Veranderingen van functies

'groei'snelheden

Inhoudsopgave

WB voor een opgave geeft aan dat er een werkblad bij die opgave hoort.

⌛ geeft aan welke centrale vraag in het komende stukje wordt behandeld.

✋ geeft aan dat de centrale vraag van het voorgaande wordt beantwoord.

Op bladzijde 3 staan links naar sites waar verschillende aspecten van dit onderwerp worden geïllustreerd.

Experimentele uitgave voor Differentiëren, vwo, wiskunde A
versie 3 (januari 2011)
auteurs: Leon van den Broek, Peter Kop
met medewerking van: Cees Garst, Nicolette van de Kuilen, Hielke Peereboom

Site bij hoofdstuk 4

1) http://www.ies.co.jp/math/java/calc/doukan/doukan.html

Surf over de grafiek en bekijk de helling in ieder punt.

Sites bij hoofdstuk 5

2) http://www.digischool.nl/wi/tweede_fase/grafiek-helling-1.htm

Loop over de grafiek en kijk hoe je de groeisnelheid terugziet in de grafiek van de afgeleide.

3) http://www.ies.co.jp/math/java/calc/x_diff/x_diff.html

Loop over de grafiek en laat de grafiek van de afgeleide schetsen.

4) http://users.telenet.be/chris.cambre/chris.cambre/hotpotatoes/helling1.htm

Zoek bij elke grafiek de goede hellingfunctie (afgeleide).

Sites bij hoofdstuk 8

5) http://wims.math.leidenuniv.nl/wims/wims.cgi?&lang=nl&+module=U1/analysis/derdraw.nl&cmd=intro

Schets zelf bij een gegeven grafiek de grafiek van de afgeleide.

6) http://www.quickmath.com/webMathematica3/quickmath/page.jsp?s1=calculus&s2=differentiate&s3=basic

Snel de afgeleide laten bepalen.

Eventueel ook bruikbaar

http://users.telenet.be/chris.cambre/chris.cambre/afgeleide_functie.htm#applet

Schuif de *x*-coördinaat en kijk naar de groeisnelheid bij die waarde van *x*.

http://users.telenet.be/chris.cambre/chris.cambre/hotpotatoes/helling1.htm

zoek bij elke grafiek de goede hellingfunctie (afgeleide)

http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00166/toepassing_wisweb.html

pak een punt van de lijn en probeer zo goed mogelijk een raaklijn te maken (je kunt inzoomen om beter te kunnen kijken)

0. Veranderingen

Voordat je begint aan dit lesmateriaal vragen we je om, met eigen kennis en die van je klasgenoten, na te denken over de centrale vragen die verderop aan de orde komen.
Deze centrale vragen komen verderop uitgebreid aan bod. Toch lijkt het ons goed om 'met gezond verstand' na te denken over deze vragen, zonder afgeleid te worden door allerlei nieuwe uitleg. Het gaat om eigen redeneringen en uitwisseling van argumenten met klasgenoten. Later leer je hoe deze vragen in de wiskunde worden beantwoord.

Opdracht 1
Schets bij ieder citaat een (globale) grafiek van het nationale inkomen.
a. 'De groei van het nationale inkomen neemt volgend jaar af.'
b. 'De daling van het nationale inkomen zet volgend jaar versterkt door.'
c. 'Het nationale inkomen daalde vorig jaar steeds sneller; sinds januari daalt het nog steeds, maar minder snel dan voorheen.'

Als dingen veranderen, willen we graag weten hóe ze veranderen. Denk bijvoorbeeld aan koersen van aandelen, aantal inwoners in een land, winst van een bedrijf in de loop van de jaren, … .
Vaak gaat het over veranderen in de tijd, maar dat hoeft niet. We kunnen ook bijvoorbeeld kijken naar
- de verandering van de winst als je meer goederen produceert,
- de verandering van belasting als je meer gaat verdienen,
- de verandering van de remweg van een auto als je harder rijdt,
- de verandering van de lengte van een volwassen goudvis als zijn waterkom meer water bevat.

In al deze gevallen is er sprake van een verband tussen twee variabelen, waarbij de ene variabele afhankelijk is van de andere. In de wiskunde noemen we de *onafhankelijke* variabele meestal x en de *afhankelijke* variabele y. Zo'n afhankelijkheidsverband noemen we een *functie*: y is een functie van x.
Bij het tweede voorbeeld hierboven was sprake van belasting die afhangt van het inkomen. Aan de hand van het inkomen (de onafhankelijke variabele x) wordt de belasting vastgesteld (de afhankelijke variabele y).
Schematisch: x (inkomen) $\rightarrow$ y (belasting)
Bij het derde voorbeeld heb je: x (snelheid auto) $\rightarrow$ y (remweg)
Als x verandert, verandert y mee. We gaan nu bekijken hoe de verandering van y samenhangt met de verandering van x.

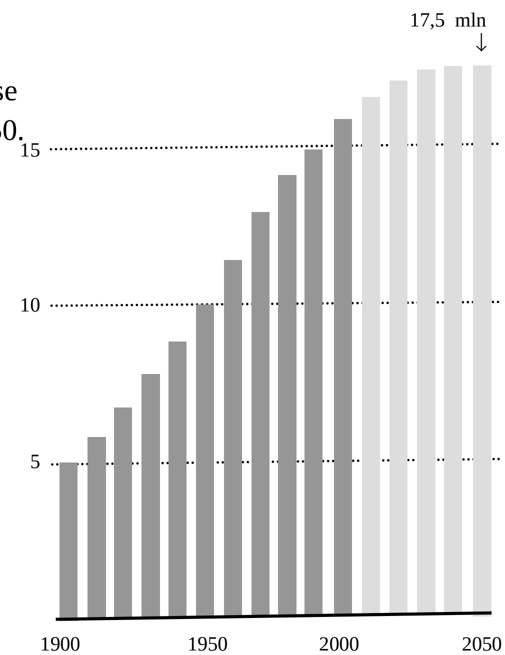
Opdracht 2
Aan de hand van voorbeelden bespreken we verschillende centrale vragen uit het vervolg. Probeer de vragen te beantwoorden en bespreek je antwoorden met je klasgenoten.

Gegeven is de functie:
x (het aantal geproduceerde goederen) $\rightarrow K$ (de kosten in euro's)
door de formule $K = 480000 + 8x$.
a. Schets een grafiek en geef aan hoe K verandert als x groter wordt.

Gegeven is de functie
x (het aantal jaren na 1970) $\rightarrow$ A (het aantal transistors) op een chip,
door de formule $A = 2250 \cdot 1{,}404^x$.
b. Maak een tabel zoals hieronder. Schrijf bij iedere waarde van x hoeveel A het afgelopen jaar is gestegen. Dus bij $x = 4$ schrijf je het verschil tussen A bij $x = 4$ en A bij $x = 3$

x	0	1	2	3	4	5	6
toename	╳						

Hiernaast zie je de omvang van de Nederlandse bevolking in beeld gebracht van 1900 t/m 2050. Bron: CBS.
c. Bereken de gemiddelde toename van de Nederlandse bevolking per 10 jaar.



Als je een steen van de Domtoren (hoogte 110 meter) naar beneden laat vallen (wat niet mag), wordt de hoogte van de steen gegeven door de formule $h = 110 - 5 \cdot t^2$,
waarbij h de hoogte is in meters en t de valtijd in seconden. Volgens deze formule komt het voorwerp na 4,69 seconde op de grond.
d. Bereken hoeveel meter de steen gedurende de laatste 0,01 seconde van zijn val aflegt.
Bereken met welke snelheid in km/uur (ongeveer) de steen op de grond komt.

Als bij een functie $x \rightarrow y$ de waarde van x verandert, verandert y meestal mee. Hoe die verandering van y samenhangt met de verandering van x, leer je in dit hoofdstuk.
Bij bijvoorbeeld de functie $y = x^2 - 4x$ leer je de gemiddelde verandering van y berekenen als x toeneemt van 3 tot 6 en ook hoe steil de grafiek van deze functie is in het punt waar x = 3.
Deze wiskundige zaken zijn goed te vertalen naar snelheden. Dan is het eenvoudiger om je er iets bij voor te stellen. Dat gaan we dan ook regelmatig doen.
Veel succes.

1. Het verschil tussen gemiddelde snelheid en momentane snelheid

Centrale vraag: wat is het verschil tussen een gemiddelde snelheid en een momentane snelheid?

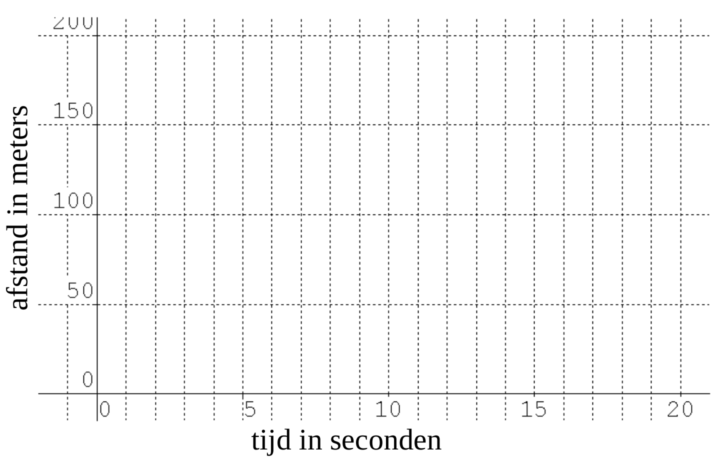
WB Opgave 1

Op de Olympische Spelen van 2008 in Peking won Usain Bolt zowel de 100 meter als de 200 meter sprint (atletiek, heren). Zijn tijden waren 9,69 sec over de 100 meter en 19,30 sec over de 200 meter.
We kijken naar de vraag ‘Liep Bolt op de 200 meter harder dan op de 100 meter?’

a. Toon aan dat Bolt op de 200 meter een hogere gemiddelde snelheid haalde dan op de 100 meter.

Je kunt de vraag ‘Liep Bolt op de 200 meter harder dan op de 100 meter?’ vanuit twee invalshoeken proberen te beantwoorden.
1. Je kijkt naar de gemiddelde snelheid (zie vraag a.)
2. Je kijkt naar de topsnelheid die tijdens de race gehaald werd.

Die verschillende invalshoeken kunnen ook verschillende antwoorden opleveren.
b. Schets in de figuur op het werkblad een mogelijk verloop van de 100 m en van de 200 m waarbij de topsnelheid op de 100 m hoger was dan de topsnelheid van de 200 m. Leg uit hoe je dat in de figuur ziet.



Op de volgende bladzijde zie je de finish van Bolt op de 100 m.

c. Probeer, op basis van dit plaatje, een schatting maken van zijn voorsprong in meters en ook van zijn voorsprong in tijd op zijn achtervolgers.

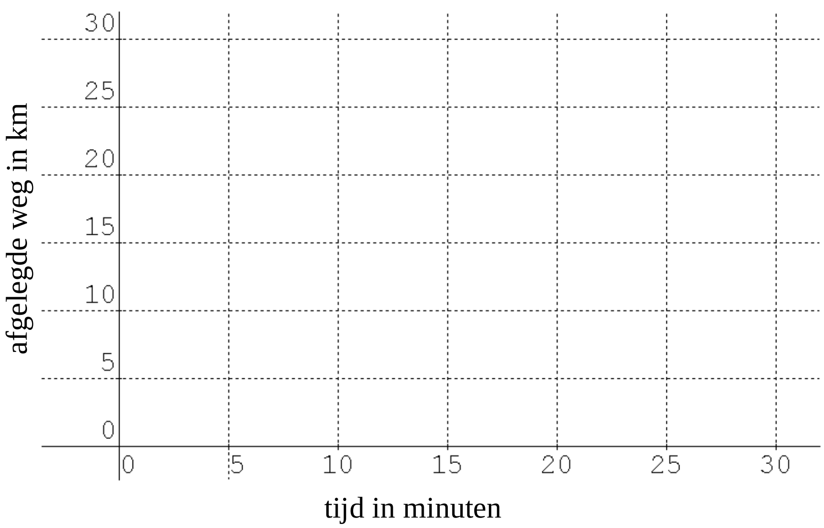
Op internet is veel te vinden over de finales 100 m en 200 m.

d. Controleer je antwoord op vraag b met behulp van gegevens over de race op internet.

