Mogelijkheden met mozaïek

Hiernaast zie je een oud chinees patroon bestaande uit (kleine) vierkanten en (grotere) achthoeken. Een dergelijk patroon werd en wordt vaak gebruikt om vloeren te betegelen of muren te versieren. De afbeelding geeft (uiteraard) maar een heel klein deel weer van het totale kunstwerk. Voor het gemak doen we alsof het gaat om een vloer die gelegd is met twee soorten tegels: achthoekige en vierkante.

>1. Ga na of er (ongeveer) evenveel vierkante als achthoekige tegels nodig zijn voor de hele vloer. Probeer argumenten te vinden die een ander kunnen overtuigen.

Het mozaïek hiernaast is afkomstig uit Perzië (het huidige Iran). Het bestaat uit zeshoeken, vierhoeken (rechthoeken) en driehoeken. Je ziet weer een heel klein stukje van het geheel

>2.

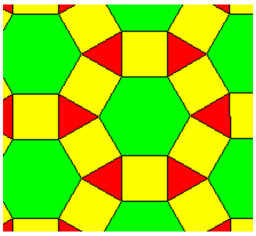
a) Wat kun je zeggen over de aantallen drie-, vier- en zeshoeken ?

b) Wat is je commentaar op de volgende redenering: *Elke zeshoek is omringd door 6 vierhoeken. Dus het aantal vierhoeken is 6 maal zo groot als het aantal zeshoeken*

c) Beredeneer dat het aantal vierhoeken 1,5 maal zo groot is als het aantal driehoeken.

Je kunt **beredeneren** dat het aantal driehoeken het dubbele is van het aantal zeshoeken, bijvoorbeeld op de volgende manier:

- Elke zeshoek wordt omringd door 6 driehoeken. (bij elk hoekpunt één)
- Je zou dus zeggen dat er per zeshoek 6 driehoeken zijn
- Elke driehoek wordt omringd door 3 zeshoeken (bij elk hoekpunt één)
- Elke driehoek wordt dus 3 keer meegeteld
- Het aantal driehoeken per zeshoek is dus geen 6, maar 6/3 =2



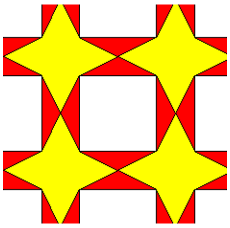
Het mozaïek hiernaast is recent gemaakt met behulp van een computerprogramma. Laten voor het gemak even aannemen dat het totale mozaïek bestaat uit 1000 zeshoeken.

>3.

a) Laat zien dat er dat er dan 3000 vierkanten zijn

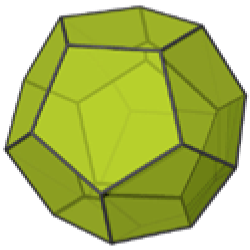
b) Bereken het aantal driehoeken.

c) Wat is de verhouding driehoeken : vierkanten : zeshoeken ?



Links nog een dergelijk patroon, bestaande uit sterren, (gelijkbenige) driehoeken en vierkanten.

>4. Ga na wat de verhouding is tussen het aantal sterren, driehoeken en vierkanten .



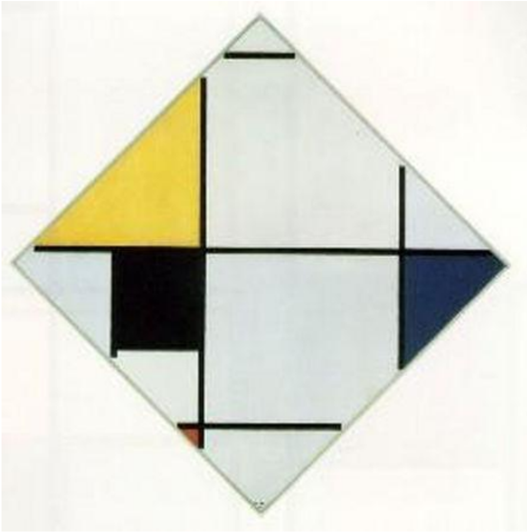
Een regelmatig twaalfvlak (dodecaëder) bestaat uit twaalf regelmatige vijfhoeken.

>5. Beredeneer hoeveel ribben, en hoeveel hoekpunten er zijn.

Een *kuboktaëder* is een veelvlak bestaande uit 8 driehoeken en 6 vierkanten.

>6. Bereken het aantal ribben en het aantal hoekpunten.

Combineren met composities



Het werk van de Nederlandse schilder *Piet Mondriaan* is wereldberoemd. Omdat zijn “composities” ogenschijnlijk eenvoudig zijn (horizontale en verticale lijnen, en een beperkt aantal kleuren) zijn er veel “mondriaanachtige” werken gemaakt. Er zijn websites waar je “eigen Mondriaan kunt maken”, er zijn Mondriaan-kleurplaten, etc. Mondriaan wordt gezien als vertegenwoordiger van de kunstrichting *de Stijl* . Behalve de “strakke lijnen” is kenmerkend het kleurgebruik: naast wit (achtergrond), zwart en soms grijs worden alleen de primaire kleuren rood, geel en blauw gebruikt. In de compositie rechts zijn vier vlakdelen ingekleurd:

