Complexe getallen voor Wiskunde D en NLT

Henk Broer[†] en Kees van der Straaten[‡]

[†] Henk Broer is hoogleraar wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen en lid van cTWO
[‡] Kees van der Straaten is leraar aan het Praediniusgymnasium te Groningen

Complexe getallen zijn al een paar eeuwen aan de mensheid bekend. Ze hebben iets intrigerends, want hoewel er enige problemen waren aangaande de fundamenten, was er grote behoefte aan de mogelijkheden er mee te kunnen rekenen. De behoeften gaan al terug naar de 14e eeuw bij het rekenen aan de derde en vierde graads vergelijking. Het was Gauß die het complexe vlak invoerde en de formele problemen daarmee oploste: het zo imaginaire getal i bestaat gewoonweg. Inmiddels heeft het complexe vlak en de theorie van analytische functies een hoge vlucht genomen, het vormt een prachtig deel van de grote calculus-analyse symfonie. Deze complexe analyse was en is zeer van belang voor de ontwikkeling van de mathematische fysica, waaronder de theorie van trillingen en elektrische netwerken, al was het alleen al doordat zo een handig notatieapparaat ontstaat, waarin je zo heerlijk efficiënt kunt rekenen.

Complexe getallen zijn een verplicht onderdeel van het schoolmodel wiskunde D op het VWO. In de praktijk blijkt dat veel scholen die het samenwerkingsmodel boven het schoolmodel verkiezen, ook complexe getallen in het programma opnemen. De connectie met mathematische fysica levert interessante mogelijkheden voor het vak NLT.

Overzicht van het onderwerp ‘complexe getallen’

We geven een indruk van de onderwerpen die zoal aan de orde kunnen komen en komen in het kader van Wiskunde D en die ook duidelijk aangeven waarom complexe getallen zo interessant zijn. De beide auteurs herinneren zich overigens dat dit overzicht zich pas aan hen ontvouwd heeft gedurende de eerste jaren van hun universitaire studie, maar goed. Het getal i treedt dus op als oplossing van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ en dan blijkt dat je opeens alle vierkantsvergelijkingen kunt oplossen. Verder heb je de spectaculaire formules van Euler

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{1}$$

ofwel

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \text{ en } \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

en, daarmee samenhangend, de Stelling van De Moivre

$$(\cos y + i \sin y)^n = \cos(ny) + i \sin(ny), \tag{2}$$

waarna de formulekaart met goniometrische gelijkheden onverwijld kan worden weggegooid. Hierachter kan het mooie geheim van de complexe e-macht en de additieformule

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \tag{3}$$

schuilgaan, iets wat natuurlijk wel vermeld mag worden! Een ander geheim is de Hoofdstelling van de Algebra, die zegt dat een complex polynoom van de graad n precies n wortels heeft (multipliciteit meegerekend). Dit betekent dat niet alleen kwadratische, maar alle polynomiale vergelijkingen oplossingen hebben, alleen ligt ook dit niet langer in de sfeer van rekenen. Zo is er meer, bijvoorbeeld vlakke analytische meetkunde, die een extra tool heeft in de complexe vermenigvuldiging: vermenigvuldig je, bijvoorbeeld, een lijnstuk of een driehoek met i dan roteert dit geheel 90^0 om de oorsprong. Een stapje verder beschouwt men complexe functies als transformaties van het vlak. Allerlei mogelijkheden dienen zich aan, zoals de Möbius (of gebroken lineaire) transformaties, de complexe e-macht (en logaritme), maar ook de iteratie van kwadratische afbeeldingen met de bijbehorende Julia en Mandelbrot verzamelingen. Ook interessant zijn de gehelen van Gauß, waarbij blijkt dat $13 = (2 + 3i)(2 - 3i)$ opeens geen priemgetal meer is. Een schier onuitputtelijke bron van ‘contexten’ komt uit de mathematische fysica waar complexe notatie uiterst handig is voor berekeningen, men denke hierbij allereerst aan trillingen en aan elektrische netwerken met complexe impedanties. Lineaire differentie- (of recursie-) en differentiaalvergelijkingen kunnen hier een interessant tussenstation vormen.