WB Opgave 2

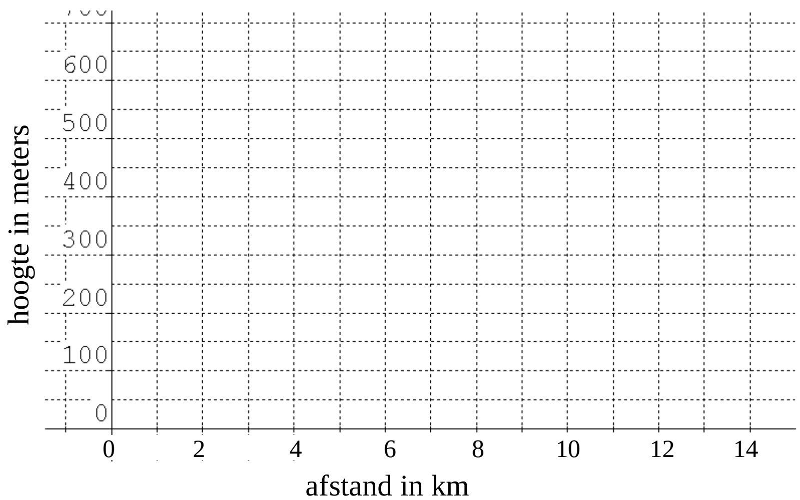
Big Boy wordt met zijn auto aangehouden door agente Tiny Toy, die hem wil bekeuren voor te hard rijden. Big Boy verweert zich met: ‘Te hard rijden? Hoe kan dat nu? Ik ben al 30 minuten onderweg en heb pas 22 km afgelegd.

Maak op het werkblad een grafiekje waarin je het argument van Big Boy weerlegt en waaruit blijkt dat Tiny Toy wel degelijk gelijk kan hebben.



WB Opgave 3

Rosanne gaat morgen een bergwandeling maken naar een berghut. Het hoogteverschil tussen de camping waar ze nu is, en de berghut is maar 500 meter. De afstand is maar 10 km. Laat met een grafiekje zien dat deze wandeling geen makkie hoeft te zijn.

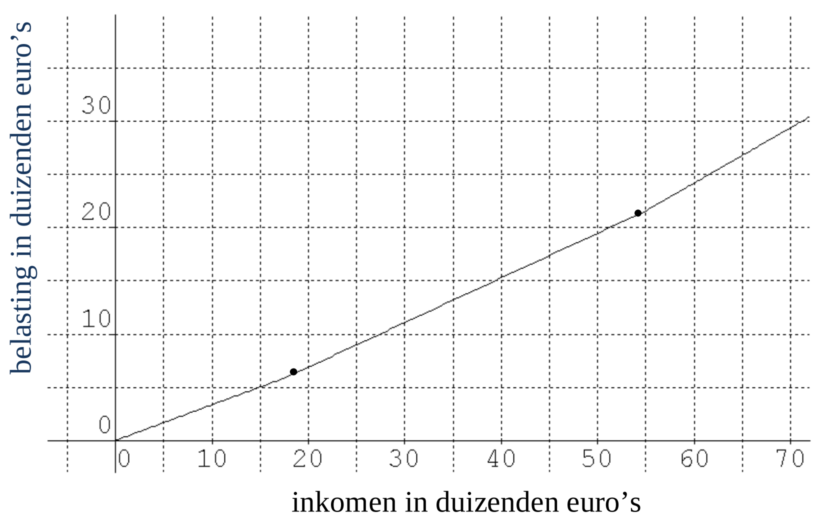


WB Opgave 4

Hieronder staan de tarieven van de inkomstenbelasting, box 1, inclusief premieheffing volksverzekeringen, voor mensen tot 65 jaar (2009).

schijf	**belastbaar inkomen**	**percentage**	**volle schijf**
1	t/m 17.878	33,5%	5989
2	van 17.879 t/m 32.127	42%	5984
3	van 32.128 t/m 54.776	42%	9512
4	54.777 of meer	52%	

Bij een inkomen van € 43.210 zijn de eerste twee schijven vol. Daarvoor wordt dus € 5989 en € 5984 belasting betaald. Voor schijf 3 blijft het bedrag 43210 − 32127 = 11083 over; daarover moet 42% worden betaald, dat is € 4654. In totaal betaalt iemand met een inkomen van € 43.210 dus € 16627 belasting. Hieronder staat de grafiek van de te betalen belasting als functie van het inkomen.



De grafiek bestaat uit drie lijnstukken, waartussen de knikpunten dik zijn aangegeven.

a. Wat is de richtingscoëfficiënt van die lijnstukken?

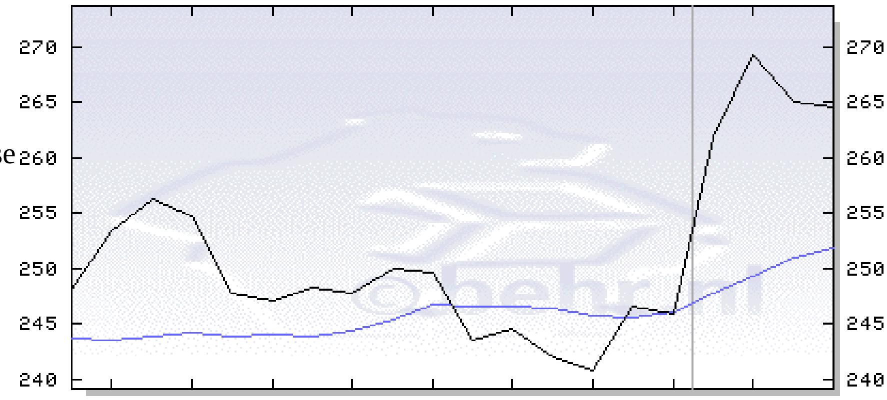
Iemand, met een jaarinkomen van 70000 euro, moppert dat hij zo veel belasting moet betalen: “Voor iedere euro die ik verdien breng ik 52 cent naar de fiscus”.

b. Geef aan hoe deze uitspraak bedoeld is en waarom hij niet klopt. Illustreer je uitleg met een grafiekje op het werkblad.

Opgave 5

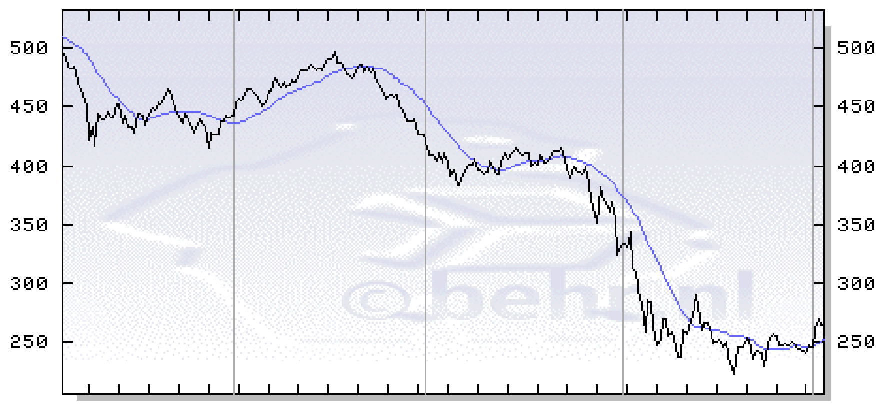
De beursen zijn in 2008 flink gekelderd. De AEX- index geeft een soort gemiddelde koers van 25 grote Nederlandse bedrijven. Hieronder zie je het verloop van de AEX-index voor verschillende perioden.

De AEX-index in een maand (tussen 081208 en 080109)



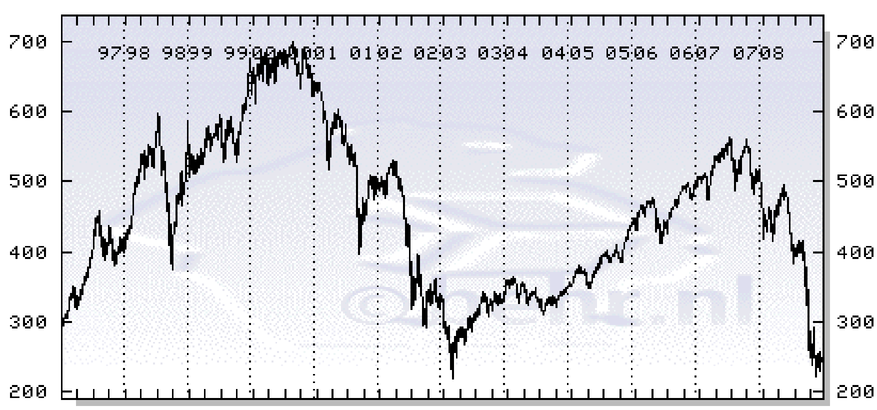
AEX-index - koersen 20 beursdagen: 8/12/08 t/m 8/1/09

De AEX-index in een jaar (tussen 080108 en 080109)



AEX-index - koersen 256 beursdagen: 8/1/08 t/m 8/1/09

De AEX-index in twaalf jaar (tussen 080197 en 080109)



AEX-index - koersen 3058 beursdagen: 2/1/97 t/m 2/1/09

Hieronder zie je een tabel van de AEX-index tussen 5 juni 2008 en 8 januari 2009

080605: 482,26	080730: 404,39	080923: 367,64	081117: 246,33
080606: 471,23	080731: 399,95	080924: 360,62	081118: 250,62
080609: 469,82	080801: 394,53	080925: 369,35	081119: 238,12
080610: 464,19	080804: 392,48	080926: 354,58	081120: 227,82
080611: 456,34	080805: 403,46	080929: 323,55	081121: 222,93
080612: 459,11	080806: 410,51	080930: 331,45	081124: 245,86
080613: 459,96	080807: 405,69	081001: 334,24	081125: 245,84
080616: 458,70	080808: 408,52	081002: 330,83	081126: 245,16
080617: 459,83	080811: 412,13	081003: 344,02	081127: 253,26
080618: 450,57	080812: 415,56	081006: 312,56	081128: 252,55
080619: 446,68	080813: 410,33	081007: 309,44	081201: 235,50
080620: 437,33	080814: 409,41	081008: 285,66	081202: 241,34
080623: 437,44	080815: 409,86	081009: 281,97	081203: 242,04
080624: 437,38	080818: 410,51	081010: 258,05	081204: 240,80
080625: 439,56	080819: 398,75	081013: 285,27	081205: 229,44
080626: 426,03	080820: 402,59	081014: 284,51	081208: 248,12
080627: 425,92	080821: 400,23	081015: 263,00	081209: 253,39
080630: 425,93	080822: 408,19	081016: 248,04	081210: 256,15
080701: 414,52	080825: 402,70	081017: 252,26	081211: 254,77
080702: 408,40	080826: 403,24	081020: 269,41	081212: 247,75
080703: 408,55	080827: 406,12	081021: 269,36	081215: 247,11
080704: 403,36	080828: 411,13	081022: 255,08	081216: 248,26
080707: 411,12	080829: 412,84	081023: 257,85	081217: 247,76
080708: 402,79	080901: 412,09	081024: 245,92	081218: 249,88
080709: 410,83	080902: 414,70	081027: 237,10	081219: 249,54
080710: 401,93	080903: 406,32	081028: 237,96	081222: 243,44
080711: 391,98	080904: 397,17	081029: 259,58	081223: 244,50
080714: 395,35	080905: 389,22	081030: 257,65	081224: 241,90
080715: 383,66	080908: 398,79	081031: 267,69	081229: 240,81
080716: 383,99	080909: 395,73	081103: 273,01	081230: 246,58
080717: 392,66	080910: 393,90	081104: 291,13	081231: 245,94
080718: 395,94	080911: 392,56	081105: 279,44	-----
080721: 400,36	080912: 399,57	081106: 260,61	090102: 258,23
080722: 400,20	080915: 385,04	081107: 265,72	090105: 261,78
080723: 405,38	080916: 371,20	081110: 267,13	090106: 269,27
080724: 396,65	080917: 356,98	081111: 257,13	090107: 265,04
080725: 395,77	080918: 351,66	081112: 249,25	090108: 264,59
080728: 392,98	080919: 381,83	081113: 249,96	
080729: 395,10	080922: 375,19	081114: 252,47	

a. Hoe groot is de verandering tussen 1 december en 31 december.

b. Tussen welke twee opeenvolgende noteringen in december 2008 is de stijging het grootst en hoe groot is die stijging?

