Domein Meetkunde
havo B

2
Trigonometrie

Inhoud

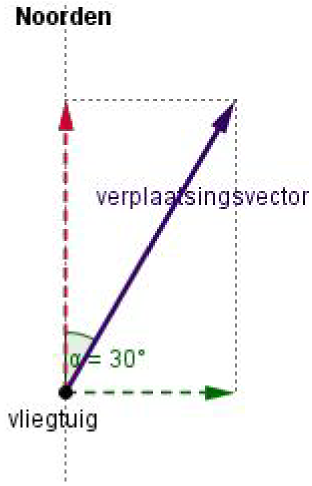
In opdracht van:
Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs

Versie proefscholen met ingedikt programma: mrt 2012

Overzicht lesmateriaal in het domein Meetkunde

1 Sinus, cosinus en tangens

Verkennen

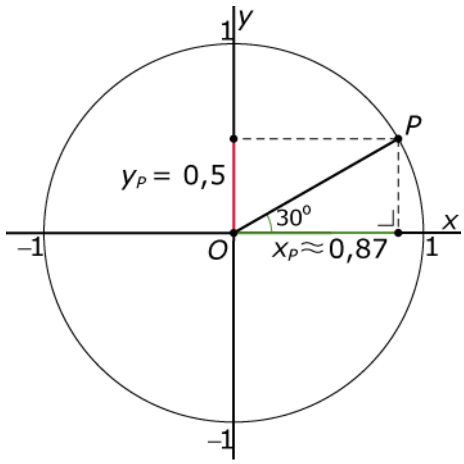


Je ziet hier een vliegtuig met een gegeven verplaatsing. Die verplaatsing wordt voorgesteld door een pijl die een bepaalde lengte heeft en een bepaalde hoek maakt met het Noorden. Kun je nu nauwkeurig vaststellen hoeveel hij in Noordelijke dan wel Oostelijke richting is verplaatst?

Opgave 1
Stel je voor dat de afstand 500 km bedraagt en de richtingshoek 30° is.
Bereken nu de verplaatsing in Noordelijke richting en de verplaatsing in Oostelijke richting met behulp van sinus en/of cosinus.

Opgave 2
Bereken ook de verplaatsing in Noordelijke richting bij een richtingshoek van 120°. Waarom is hij negatief?

Uitleg



Je hebt al leren werken met sinus, cosinus en tangens. Maar altijd bij scherpe hoeken. Het is mogelijk om de definities van sinus, cosinus en tangens uit te breiden voor grotere hoeken.

Hier zie je een lijnstuk *OP* met een lengte van 1 in een assenstelsel. Waar punt *P* zit wordt bepaald door de richtingshoek α.
Die richtingshoek is de hoek die *OP* maakt met de positieve *x*-as. Meet je de richtingshoek tegen de wijzers van de klok in dan is hij positief. Meet je de richtingshoek met de wijzers van de klok mee dan is hij negatief.
Zolang de richtingshoek α scherp (tussen 0° en 90°) is, kun je de coördinaten (x_P, y_P) van punt *P* berekenen met goniometrie:

$$\cos \alpha = \frac{x_P}{1} \text{ dus } x_P = \cos \alpha$$

en

$$\sin \alpha = \frac{y_P}{1} \text{ dus } y_P = \sin \alpha .$$

Door af te spreken dat $x_P = \cos \alpha$ en $y_P = \sin \alpha$ ook voor alle andere hoeken geldt, heb je de sinus en de cosinus voor alle mogelijke hoeken betekenis gegeven.

Je ziet in de figuur dat dan voor hoeken tussen 90° en 270° de cosinus negatief is en ook dat voor hoeken tussen 180° en 360° de sinus negatief is.

Opgave 3

Teken een cirkel met straal 1 en een lijnstuk *OP* met lengte 1 en een richtingshoek van 110°.

a) Laat je rekenmachine sin(110°) en cos(110°) bepalen (in twee decimalen).
b) Geef die waarden in je figuur aan.
c) Leg uit dat voor hoeken tussen 90° en 180° de cosinus van de hoek negatief en de sinus van de hoek positief is. En hoe zit het met de tangens van de hoek?

Opgave 4

Laat met behulp van een tekening zien, dat:

a) sin 100° = sin 80°
b) cos 100° = –cos 80°
c) sin 253° = sin(–73°) = –sin 73°
d) cos 280° = cos(–70°)= cos 70°

Opgave 5

Laat met behulp van een tekening zien, dat:

a) sin α = sin(180° – α)
b) cos α = –cos(180° – α)
c) sin α = –sin(–α)
d) cos α = cos(–α)

Opgave 6

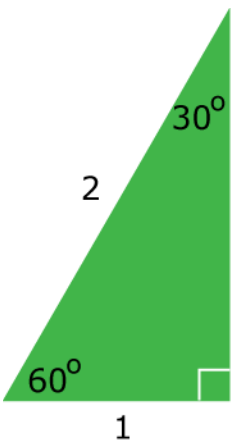
Bereken met je rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van punt *P* als *OP* de lengte heeft 1 en een richtingshoek heeft van:

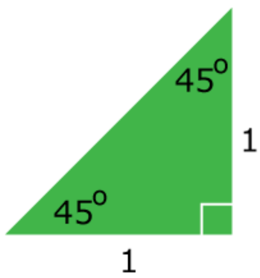
a) 40°
b) 140°
c) 240°
d) 340°

Opgave 7

Exacte waarden voor sin, cos en tan

Van een paar hoeken kun je sinus, de cosinus en de tangens exact berekenen. Omdat die hoeken regelmatig voorkomen is het handig om die exacte waarden te weten.
Bekijk daartoe deze twee bijzondere **tekendriehoeken**. De linker is een halve gelijkzijdige driehoek en de rechter is een geodriehoek.

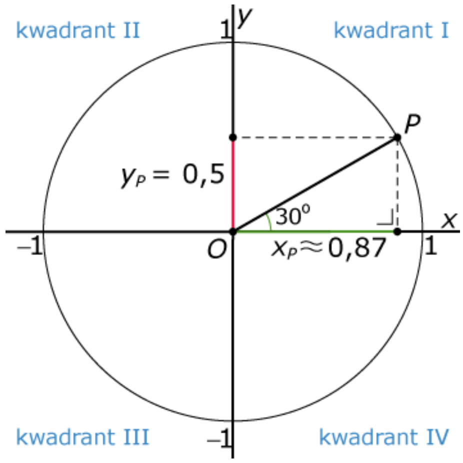




a) Bereken eerst de zijden die nog niet zijn gegeven.
b) Bereken sinus, cosinus en tangens van 60° en van 30°.
c) Bereken sinus, cosinus en tangens van 45°.
d) Verklaar deze tabel (en leer hem uit je hoofd):

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	bestaat niet

Theorie**



Hier zie je een lijnstuk *OP* met een lengte van 1 in een assenstelsel. De coördinaten van *P* zijn: $x_P = \cos\alpha$ en $y_P = \sin\alpha$.