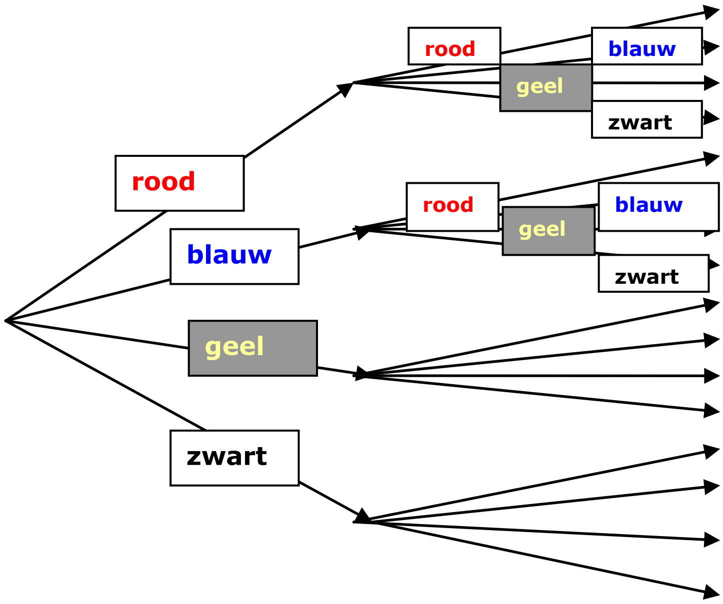
- A Linksboven een driehoek (geel)
- B Daar direct onder een vierkant (zwart)
- C Linksonder een klein driehoekje (rood)
- D Rechts een vierhoek – bijna een driehoek – (blauw)

Via andere kleurkeuzes zijn uiteraard tal van variaties mogelijk op deze compositie van Mondriaan. Voorlopig gebruiken we slechts vier kleuren: rood, blauw, geel en zwart. (we gebruiken het begrip kleur ruim)

>7.

a) Hoeveel verschillende composities zijn er mogelijk door alleen vlakdeel A te kleuren?
b) Bereken het aantal verschillende composities dat je kunt maken door alleen vlakdeel A en B te kleuren. Beide vlakken mogen de zelfde kleur krijgen.
c) Bereken het aantal mogelijke composities wanneer de vlakdelen A t/m D allemaal (opnieuw) gekleurd worden. (Dezelfde kleur mag meer keren gebruikt worden)
d) In de oorspronkelijke compositie hebben de vier genoemde vlakdelen vier verschillende kleuren. Hoeveel mogelijke composities zijn er mogelijk als alle delen een verschillende kleur moeten krijgen?

Nagaan hoeveel mogelijkheden er zijn is al gauw een hele klus. Als je alle mogelijkheden probeert te op te schrijven, is het opletten dat je er geen vergeet, en .. . je geen mogelijkheden dubbel telt. Om je te helpen zijn er wat hulpmiddelen ontwikkeld. Een daarvan - die je wellicht al uit de onderbouw kent – is het boomdiagram. Een boomdiagram bij vraag b kan er als volgt uitzien:



>8.

a) Geef aan hoe je dit diagram kunt uitbreiden om vraag **c)** te beantwoorden

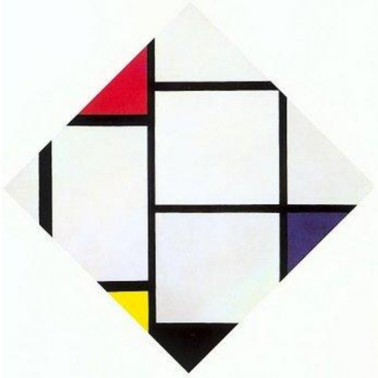
b) Maak een boomdiagram bij vraag **d)**

In totaal kun je in de compositie van de vorige pagina 10 vlakdelen onderscheiden. Al deze vlakdelen kunnen een kleur krijgen: rood, geel, blauw, zwart of grijs en natuurlijk ook wit.

>9. Bereken hoeveel verschillende composities er mogelijk zijn.

We kunnen de vier vlakdelen die door Mondriaan (niet–wit) zijn gekleurd zo laten en ons beperken tot de zes overige vakjes.

>10. Bereken op hoeveel manieren de overige zes vakjes gekleurd kunnen worden, waarbij elke kleur (ook wit) precies één keer gebruikt wordt.



Ook de compositie hiernaast bestaat uit 10 vlakdelen waarvan er vier niet wit zijn. Om dichter bij het oorspronkelijke ontwerp te blijven hanteren we de volgende regels voor onze eigen composities:

- Er is één rood, één geel, één zwart en één blauw vakje.
- De overige vakjes zijn wit.

Het is in deze situatie wat onhandig om per vakje een kleur te kiezen. Handiger is om per kleur een vakje te kiezen.

We beginnen met een denkbeeldige “kleurplaat” waarop alleen de horizontale en verticale zwarte lijnen zijn getekend.

>11. We brengen de kleuren rood, blauw geel en zwart in deze volgorde aan:

a) Op hoeveel verschillende plekken kunnen we rood aanbrengen ?

b) Op hoeveel verschillende plekken kunnen we daarna geel aanbrengen ?

c) Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er (dus) voor de eerste twee kleuren?

d) Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er voor de vier kleuren ?

Een andere mogelijk aanpak voor het maken van een compositie op basis van bovenstaande spelregels is:

1. Bepaal eerste welke vier vakjes gekleurd (niet wit) worden.
2. Verdeel de vier kleuren (rood, blauw geel en zwart) over de vier vakjes.

Deze aanpak gaan we hierna nader bekijken. We kijken eerst naar stap 2.
Bij vraag **7d** heb je al bereken dat dit laatste op 24 manieren kan. Een mogelijke redenering gaat als volgt:

- Voor de eerste kleur (zeg rood) kun je kiezen uit 4 vakjes
- Bij elk van deze vier keuzes kun je voor de tweede kleur (blauw) kiezen uit nog 3 vakjes
- Bij de eerste twee vakjes zijn er dus 4×3 (=12) mogelijkheden
- Voor de derde kleur kun je nog maar kiezen uit twee vakjes
- Bij de vierde kleur heb je geen keus meer, er is nog maar één vakje over
- Het aantal mogelijke verdelingen is dus 4×3×2×1 =24

4×3×2×1 is nog makkelijk uit te rekenen, wanneer het gaat om grotere aantallen (bijv. 10 kleuren verdelen over 10 vakjes) wordt het al snel tijdrovend.