De grafiek van de afgelopen maand vind je natuurlijk ook terug in de grafiek van de afgelopen jaar.

WB c. Geef op het werkblad aan waar.

In een periode van 12 jaar zijn er zeer veel schommelingen. Het is handiger te kijken naar de gemiddelde verandering per jaar.

d. Bereken deze gemiddelde verandering per jaar.

Bekijk de derde grafiek. In 2008 is de AEX-index sterk gedaald, en ook in de periode van 1 jan 2001 tot 1 jan 2003 is de AEX-index gedaald.
e. Hoe zie je in de grafiek welke daling het grootst is?

De derde grafiek kan grof benaderd worden door een viertal rechte lijnen.
WB f. Teken deze vier lijnen in de figuur op het werkblad en geef van elke lijn de helling (richtingscoëfficiënt). Neem $t = 0$ voor 2 januari 1997 en $t = 12$ voor 2 januari 2009.

Terugblik
In al deze voorbeelden zien we een grootheid die een functie is (afhankelijk is) van een andere grootheid.
In de eerste en tweede opgave was dat: tijd $\rightarrow$ afgelegde weg.
In de derde opgave was dat: afstand $\rightarrow$ hoogte.
In de vierde opgave was dat: inkomen. $\rightarrow$ belasting.
In de vijfde opgave was dat: tijd $\rightarrow$ AEX.

We kijken naar 'hoe snel deze afhankelijke grootheid verandert, als de onafhankelijke grootheid verandert'.
In opgave 1 en 2 is dat de snelheid (in m/s of in km/u).
In opgave 3 is dat de stijging in meters per meter afgelegde weg.
In opgave 4 is dat de toename in euro's per euro inkomenstijging.
In opgave 5 is dat de toename van het aantal punten per jaar (of per maand of per dag).
Een grootheid verandert, maar meestal niet op elk moment even snel.
We onderscheiden twee soorten veranderingen: de gemiddelde *verandering en de verandering* op een zeker moment. *Bij een gemiddelde verandering is er sprake van een periode waarover de verandering bekeken wordt. De verandering op een zeker moment wordt ook momentane verandering of groeisnelheid genoemd. Daarmee geven we aan hoe de grootheid zou veranderen als vanaf dat moment de mate van toename/afname hetzelfde zou blijven. Dit onderscheid zie je goed bij de gemiddelde snelheid over een tijdsperiode en de snelheid op het moment van bijvoorbeeld een botsing.*

Opgave 6
Een grootheid y is een functie van een grootheid x. Stel dat de gemiddelde snelheid waarmee y toeneemt als x toeneemt van 5 tot 15 gelijk is aan 2,5.
Schrijf een kort stukje waarin je in eigen woorden zegt wat dat betekent.

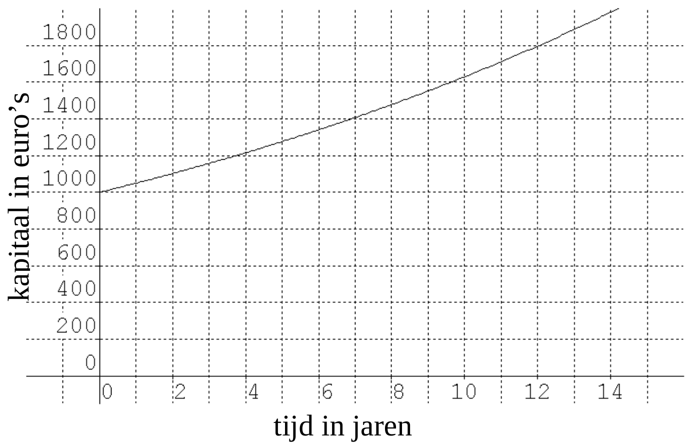
Als y een functie van x is, kunnen we op verschillende manieren zeggen hoe y met x samenhangt: in een grafiek, in een tabel, in een formule en in woorden.

Een voorbeeld

- In woorden: Op zeker moment heb ik 1000 euro op mijn spaarrekening. Het bedrag wordt ieder jaar met 5% (de rente) verhoogd.
- In een tabel:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1000	1050	1102,50				

- In een grafiek:

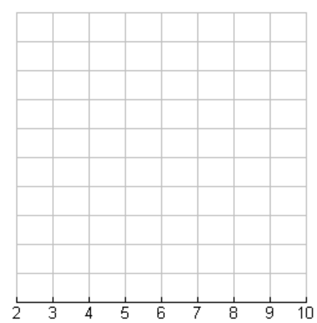


- In een formule: $y = 1000 \cdot 1{,}05^x$

Soms is de ene beschrijving (of met een mooi woord "representatie") handiger dan de andere. In het algemeen zie je in een grafiek heel goed het globale verloop. Als je precies wilt rekenen zal je eerder de formule gebruiken.

We kijken nu alleen naar de grafieken en wel naar wiskundige grafieken (zonder context) met x horizontaal uitgezet en y verticaal.

Opgave 7
Schets in elk van de volgende onderdelen een grafiek met de opgegeven eisen.
De waarden van x lopen steeds van beginwaarde $x = 2$ tot en met eindwaarde $x = 10$: we zeggen dat x het interval [2,10] doorloopt.



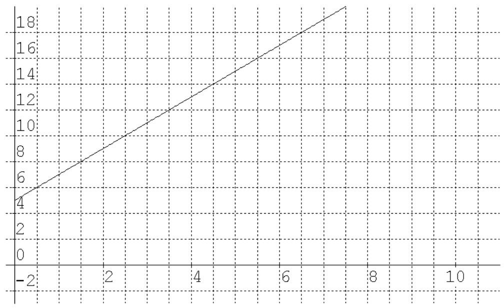
a. De grafiek stijgt steeds harder, m.a.w. de groeisnelheid wordt steeds groter.
b. De grafiek daalt steeds maar steeds minder snel, m.a.w. de groeisnelheid wordt steeds minder negatief.
c. De groeisnelheid is eerst positief en daarna negatief.
d. De grafiek stijgt eerst, daarna daalt hij en daarna stijgt hij weer en wel zo dat de stijging in het beginpunt net zo groot is als in het eindpunt.
e. Het beginpunt ligt lager dan het eindpunt en de groeisnelheid bij $x = 2$ is negatief.
f. Het begin- en eindpunt liggen even hoog en er zijn nog precies twee andere punten met diezelfde y-waarde.

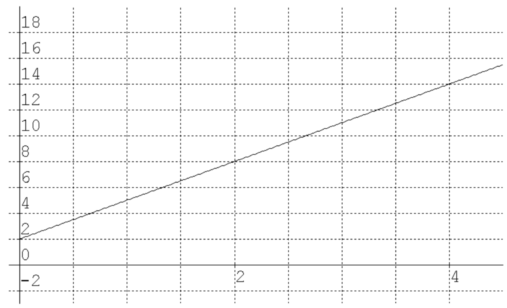
In contexten spreken we over gemiddelde veranderingen per … over een periode van … tot …, maar ook over de verandering op een zeker moment (de momentane snelheid). Deze momentane snelheid zullen we in het vervolg de ***groeisnelheid*** *noemen. Beide veranderingen worden uitgedrukt in de eenheid '… per …' (bijvoorbeeld: aantal per dag, euro per km, afstand per uur).*
In de wiskunde spreken we over functies $x \to y$. De gemiddelde verandering en de groeisnelheid worden bij functies beide uitgedrukt in de toename van y als x één eenheid groter zou worden.

2 Groeisnelheden uit grafieken

Centrale vraag: Hoe berekenen we de groeisnelheid als de grafiek een rechte lijn is?

Opgave 8
Twee grafieken met verschillende eenheden op de assen.





Welke lijn stijgt sneller: de lijn in de linker figuur of die in de rechter figuur?

Als je van links naar rechts langs een lijn loopt, verandert de waarde van *y*. Hoe je meet hoe snel die verandert, heb je al in eerdere klassen gehad. Toch is het goed om dat nog eens even vast te leggen.

Opgave 9
Schrijf een kort stukje waarin je voor een rechte lijn vertelt hoe je vastlegt hoe snel *y* verandert, als *x* verandert.

Bij lineaire functies is er steeds sprake van gelijke toenamen van y bij gelijke toenamen van x. De grafiek van een lineaire functie is dus een rechte lijn. De groeisnelheid van een lineaire functie is op ieder moment hetzelfde en hij is gelijk aan de richtingscoëfficiënt We spreken ook van de helling van de lijn.

Opgave 10
We bekijken vijf voorbeelden waarbij de grafiek een rechte lijn is.
Bepaal in elk voorbeeld de groeisnelheid (ofwel de helling van de lijn).

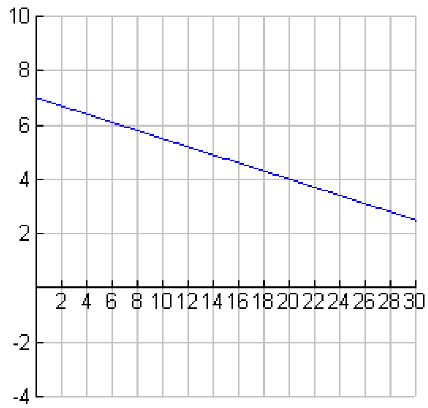
a. Een lineair groeiproces met tabel

x	0	1	2	3	4	5	6
y	90		75		60		

b. Een lineair groeiproces met tabel

x	5					15	
y	6					18	

c. Een lineair groeiproces met grafiek



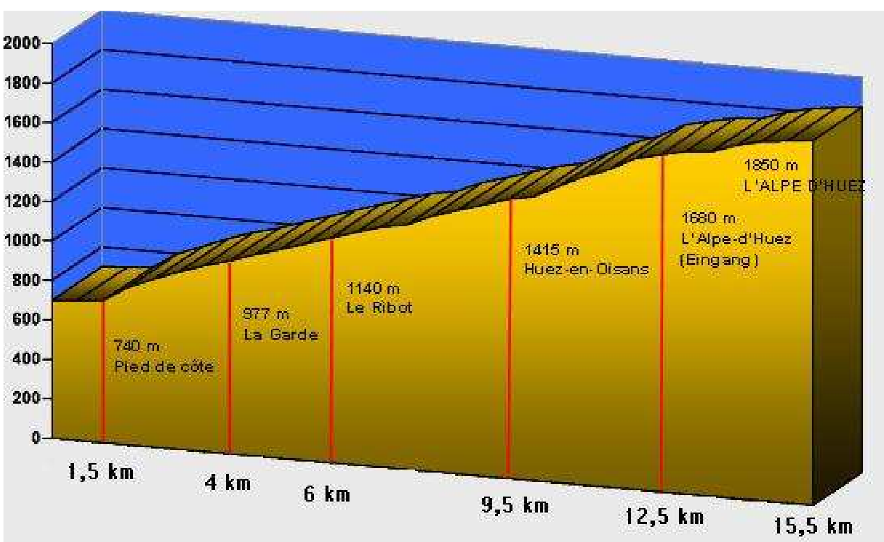
d. Een lineair groeiproces met formule $y = 1{,}3x + 6$

e. Een lineair groeiproces met $y = 6 + 0.15(x-7) + 0{,}3(x+10)$

Centrale vraag: Hoe benaderen we de groeisnelheid bij ‘kromme grafieken’?

Opgave 11

Beroemd is de beklimming naar Alpe d’Huez in de Tour de France. De beklimming begint vanuit het dorp Le Bourg d'Oisans, telt 21 haarspeldbochten en is 15,5 km lang. In het profiel hieronder worden vijf stukken onderscheiden.