Dit geldt voor alle mogelijke hoeken α. Je ziet in de figuur dat het assenstelsel het vlak in vier **kwadranten** verdeelt. Voor hoeken in het tweede kwadrant is de cosinus negatief en de sinus positief. Voor hoeken in het derde kwadrant zijn de cosinus en de sinus beide negatief. Voor hoeken in het vierde kwadrant is de cosinus positief en de sinus negatief.

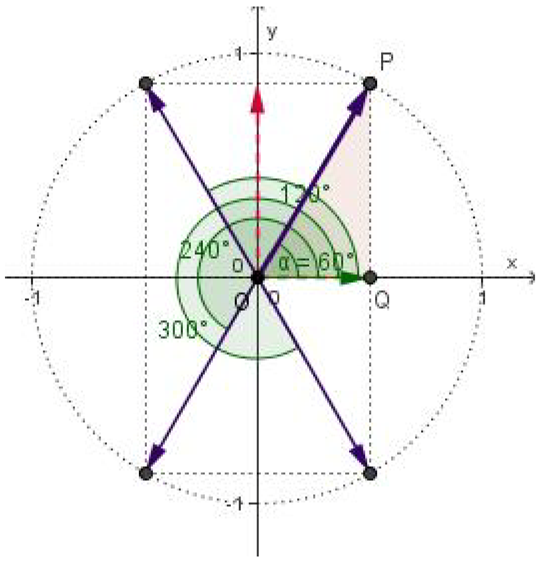
Verder geldt: $\tan\alpha = \dfrac{y_P}{x_P}$

In Voorbeeld 1 kom je hoeken tegen waarvan sinus, cosinus en tangens exact te berekenen zijn. Deze waarden zijn handig in het gebruik. Denk er om: als je iets exact kunt berekenen, dan moet je dat ook doen. Benaderingen gebruik je alleen als dat niet anders kan!

Is de lengte van de vector niet 1 maar bijvoorbeeld *r*, dan worden de coördinaten van *P* ook *r* keer zo groot. Die zijn dan:
$x_P = r\cos\alpha$ en $y_P = r\sin\alpha$.

****

Voorbeeld 1



Bereken exact de sin, cos en tan van hoeken van 60°, 120°, 240° en 300°.

Uitwerking:

Hier zie je een lijnstuk *OP* met lengte 1 en richtingshoek α.
Als $\alpha = 60°$ dan is $x_P = \cos(60°) = \frac{1}{2}$ en
$y_P = \sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

En $\tan(60°) = \dfrac{y_P}{x_P} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Vervolgens is $\sin(120°) = \sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,
$\cos(120°) = -\cos(60°) = -\frac{1}{2}$
en $\tan(120°) = -\tan(60°) = -\sqrt{3}$.
En op dezelfde manier vind je sin, cos en tan van 240° en 300°.

Opgave 8
Bepaal zelf de exacte waarden van sin, cos en tan van 240° en 300°.

Opgave 9
Teken in een assenstelsel een lijnstuk *OP* met lengte 1 en richtingshoek 45°. Je weet dat sin 45° = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en cos 45° = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en tan 45° = 1.

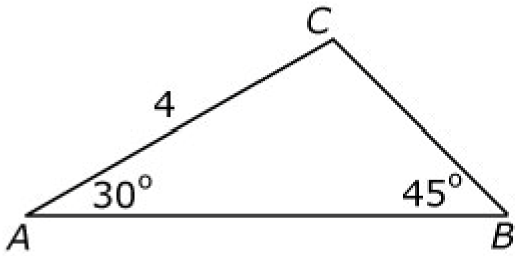
a) Bepaal nu sin 135°, cos 135° en tan 135°.
b) Bepaal ook sin 225°, cos 225° en tan 225°.
c) En bepaal tenslotte sin 315°, cos 315° en tan 315°.

Opgave 10
Teken in een assenstelsel een lijnstuk *OP* met een lengte van 1 en een richtingshoek van 30°. Je weet dat sin 30° = $\frac{1}{2}$ en cos 30° = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en tan 30° = $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

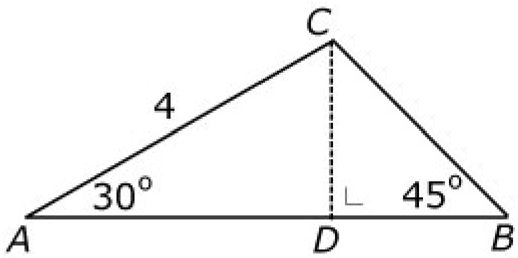
a) Bepaal nu sin 150°, cos 150° en tan 150°.
b) Bepaal ook sin 210°, cos 210° en tan 210°.
c) En bepaal tenslotte sin 330°, cos 330° en tan 330°.

Opgave 11
a) Bepaal alle hoeken tussen 0° en 360° die voldoen aan $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.
b) Bepaal in graden nauwkeurig alle hoeken tussen 0° en 360° die voldoen aan $\sin(\beta) = -0{,}6$.
c) Bepaal in graden nauwkeurig alle hoeken tussen 0° en 360° die voldoen aan $\tan(\gamma) = -0{,}6$.

Voorbeeld 2
Je ziet hier ΔABC met $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$ en $|AC| = 4$ cm. Bereken de lengte van *AB*.



Uitwerking:
Zonder rechte hoeken kun je niet met sin, cos en/of tan werken.
Dus maak je eerst rechte hoeken, zie figuur.



Met behulp van goniometrie en de exacte waarden vind je:

$\cos(30°) = \dfrac{|AD|}{4}$ en dus

$|AD| = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Op dezelfde manier is:

$|CD| = 4\sin(30°) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Vervolgens heb je geen goniometrie nodig om te bedenken dat $|CB| = |CD| = 2$.
Dus is de gevraagde lengte: $|AB| = 2\sqrt{3} + 2$.

Opgave 12
Teken ΔKLM met $\angle K$ = 60°, $\angle M$ = 75° en |LM| = 4 cm.
Bereken de exacte lengte van KL en KM.

Opgave 13
Teken ΔPQR met $\angle P$ = 50°, $\angle Q$ = 35° en |PR| = 6 cm.
Bereken de lengte van PQ en QR. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 14
Een schip vaart 40 km met een koers van 115° t.o.v. het Noorden. Dergelijke kompaskoersen worden altijd *rechtsom* gemeten!
Hoeveel heeft het schip zich in Noordelijke of Zuidelijke richting verplaatst? En hoeveel in de Oostelijke of de Westelijke richting? (Geef je antwoorden in één decimaal nauwkeurig.)

Verwerken

Opgave 15
Bereken in graden nauwkeurig alle hoeken α met $0° \leq \alpha \leq 360°$ waarvoor geldt:

a) $\cos(\alpha) = 0{,}38$
b) $\sin(\alpha) = 0{,}38$
c) $\cos(\alpha) = -0{,}38$
d) $\sin(\alpha) = -0{,}38$
e) $2\cos(\alpha) = 0{,}38$
f) $\tan(\alpha) = 0{,}38$
g) $\cos(\alpha) = 0$
h) $\cos(\alpha) = 1$

Opgave 16
Teken ΔABC met $\angle A$ = 120°, $\angle B = 45°$ en |AC| = 5 cm.
Bereken de lengte van AB en BC.