>12.

a) Hoeveel manieren zijn er om 5 kleuren over 5 vakjes te verdelen?

b) Hoe groot is, denk je 10 × 9× 8 × 7×….2 ×1 ongeveer ?

c) En 1 × 2× 3 × 4 ×… × 9 × 10 ?

Als je $8×8×8×8×8×8$ snel wilt uitrekenen gebruik je 8^6 . Gelukkig is er ook iets dergelijks voor $8×7×6×5×4×3×2×1$, namelijk 8**!** (Uitgesproken als acht **faculteit**)
Ga na waar deze mogelijkheid op je GR is te vinden, en reken na dat : 8**!**= 40320.

>13.

- **a)** Bereken 10 × 9× 8 × 7×….2×1
- **b)** Laat zien dat 20! groter is dan *een miljard maal miljard*
- **c)** 99**!** is een enorm getal van 156 cijfers: 933………000. Wat kun je zegen over 100**!** ?

>14.

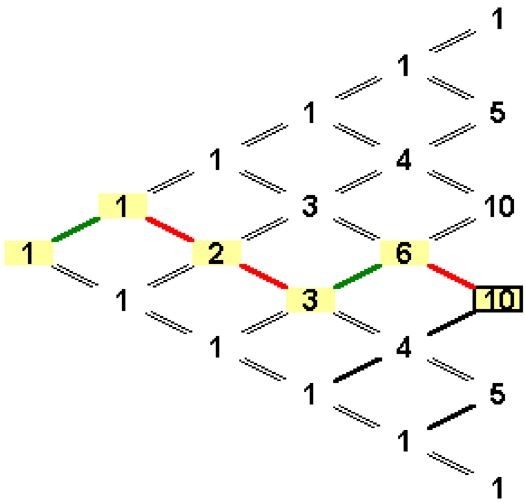
- **a)** Bij de quiz *Per seconde wijzer* krijgen de kandidaten elke keer 9 vragen met 9 antwoorden, die ze moeten koppelen. Op hoeveel manieren kan dat ?
- **b)** Een wat ondeugende klas van 25 leerlingen wil de naambordjes die gemaakt zijn voor de nieuwe docent verwisselen. Hoeveel mogelijkheden zijn er ongeveer ?
- **c)** Maar liefst 5 leerlingen hadden vergeten hun naam op het proefwerkblaadje te zetten. De docent verdeelt op goed geluk de (5 verschillende) cijfers over de vijf vergeetachtigen. Hoe groot is de kans dat iedereen zijn eigen cijfer krijgt ?
- **d)** Iemand die beweert colakenner te zijn, maar er niets van af weet, krijgt zes verschillende glazen cola voor zijn neus. In elk glas zit een cola van een bepaald merk. De gebruikte merken staan op een papiertje. Hoe groot is de kans dat onze 'kenner' (op goed geluk) bij elk glas het juiste merk noemt ?

Wat betekent dit voor het berekenen van het aantal mogelijk composities?
Wanneer we eenmaal gekozen hebben welke vakjes gekleurd moeten worden, kunnen met behulp van bovenstaande zeer snel uitrekenen op hoeveel manieren dat kan. (als het aantal vakjes gelijk is aan het aantal kleuren en alle vakjes een verschillende kleur krijgen)
Maar op hoeveel manieren kun je bijvoorbeeld vier vakjes kiezen uit tien 'kandidaten'? (stap 1)
Laten we eenvoudig beginnen.

>15.

- **a)** Op hoeveel manieren kun je 1 vakje uit 3 vakjes kiezen ?
- **b)** En 1 uit 1001 ?
- **c)** Op hoeveel manieren kun je 99 vakjes uit 100 kiezen ?
- **d)** Laat zien dat je op zes manieren 2 vakjes uit 4 kunt kiezen
- **e)** Bepaal het aantal manieren om 2 vakjes uit 5 te kiezen.

De laatste vraag is zonder systematische aanpak lastig.
Een manier om het systematisch aan te pakken is gebruik maken van een **wegendiagram .** Dit lijkt op het eerste gezicht wel op een boomdiagram, maar er is een belangrijk verschil: de wegen/stromen komen (soms) weer bij elkaar, bij een boomdiagram heb je alleen vertakkingen.
Een wegendiagram bij vraag **e)** kan als volgt uitzien:
Je start links, en gaat elke keer schuin naar boven als je een vakje uitkiest, en schuin naar beneden als je het niet kiest. Na 5 keer kiezen zit je aan de rechterkant.
In het diagram is de route getekend die hoort bij het kiezen van het 1^e en het 4^e vakje. (en dus de vakjes 2, 3, en 5 niet)

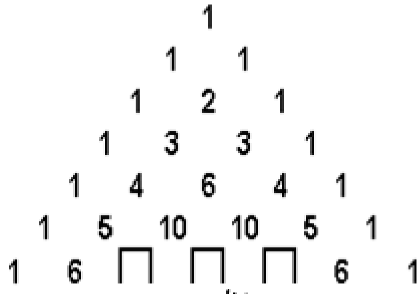


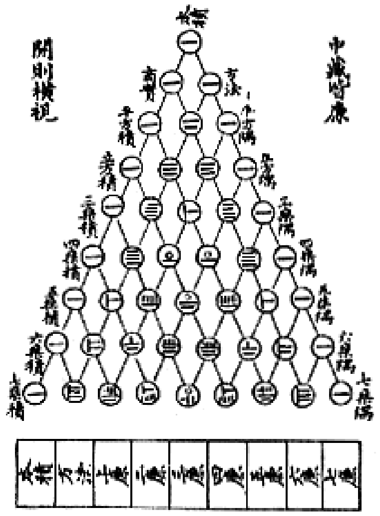
>16.