We merken op dat het examenprogramma VWO een ‘minimum’ voorschrijft: rekenen met complexe getallen, de geconjugeerde, het argument en de absolute waarde, de formule van Euler en Stelling van De Moivre, en een profielspecifieke verdieping.

Tekstbespreking

Doel van dit artikel is de recente teksten [1, 2, 7] te bespreken, alle geschreven ten behoeve van Wiskunde D. In ons achterhoofd hebben we hierbij het 'klassieker' werk [4, 8]. Om te beginnen zij opgemerkt dat alle teksten een greep vormen uit bovengenoemd materiaal, waarbij, behalve verschillende keuzen hierin, ook verschillen optreden in de opbouw en de mate van wiskundige strengheid. In een aantal teksten staat het rekenwerk voorop en wordt een algebraïsche aanpak gekozen: aan het lichaam $\mathbb{R}$ wordt – op enigszins heuristische wijze – de wortel $\sqrt{-1}$ toegevoegd.[1] Een ontologisch iets veiliger aanpak komt meteen met het complexe vlak aanzetten, waarbij op het vlak $\mathbb{R}^2$ met coördinaten a en b men schrijft $(a, b) \leftrightarrow a + ib$, zodat het getal i correspondeert met $(a, b) = (0, 1)$. Hierdoor kan het rekenwerk van meet af aan gelardeerd worden met meetkundige interpretaties.

De 'klassieke' teksten

We beginnen met Freudenthal-Nijdam [4]. Dit is nog een ouderwets degelijke tekst, die na enig gereken met het complexe vlak op de proppen komt, daarna met de lichaamseigenschappen en enige theorie van complexe functies en hun grafische interpretatie, waarna hele hoofdstukken volgen over, respectievelijk, Möbius transformaties en exponentiële functies. Bij het laatstgenoemde onderwerp worden de formules

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \text{ en } e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{4}$$

kort aangestipt ("... met enige hogere wiskunde kan men bewijzen ..."). Het werk eindigt met twee hoofdstukken elektrische trillingsketens en gedempte trillingen. Overigens blijkt uit de introductie dat het materiaal eigenlijk te omvangrijk was om in de beschikbare tijd te behandelen.

De Zebra [8] van Vuijk et al. overdekt ruwweg dezelfde stof, alleen zonder Möbius-transformaties en het massa-veer systeem, maar juist weer wel met toepassingen op de derdegraadsvergelijking. Deze tekst is iets speelser dan [4] en gebruikt ook reeds een website met programma's om de Mandelbrotverzameling te tekenen. Ook verschijnt de grafische rekenmachine hier op een bescheiden wijze ten tonele.

[1] Hoofdstuk 22 van [3], getiteld 'Algebra', geeft in tien bladzijden een uiterst leesbaar overzicht van de getalsystemen, uitgaand van de gehelen $\mathbb{Z}$. De liefhebber zal hier ook een elegante manier aantreffen om het getal e te karakteriseren.

De ‘moderne’ teksten

Hieronder volgt een korte indruk van de drie teksten [1, 2] en [7].

Complexe getallen [1]. Na enig gereken en de abc-formule verschijnt het complexe vlak ten tonele, wordt het getal i ingevoerd en worden de lichaamseigenschappen afgeleid. Hierna staat de deur open voor de meetkunde van het complexe rekenen, met speciale aandacht voor de complexe eenheidscirkel, de formule van Euler (1) en de complexe functies $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ (als $z = x + iy$ met x en y reëel) en daarna ook nog $\cos z$ en $\sin z$. Alles wordt netjes afgeleid uit goniometrische betrekkingen en zonder gebruik van reeksen. De additie formule (3) wordt nu ook bewezen, waarna de formule van De Moivre (2) nog slechts een sommetje zou zijn geweest. Misschien een suggestie voor een volgende versie van de tekst? Hierna komen wortels en polynomen aan de orde en wordt de Hoofdstelling van de Algebra vermeld. Wij waren hier aangenaam getroffen door de staartdeling van complexe polynomen.