Opgave 17 Noodlanding
Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld A en vliegt 3 uur met een constante snelheid van 140 km/h een koers 30° ten opzichte van het Noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 170° en de snelheid in 120 km/h. Na 1,5 uur moet hij een noodlanding maken.
Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd. Bereken de afstand die de helikopter moet vliegen.

Opgave 18 Mansardedak


Je ziet hier een foto van een huis met een zogenaamd mansardedak. De breedte van het huis is 6 m en de breedte van elk dakdeel is 2,5 m. De onderste dakdelen maken een hellingshoek van 65° met een horizontaal vlak.

a) Bereken de hoogte van het huis als de dakgoot op 3 m boven de begane grond zit.
b) Bereken de hellingshoek van de bovenste dakdelen.

2 Lijnen en hoeken

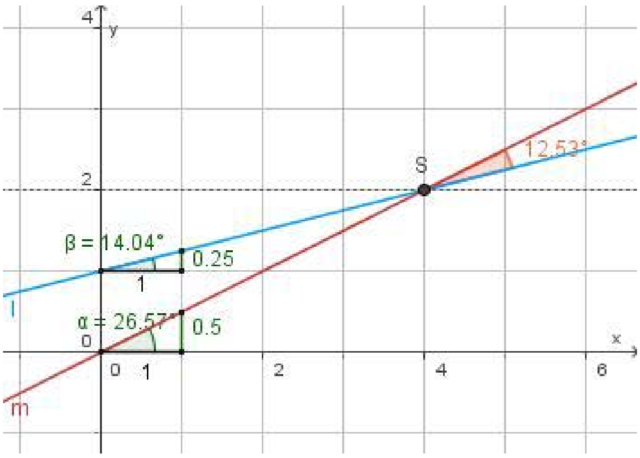
Verkennen

Bij het schatgravers probleem moest je twee keer een rechte hoek maken, je weg vervolgen in een richting loodrecht op de voorgaande. Inmiddels weet je dat je lijnen met vergelijkingen van de vorm $ax + by = c$ kunt beschrijven. Hoe maak je nu een vergelijking bij een lijn die loodrecht op een andere lijn staat?

Opgave 19

Gegeven is de lijn met vergelijking $2x + 4y = 9$.
Hoe luidt de vergelijking van een lijn door $O(0,0)$ die er loodrecht op staat?
Construeer deze situatie met ➤**GeoGebra** en laat het programma de gewenste vergelijking bepalen. Ontdek je een verband tussen beide vergelijkingen?

Uitleg 1



Hier zie je de lijnen l: $y = 0,25x + 1$ en m: $y = 0,5x$. Om de hoek tussen beide lijnen te berekenen stel je bij beide eerst de zogenaamde **hellingshoek** vast. De hellingshoek van een rechte lijn is de hoek die deze lijn maakt met de positieve x-as. De hellingshoek bereken je vanuit het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, van de lijn.

- l: $y = 0,25x + 1$ heeft een r.c. van 0,25.
  De hellingshoek β zit in een rechthoekig driehoekje met een overstaande rechthoekszijde van 0,25 en een aanliggende rechthoekszijde van 1.
  Dus $\tan \beta = 0,25$ en $\beta \approx 14,0°$.

- m: $y = 0,5x$ heeft een r.c. van 0,5.
  De hellingshoek α volgt uit $\tan \alpha = 0,5$ en is dus $\alpha \approx 26,6°$.

In de figuur zie je dat de hoek tussen beide lijnen gelijk is aan:
$26,6° - 14,0° = 12,6°$.

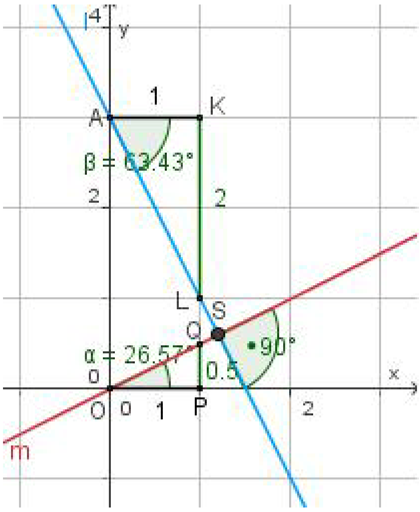
Opgave 20

Bereken op dezelfde manier de hoek tussen l: $y = 0,5x$ en k: $x - 3y = 6$.

Opgave 21

Bereken op dezelfde manier de hoek tussen l: $y = 0,5x$ en k: $x + 3y = 6$.
Ga ervan uit, dat lijn k nu een negatieve hellingshoek heeft.

Uitleg 2



Hier zie je de lijnen *l*: $y = -2x + 3$ en *m*: $y = 0{,}5x$.
Ga na dat beide lijnen loodrecht op elkaar staan.

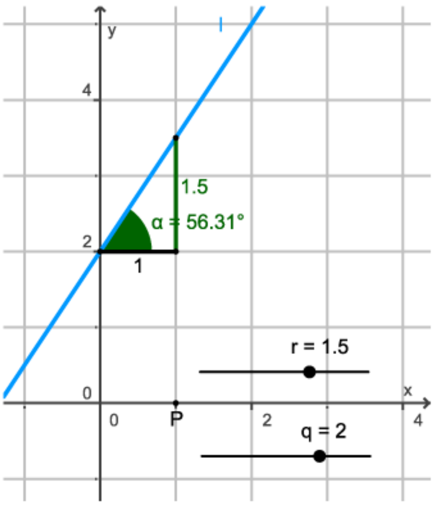
De twee rechthoekige driehoekjes *OPQ* en *ALK* zijn gelijkvormig. Immers $\angle POQ$ (α) en $\angle LAK$ (β) zijn samen 90°. Maar $\angle POQ$ en $\angle OQP$ zijn ook samen 90°, dus $\angle OQP = \angle ALK$. Beide driehoekjes hebben dezelfde hoeken en zijn dus gelijkvormig.
Hun zijden hebben dezelfde verhoudingen en dus is $|PQ| \cdot 1 = 1 \cdot |LK|$.
Omdat $|PQ| = 0{,}5$ vind je $|LK| = 2$.

Uit de figuur blijkt dat een lijn die loodrecht staat op een lijn met r.c. = 0,5 zelf een r.c. van –2 heeft. Het product van deze twee hellingsgetallen is –1 en dat blijkt altijd het geval te zijn bij lijnen die elkaar loodrecht snijden (tenzij één van beide verticaal is).

Opgave 22
Toon nu zelf aan dat de lijnen *p*: $y = 0{,}25x$ en *q*: $y = -4x + 3$ loodrecht op elkaar staan.

Opgave 23
Welke richtingscoëfficiënt heeft de lijn die loodrecht staat op *k*: $2x - 5y = 10$?

Theorie *



Elke rechte lijn heeft een vergelijking van de vorm $ax + by = c$. Dit is te herschrijven tot

$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ mits $b \neq 0$.