- **a)** Leg uit waarom je op twee manieren op het kruispunt met het getal 2 kunt komen.
- **b)** Laat zien dat je op drie manieren kunt komen op het (onderste) kruispunt met getal 3.

c) Ga na dat ook de andere getallen steeds het aantal routes naar dat kruispunt voorstellen.

Er zijn allerlei variaties op dit wegendiagram mogelijk. In plaats van van links naar rechts wordt het vaak ook van boven naar beneden getekend
In deze vorm wordt ook wel gesproken van de *driehoek van Pascal* . Vaak worden in dat geval de verbindingslijntjes (wegen) weggelaten en alleen de getallen weergegeven. De *driehoek van Pascal* was trouwens al een paar honderd jaar eerder gepubliceerd door Chinese wiskundigen Ook zijn er rechthoekige varianten.





>17. Bereken de drie ontbrekende getallen op de onderste regel in het bovenste diagram

Het berekenen van het aantal manieren waarop je uit 10 vakjes er vier kunt kiezen is op een van deze manieren niet echt moeilijk maar (zonder hulpmiddelen) nog wel vrij veel werk. Gelukkig is ook dit snel te berekenen met grafische rekenmachines (en veel 'gewone').
Het aantal manieren waarop je 4 (vakjes) uit tien kunt kiezen wordt het aantal **combinaties** (4 uit 10) genoemd. Op rekenmachines worden daarvoor de notaties als 10 **C** 4 en 10 **nCr** 4 gebruikt.
Andere notaties zijn C_4^{10} en $\binom{10}{4}$. Bij deze laatste notatie past de uitspraak *10 boven 4*.

>18.

a) Ga na hoe je C_4^{10} berekent op jouw rekenmachine.

b) Bereken C_4^{10}

1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**
1	**4**	**10**	**20**	**35**	**56**	**84**	**120**
1	**5**	**15**	**35**	**70**	**126**	**210**	**330**
1	**6**	**21**	**56**	**126**	**252**	**462**	**792**
1	**7**	**28**	**84**	**210**	**462**	**924**	**1716**
1	**8**	**36**	**120**	**330**	**792**	**1716**	**3432**

>19. Bereken het aantal mogelijkheden in de volgende gevallen

a) Je nodigt 5 van je klasgenoten uit voor een feestje

b) Je kiest 3 dagen van de week om te sporten

c) Iemand kiest vier vrije dagen per week

d) Je maakt van een groep van 22 twee elftallen

Je kunt C_4^{12} (het aantal combinaties 4 uit 12) zien als het aantal manieren waarop je een groep van 12 verdeelt in tweeën: een van 4 en een van 8. Maar hoeveel manieren zijn er om een groep van 12 te verdelen in drie groepen van 4 ?

>20.

a) Laat zien dat er bijna 500 manieren zijn om een groep van 12 te splitsen in een van 4 en een van 8.

b) Hoeveel manieren zijn er om een groep van 8 te splitsen in twee groepen van vier?

c) Hoeveel manieren zijn er om een groep van 12 te splitsen in drie groepen van vier?

>21. Een klas bestaat uit 24 leerlingen

a) Op hoeveel manieren kun je deze klas splitsen in drie groepen van 8 ?

b) En op hoeveel manieren in vier groepen van 6 ?

c) En op hoeveel manieren in zes groepjes van 4 ?

Met behulp van combinaties kun je nagaan op hoeveel manieren een groep te splitsen is in twee of meerdere groepen van gegeven omvang. Die groepen hoeven niet even groot te zijn.

Hieronder nog twee uitgewerkte voorbeelden:

Een groep van 28 jongeren gaat op reis. Er zijn vier busjes beschikbaar: twee met 9 zitplaatsen, een met 8 zitplaatsen, en een met 7 zitplaatsen.

- Op hoeveel manieren kan de groep over de vier busjes verdeeld worden wanneer de drie grotere busjes maximaal worden gevuld, en (dus) in het kleinste busje maar 2 mensen zitten ?

We spelen het vullen van de busjes als het ware na:
1. Er zijn 28C9 [=2042975] manieren om de groep te selecteren voor het eerste busje(9 zitplaatsen). Daarna moeten 19 [28-9] mensen nog verdeeld worden over de overige busjes.
2. Er zijn daarna 19C9 [=92378] manieren om de groep voor het tweede busje te kiezen. Daarna zijn er nog 10 [19-9] mensen over
3. Het aantal mogelijkheden is nu nog maar 10C8 =10C2 [=45]

Het totaal aantal mogelijkheden is (dus) $C_9^{28} \times C_9^{19} \times C_8^{10} \approx 2{,}87 \times 10^{13}$.

- Op hoeveel manieren kan de groep over de vier busjes verdeeld worden wanneer de mensen gelijk verdeeld worden over de vier busjes (dus in elke busje 7 personen)

  1. Er zijn 28C7 manieren om de groep voor het eerste bus je kiezen
  2. Daarna zijn er nog 21C7 manieren voor het tweede busje
  3. Tenslotte 14C7 manieren voor het derde busje

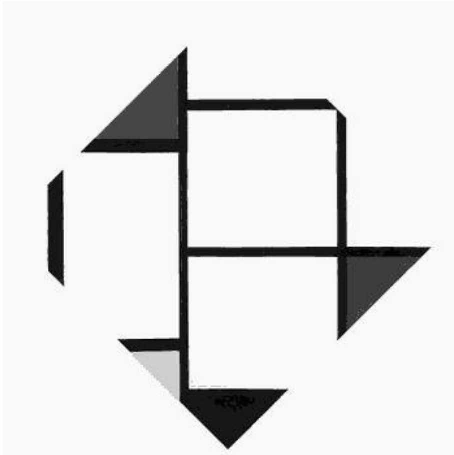
Het totaal aantal mogelijkheden is (dus) $C_7^{28} \times C_7^{21} \times C_7^{14} \approx 4{,}725 \times 10^{14}$.