Hierna volgen lineaire recurrente betrekkingen van de eerste, tweede en van hogere orde, de reeks van Fibonacci. Dit is een uitbreiding van wat al bestaat. Hierna nog lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste, tweede en hogere orde met toepassing op het massa-veer systeem en het elektrisch circuit. Beide onderwerpen worden afgesloten met een discussie over realistische modellen, waarbij ook een interessant economisch voorbeeld ter sprake komt.

Wij vonden deze tekst wiskundig transparant en goed afgewogen, met een lichte overkill aan sommen. De toepassingen en voorbeelden komen aan het eind. Het totaal is een zeer gedegen en het lijkt ons een uiterst bruikbaar werk!

Complexe getallen in context [2]. Het complexe vlak (eerst de imaginaire getallen) wordt tamelijk snel ingevoerd met de noodzakelijke algebra (de lichaamseigenschappen). Daarna poolcoördinaten en de formule van Euler (1), in eerste instantie als feit. Vervolgens vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen waarbij uiteraard uitvoerig gebruik gemaakt wordt van die poolcoördinaten. Er wordt vervolgd met wiskundige toepassingen van bovenstaande: complex worteltrekken, logaritmen en de Hoofdstelling van de Algebra als behartenswaardig feit. Verder de theorie van eerste en tweede orde lineaire differentiaalvergelijkingen.

Het hoofdstuk ‘Formules bewijzen’ is optioneel. Hier worden de formele MacLaurin (Taylor) reeksen behandeld, afhankelijk van een reële veranderlijke, en met toepassingen op e^x, $\sin x$ en $\cos x$. Vergelijk (4). De mogelijkheid van benadering met eindige stukken reeks als feit wordt vermeld dat met de rekenmachine gecontroleerd kan worden. Hierna wordt een bewijs gesuggereerd van de Euler formule

(1) door met de drie genoemde reeksen te manipuleren. Hier zit wel het onvermelde geheim achter dat de reeks in (4), onder meer, ook geldt als $x = i\varphi$, met φ reëel. De formule van De Moivre (2) wordt dan weer keurig met goniometrische formules en volledige inductie bewezen. De tekst eindigt met een aantal hoofdstukken over differentiaalvergelijkingen in de natuurkunde, zoals het massa-veer systeem en de RCL-schakeling. Hier komt de mooie successtory van de complexe impedanties en het bijbehorende rekenen aan de orde, de RCL-schakeling als filter en verder nog twee appendices over dit complexe rekenen.

Dit werk bevat een timely inleiding waarbij de leerling gevraagd wordt op het internet van de formules van Euler (1) en De Moivre (2) een bewijs te zoeken. Deze en andere onderzoeksvragen, onder meer betreffende massaveersystemen en de RCL-serieschakeling, worden later in de tekst nader uitgewerkt. Het geheel is minder gericht op de wiskundige structuur, maar meer op de toepassingen. Hierbij wordt een grote nadruk gelegd op de context van de RCL-schakeling met de bijbehorende complexe rekenwijze.

Wij vroegen ons af in hoeverre, gegeven de stand van zaken binnen het VWO-natuurkundeonderwijs, de huidige VWO-leerling deze nadruk zou kunnen appreciëren. Valt hier misschien toch meer te denken aan een verdieping in het kader van NLT? Vergelijk ook de fraaie tekst van Van Hoof et al. [5], die juist met het oog op dit punt een zeer goede opbouw heeft.

Wat? Nog meer getallen! [7]. Deze tekst begint vanuit de algebra en de vraag hoe de getalsystemen stelselmatig kunnen worden uitgebreid. Zo ontstaat de rij inclusies