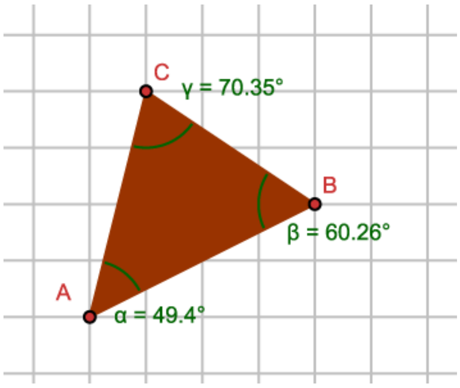
Dit betekent dat elke lijn (behalve een lijn evenwijdig aan de *y*-as) een **richtingscoëfficiënt** (hellingsgetal) heeft:
$r = -\frac{a}{b}$ en te schrijven is in de vorm $y = rx + q$.

Bij de r.c. *r* hoort een **hellingshoek** α, de hoek die de lijn met de positieve *x*-as maakt. Deze hoek heeft waarden vanaf –90° tot 90°.
Er geldt: $\tan \alpha = r$ en als $r > 0$ dan is α positief, als $r < 0$ dan is α negatief.
Met behulp van deze hellingshoeken bereken je de hoek die twee lijnen met elkaar maken.

Als voor twee lijnen *l* en *m* met richtingscoëfficiënten r_l en r_m geldt dat $r_l \cdot r_m = -1$ dan staan beide lijnen **loodrecht** op elkaar.
Staan omgekeerd twee lijnen *l* en *m* met richtingscoëfficiënten r_l en r_m loodrecht op elkaar, dan geldt $r_l \cdot r_m = -1$.

* *

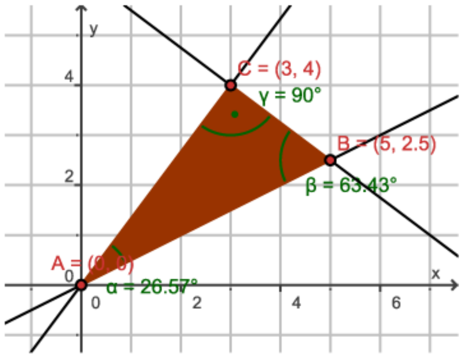
Voorbeeld 1
Je ziet hier een driehoek *ABC*. De hoeken zijn berekend.
Laat zien hoe dat in zijn werk gaat.



Uitwerking:
Je begint met een assenstelsel in te voeren.
Neem $A = O(0,0)$, en $B = (4,2)$ dan is $C = (1,4)$.
Eerst maar $\angle A$.
Stel van de lijnen *AB* en *AC* de vergelijkingen op.
Bereken beide hellingshoeken en laat zien dat $\angle A$ dezelfde grootte heeft als in de figuur. Op dezelfde manier doe je $\angle B$ en tenslotte $\angle C$.

Opgave 24
Bereken nu zelf de hoeken van driehoek *ABC* in Voorbeeld 1.

Voorbeeld 2
Je ziet hier een driehoek *ABC*. Als $A = (0,0)$, $B = (5;2,5)$ en $C = (3,4)$ dan is $\angle C$ een rechte hoek en staan de lijnen *AC* en *BC* loodrecht op elkaar. Toon dat aan.



Uitwerking:
Het hellingsgetal van een lijn door twee punten vind je snel door de coördinaten te vergelijken:

- lijn *AC* gaat door $A(0,0)$ en $C(3,4)$.
  x neemt toe met $3 - 0 = 3$ eenheden.
  y neemt toe met $4 - 0 = 4$ eenheden.
  Het hellingsgetal (de toename van y per eenheid x) van *AC* is daarom $\frac{4}{3}$.

- lijn *BC* gaat door $B(5;2,5)$ en $C(3,4)$.
  x neemt toe met $5 - 3 = 2$ eenheden.
  y neemt toe met $2{,}5 - 4 = -1{,}5$ eenheden.
  Het hellingsgetal (de toename van y per eenheid x) van *AC* is daarom $\frac{-1{,}5}{2} = -\frac{3}{4}$.

De r.c. van *AC* is $\frac{4}{3}$ en die van *BC* is $-\frac{3}{4}$. Hun product is -1 en dus staan beide lijnen loodrecht op elkaar.

Opgave 25
Toon aan dat lijn *l* door $O(0,0)$ en $P(2,5)$ loodrecht staat op lijn *m* door *P* en $Q(7,3)$.

Opgave 26
Staan de lijnen p: $-30x + 20y = 33$ en q: $2x = 100 - 3y$ loodrecht op elkaar?

Voorbeeld 3
Gegeven de lijn l: $2x + 3y = 6$ en punt $A(3,4)$.
Stel de vergelijking op van de lijn door A en loodrecht l.

Uitwerking:
Ga na, dat lijn l een r.c. heeft van $-\frac{2}{3}$.
Als een lijn die daar loodrecht op staat een r.c. van r, dan moet $-\frac{2}{3} \cdot r = -1$.
De lijn door A en loodrecht op l heeft dus een r.c. van 1,5.
En dus een vergelijking van de vorm $y = 1{,}5x + b$.
De lijn moet door $A(3,4)$ en dus moet $4 = 1{,}5 \cdot 3 + b$.
Dus $b = -0{,}5$ en de vergelijking wordt: $y = 1{,}5x - 0{,}5$.

Opgave 27
Gegeven de lijn p: $3x - 4y = 12$.
Stel een vergelijking op van de lijn q door $O(0,0)$ en loodrecht op p.

Opgave 28
Gegeven de punten $A(-2,5)$, $B(8,0)$ en $C(2,1)$.
Stel een vergelijking op van de lijn door C die loodrecht staat op lijn AB.

Verwerken

Opgave 29
Bereken de hoek tussen de lijnen l en m in de volgende gevallen:
a) l: $y = -3x + 2$ en m: $4x - 2y = 9$
b) l: $x + y = 6$ en m: $3x + 4y = 8$
c) l: $7x - 3y = 42$ en m: $3x + 7y = 35$

Opgave 30
Stel een vergelijking op van de lijn door $P(120,31)$ die loodrecht staat op de lijn met vergelijking $25x - 40y = 167$.

Opgave 31
Een lijn l snijdt de x-as in $A(3,0)$ onder een hoek van 60°.
Stel een mogelijke vergelijking op van lijn l.
Zijn er meerdere mogelijkheden? Geef een verklaring.

Opgave 32
Gegeven is driehoek ABC door de hoekpunten $A(0,2)$, $B(5,4)$ en $C(2,5)$.
a) Bereken de drie hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.
b) Stel een vergelijking op van de lijn p door C loodrecht op AB.
c) D is het snijpunt van lijn p met de lijn AB. Bereken de coördinaten van D.
d) De lengte van de hoogtelijn CD is de hoogte van driehoek ABC als AB als basis wordt genomen. Bereken de oppervlakte van driehoek ABC met behulp van hoogte CD.
e) Je kunt de oppervlakte van driehoek ABC wel gemakkelijker vinden. Ga na, dat je dan hetzelfde antwoord vindt.

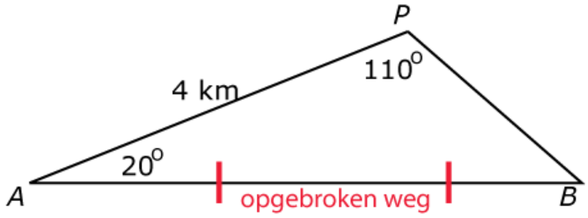
Opgave 33 Middelloodlijn
De middelloodlijn van een lijnstuk AB is een lijn door het midden M van AB die loodrecht op AB staat.
Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van lijnstuk AB als $A = (1,5)$ en $B = (6,2)$.