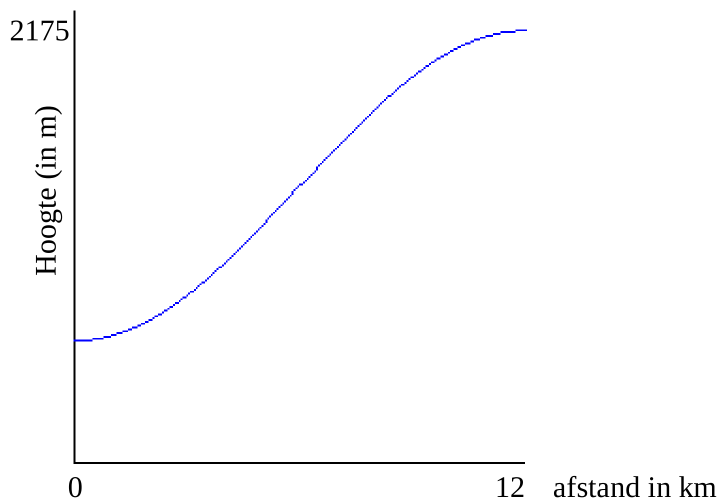


a. Welke twee stukken zijn (gemiddeld) het steilst? Bereken hoe steil deze twee stukken gemiddeld zijn.

Binnen een stuk zijn de hellingen ook niet hetzelfde: de ‘groeisnelheid’ is niet constant. In het profiel kun je zien waar de berg extra zwaar is voor de renners.

b. Waar zit het lastigste gedeelte?

Wielrenners zijn niet alleen maar geïnteresseerd in de *gemiddelde* stijging van een berg maar ook in de plaatselijke ‘groeisnelheden van de berg’. Deze bepalen voor een belangrijk deel de zwaarte van de beklimming.
Hieronder zie je een profiel van een berg.



Het startpunt ligt op een hoogte van 650 meter; de top na 12 km ligt op een hoogte van 2175 meter.

WB c. Teken op het werkblad een ander profiel van een berg (tussen x = 0 en x = 12) dat voldoet aan de volgende eisen:

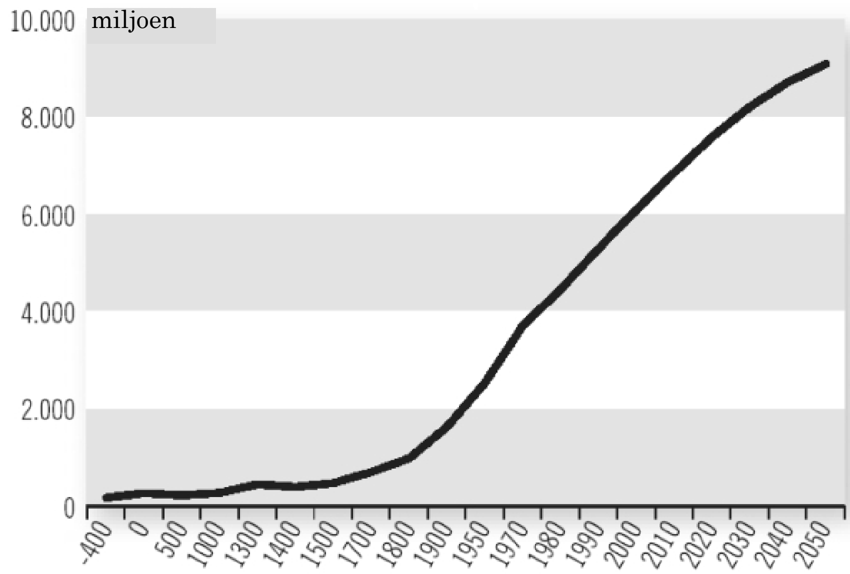
1) startpunt bij ligt ook op 650 meter hoogte en de top ligt ook weer na 12 km,
2) de gemiddelde stijging is kleiner dan de gemiddelde stijging van de berg hierboven,
3) de groeisnelheid van de berg is op minstens twee plekken groter dan de maximale groeisnelheid van de gegeven berg hierboven.

In bovenstaand voorbeeld zie je dat er een verschil is tussen de gemiddelde verandering en de ‘groeisnelheid op een bepaalde plaats’.

Opgave 12
Bekijk nog eens het voorbeeld van de AEX-index van hoofdstuk 1, opgave 5. Het derde plaatje gaat over een periode van twaalf jaar. We kunnen daarbij kijken naar de gemiddelde stijging/daling per jaar, maar ook naar de gemiddelde stijging/daling per maand of zelfs per dag.

Bereken deze drie gemiddelde veranderingen en zeg wat het verband is tussen de uitkomsten.

Opgave 13
We bekijken de wereldbevolking. De grafiek is afkomstig van de VN.



a. Met hoeveel mensen nam de wereldbevolking (gemiddeld) per jaar toe tussen 1900 en 2000?
b. En tussen 1800 en 1900?

Met de schaal op de tijdas is iets merkwaardigs aan de hand.
c. Wat?
   Waarom zou men dat gedaan hebben?

De groeisnelheid is de afgelopen 100 jaar niet constant geweest.
d. Beschrijf de groeisnelheid van de wereldbevolking gedurende de periode 1980 tot en met 2050.

e. Even een uitstapje. Maak een voorspelling voor het aantal mensen in 2100 op basis van deze grafiek. Geef aan hoe je te werk gaat.

Bij kromlijnige grafieken is het niet zo eenvoudig de groeisnelheid te geven. De groeisnelheid verandert vaak voortdurend. Door de grafiek met stukjes rechte lijn te benaderen, kunnen we een beeld van de groeisnelheid krijgen.

3 Gemiddelde veranderingen bij niet lineaire functies

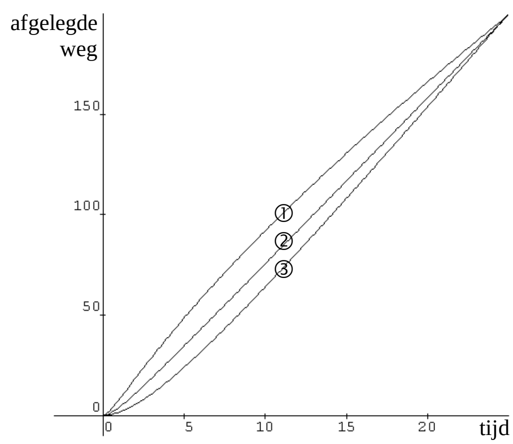
Twee manieren om veranderingen te noemen
Als de grafiek geen rechte lijn is, maken we onderscheid tussen

- gemiddelde verandering (of gemiddelde stijging/daling)
- groeisnelheid (of snelheid van veranderen).

De gemiddelde verandering gaat over een interval: er is een beginpunt en een eindpunt.
De groeisnelheid gaat over de snelheid van veranderen op een zeker moment of plaats. We spreken ook wel over de *momentane* snelheid.

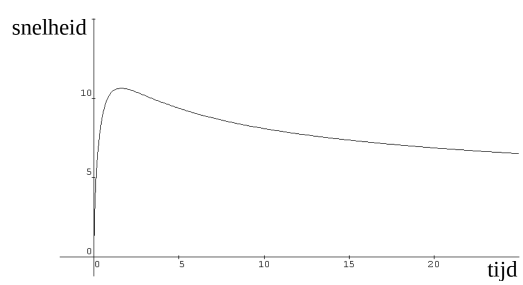
Vergelijk de volgende zinnen:
'De gemiddelde snelheid over de hele reis was 87 km/u.' en *'Op het moment van het ongeluk was de snelheid 104 km/u.'*
'De bevolking groeide de afgelopen 15 jaar met gemiddeld 0,2 miljoen per jaar' en *'Op 1 januari 2000 groeide de bevolking met 0,3 miljoen per jaar.'*
In beide voorbeelden is er in de eerste zin sprake van een gemiddelde verandering en in de tweede zin van een (groei)snelheid op een zeker moment.
Ook in de voorbeelden van de AEX, Alpe d'Huez en de wereldbevolking gebruikten we zowel de gemiddelde verandering als de momentane snelheid.
Ook in de sport kunnen we spreken over de gemiddelde snelheid en over de snelheid op een zeker moment, bijvoorbeeld bij de sprint van een atleet.

Opgave 14
In de figuur hiernaast zie je de afgelegde weg (in meters) uitgezet tegen de tijd (in sec) voor drie denkbeeldige hardlopers, die alledrie de 200 meter in 25 sec lopen. Het eindpunt van de drie grafieken is (25, 200).



a. Bereken de gemiddelde snelheid in m/s over de hele race.
b. Beschrijf het verschil tussen de hardlopers, lettend op hun snelheden.

In de figuur hiernaast is de snelheid van een van de hardlopers uitgezet.



c. Bij welke hardloper hoort deze snelheidsgrafiek, 1, 2 of 3? Licht je antwoord toe.

Centrale vraag: *Hoe bereken je een gemiddelde verandering bij niet lineaire functies bij een gegeven een context, tabel, grafiek of formule?*

Opgave 15
We praten steeds over de *gemiddelde* verandering. Kennelijk “middelen” we ergens over.
Bijvoorbeeld: Bij het gemiddelde inkomen in Nederland middelen we over *alle Nederlanders* (*die een belastbaar inkomen hebben*).

a. Bij de gemiddelde (loop)snelheid middelen we over ….. (vul in).
b. Bij de gemiddelde stijging van de AEX-index middelen we over …… .
c. Bij de gemiddelde groei van de wereldbevolking middelen we over ….. .
d. Bij de gemiddelde steilheid van een berg middelen we over ….. .

In andere wetenschappen
Ook in de biologie, scheikunde en economie wordt gesproken over de gemiddelde verandering (de gemiddelde snelheid waarmee een grootheid verandert) en over de groeisnelheid op een zeker moment.
Zowel de gemiddelde verandering als de groeisnelheid wordt uitgedrukt in “… per …”.

- Iemand legt een afstand (in km) af in een zekere tijd (in uren). Zijn gemiddelde snelheid (de gemiddelde verandering) en zijn snelheid op enig moment (groeisnelheid) worden uitgedrukt in km per uur.
- De snelheid waarmee een 12-jarige groeit (tijdens de “groeispurt”) wordt net als de gemiddelde groei tijdens de puberteit uitgedrukt in cm per jaar.
- In een chemische reactie ontstaat een aantal mg van een stof in een zekere tijdsduur (sec). De (gemiddelde) reactiesnelheid wordt uitgedrukt in mg per sec.
- In de economie wordt gewerkt met de gemiddelde belastingdruk (totale belasting gedeeld door totale inkomen) en de marginale belastingdruk (hoeveel belasting moet je over een extra verdiende euro betalen); beide worden uitgedrukt in euro per euro.

Zoals je ziet krijgen de gemiddelde verandering en de groeisnelheid soms nieuwe aparte namen. Daar zie je vaak het woord gemiddelde of het woord snelheid in terug.

In de wiskunde is het niet van belang of het over km per uur, gram per seconde of euro per persoon gaat. De wiskundige theorie van gemiddelde verandering en groeisnelheid (ook wel momentane verandering genoemd) is algemeen toepasbaar.

We werken nu met variabelen *x* en *y* zonder ons te bekommeren over wat die praktisch kunnen voorstellen: *x* en *y* zijn gewoon getallen.

Berekening van de gemiddelde verandering
Stel dat x verandert van 2 naar 6 (stijging van 4) en de bijbehorende y verandert van 10 naar 22 (stijging van 12). Het maakt hierbij niet uit of deze gegevens uit een context, tabel, grafiek of formule komen.
Dan berekenen we de gemiddelde verandering van y ten opzichte van x als volgt. De Griekse letter Δ staat voor toename; die kan ook negatief zijn.