Desgewenst kun je deze verdeling in gedachten ook anders aanpakken: eerst de groep spitsen in twee groepen van 14, die ieder weer gehalveerd worden:

$$C_{14}^{28} \times C_7^{14} \times C_7^{14} \approx 4{,}725 \times 10^{14}.$$

Aan het eind van de volgende paragraaf komt naar aanleiding van het werk van de Franse artiest *Daniël Buren* nog een andere aanpak aan de orde.

Patronen en permutaties



Terug naar de vraag hoeveel mondriaancomposities je kunt maken door uitgaande van een ‘raamwerk’ met 10 vakjes, er precies 4 te kleuren, en de rest wit te laten

- We gebruiken 4 verschillende kleuren
- De overige vakjes zijn wit.

Eerder gebruikten we de stapsgewijze aanpak:

1. Er zijn 210 (C_4^{10}) manieren zijn om vakjes te kiezen om te kleuren.
2. Nadat deze keuze gemaakt is zijn er 24 (4!) mogelijkheden om de vier kleuren over de vier vakjes te verdelen.

>22.

a) Bereken hoeveel verschillende composities er op deze manier mogelijk zijn
b) Vergelijk deze aanpak met die van opgave 11
c) Bereken *op twee manieren* op hoeveel manieren je een compositie kunt maken door 5 van de 10 vakjes te kleuren met 5 verschillende kleuren (en de rest wit te laten)

Het aantal verschillende composities dat je kunt maken door 4 van de 10 vakjes vier verschillende kleuren te geven is behoorlijk groot: 5040. We hebben nu twee manieren gezien om dit getal te berekenen:

I. We bereken eerst op hoeveel manieren we vier vakjes kunnen uitkiezen, en daarna op hoeveel manieren we de gekozen vakjes kunnen kleuren (met 4 verschillende kleuren). Kort opgeschreven: C_4^{10} **× 4!** = 210 × 24 = 5040
II. We kijken bij elke kleur hoeveel vakjes er (nog) beschikbaar zijn. (zie opgave 11). Kort opgeschreven: **10×9×8×7**= 5040

Met behulp van je rekenmachine is er ook een snelle, directe manier. Het aantal manieren waarop je vier vakjes van de 10 kunt inkleuren met 4 verschillende kleuren wordt het aantal **permutaties** (met 4 van 10) genoemd. Kort opgeschreven P_4^{10} = 5040
Andere notaties zijn 10 **P** 4 en 10 **nPr** 4

>23.

a) Ga na hoe je P_4^{10} op je rekenmachine kunt berekenen
b) Bereken P_3^{10}
c) Bereken P_7^{10}
d) Bereken P_2^{10}
e) Bereken P_1^{10}
f) Bereken P_9^{10} en P_{10}^{10} valt je op ?

>24. Soms is het aantal permutaties eenvoudig uit het hoofd uit te rekenen

a) Laat zien dat P_2^{8} = 56
b) Laat zien dat P_3^{11} = 990
c) Bereken P_3^{11}
d) Bereken P_3^{6}

P_3^{6} (=6×5×4=120) kun je zien als het aantal composities dat je kunt maken door 3 van de 6 vakjes te kleuren met 3 verschillende kleuren.
C_3^{6} is het aantal manieren waarop je de 3 vakjes kunt kiezen (uit de 6).

>25.

a) Leg uit waarom C_3^6 zes maal zo klein is als P_3^6

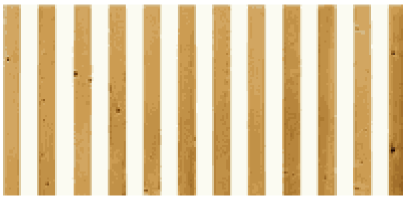
b) Bereken uit het hoofd: P_3^7 en C_3^7.

c) Bereken uit het hoofd: C_3^{10}.

d) Bereken uit het hoofd: C_2^{20}.

e) Bereken uit het hoofd: C_{18}^{20}.

f) Probeer uit het hoofd te berekenen: C_9^{12}.



Hiernaast zie je een (deel van) kunstwerk van de Franse "conceptual artist" Daniël Buren. *De la Coureur de la Matière* bestaat uit12 latjes die deels zijn beschilderd. Stel je voor dat bij een transport de latjes door elkaar zijn geraakt...

>26. Als alle latjes verschillend zijn geeft elke volgorde een andere compositie

a) Laat zien dat er bijna 500 miljoen composities zijn als alle latjes verschillend zijn.

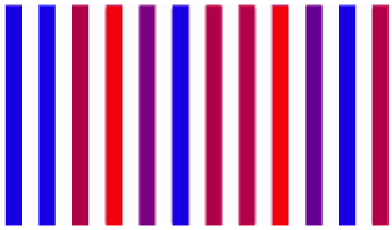
b) Leg uit dat het aantal mogelijke composities wordt gehalveerd, wanneer er twee latjes bij zijn die precies gelijk zijn.