Opgave 34 Afstand tot *O*
Gegeven is de lijn l: $3x + 4y = 12$.
De kortste afstand van de oorsprong O van het assenstelsel tot deze lijn l kun je als volgt berekenen:

a) Stel een vergelijking op van de lijn m door O en loodrecht op l.
b) Bereken het snijpunt S van m en l.
c) De kortste afstand van O tot de lijn l is nu $|OS|$. Bereken $|OS|$.
d) Deze kortste afstand kun je ook met behulp van gelijkvormigheid berekenen. Laat zien hoe.

3 De sinusregel

Verkennen



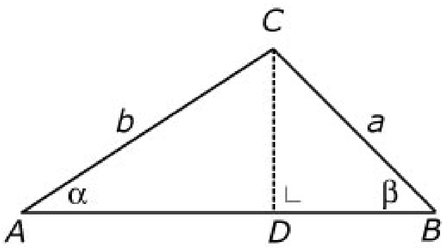
Tussen de punten A en B is de weg opgebroken. Er is een omleiding via P.
De wegen AB en AP maken een hoek van 20° met elkaar. De hoek tussen PA en PB is 110°.
De weg van A naar P is 4 km.
Hoeveel langer is de weg A naar B via P dan de rechtstreekse weg AB?

Opgave 35

a) Je moet daarvoor in elk geval weten hoe lang de weg AB is. Teken in de figuur de hoogtelijn uit P. Deze snijdt AB in Q. Waarom is dit een handige hulplijn?
b) Bereken nu de afstand van A naar B.
c) Bereken ook de afstand van P naar B.
d) Hoeveel rijd je om?

Opgave 36

Laat zien, dat $a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$ door de lengte van CD op twee manieren te berekenen.



Uitleg

Trigonometrie betekent driehoeksmeetkunde. Je zult dan ook vooral veel leren over het werken in driehoeken, niet alleen rechthoekige. Eerst heb je geleerd om te werken met sinus, cosinus en tangens van hoeken groter dan 90°.
In opgave 20 heb je een verband afgeleid dat in elke driehoek geldt. Je kunt het schrijven als:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

De keuze van de letters is daarbij belangrijk: a is de lengte van de zijde *tegenover* hoek α en b is de lengte van de zijde tegenover hoek β.
Dit verband heet de sinusregel.

Opgave 37

Gebruik de sinusregel op het probleem bij opgave 35 op te lossen. Hulplijnen zijn nu overbodig.

Opgave 38

Teken ΔABC met $|AB| = 4$ cm, $\angle A = 30°$ en $\angle C = 70°$.
Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 39

Teken ΔDEF met $|DE| = 4$ cm, $\angle D = 30°$ en $\angle E = 70°$.
Bereken de lengte van DF in twee decimalen nauwkeurig.

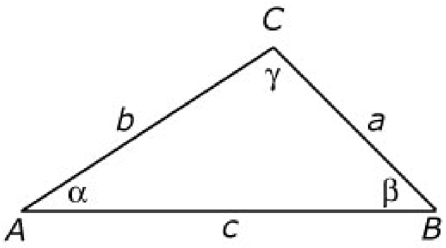
Opgave 40

Je kunt ook afleiden: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Laat dat zien.

Theorie ***

In elke ΔABC geldt de **sinusregel**:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

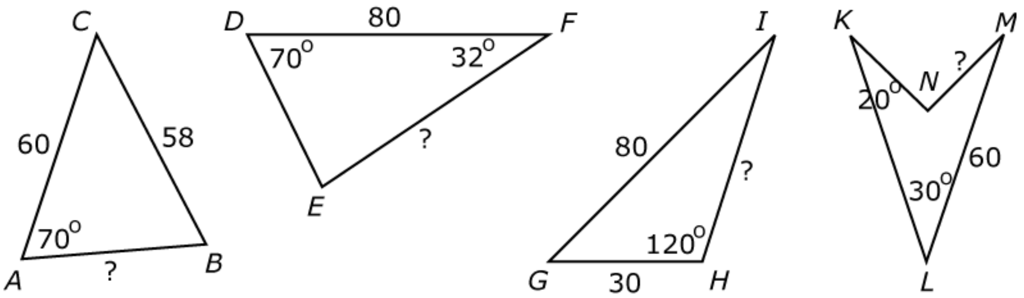


Je gebruikt hem vooral in driehoeken die geen rechte hoek hebben.

****

Opgave 41

Bereken in de volgende figuren de zijde waar het vraagteken bij staat.
Vierhoek *KLMN* is een symmetrische pijlpuntvlieger.



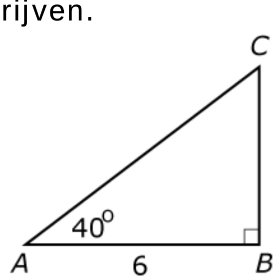
Opgave 42

Je kunt de sinusregel op meerdere manieren schrijven.
Bijvoorbeeld ook zo: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$
Bedenk nog twee manieren waarop je de sinusregel kunt schrijven.

Opgave 43

In deze rechthoekige driehoek kun de lengte van *AC* berekenen met behulp van de sinusregel.

a) Laat zien hoe dat gaat.
b) Bereken $|AC|$ ook zonder de sinusregel te gebruiken.

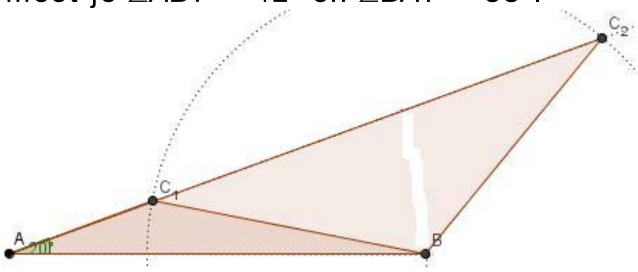


Opgave 44

In een groot meer ligt een eilandje met daarop een uitkijktoren bij T. Je wilt de afstand vanuit een punt A op de oever van het meer naar punt T te weten komen. Omdat deze afstand niet direct te meten is gebruik je een tweede punt B op de oever.
De afstand tussen A en B is 70 m. Verder meet je $\angle ABT = 42°$ en $\angle BAT = 53°$.
Bereken de afstand van A naar T.

Voorbeeld

Teken ΔABC met $\angle A = 20°$, $|AB| = 6$ en $|BC| = 4$. Bereken $|AC|$.



Uitwerking:

Zie figuur.

De sinusregel geeft: $\dfrac{4}{\sin(20°)} = \dfrac{6}{\sin(\angle C)}$.

Hieruit volgt: $\sin(\angle C) \approx 0{,}5130$.
Nu zijn er *twee* hoeken die hieraan voldoen: $\angle C_2 \approx 31°$ of $\angle C_1 \approx 149°$.
En daarom zijn er twee driehoeken mogelijk, wat de figuur ook laat zien.
Van deze driehoeken is $\angle B_2 \approx 129°$ of $\angle B_1 \approx 11°$.
Pas je nog een keer de sinusregel toe, dan vind je: $|AC| \approx 9{,}1$ of $|AC| \approx 2{,}2$.