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}[\sqrt{-1}],$$

waarbij het getal tussen vierkante haken $[\cdot]$ de vierkantswortel is die aan het lichaam wordt toegevoegd.[2] Hierbij wordt 'voor de preciezen' ook het bewijs opgenomen dat $\sqrt{2}$ irrationaal is. Bij het vereenvoudigen van de formules van Cardano, die optreden in de context van de derde graadsvergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, blijkt het getal i ook erg handig te zijn; zover bekend is dit historisch de eerste gelegenheid waarbij de complexe getallen opdoken. Dan wordt de rekenkunde van $\mathbb{C}$ min of meer systematisch opgezet, waarna in hoofdstuk 4 het complexe vlak wordt ingevoerd, ook met poolcoördinaten. Hier komt de abc-formule ten tonele, gelukkig in verband met kwadraat afsplitsen. Verder de Hoofdstelling van de Algebra[3]. Aardig is ook hier een staartdeling van complexe polynomen. In hoofdstuk 5 komt de complexe e-macht aan de orde, gedefinieerd door (1), waarna toegewerkt wordt naar de additieformule (3), in principe op

[2] Zie voor wiskundige achtergrond onder meer [6].

[3] In de docentenhandleiding wordt hiervan een bewijs geschetst!

dezelfde manier als in [1]. Expliciet wordt hier de oogst binnengehaald van het feit dat nu de gonioformules aanzienlijk eenvoudiger zijn af te leiden. De formule (2) wordt echter niet expliciet genoemd. Ook wordt kort aandacht besteed aan tweede orde lineaire differentiaalvergelijkingen. Er volgt een aardig hoofdstuk over analytische meetkunde op het complexe vlak, met, onder andere, de Stelling van Napoleon. Daarna komen de gehelen van Gauß aan de orde, waaronder natuurlijk de bijbehorende priemgetallen en vervolgens, kort, de quaternionen van Hamilton. De tekst besluit met een, eveneens kort, hoofdstukje over fractals waarbij iteraties

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

worden beschouwd, hetgeen dan leidt tot Julia-verzamelingen in het z-vlak en tot de Mandelbrot-verzameling in het c-vlak.

Wij vonden dit een rijke tekst, die hier en daar iets preciezer had gekund. De nadruk van de extra dingen ligt vooral in de wiskunde en op te merken valt dat ook hier een aantal van de onderwerpen (Gaußische priemen, fractals) wel enigszins geïsoleerd zijn in het totale curriculum. Niettemin zitten hier wellicht aardige profielwerkstukken in.

Conclusies

Alle teksten zijn zonder meer bruikbaar, zeker in de handen van de goed ingevoerde leraar; dit geldt ook zonder meer voor de 'klassieke' teksten [4, 8]. In feite zou je wensen dat de leraar al het materiaal ter beschikking had, dit ter inspiratie. Dit geldt eveneens voor toepassingen in NLT, met name wat betreft de electrische netwerken, zie hiervoor ook [5]. Over het algemeen is de hoeveelheid materiaal aan de ruime kant en zullen er dus keuzen gemaakt moeten worden. Tot slot merken we op dat 'de schoolboeken' ook hoofdstukken Wiskunde D hebben, waarin aandacht besteed wordt aan complexe getallen.

Met dank aan Wout de Goede en Martinus van Hoorn.

References

[1] J. van de Craats, *Complexe getallen voor Wiskunde D* Gratis internetboek; herziene versie), augustus 2008, http://staff.science.uva.nl/ craats

[2] R.A.C. Dames en H. van Gendt, Complexe getallen in context, voor Wiskunde D (5 VWO), versie 3, in opdracht van cTWO, mei 2009, http://www.ctwo.nl

[3] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton and Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics* Volume I, Addison-Wesley 1963

[4] H. Freudenthal en B. Nijdam, *Complexe getallen* (derde geheel herziene druk), IOWO, Utrecht, 1977

[5] J. van Hoof, A. Goddijn en T. van der Valk, *Complexe stromen*, een module natuurkunde en wiskunde over wisselstroomschakelingen en complexe getallen, Junior College Utrecht - VWO6 NT en NG, najaar 2007

[6] Frans Keune, *Getallen, van natuurlijk naar imaginair*, Epsilon-Uitgaven **65**, 2009.

[7] Hans Sterk, *Wat? Nog meer getallen!* Complexe getallen en toepassingen, een module voor Wiskunde D, TU/e, voorjaar 2009, http://www.win.tue.nl/wiskunde

[8] R.A.J. Vuijk et al., *Complexe getallen*, Zebra (Getal en Ruimte), EPN, Houten 2001