x'.y') = -143$ betekent

$$52x'^2 - 117y'^2 - 611 = -143 \quad \Rightarrow \quad 52x'^2 - 117y'^2 = 468$$

$$\Rightarrow \quad \frac{52}{468}x'^2 - \frac{117}{468}y'^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad (\frac{x'}{3})^2 - (\frac{y'}{2})^2 = 1$$

Dit is dus de hoofdassengedaante van een *hyperbool*.

e) Stap 8 *Hoofdassen en isolijn tekenen*

- Voor de positievector van de oorsprong O' geldt wegens stap 6 $s_x = 8$ en $s_y = 1$, en wegens stap 3

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{s} = s_x\vec{e}_x + s_y\vec{e}_y = 8\cdot\frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix} + 1\cdot\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$$

- De x'-hoofdas gaat door O' en is gericht volgens de vector

$$\frac{13}{2}\vec{e}_x = \frac{13}{2}\frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

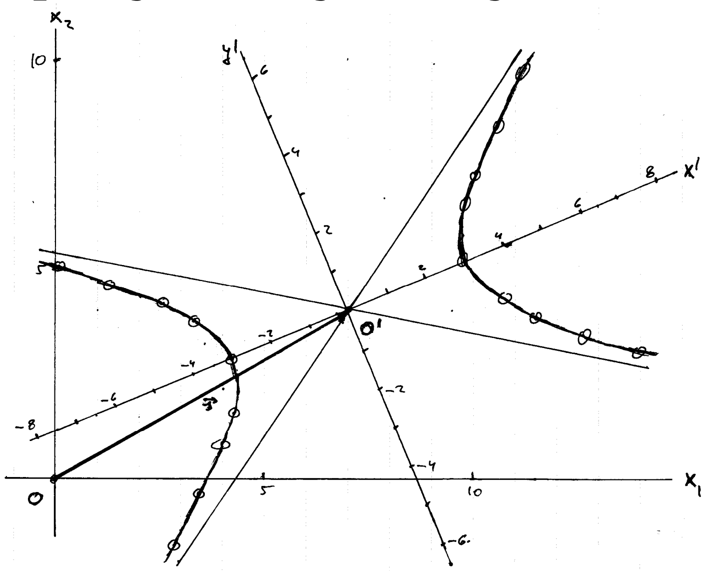
De y'-hoofdas gaat ook door O' en staat loodrecht op de x'-hoofdas.

- De hyperbool heeft *asymptoten*

$$(\frac{x'}{3})^2 - (\frac{y'}{2})^2 = 0 \;\Rightarrow\; (\frac{y'}{2})^2 = (\frac{x'}{3})^2 \;\Rightarrow\; y' = \frac{2}{3}x' \;\vee\; y' = -\frac{2}{3}x'$$

- $(\frac{x'}{3})^2 - (\frac{y'}{2})^2 = 1$ geeft de tabel

x'	y'	y'
-6	3,64	-3,64
-5	2,67	-2,67
-4	1,76	-1,76
-3,5	1,20	-1,20
-3	0	0
3	0	0
3,5	1,20	-1,20
4	1,76	-1,76
5	2,67	-2,67
6	3,64	-3,64



Opmerking
De analyse van een isolijn van een inhomogene kwadratische vorm in een plat vlak met standaard assen verloopt dus in een aantal stappen

I *Analyse van het homogene deel*

Stap 1 *De geassocieerde symmetrische lineaire transformatie $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^2$.*
Stap 2 *De eigenwaarden van de symmetrische lineaire transformatie.*
Stap 3 *Orthonormale eigenvectoren van de symmetrische lineaire transformatie.*
Stap 4 *Herschrijven van het homogene deel van de kwadratische vorm.*

II *Analyse van het lineaire deel*

Stap 5 *Herschrijven van het lineaire deel van de kwadratische vorm.*

III Hoofdassen en hoofdassengedaante

Stap 6 *Kwadraat afsplitsen van de kwadratische vorm t.o.v. de haakse assen*
Stap 7 *Hoofdassengedaante isolijn*

IV *Tekenen van de isolijn*

Stap 8 *Hoofdassen en isolijn tekenen*

Aanhangsel: Kwadraatafsplitsen

De *probleemstelling* in dit aanhangsel is de volgende

Gegeven: Een reële kwadratische vorm naar de variabele x

$$k(x) = \tau_x x^2 + b_x x + d$$

Gevraagd: Een zodanige waarde van waarde van s_x in $x' = x - s_x$ dat het lineaire deel wordt weggetransformeerd, d.w.z. zodanig dat voor $k'(x') = k(x' + s_x)$ geldt

$$k'(x') = \tau_x x'^2 + d'$$

Oplossing: Dit kan met behulp van *kwadraatafsplitsen*. Hoe werkt dit?