Opgave 45

Teken ΔKLM met $\angle K = 30°$, $|KL| = 5$ cm en $|LM| = 4$ cm.
Construeer de twee mogelijke driehoeken en bereken telkens de lengte van KM.

Opgave 46

Van een ΔABC is $AB = 20$, $BC = 15\sqrt{3}$ en $\angle A = 60°$.

a) Toon aan dat $\sin(\angle C) = \frac{2}{3}$.

b) Welke hoeken voldoen aan: $\sin(\angle C) = \frac{2}{3}$?

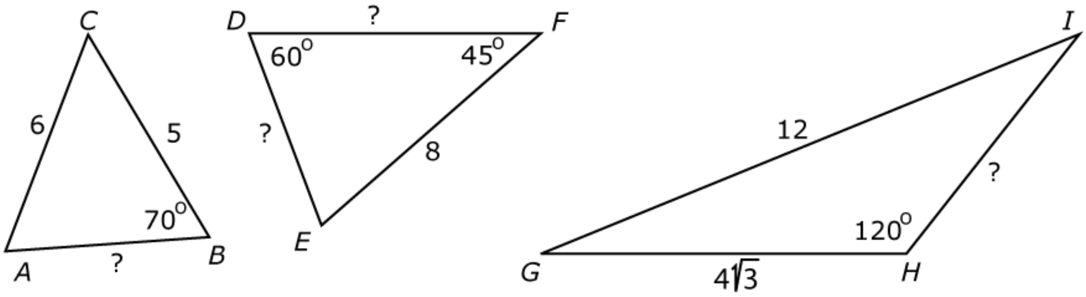
c) Je berekent hoeken uit een driehoek. Welke hoek voldoet?

d) Bereken nu de lengte van AC.

Verwerken

Opgave 47

Bereken (exact waar mogelijk) de zijde waar het vraagteken bij staat.



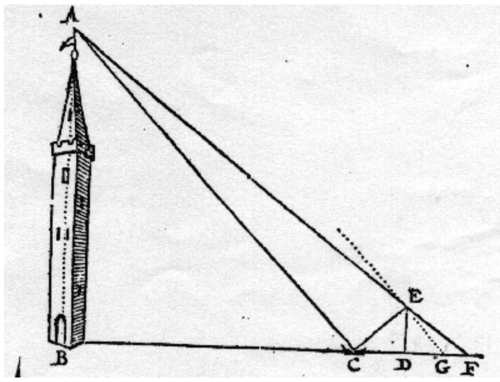
Opgave 48 Geen natte voeten
Je wilt de lengte bepalen van *AB*, maar tussen de punten *A* en *B* ligt een meertje. Je gaat nu als volgt te werk:

- Je loopt 200 m in een richting die een hoek van 60° maakt met *AB*. Zo houd je droge voeten.
- Je bent in een punt dat je *P* noemt en meet de hoek tussen *AP* en *PB*: 80°.
- Vervolgens bereken je de lengte van *AB*.

Laat met een tekening zien hoe dit in zijn werk gaat en bereken de lengte van *AB*.

Opgave 49 De hoogte van een toren
Iemand wil de hoogte van een toren weten. Hij gaat een stuk van de toren vandaan staan en meet de hoek tussen de horizontale richting en de richting naar de spits van de toren. Deze hoek is 32°. Dan loopt hij 50 m van de toren vandaan en meet de hoek naar de top opnieuw; de hoek is nu 15°.

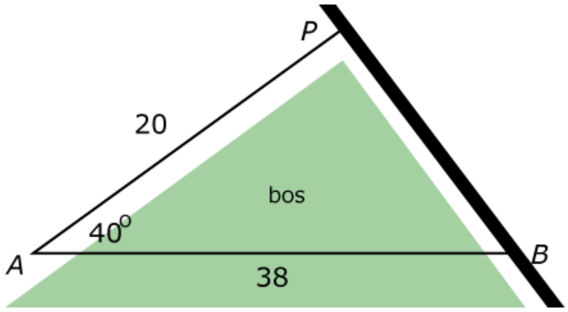
a) Maak een tekening van deze situatie.
b) Bereken de hoogte van de toren in m nauwkeurig. Ga er daarbij vanuit dat beide hoeken op 1,80 m boven de grond zijn gemeten.
(Opmerking: Er is een oplossing van dit probleem waarbij je de sinusregel gebruikt, maar er is ook wel een oplossing te bedenken waarbij dit niet hoeft. Kun je beide oplossingen vinden?)
c) De Nederlandse meetkundige Sybrandt Hansz. Cardinael (1578 – 1647) bedacht een zeer elegante manier om de hoogte van een toren te bepalen. Je hebt er zelfs geen hoeken voor nodig. Hier zie je hoe hij te werk ging. De toren is *AB* en er ligt een spiegel op de grond in *C*. Je zet bij *D* een verticale stok *DE* met lengte 6 zo, dat de top *A* van de toren in de spiegel gezien kan worden vanuit *E*. Vervolgens bepaal je de plaats van punt *F* zo, dat vanuit *F* de top *A* juist boven de stok *DE* in het verlengde van *FE* gezien kan worden. Als $|CD| = 8$ en $|DF| = 9$, kun je de hoogte van de toren *AB* berekenen. Laat zien hoe.



Opgave 50 Landmeetkunde: voorwaartse insnijding
Om de positie van een bepaald punt *P* in kaart te brengen werkten landmeters vroeger met de sinusregel. Daartoe werden de afstanden tot *P* vanuit bekende punten berekend. Door omcirkelen vanuit die bekende punten kon *P* op de kaart worden aangegeven. Deze procedure heette “voorwaartse insnijding”. Deze methode werkt alleen in de “lagere geodesie”, de landmeetkunde waarbij het aardoppervlak als plat kan worden beschouwd.
Stel dat *A* en *B* de bekende punten zijn, ze liggen 125,3 m uit elkaar.
Je wilt de positie van *P* bepalen.
Je meet de hoeken *BAP* en *ABP*: $\angle BAP = 68{,}3°$ en $\angle ABP = 77{,}4°$.
Bereken nu de lengtes van *AP* en *BP*.

4 De cosinusregel

Verkennen



Bij een crosscountry wedstrijd moeten de deelnemers van punt A naar punt B zien te komen. Er zijn twee mogelijkheden. De eerste is rechtstreeks door het bos van A naar B. De tweede manier is via punt P naar een geasfalteerd fietspad te lopen. De paden AB en AP maken een hoek van 40° met elkaar. De weg van A naar P is 20 m, die van A naar B is 38 m. Eén van de lopers wil weten hoeveel verschil er is tussen de weg van A naar B via P en over het fietspad en de weg AB door het bos.

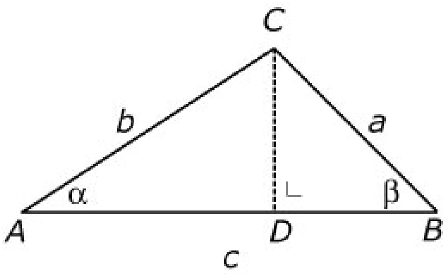
Opgave 51

a) Teken de hoogtelijn PD. Bereken de lengte van AD en PD.
b) Hoe kun je nu de lengte van PB berekenen?
c) Hoeveel moet een loper die via P gaat extra lopen?
d) Waarom doet hij dit misschien toch wel?