>27.

a) Stel dat drie latjes niet van elkaar te onderscheiden zijn hoeveel verschillende composities zijn er dan mogelijk?

b) Hoeveel composities zijn er mogelijk wanneer er maar twee soorten latjes zijn: zes beschilderde die niet van elkaar te onderscheiden zijn, en zes onbeschilderde die ook allemaal precies gelijk zijn.

c) En als alle latjes precies gelijk zijn ?



>28. De creatie hiernaast is "in de stijl van *Buren*". De 12 verticale "staven" zijn er in vier kleuren: blauw (4 maal), donkerrood (4 maal), lichtrood (2 maal) en paars (2 maal).

a) Je kunt de 4 blauwe staven ongestraft verwisselen. Wat betekent dat voor het aantal mogelijke composities met deze 12 staven?

b) Ook de 4 donkerrode zijn uitwisselbaar. Wat betekent dit voor het aantal composities ?

c) Hoeveel verschillende composities zijn er mogelijk met deze 4 blauwe, 4 donkerrode, 2 lichtrode en 2 paarse staven ?

Bovenstaande aanpak: eerst bepalen hoeveel volgordes er zijn, en daarna rekening houden met dubbeltellingen kun je ook gebruiken bij het verdelen van een groep in deelgroepen.

>29. Hiernaast een foto van een succesvolle voetbalselectie bestaande uit 18 meiden.

a) Stel dat iedereen op elke plek kan staan, hoeveel verschillende foto's kunnen er dan gemaakt worden?

b) Hoeveel verschillende foto's kunnen er gemaakt worden wanneer alleen de meiden op de achterste rij van plaats mogen wisselen?

c) Hoeveel verschillende foto's kunnen er gemaakt worden wanneer iedereen binnen de eigen rij van plaats mag wisselen?

Voor het maken van de foto zou je eerst kunnen bepalen welke 6 speelsters op de eerste rij komen, en welke op de 2^{e} rij, en daarna de volgorde binnen elke rij bepalen.

d) Bereken op hoeveel manieren de 18 speelsters over de drie rijen verdeeld kunnen worden.

Het is van groot belang om faculteiten, combinaties en permutaties uit elkaar te houden, maar ook de verbanden daartussen te zien. Een goede manier om de zaak nog eens op een rijtje te zetten is zelf opgaven te bedenken. Dit keer krijg je de uitkomsten, en is de opdracht daar steeds een passende vraag bij te bedenken.

>30.

- **a)** Bedenk een vraag met als uitkomst **15!**
- **b)** Bedenk een vraag met als uitkomst **15C5**
- **c)** Bedenk een vraag met als uitkomst **15P5**
- **d)** Bedenk een vraag met als uitkomst $\frac{15!}{(3!)^5}$

Meerstaps berekeningen

Vaak zijn meerdere stappen nodig. We zagen dat bijvoorbeeld bij het opdelen van een groep in meer dan twee deelgroepen.
We gaan daar wat verder op in.

>31. Een zaalkorfbalteam bestaat uit 4 'heren' en 4 'dames'.
We gaan uit van een selectie van 6 heren en 6 dames

a) Op hoeveel manieren kan de coach een team samenstellen? (Bekijk eerst alleen de heren, en dan alleen de dames)

Het team bestaat in wezen uit twee deelteams (er wordt in twee vakken gespeeld) ieder bestaande uit twee heren en twee dames. De verdeling over de twee deelteams is de opstelling van het korfbalteam

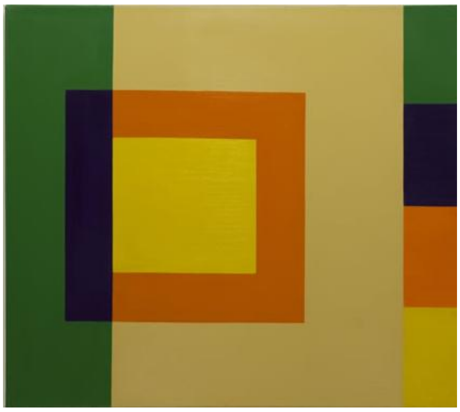
b) Hoeveel verschillende opstellingen zijn er mogelijk?

>32. Een voetbalteam speelt met 1 keeper, 4 verdedigers, 2 controlerende middenvelders, 2 opbouwende middenvelders en 2 aanvallers. De selectie bestaat uit : 3 keepers, 7 verdedigers, 3 controlerende middenvelders, 4 opbouwende middenvelders en 5 aanvallers.

a) Bereken het aantal teams dat uit deze selectie kan worden samengesteld

b) Hoeveel mogelijkheden zijn er *meer* wanneer je het onderscheid tussen contolerende en opbouwende middenvelders niet meer maakt?

>33. Drie begeleiders en 9 kinderen moeten verdeeld worden over drie auto's. In de kleinste is ruimte voor 3 personen, in de grootste is ruimte voor 5 personen, en in de derde voor 4. In elke auto moet (minstens) één begeleider zitten.
Hoeveel manieren zijn er?



De Amsterdamse kunstenaar *Marcel Rump* heeft een serie olieverfschilderijen gemaakt met een palet van 7 kleuren: oranje, geel, groen, blauw, bruin en beige. Omdat een vlak ook onbeschilderd gelaten kan worden, er eigenlijk sprake van acht mogelijkheden. Een van de schilderijen zie je hiernaast. Er is gekozen voor een beige achtergrond. Zoals je ziet staan de andere gekozen kleuren (oranje, geel, groen, blauw) aan de rechterkant van het schilderij.

>34.

a) Hoeveel verschillende achtergronden zijn er mogelijk?

b) Hoeveel verschillende kleurenpatronen zijn er rechts mogelijk bij een gekozen achtergrond ?

c) Hoeveel verschillende inkleuringen zijn er mogelijk bij dit kunstwerk? (de 'structuur' moet in tact blijven)

Oefenopgaven

Hieronder staan enkele oefenopgaven. Ze zijn ook digitaal beschikbaar.