Schema: *begin:* $x = 2 \rightarrow y = 10$
eind: $\underline{x = 6} \rightarrow \underline{y = 22}$
toename: $\Delta x = 4$ $\Delta y = 12$

gemiddelde verandering: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{12}{4} = 3$

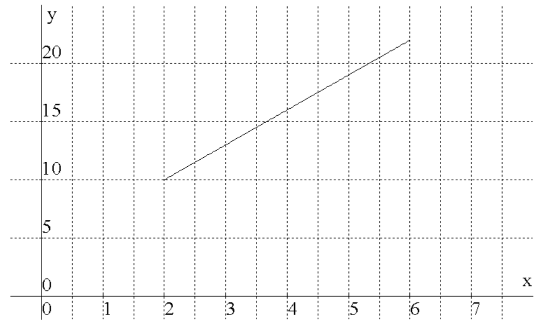
Om de gemiddelde verandering van y ten opzichte van x op een interval te berekenen, hoef je dus alleen het begin- en eindpunt van de grafiek op dat interval te kennen.

We delen dus een verschil door een ander verschil. Deftiger gezegd: we nemen het quotiënt (= uitkomst van een deling) van twee differenties (= verschillen).

Daarom heet $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ een **differentiequotient** (ofwel een gemiddelde verandering).

Vaak geven we het interval waarop deze gemiddelde verandering berekend wordt aan met [.. , ..]. In dit voorbeeld kunnen we zeggen ‘de gemiddelde verandering op het interval $[2,6]$ is gelijk aan 3'.

Deze gemiddelde verandering is ook grafisch weer te geven en te interpreteren. De rechtstreekse verbinding van het beginpunt $x = 2$ (met $y = 10$) met het eindpunt $x = 6$ (met $y = 22$) is een lijnstuk met helling 3.



Hoewel we niet weten hoe de grafiek precies loopt (we weten immers alleen het begin- en eindpunt), zal, als x 1 groter wordt, y gemiddeld 3 groter worden.

WB Opgave 16

Een mogelijk verloop van de functie is hieronder in een tabel gegeven:

x	2	3	4	5	6
y	10	12	19	20	22

In de tabel neemt x steeds met 1 toe. De toenames van y zijn achtereenvolgens 2, 7, 1 en 2.

a. Ga na dat deze vier toenames gemiddeld 3 zijn.

b. Bedenk zelf nog een tweetal andere tabellen met beginpunt $(2,10)$ en eindpunt $(6,22)$. Die hebben dus ook een gemiddelde verandering 3 op het interval $[2,6]$. Teken ook de bijbehorende grafieken.

Opgave 17

Hieronder staat een tabel van een functie.

x	4	5	6	7	8	9	10	
y	-3	-1	0	4	7	5	-4	

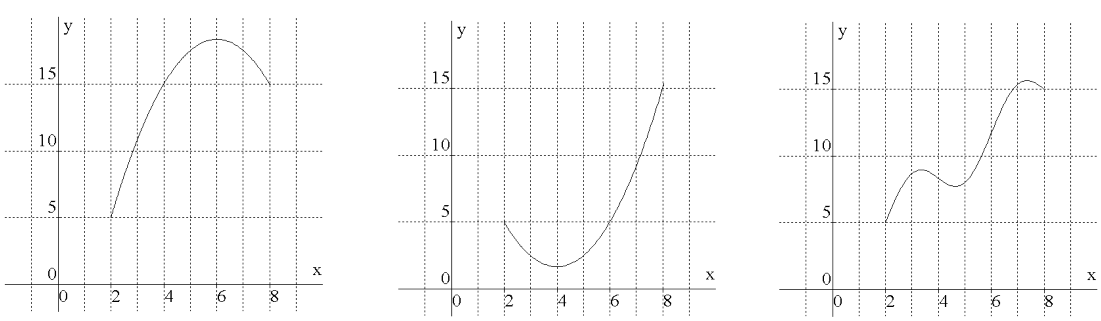
a. Bereken de toenames van y op de intervallen $[4,6]$, $[6,8]$ en $[8,10]$

b. Bereken vervolgens met deze drie uitkomsten de gemiddelde verandering op [4, 10].

c. Hoe had je het antwoord op vraag b sneller kunnen vinden?

Opgave 18

Hieronder staan de grafieken van drie functies.



Bereken bij elk van de drie functies de gemiddelde verandering van y ten opzichte van x op het interval $[2,8]$.

Opgave 19

a. Teken de grafiek van $y = x^2 - 6x + 5$ tussen $x = -1$ en $x = 7$.

b. Bereken de gemiddelde verandering op het interval $[0,7]$ (beginpunt is bij $x = 0$ en eindpunt bij $x = 7$) en geef aan hoe je deze gemiddelde verandering in de grafiek kunt aflezen.

c. Bedenk een interval (een begin- en eindpunt) waarop de gemiddelde verandering negatief is.

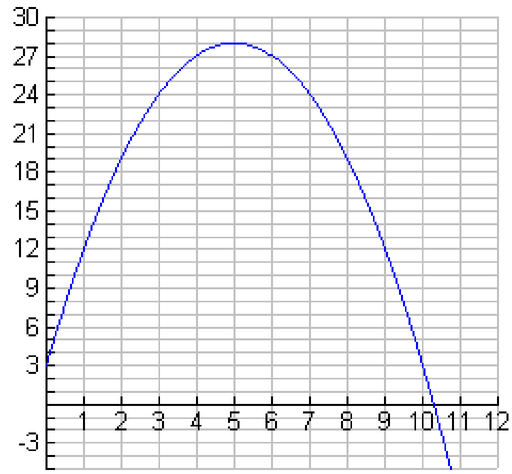
d. Bedenk minstens twee intervallen waarop de gemiddelde verandering gelijk is aan 0.

Opgave 20

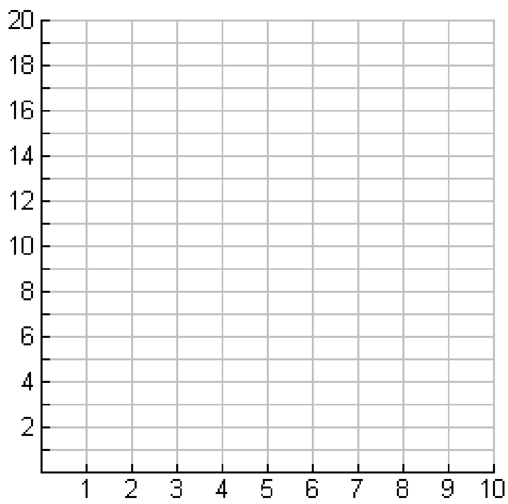
Hiernaast staat de grafiek van een functie.

a. Bereken de gemiddelde verandering van y ten opzichte van x op het interval $[1,10]$

b. Geef het interval met beginpunt 1 waarop de gemiddelde verandering van y ten opzichte van x gelijk is aan 1.



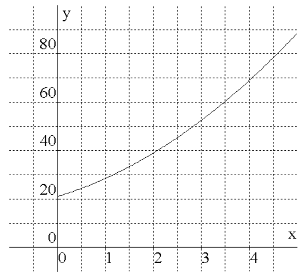
Opgave 21



Schets een grafiek die aan de volgende eisen voldoet:

- de grafiek gaat door punt (2,16),
- de gemiddelde verandering op het interval [2,8] is gelijk aan -2,
- de groeisnelheid bij $x = 3$ en bij $x = 7$ is positief.

Samenvatting van hoofdstuk 3 aan de hand van de functie $y = 15 + 1{,}5(x+2)^2$.

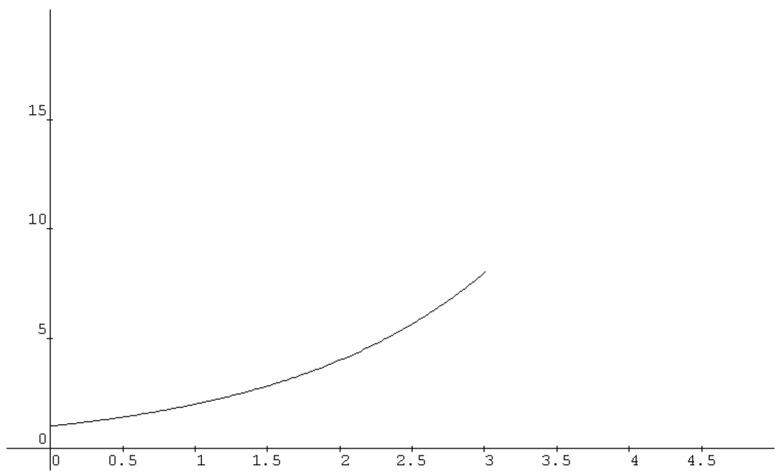
<table>
<tr><th></th><th>tabel</th><th>grafiek</th><th>context</th></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>21</td></tr><tr><td>1</td><td>28,5</td></tr><tr><td>2</td><td>39</td></tr><tr><td>3</td><td>52,5</td></tr><tr><td>4</td><td>69</td></tr></table></td><td>
</td><td>Een auto heeft 21 meter afgelegd en trekt op.
Na 1 sec heeft hij 28,5 meter afgelegd.en na 3 sec. 52,5 meter.
y is de afgelegde weg in m,
x is de tijd in sec.</td></tr>
<tr><td>hfd. 3</td><td>Gemiddelde verandering van y ten opzichte van x op [1,3] = differentiequotiënt op [1,3]
begin: $x=1 \rightarrow y=28{,}5$
eind: $x=3 \rightarrow y=52{,}5$
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{24}{2} = 12$</td><td>Helling van de lijn tussen (1 ; 28,5) en (3 ; 52,5)

beginpunt: $x=1 \rightarrow y=28{,}5$
eindpunt: $x=3 \rightarrow y=52{,}5$
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{24}{2} = 12$</td><td>Gemiddelde snelheid tussen de tijdstippen 1 en 3 seconden bereken je als volgt:

In 2 seconden worden 24 meter afgelegd.
Dat is gemiddeld 12 m/s.</td></tr>
</table>

4 De groeisnelheid uit grafieken van niet-lineaire functies

We volgen een bacterie-kolonie in constant ideale omstandigheden. B is de hoeveelheid bacteriën in mg. t is de tijd in uren. Veronderstel dat B per uur verdubbeld wordt en dat $B = 1$ op tijdstip $t = 0$. Dan is $B = 2^t$.



Onder de **groeisnelheid** van B op tijdstip 3 verstaan we het aantal mg bacteriën dat er per uur bijkomt, als de toename vanaf $t = 3$ niet meer zou veranderen.

Centrale vraag: Hoe schatten we de groeisnelheid uit de grafiek van een niet lineaire functie?

WB Opgave 22

Teken hoe de grafiek na $t = 3$ zou doorlopen als de groeisnelheid niet meer zou veranderen en lees daarmee zo goed mogelijk uit de figuur af hoe groot de groeisnelheid is op tijdstip 3 uur.

WB Opgave 23

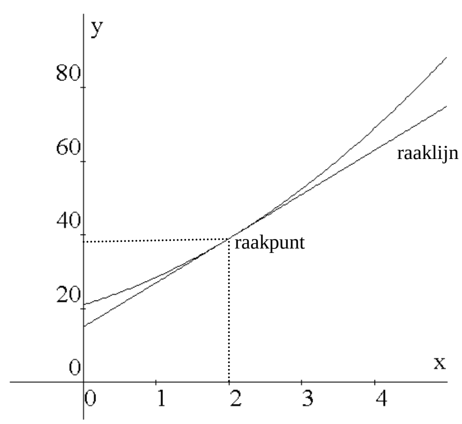
In opgave 22 heb je de (halve) lijn getekend die in het punt met $t = 3$ dezelfde richting heeft als de grafiek. Je kunt ook de *hele* lijn tekenen die dezelfde richting heeft (verleng de halve lijn naar links).

Teken op het werkblad de lijnen die dezelfde richting hebben als de grafiek in de punten bij $t = 1$, $t = 2$ en $t = 4$.

Kijk naar het punt (2,38) hiernaast. De grafiek heeft daar één richting. Er is ook de lijn in die richting getekend: de zogenaamde **raaklijn**.

De groeisnelheid van y als functie van x kunnen we nauwkeurig aflezen door eerst de raaklijn aan de grafiek te tekenen. De helling van de raaklijn is gelijk aan de groeisnelheid van y als functie van x. We spreken ook over de helling van de grafiek.