Opgave 52

Waarom kun je in opgave 51 de sinusregel niet gebruiken?

Opgave 53



Zoals de titel van deze paragraaf al doet vermoeden is er een regel af te leiden waarin de cosinus van de gegeven hoek een rol speelt. Bekijk de driehoek hiernaast.

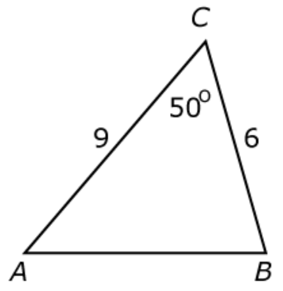
a) Laat zien dat $a^2 = |CD|^2 + (c - |AD|)^2$.
b) Werk nu de haakjes uit en gebruik:
$|AD| = b \cos \alpha$ en $|CD|^2 + |AD|^2 = b^2$.
Laat zien, dat dit oplevert: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.
c) Gebruik nu dit resultaat om in opgave 51 de lengte van PB te berekenen.

Uitleg

In opgave 53 heb je een cosinusregel afgeleid: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.
Let daarbij weer op de letterkeuze: de zijde a en hoek α zitten tegenover elkaar. De andere twee zijden b en c sluiten de hoek α in.

Door letters te verwisselen kun je voor elke hoek van de driehoek zo'n cosinusregel afleiden. Bijvoorbeeld: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$.

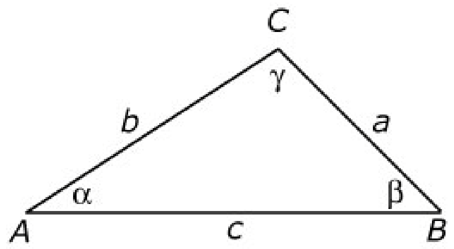
Opgave 54
Hier zie je een driehoek *ABC* met twee zijden en de ingesloten hoek gegeven.
a) Hoe ziet de cosinusregel bij de gegeven hoek er uit?
b) Bereken de derde zijde van deze driehoek.



Opgave 55
Wanneer moet je in een driehoek werken met de cosinusregel omdat de sinusregel geen oplossing biedt?

Theorie**************************************

In elke ΔABC geldt de **cosinusregel**.
Er zijn drie varianten:

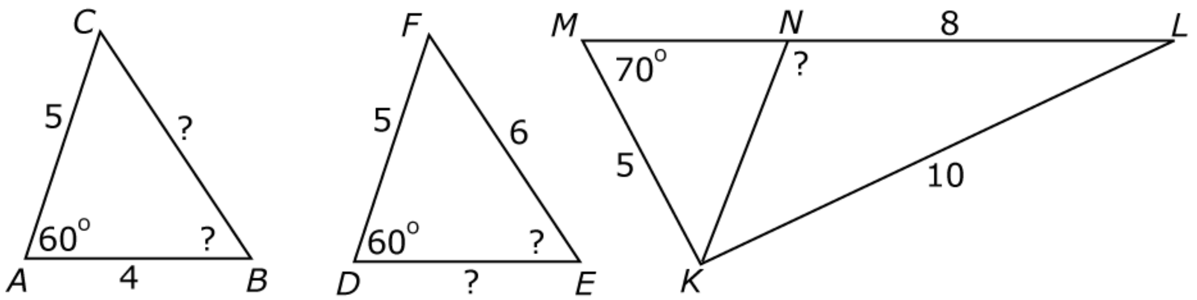


- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Je gebruikt hem in driehoeken die geen rechte hoek hebben en vooral in situaties waarin de sinusregel niet goed werkt.

****

Opgave 56
Bereken de onbekende zijden en de onbekenden hoeken in de volgende figuren.



Opgave 57
Laat zien dat de stelling van Pythagoras een speciaal geval is van de cosinusregel.

Opgave 58
Stel je voor dat op 60 km van een eiland je schip in dichte mist vergaat.
Je kunt jezelf drijvend houden op een vlot, maar alle instrumenten zijn verloren. Natuurlijk probeer je dan rechtstreeks naar dat eiland te peddelen. Je legt ongeveer 2,5 km per uur af. Zonder dat je dat weet staat er een stroming die er voor zorgt dat je 30° uit de koers raakt. Na 20 uur zou je nog 10 km van het eiland verwijderd moeten zijn, als je er inderdaad recht naar toe gepeddeld was. Hoe ver ben je er in werkelijkheid vanaf?

Opgave 59
Teken ΔABC met $|AB| = 6$, $|AC| = 4$ en $|BC| = 3$.
Bereken de grootte van $\angle A$.

Opgave 60
Van een ΔABC is gegeven dat $|AB| = 10$, $|AC| = 6$ en $\angle C = 60°$.
Gebruik de cosinusregel om de lengte van zijde BC uit te rekenen.

Verwerken

Opgave 61
Elke ΔABC heeft zes afmetingen, te weten:
- de lengtes van de zijden $|AB| = c$, $|BC| = a$ en $|AC| = b$ en
- de hoeken $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$.

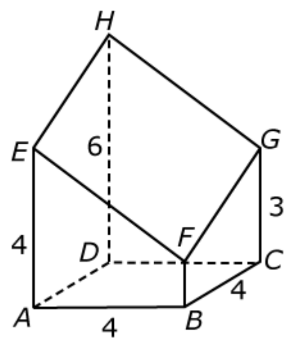
Hieronder zijn steeds drie maten van ΔABC gegeven. Bereken de andere maten.

a) $a = 8$, $b = 5$ en $\gamma = 65°$
b) $a = 8$, $b = 5$ en $\alpha = 65°$
c) $c = 150$ en $\alpha = 120°$ en $\beta = 45°$
d) $b = 12$, $c = 15$ en $\alpha = 55°$
e) $a = 6$, $b = 10$ en $c = 8$
f) $a = b = 15$ en $\gamma = 20°$

Opgave 62
Teken het trapezium $ABCD$ met $|AB| = 12$, $|AC| = 10$, $|DC| = 4$ en $\angle B = 45°$.
Omdat de vierhoek $ABCD$ een trapezium is, is AB // CD.
Bereken de lengte van AD.

Opgave 63
a) Van een driehoek zijn de zijden respectievelijk 8, 5 en 4 cm. Bereken de grootte van de hoeken.
b) Kun je een driehoek ABC tekenen met $|AB| = 12$, $|AC| = 8$ en $\angle B = 45°$?

Opgave 64 Afgeknotte balk
Je ziet hier een afgeknotte balk $ABCD.EFGH$.
De afmetingen staan in de figuur.
Bereken de grootte van $\angle EHG$ met behulp van de cosinusregel in ΔEHG.



Opgave 65 Scheef viervlak
Van een viervlak $ABC.D$ zijn de ribben achtereenvolgens $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|AD| = 7$ cm, $|BD| = 8$ cm en $|CD| = 9$ cm. Punt P is het midden van AC en punt Q is het midden van BD.
Bereken de lengte van PQ.