>35. Elf (verschillende) voorwerpen worden naast elkaar gepresenteerd
Hoeveel verschillende volgordes zijn er mogelijk ?

>36.
- **a)** Hoeveel verschillende codes kun je maken van 6 tekens, waarbij je voor elk teken steeds 8 mogelijkheden hebt? Het zelfde teken mag **meerdere keren** voorkomen
- **b)** Zelfde vraag wanneer elke teken maar één keer mag voorkomen

>37. Een klas bestaat uit 12 jongens en 16 meisjes. Er worden vijf leerlingen uitgekozen waarvan het werk wordt gecontroleerd. De leraar noemt deze groep leerlingen de *controlegroep*.
- **a)** Hoeveel verschillende controlegroepen zijn er mogelijk?
- **b)** Hoeveel controlegroepen zijn er mogelijk die alleen uit jongens bestaan?
- **c)** Hoeveel controlegroepen zijn er mogelijk die bestaan uit 2 jongens en 3 meisjes?

.

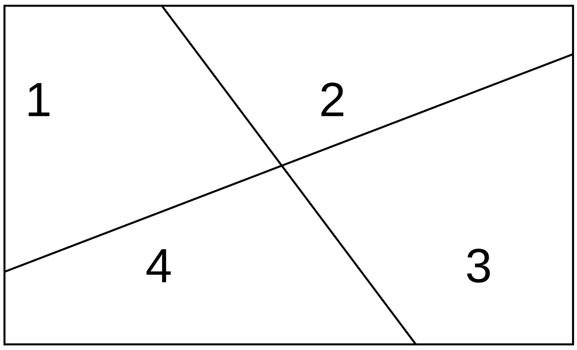
>38. Op hoeveel manieren kun je een top-4 samenstellen uit 10 verschillende liedjes?

>39.
- **a)** Op hoeveel manieren kun je uit een groep van 12 mensen twee groepen van 6 maken?
- **b)** Op hoeveel manieren kun je uit een groep van 12 mensen drie groepjes van 4 maken?

>40. Een schilderij bestaat uit 9 verticale strepen op een witte achtergrond. Elke streep kan in 3 kleuren uitgevoerd worden.
- **a)** Hoeveel verschillende composities zijn er mogelijk (wanneer er verder geen beperkingen zijn)?
- **b)** Hoeveel verschillende composities zijn er dan mogelijk wanneer twee strepen die elkaars buur zijn niet dezelfde kleur mogen hebben?
- **c)** Hoeveel verschillende composities zijn er mogelijk wanneer van elke kleur drie strepen zijn (en verder geen beperkingen)?

====

Verdiepingsopgaven



Hiernaast staat een rechthoek die verdeeld is in vier vierhoeken. Alle vierhoeken moeten nog worden voorzien van een kleur: Er kan gekozen worden uit rood, geel, blauw, zwart en grijs.

>41.

- **a)** Hoeveel mogelijkheden zijn er als de kleuren meerdere keren gebruikt mogen worden?
- **b)** Hoeveel mogelijkheden zijn er wanneer elke kleur maar één keer gebruikt mag worden?
- **c)** Hoeveel mogelijkheden zijn er wanneer de kleuren meerdere keren gebruikt mogen worden, maar de rechthoek niet egaal mag worden? (Bijv. helemaal rood)
- **d)** Hoeveel mogelijkheden zijn er wanneer kleuren meerdere keren gebruikt mogen worden, maar niet voor *aangrenzende* vierhoeken? (zoals linksboven en linksonder).

Vragen als de laatste zijn –zoals je wellicht merkte – vrij lastig. Een mogelijke aanpak is met een (aangepast) boomdiagram, waarbij we de vakken één voor één kleuren. Het begint makkelijk: voor het eerste vak zijn 5 kleuren beschikbaar. Voor vak 2 mogen nog maar 4 kleuren gebruikt worden.. Dat geeft 5×4 (=20) mogelijkheden.

>42.

- **a)** Hoeveel mogelijkheden zijn er daarna voor vak 3 ? (vak 1 en 3 mogen wel de zelfde kleur hebben)
- **b)** Hoeveel mogelijkheden heb je om de vakken 1 t/m 3 te kleuren
- **c)** En hoeveel mogelijkheden daarna voor vak 4 ?

Het probleem is dat je de vorige vraag niet in het algemeen kunt beantwoorden. Wanneer vak 1 en 3 dezelfde kleur hebben kun je vier kleuren gebruiken, maar als ze verschillend gekleurd zijn nog maar drie !

>43. Er zijn 80 manieren om de eerste drie vakken te kleuren volgens deze spelregels

- **a)** Ga na bij hoeveel daarvan vak 1 en vak 3 dezelfde kleur hebben
- **b)** Bereken (bijv.) met een aangepast boomdiagram hoeveel composities er op deze manier mogelijk zijn.

>44. Ga na hoeveel mogelijkheden er zijn wanneer er vier kleuren worden gebruikt (en weer twee aangrenzende vakken niet de zelfde kleur mogen krijgen)

Wanneer vier vakken vier verschillende kleuren moeten krijgen is het totaal aantal mogelijkheden makkelijk te berekenen: 4! =4×3×2×1 =24. Maar gegeven een bepaalde verdeling, hoeveel manieren zijn er waarbij elke vak een andere kleur krijgt dan het nu heeft ?

Omdat het om een vrij lastig probleem gaat, pakken we het rustig aan. We beginnen met twee vakken (en twee kleuren).

>45. Twee vakken moeten gekleurd worden, het ene rood en het andere blauw.