We kunnen dit alleen doen als de grafiek geen knik heeft in het betreffende punt.



Hoe teken je een raaklijn?

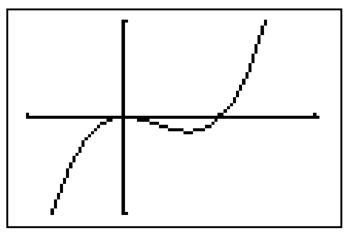
Hieronder volgen drie manieren om nauwkeurig en raaklijn te tekenen. Zorg dat je er tenminste een goed beheerst.

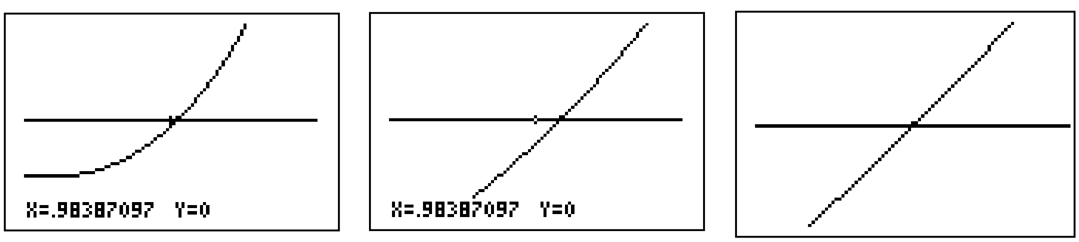
1) Een waterpas tegen een gebogen voorwerp. Op elke plaats is maar één stand mogelijk.

2) Skiër op berg. Op elke plek raken de ski's aan de helling.

3) Inzoomen op een grafiek. De grafiek gaat steeds meer lijken op de raaklijn.

We bekijken op de GR de grafiek van de functie
$y = x^3 - x^2$ in de buurt van het punt (1,0).
We zoomen drie keer in op dat punt.
Hieronder staan de drie plaatjes die je dan krijgt.

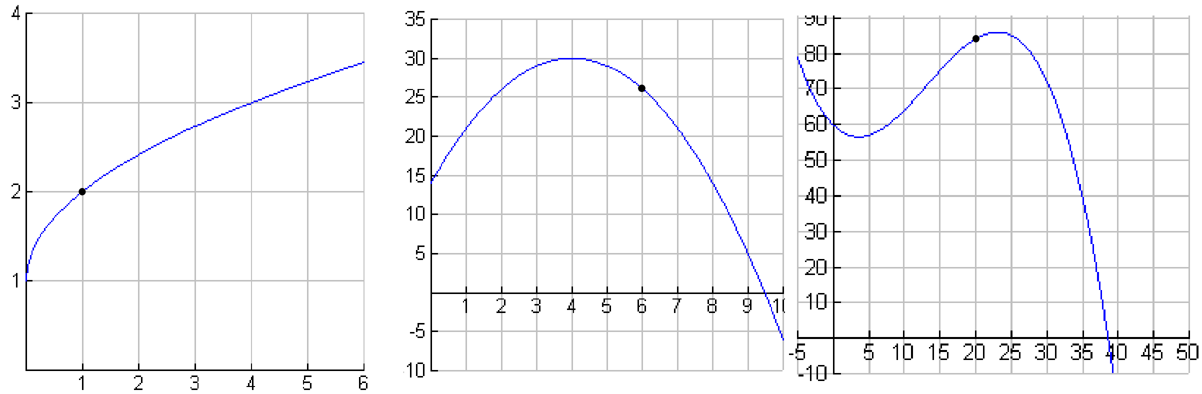




Het stukje van de grafiek rond (1,0) wordt sterk uitvergroot. Het gaat steeds meer op een rechte lijn lijken: de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

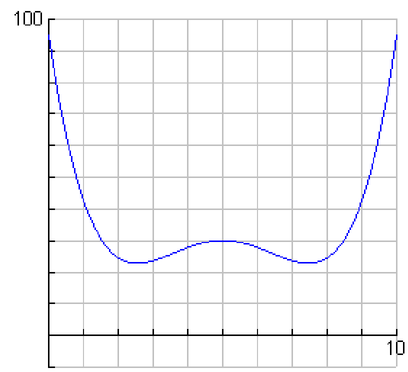
WB Opgave 24

Teken op het werkblad nauwkeurig de raaklijn aan de grafiek in het aangegeven punt en lees daarmee de groeisnelheid van *y* als functie van *x* af in dat punt.



WB Opgave 25

De grafiek hiernaast staat vergroot op het werkblad.
Deze grafiek is symmetrisch. Maak daar gebruik van.
Bepaal zo goed mogelijk de groeisnelheden en vul die in in een tabel zoals hieronder:



x	0	1	2	3	4	5	6	7
groei-snelheid								

Opgave 26

Schets steeds een grafiek, die voldoet aan de eisen:

a. de groeisnelheid bij $x = 0$ negatief is, bij $x = 2$ gelijk aan 2 en bij $x = 4$ gelijk aan -1.

b. de groeisnelheid bij $x = 0$ gelijk is aan 4 en de groeisnelheid daarna steeds kleiner wordt.

c. de groeisnelheid tot $x = 3{,}5$ steeds groter wordt en daarna steeds kleiner.

d. de groeisnelheid tot $x = 3{,}5$ positief is en na $x = 4$ negatief.

Schatten van de groeisnelheid bij een gegeven grafiek

Teken de raaklijn aan de grafiek en bepaal de helling van deze raaklijn. De helling van de raaklijn is gelijk aan de groeisnelheid van y als functie van x.

Centrale vraag: Hoe kunnen we de groeisnelheid berekenen in een context?

Opgave 27
Een hoeveelheid groeit volgens de formule $y = 3t + 5$; hierbij is de hoeveelheid y in kg en is t de tijd in uren.
a. Hoe groot is de groeisnelheid in kg/uur op de tijdstippen $t = 4$, $t = 6$, $t = 9$?
b. Maak een grafiek van de groeisnelheid.

Opgave 28
Van een hoeveelheid is de groeisnelheid constant 3,5 kg/uur. Op tijdstip 0 is er 10 kg.
a. Hoe ziet de grafiek van de hoeveelheid eruit?

y is de hoeveelheid in kg en t is de tijd in uren.
b. Geef een formule voor de hoeveelheid y.

Als de grafiek een rechte lijn is, verandert de groeisnelheid niet en is de groeisnelheid op ieder moment hetzelfde en gelijk aan de gemiddelde verandering op ieder tijdsinterval.
Bij kromlijnige grafieken is er in het algemeen wel een verschil tussen de gemiddelde verandering op een interval en de groeisnelheid op een zeker tijdstip.

Opgave 29
Terug naar de bacteriegroei waarmee we deze paragraaf begonnen. Die werd beschreven met de formule $B = 2^t$. We willen heel precies weten hoe snel B groeit op tijdstip $t = 3$. Misschien overweeg je daarvoor wel om het tijdsinterval te nemen met beginpunt $t = 3$ en eindpunt ook $t = 3$ en daarmee het quotiënt $\frac{\Delta}{\Delta} t$te berekenen.
Hoe loopt die berekening af?

De berekening van de opgave 29 geeft $\frac{0}{0}$ en wat zou dat nu moeten zijn?

Het volgende intermezzo gaat over drie manieren om naar $\frac{0}{}$ te kijken.

INTERMEZZO Nadenken over $\frac{0}{}$

Manier 1 *Delen* is het omgekeerde van *vermenigvuldigen*. Laten we $\frac{0}{}$ dus in verband brengen met een vermenigvuldiging.

Hoeveel is $\frac{12}{3}$? Dat is 4, want $3 \cdot 4 = 12$.

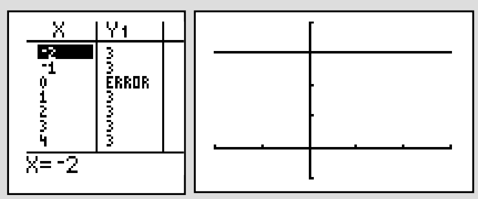
Dat gaan we nadoen voor $\frac{0}{}$.

- Hoeveel is $\frac{0}{}$? Dat is 4, want $0 \cdot 4 = 0$.
- Hoeveel is $\frac{0}{}$? Dat is -5, want $0 \cdot -5 = 0$.
- Hoeveel is $\frac{0}{}$? Dat is 0,123, want $0 \cdot 0{,}123 = 0$.

Je kunt dus uit $\frac{0}{}$ alles krijgen wat je maar wilt.

Manier 2 Met grafieken.

Bekijk de functie $y = \frac{}{}$, bijvoorbeeld op de GR. Hiernaast staan een tabel en een grafiek. Als $x = 0$, krijg je $y = \frac{0}{}$.



Kennelijk moeten we voor $\frac{0}{}$ de waarde 3 nemen.

Zo kunnen we ook starten met de functie $y = \frac{4x}{x}$ of met $y = \frac{85x}{x}$

Steeds zullen we op deze wijze een andere waarde voor $\frac{0}{}$ krijgen.

Je kunt ook andere functies kiezen. Weer kun je uit $\frac{0}{}$ alles krijgen wat je maar wilt.

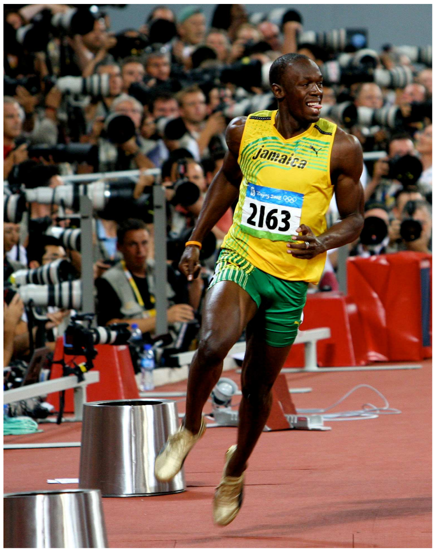
Manier 3 Met een context.
Een hoeveelheid groeit. In 0 uur neemt de hoeveelheid natuurlijk met 0 kg toe.
Hoe snel groeit het goedje dan?
Anne redeneert: "Allicht neemt de hoeveelheid in een tijdsbestek van 0 uur niet toe. Dat is altijd zo. Dus dat gegeven vertelt me helemaal niets. Hoe snel dat goedje groeit, kan ik dus niet weten: de groeisnelheid kan alles zijn".

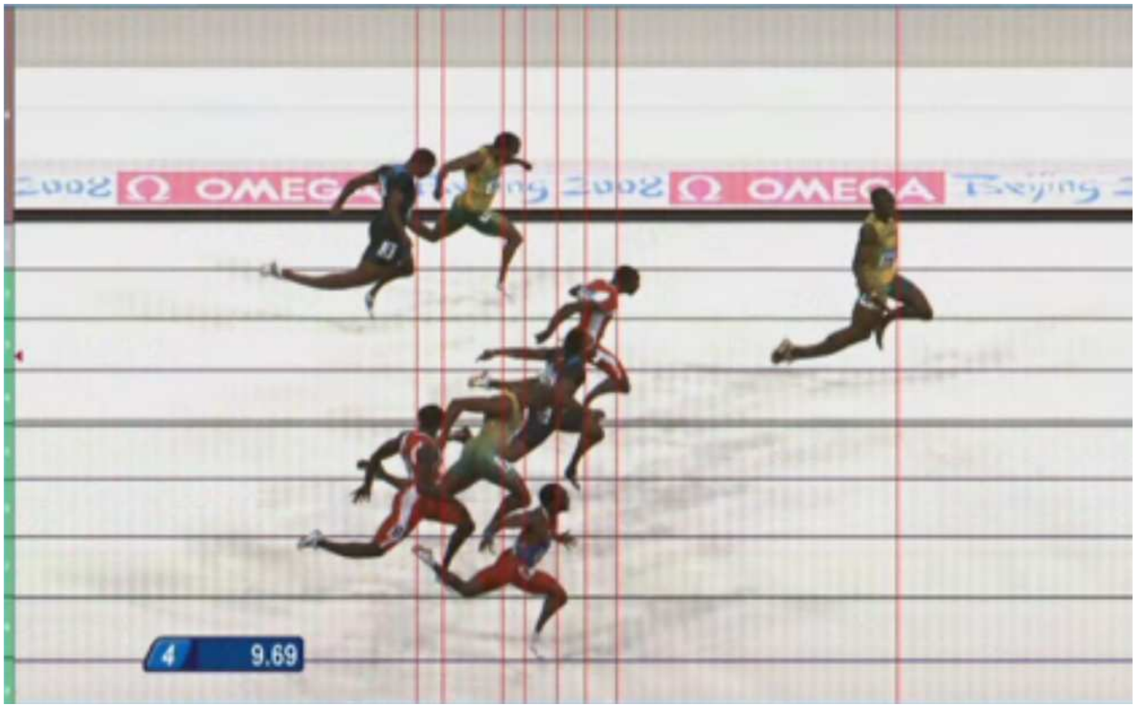
De wiskundige berekening die leidt tot $\frac{0}{0}$ levert dus niets op.