Overzicht

Je hebt nu alle theorie van het onderwerp “Trigonometrie” doorgewerkt. Het is nu tijd om een overzicht over het geheel te krijgen.

Begrippenlijst

21: sinus, cosinus, tangens ook van hoeken groter dan 90°
22: richtingscoëfficiënt en hellingshoek — hoek van twee lijnen — loodrechte stand
23: de sinusregel
24: de cosinusregel

Activiteitenlijst

21: sin, cos en tan van hoeken (ook) boven 90° bepalen
22: de hellingshoek van een rechte lijn berekenen — de hoek tussen twee lijnen berekenen — onderzoeken of twee lijnen loodrecht op elkaar staan — de vergelijking van een lijn loodrecht op een gegeven lijn opstellen
23: de sinusregel gebruiken in (niet-)rechthoekige driehoeken
24: de cosinusregel gebruiken in (niet-)rechthoekige driehoeken

Opgave 66 Samenvatten
Maak een samenvatting van dit onderwerp door bij elk van de genoemde **begrippen** een omschrijving of een voorbeeld te geven en bij elk van de genoemde **activiteiten** een voorbeeldberekening te geven.

Toetsen

Opgave 67
Gegeven zijn de punten *P* door lijnstuk *OP* met richtingshoek α. Bereken de *x*-coördinaat en de *y*-coördinaat. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a) $|OP| = 20$ en $\alpha = 45°$
b) $|OP| = 20$ en $\alpha = 115°$
c) $|OP| = 20$ en $\alpha = 300°$
d) $|OP| = 20$ en $\alpha = 270°$

Opgave 68
Bereken alle overige zijden en hoeken van ΔABC als gegeven is (geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig):

a) $a = 5$, $b = 6$ en $c = 4$.
b) $a = 5$, $b = 6$ en $\gamma = 120°$.
c) $a = 5$, $b = 6$ en $\beta = 120°$.
d) $\alpha = 50°$, $\beta = 60°$ en $c = 12$.
e) $\alpha = 90°$, $a = 12$ en $b = 6$
f) $a = b = 10$ en $\alpha = 81°$.

Opgave 69
Gegeven zijn de lijn l: $5x + 4y = 40$ en de punten $A(12,3)$ en $B(2,-2)$. De lijn door de punten A en B is lijn m.

a) Bereken de hoek tussen l en m is graden nauwkeurig.

b) Stel een vergelijking op van de lijn p door het midden van lijnstuk AB die loodrecht op lijn m staat.

Opgave 70
Bereken de hoeken van ΔABC met $A(15, 21)$, $B(29, 28)$ en $C(25, 40)$.

Opgave 71 De breedte van een rivier
De breedte van een rivier bepaal je vanuit een duidelijk herkenbaar punt P op de tegenover liggende oever. Langs de oever waarop je zelf staat zet je een lijnstuk AB van bijvoorbeeld 10 m uit. Vervolgens meet je de hoeken van AP met AB en van BP met AB. Bereken de breedte van de rivier als $\angle BAP = 65°$ en $\angle ABP = 54°$.

Opgave 72 abc-tjes
Gegeven is een driehoek waarvan de lengtes van de zijden a, b en c zijn.
Bereken in de volgende gevallen de grootte van de hoek tegenover de zijde met lengte a.

a) $a^2 = b^2 + c^2$

b) $a^2 = b^2 + c^2 - bc$

c) $a^2 = b^2 + c^2 + 0{,}5bc$

Opgave 73 Gespannen zeil
Tussen drie palen die loodrecht op de grond staan is heel strak een driehoekig zeil gespannen. Paal 1 staat 5 m van paal 2, paal 2 staat 4 m van paal 3 en paal 3 staat 3 m van paal 1.
Het zeil is op 2 m boven de grond aan paal 1, op 2,5 m boven de grond aan paal 2 en op 3,50 m boven de grond aan paal 3 bevestigd.
Bereken de oppervlakte van dit zeil.

Opgave 74 Deellijnen in een driehoek
In elke driehoek deelt de deellijn van een hoek de overstaande zijde in stukken die zich verhouden zoals de aanliggende zijden van die hoek.
Teken maar eens een driehoek ABC met daarin de deellijn CD van hoek C. Punt D ligt zo op de overstaande zijde AB, dat $AD : BD = AC : BC$.
Bewijs deze stelling.

Toepassen

Opgave 75 Hoogtelijnen
Een hoogtelijn in een driehoek is een lijn die door een hoekpunt gaat en loodrecht staat op de zijde tegenover dat hoekpunt.
In elke driehoek ABC gaan de drie hoogtelijnen door één punt. Deze stelling kun je met analytische meetkunde als volgt bewijzen:
Kies het assenstelsel zo, dat A en B op de x-as liggen en dat C op de y-as ligt.
Dus $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ en $C(0, c)$.

a) Welke vergelijking heeft de hoogtelijn door C nu?

b) Stel een vergelijking op van de hoogtelijn door *A* en stel een vergelijking op van de hoogtelijn door *B*.
c) Toon nu aan dat alle drie de hoogtelijnen door hetzelfde punt gaan.

Opgave 76 Middelloodlijn
Een middelloodlijn van een lijnstuk *AB* is een lijn die door het midden van *AB* gaat en er loodrecht op staat. Een manier om zo'n middelloodlijn te construeren is door twee even grote cirkels om *A* en om *B* te tekenen en een lijn te trekken door beide snijpunten van die cirkels. Met analytische meetkunde kun je bewijzen dat je zo inderdaad een middelloodlijn krijgt.
a) Kies een geschikt assenstelsel. Welke coördinaten geef je *A* en *B*?
b) Stel vergelijkingen op van twee even grote cirkels om *A* en om *B*.
c) Hoe maak je nu het bewijs af?

Opgave 77 Omgeschreven cirkel
De drie middelloodlijnen van de zijden van een driehoek gaan door één punt. Dit punt is het middelpunt van de cirkel die door de drie hoekpunten van de driehoek gaat. Deze stellingen kun je met analytische meetkunde bewijzen.
Doe dit door een geschikt assenstelsel te kiezen (zie opgave 93).

Opgave 78 Cirkel door drie gegeven punten
Hoe kun je het resultaat van de vorige opgave gebruiken om de vergelijking op te stellen van een cirkel door drie gegeven punten?
Beschrijf de rekenprocedure die je dan moet volgen.

Opgave 79 De afstand Aarde – Maan
De afstand van het middelpunt *M* van de Aarde tot een punt *P* op de Maan kun je berekenen door op dezelfde lengtegraad op twee verschillende punten *A* en *B* een kijker op punt *P* richten. Neem aan dat de Aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 km en neem ook aan dat de Maan precies recht boven de lengtegraad staat waar *A* en *B* op liggen, dus *M*, *A*, *B* en *P* liggen in één vlak. Je meet nu de hoeken die de kijker met *MA* en met *MB* maakt (dus met lijnen loodrecht op het aardoppervlak). Stel dat *A* op 50° N.B. ligt en *B* op 20° N.B.
Beschrijf hoe je vanuit de gemeten hoeken de afstand *MP* berekent.