- **a)** Hoeveel mogelijkheden zijn er?
- **b)** In het ene geval zijn beide vakken juist gekleurd, hoe zit dat in het andere geval ?

Daarna: drie vakken: ze moeten (in de juiste volgorde) rood, blauw en geel gekleurd worden

>46.

- **a)** Hoeveel mogelijkheden zijn er?
- **b)** Laat zien dat er 2 mogelijkheden zijn om geen enkel vak de juiste kleur te geven.
- **c)** Laat zien dat 3 mogelijkheden zijn om (precies) één vak juist te kleuren.
- **d)** Waarom is het onmogelijk om precies 2 vakken juist te kleuren?

Nu vier vakken. (Bedenk zelf de juiste kleuren en de volgorde)

>47.

a) Ga na waarom het onmogelijk is om precies drie van de vier vakken juist te kleuren.
b) Laat zien dat er 8 manieren zijn om één vakje 'goed te hebben' .
c) Laat zien dat er 6 manieren zijn om twee vakken 'goed te hebben' .
d) Ga na op hoeveel manieren je alles fout kunt hebben.

In de tabel hiernaast staan de resultaten die we tot nu toe gevonden hebben.
Je kunt daarin aflezen dat als je vier dingen op volgorde moet zetten, er 9 manieren zijn om alles fout te doen, 8 manieren om slechts 1 goed te hebben, en 6 manieren om de helft goed te hebben.

	0	1	2	3	4	5	6	7
1	**0**	**1**						
2	**1**	**0**	**1**					
3	**2**	**3**	**0**	**1**				
4	**9**	**8**	**6**	**0**	**1**			
5								
6								
7								

>48. We gaan dit gebruiken om de mogelijkheden bij vijf vakken (of andere dingen) te berekenen.

a) Beredeneer dat nu 45 manieren zijn om er precies 1 goed te hebben
b) Beredeneer dat er 10x2 (=20) manieren zijn om er precies 2 goed (en dus 3 fout) te hebben
c) Beredeneer dat er 10 manieren zijn om er 3 goed (en dus 2 fout) te hebben
d) Bereken het aantal manieren om er geen enkele goed te hebben

Als je het principe door hebt kun je de tabel verder invullen. Gebruik de ingevulde tabel voor de volgende vragen:

>49. Bij een toets moet je 6 jaartallen koppelen aan 6 gebeurtenissen. Voor elke juiste combinatie krijg je een punt

a) Hoeveel manieren zijn er totaal ?
b) Op hoeveel manieren kun je er precies één goed hebben
c) Op hoeveel manieren kun je er precies twee goed hebben
d) Op hoeveel manieren kun je er precies 4 goed hebben
e) Op hoeveel manieren kun je er precies 3 goed hebben ?
f) Op hoeveel manieren kun je er geen een goed hebben ?

De kans dat je alles goed gokt is sterk afhankelijk van het aantal dingen.

De kans dat je drie dingen toevallig in de juiste volgorde zet is $\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$ Bij vier dingen is dat nog maar $\frac{1}{24}$ en bij vijf minder dan 1 % ($\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$)

De kans dat je niets goed gokt is echter bijna constant !

>50.

a) Laat zien dat de kans dat je bij 4 dingen niets goed gokt ruim 37 % is
b) Bereken de kans dat je bij 5 dingen niets goed gokt.
c) Doe het zelfde bij 6

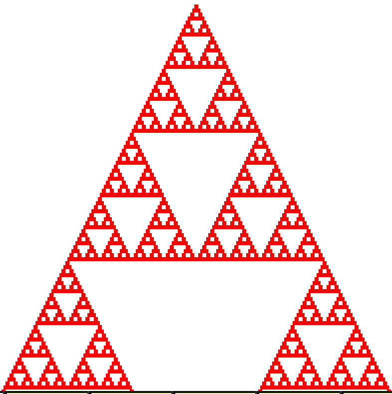
>51. November is vaak de tijd waarin lootjes worden getrokken i.v.m. Sinterklaas. Vaak gaat dat (op de ouderwetse manier) niet meteen goed, omdat iemand "zich zelf trekt"

a) Hoe groot is kans dat het meteen goed gaat in een gezin van 5 personen?
b) Hoe groot is de kans dat het meteen goed gaat in een klas van 23 leerlingen?
c) Hoe groot is de kans dat de loting moet worden overgedaan bij een groep van minstens 5 personen ?

===

Suggesties voor nader onderzoek /praktische opdracht e.d.

Met name de *driehoek van Pascal* biedt veel mogelijkheden tot verder onderzoek. De figuur hiernaast krijg je door in de driehoek van Pascal alle even getallen te vervangen door een wit hokje, en alle oneven door een rood. Je laat als het ware alle even getallen weg. Dergelijk patronen krijg je als je alle drievouden of (bijv) alle 5-vouden weg laat



1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
1	6	15	20	15	6
1	7	21	35	35	21
1	8	28	56	70	56
1	9	36	84	126	126
1	10	45	120	210	252
1	11	55	165	330	462

Er zit nog veel meer verborgen in deze driehoek. Je moet daarvoor je blikrichting wat aanpassen, en wat optellingen maken
Dat levert o.a. de bekende rij van Fibonacci (1,1,2,3,5,8,13, ..) op.

Op internet is zeer veel te vinden over dit onderwerp. Een paar bronnen staan hieronder.

Bronnen

http://www.math.rug.nl/didactiek/BSP/Driehoek_pascal/patronen_in_driehoek.html
http://users.telenet.be/chris.cambre/chris.cambre/driehoek_Pascal.htm
http://www.pedrotytgat.be/wiskunde/getallen/Exploraties_in_de_driehoek_van_Pascal.pdf

========