De *essentie van kwadraatafsplitsen* is: Voeg aan $x^2 + px$ het kwadraat van $\frac{p}{2}$ toe en trek dit kwadraat ook af. Aldus

$$\begin{aligned} x^2 + px &= x^2 + px + (\tfrac{p}{2})^2 - (\tfrac{p}{2})^2 \\ &= (x + \tfrac{p}{2})^2 - (\tfrac{p}{2})^2 \end{aligned}$$

Voorbeeld

Gegeven: De reële kwadratische vorm naar de variabele x

$$k(x) = 4x^2 - 24x + 7$$

Gevraagd: Een zodanige waarde van waarde van s_x in $x' = x - s_x$ dat het lineaire deel wordt weggetransformeerd..

Oplossing: Haal bij $4x^2 - 24x$ het getal 4 buiten haken en ga dan kwadraatafsplitsen tussen de haken

$$\begin{aligned} 4x^2 - 24x + 7 &= 4(x^2 - 6x) + 7 \\ &= 4(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + 7 \\ &= 4\left((x-3)^2 - 3^2\right) + 7 \\ &= 4(x-3)^2 - 29 \end{aligned}$$

Kies $x' = x - 3$, dus met $s_x = 3$, dan

$$k'(x') = 4x'^2 - 29$$

Opmerkingen

1) De generalisatie naar $k(x, y) = \tau_x x^2 + \tau_y y^2 + b_x x + b_y y + d$ met twee variabelen spreekt voor zich.

2) *Kwadraatafsplitsen* levert ook de *oplossingen van de reële kwadratische vergelijking* $ax^2 + bx + c = 0$ zonder dat de *a*, *b*, *c* formule wordt gebruikt.

Voorbeeld

Gegeven: De kwadratische vergelijking $2x^2 + 16x - 15 = 0$

Gevraagd: Los deze vergelijking op met behulp van kwadraatafsplitsen.

Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 16x + 15 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2(x^2 + 8x) + 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2(x^2 + 8x + 4^2 - 4^2) + 15 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left((x+4)^2-4^2\right)+15=0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2(x+4)^2-17=0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+4)^2=\tfrac{17}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x+4=\sqrt{\tfrac{17}{2}} \ \vee \ x+4=-\sqrt{\tfrac{17}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad x=-4+\tfrac{1}{2}\sqrt{34} \ \vee \ x=-4-\tfrac{1}{2}\sqrt{34}$$

Opgaven

V.3.1 Gegeven een standaard assenstelsel (x_1, x_2) in het platte vlak en de inhomogene kwadratische vorm

$$K(\vec{x})=K(x_1,x_2)=9x_1^{\ 2}-6x_1x_2+17x_2^{\ 2}+6\sqrt{10}x_1+14\sqrt{10}x_2+28$$

a) Herleid het homogene deel van de kwadratische vorm naar de haakse assen door *O* van de bijbehorende symmetrische transformatie
b) Herleid het lineaire deel van de kwadratische vorm naar de haakse assen door *O* van de bijbehorende symmetrische transformatie.
c) Herleid met behulp van kwadraatafsplitsing de kwadratische vorm naar zijn homogene gedaante.
d) Geef de hoofdassenvorm van de vergelijking van de isolijn $K(\vec{x})=50$.
e) Teken in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) de hoofdassen van de kwadratische vorm en teken vervolgens de isolijn.

V.3.2 Gegeven een standaard assenstelsel (x_1, x_2) in het platte vlak en de inhomogene kwadratische vorm

$$K(\vec{x})=K(x_1,x_2)=144x_1^{\ 2}+120x_1x_2+25x_2^{\ 2}-559x_1-416x_2+169$$

a) Herleid het homogene deel van de kwadratische vorm naar de haakse assen door *O* van de bijbehorende symmetrische transformatie
b) Herleid het lineaire deel van de kwadratische vorm naar de haakse assen door *O* van de bijbehorende symmetrische transformatie.
c) Teken in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) de isolijn $K(\vec{x})=0$.

V.3.1 Gegeven een standaard assenstelsel (x_1, x_2) in het platte vlak en de inhomogene kwadratische vorm

$$K(\vec{x})=K(x_1,x_2)=-108x_1^{\ 2}+312x_1x_2-17x_2^{\ 2}+120x_1-590x_2-225$$

a) Herleid het homogene deel van de kwadratische vorm naar de haakse assen door *O* van de bijbehorende symmetrische transformatie
b) Herleid het lineaire deel van de kwadratische vorm naar de haakse assen door *O* van de bijbehorende symmetrische transformatie.
c) Herleid met behulp van kwadraatafsplitsing de kwadratische vorm naar zijn homogene gedaante.
d) Geef de hoofdassenvorm van de vergelijking van de isolijn $K(\vec{x})=500$.
e) Teken in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) de hoofdassen van de kwadratische vorm en teken vervolgens de isolijn.