Hoe moet het dan wel?

De winnaar van de 100 meter op de Olympische Spelen van Peking was de Jamaicaan Usain Bolt. De vraag is wat zijn snelheid was tijdens de finalerace op tijdstip t = 9,69 sec.

Hieronder staat de fotofinish. Usain Bolt lijkt op de foto stil te staan. Als de foto op tijdstip t = 9,5 sec was genomen, had hij daarop ook stil gestaan. En ook op een foto die op tijdstip t = 9,0 sec was genomen. Hij zal op iedere foto stilstaan. En toch loopt hij de 100 m binnen 10 seconden!





Uit zo'n foto is de snelheid niet te halen. Maar als we de sluitertijd van de camera groter maken en instellen op bijvoorbeeld 0,2 sec krijgen we een ‘vlek’op de foto. Bolt ‘beweegt’ dan op de foto. We kunnen nu wel een schatting maken van zijn snelheid: uit de foto lezen we af hoeveel meter hij aflegt tijdens de 0,2 sec (of een andere gekozen sluitertijd). En dat kunnen we omrekenen naar een afgelegde afstand per hele seconde. Dus weten we dan de snelheid in m/s.

Opgave 30
Twee foto's van dezelfde auto: stilstaand en rijdend. De rijdende auto werd gefotografeerd met een sluitertijd van $\frac{1}{15}$ sec. De auto is 4,37 meter lang.

Maak op basis van de rechter foto een schatting van de snelheid van de auto (in km/u).

In de foto van opgave 30 kun je zien (schatten) hoeveel meter de auto aflegde in $\frac{1}{15}$ seconden (de sluitertijd). Die afstand kun je omrekenen naar hoeveel de auto zou afleggen in een heel uur, aangenomen dat zijn snelheid een uur lang hetzelfde zou blijven. En dan ken je zijn snelheid in km/uur.

De werking van een luspaal is relatief eenvoudig. Er zijn twee lussen in het wegdek weggewerkt. Wanneer een auto over een lus rijdt, wordt een signaal gestuurd naar een computer. De computer berekent de snelheid door de tijd te nemen die de auto erover doet om beide lussen te raken. Aangezien de afstand tussen de beide lussen bekend is, kan de computer precies berekenen hoe snel de auto rijdt.

Opgave 31
Twee lussen liggen 1 meter van elkaar. Een auto rijdt over de lussen. Er wordt een tijdsverschil van 0,08 seconde geregistreerd.

Hoe hard reed de auto?

Opgave 32 (facultatief)
In de zomer van 2009 werd door Cliff Diver van 27 meter hoogte in de Zaan gesprongen. De sprong duurde 2,4 seconden. We zien Cliff acht keer op de foto. Neem aan dat de kiekjes met gelijke tussenpozen zijn gemaakt.

Maak een schatting van de snelheid waarmee Cliff Diver het water raakt.

We hebben nu een aanpak gevonden om de *snelheid op een tijdstip* te achterhalen.

- Bekijk de plaats op dat tijdstip en de plaats een korte tijd later.
- Dan ken je de afgelegde weg in die korte tijd.
- De afgelegde weg reken je om naar een heel uur, of hele minuut, of hele seconde, aangenomen dat de snelheid niet verandert; dit is de gemiddelde verandering.
- Dat geeft (bij benadering) de snelheid op het tijdstip.

Opgave 33
Iemand laat een kogeltje van een toren van 110 meter hoogte vallen. Uit de natuurkunde weten we dat de hoogte na t seconden vallen wordt gegeven door $h = 110 - 5t^2$.

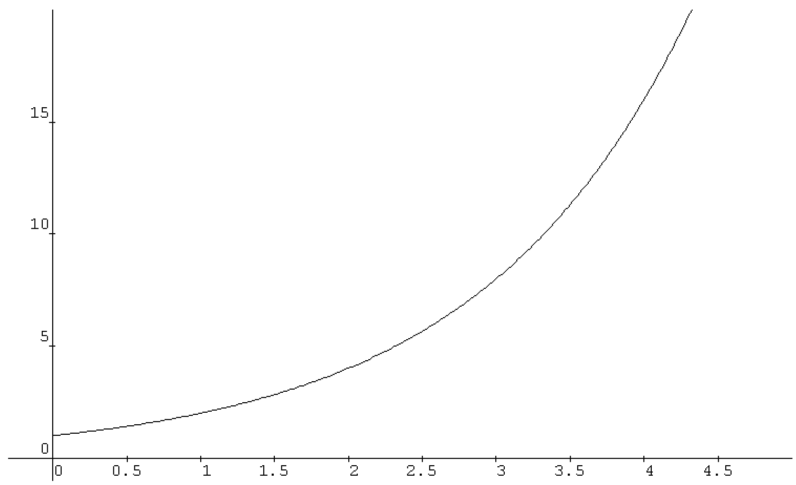
Benader met bovenstaande methode de snelheid van het kogeltje na 4 seconden.

Berekening van de groeisnelheid als je de formule kent

De centrale vraag: Hoe berekenen we de groeisnelheid, bij een gegeven niet lineaire formule. als de grafiek geen rechte lijn is?

Probeer voordat je verder leest deze centrale vraag te beantwoorden.

Opgave 34
We gaan de groeisnelheid berekenen van de bacteriekolonie van opgave 22.

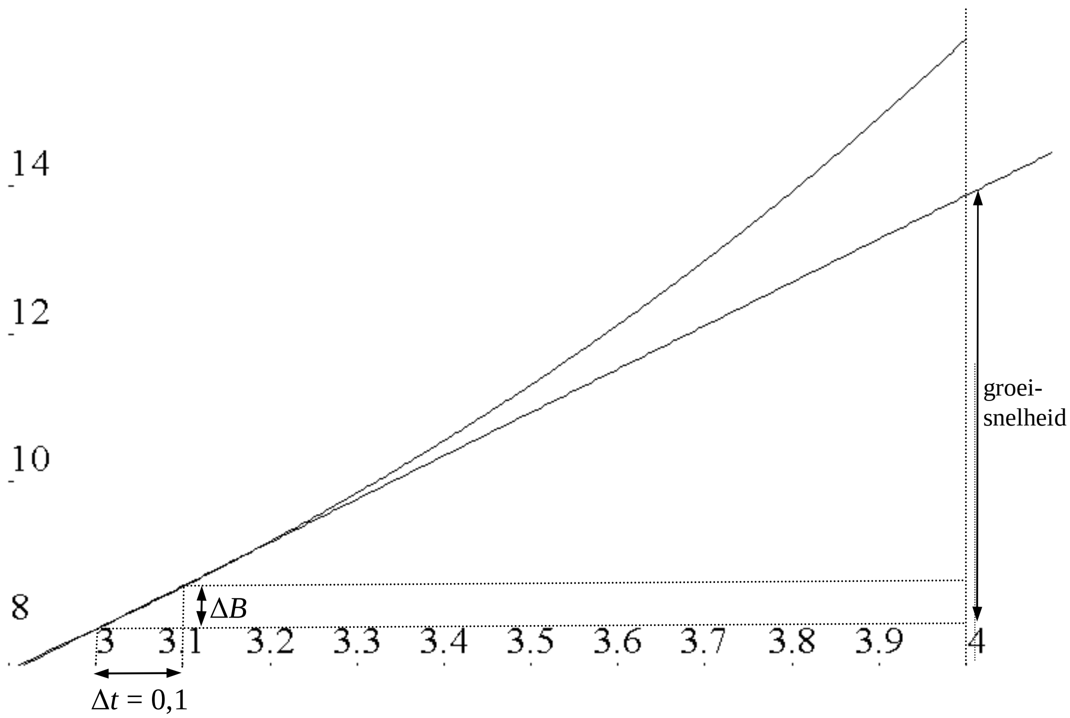


Gegeven is de formule: $B = 2^t$, t in uren en B in mg.
De vraag was: Hoe snel groeit B op het tijdstip 3?
Probeer voordat je verder leest deze vraag met de aanpak van de vorige bladzijde te beantwoorden.

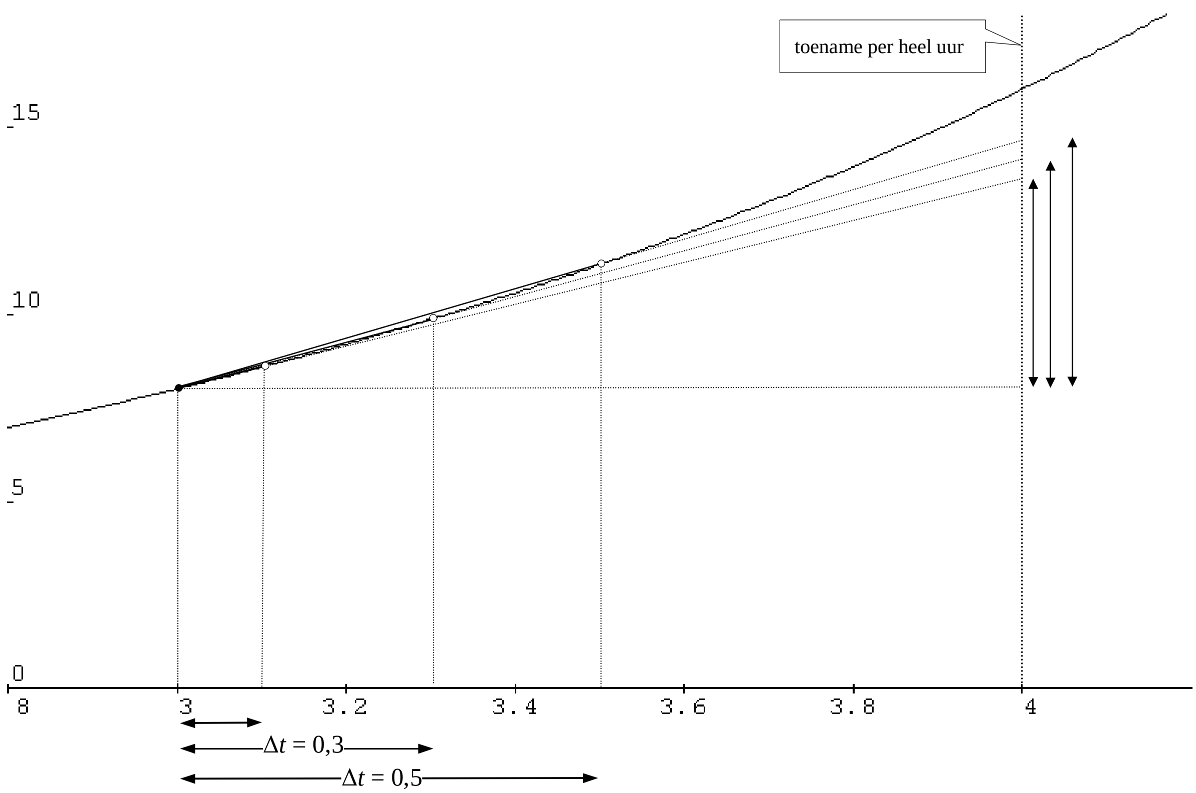
Idee: We herleiden een toename van B over een (klein) tijdsinterval tot de toename van B over een heel uur.
Hoe doe je dat herleiden?
Bij het tijdsinterval $\Delta t = 0{,}02$ uur is de toename van B: $\Delta B = 2^{3{,}02} - 2^3 = 0{,}11675\ldots$ mg.
Omgerekend naar een heel uur is dat 50 keer zoveel, dus ongeveer 5,837… .
Om te herleiden tot 1 uur moet je dus vermenigvuldigen met 50. In plaats daarvan kun je ook delen door 0,02. Dit kun je dus ook zó berekenen: $\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{0{,}11675}{0{,}02} \approx 5{,}837$.
We berekenen hier dus in feite de gemiddelde verandering op een kort tijdsinterval; hier het interval $[3 ; 3{,}02]$; zie bladzijde 18.

Opgave 35
a. Welke groeisnelheid vind je op tijdstip 3 als je $\Delta t = 0{,}002$ neemt?
b. Bestudeer onderstaande figuren waarin zichtbaar wordt dat een kleinere Δt een betere benadering geeft voor de helling van de raaklijn, en dus voor de groeisnelheid.
En als je $\Delta t = -0{,}002$ neemt?

Het omrekenen naar een heel uur is hieronder geïllustreerd voor het geval $t = 3$ en $\Delta t = 0{,}1$.



De omrekening naar een heel uur ziet er voor $\Delta t = 0{,}5$, voor $\Delta t = 0{,}3$, en voor $\Delta t = 0{,}1$, zó uit:



Opgave 36

Bereken de groeisnelheid van de bacteriekolonie op het tijdstip 1,5 door een voldoende kleine waarde van Δt te nemen.

De groeisnelheid berekenen als we een formule kennen. Conclusie

Als we van een groeiproces de grafiek kennen, kunnen we op elk moment door tekenen en/of meten de groeisnelheid bepalen. Dat gaat meestal niet zo erg nauwkeurig.
Als we van een groeiproces de formule kennen, kunnen we op elk moment door rekenen de groeisnelheid bepalen: we berekenen dan de gemiddelde verandering op een klein tijdsinterval en rekenen die om naar een heel uur (als we de tijd in uren rekenen). Dat gaat meestal nauwkeuriger, maar helemaal precies vind je de groeisnelheid niet, hoe klein je het tijdsinterval ook neemt. Eigenlijk zou je een tijdsinterval van lengte 0 moeten nemen. Maar dat werkt ook niet.
Toch is het bij een heleboel formules mogelijk wél de precieze groeisnelheden te vinden. In de volgende paragraaf doen we dat voor $y = x^2$.

Wanneer is het tijdsinterval voldoende klein? Dat kun je niet bij voorbaat weten.
In het voorbeeld van de vorige bladzijde vind je:
- op het tijdsinterval [3;3,1] de gemiddelde verandering 5,74187..
- op het tijdsinterval [3;3,01] de gemiddelde verandering 5,56444…
- op het tijdsinterval [3;3,001] de gemiddelde verandering 5,55470…
Op grond hiervan kunnen we de exacte groeisnelheid bij $t = 3$ schatten op 5,55.
[De GR levert 5,545…]
Dus: als de gemiddelde verandering niet meer zoveel verandert als je hem op een kleiner tijdsinterval bekijkt, zullen (meestal) dicht bij de groeisnelheid zitten.

INTERMEZZO: de paradox van de vliegende pijl

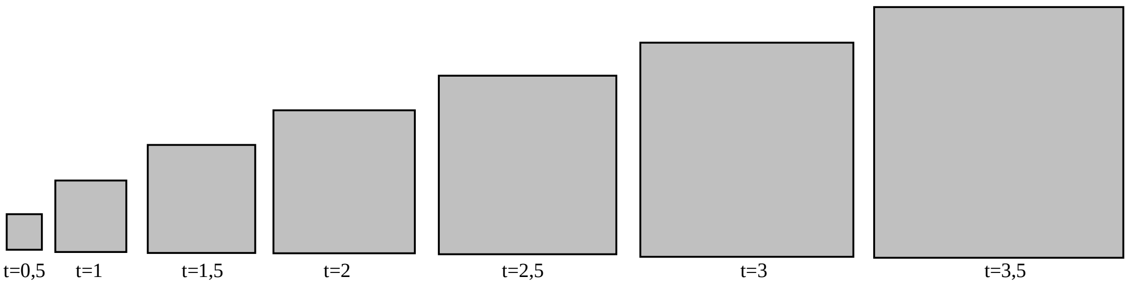
Wanneer men een vliegende pijl op één ondeelbaar moment beschouwt, bevindt hij zich op een bepaalde plaats in de ruimte. Op dat ene moment verplaatst de pijl zich niet. Maar wanneer hij op elk moment in rust is, dan is hij gedurende de hele vlucht in rust. De pijl beweegt zich dus niet.
Deze redenering is afkomstig van de Griek Zeno van Elea (ca 490 – ca 430 v Chr.)
Wij kennen de paradox niet uit geschreven werk van Zeno zelf, want daar is niets van bewaard gebleven. Al wat we hebben zijn citaten bij andere schrijvers, zoals Aristoteles.

Zeno's paradox lijkt vandaag misschien triviaal, maar ze vormde een groot probleem voor de filosofen van de oude tijd en de middeleeuwen. Pas in de 17e eeuw vond men een bevredigende oplossing met de uitvinding van de differentiaalrekening.
De Grieken waren zeer exacte denkers. De filosofen dwongen iedereen zich heel nauwkeurig uit te drukken. Bij de differentiaalrekening neemt men een tijdsduur die "willekeurig dicht tot nul nadert". Een Griek zou onmiddellijk vragen: 'hoe dicht tot nul? Druk je precies uit!'

5. De groeisnelheid van tweedegraadsfuncties

Centrale vraag: wat is de groeisnelheid van $y = x^2$ bij een gegeven x-waarde?

De zijde (in meters) van een vierkant groeit in de tijd x (in uren). Zeg dat er elk uur 1 meter bij komt. De oppervlakte y (in m^2) groeit mee: $y = x^2$.



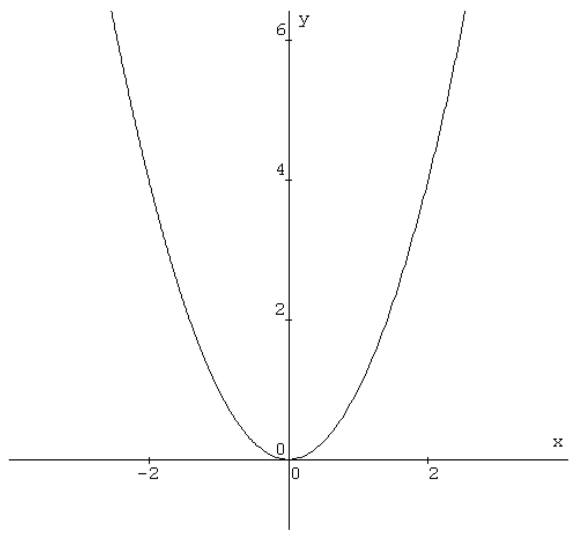
We gaan de groeisnelheid als $x = 3$ op vier manieren bepalen.

Manier 1: met de rekenmachine

TI 83
MATH / 8: nDerive(/ ENTER
Voer in: X^2,X,3)
ENTER

De GR geeft de waarde 6. Dat is de groeisnelheid van x^2 als $x = 3$.

Casio
Table
Voer formule in
Via Set Up derivative on
Stel via rang (F4) de tabel in: van $x = 0$ tm $x = 10$.
Je krijgt nu een tabel waarin bij iedere x de y-waarde en de groeisnelheid (y') gegeven wordt.



Opgave 37
a. Laat de GR zo ook de groeisnelheid van x^2 bij $x = 0, 1, 2, 4, 5$ berekenen.
b. Ook bij $x = -1, -2, -3, -4$ en -5.
c. En bij $x = 2{,}5$. En bij $x = -1{,}2345$.

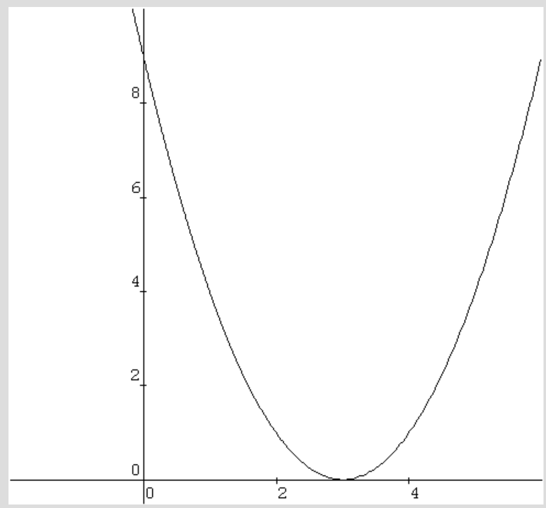
Opgave 38
Gezien de antwoorden bij opgave 37 kunt je nu zonder rekenmachine wel voorspellen wat de groeisnelheid zal zijn van x^2 bij $x = 11$.
a. Wat zal de GR als antwoord geven.
b. Wat is de groeisnelheid van x^2 bij een gegeven x-waarde $x = a$?

De manieren 2 en 3 laten zien hoe je kunt *begrijpen* dat de groeisnelheid van $y = x^2$ als functie van x precies 6 is, als $x = 3$. Je hoeft deze manieren niet van buiten te leren.

INTERMEZZO

Manier 2: met een slimme truc
Deze manier is een redenering, die bestaat uit vijf denkstappen. In de volgende opgave vragen we je die denkstappen een voor een te begrijpen.

WB Opgave
De truc is de functie $y = (x-3)^2$ te bekijken.
Hiernaast staat de grafiek van die functie.
Schrijf op het werkblad bij elke denkstap op waarom hij juist is.



① De formule $y = (x-3)^2$ kun je ook schrijven als $y = x^2 - 6x + 9$.

② De grafiek van $y = (x-3)^2$ is een parabool.

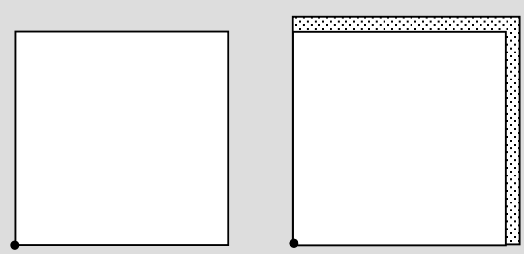
③ De grafiek van $y = (x-3)^2$ raakt de x-as in het punt (3,0), dwz. de y-waarde bij $x = 3$ is 0 en de helling aldaar is 0.

④ Bekijk de functie $y = -6x + 9$.
De groeisnelheid van $y = -6x + 9$ is bij elke x gelijk aan -6.

⑤ De groeisnelheid bij $x = 3$ van $y = x^2$ is gelijk aan 6.
Bedenk dat de groeisnelheid van $y = x^2$ en van $y = -6x + 9$ bij $x = 3$ opgeteld de groeisnelheid van $y = x^2 - 6x + 9$ geven $x = 3$.

Denkertje: Kun je op deze wijze ook de groeisnelheid vinden van $y = x^2$ bij $x = 4$?

Manier 3: met oppervlakte
Een vierkant groeit; als de zijde x (cm) is, is zijn oppervlakte $y = x^2$ (in cm^2). Het hoekpunt linksonder houden we vast. Het vierkant groeit aan twee kanten: naar rechts en naar boven.



Als x bijvoorbeeld met 0,01 cm toeneemt komt er aan de rechterkant ongeveer 0,01 maal de zijde van het vierkant bij. Evenzo aan de bovenkant. Dus de oppervlakte neemt met ongeveer $2 \cdot 0{,}01 \cdot x$ toe als $\Delta x = 0{,}01$.
De groeisnelheid van het vierkant is dus $\frac{2.0{,}01.x}{0{,}01} = 2x$ (twee keer de zijde, waarbij we de oppervlakte van het vierkantje 0,01 bij 0,01 verwaarlozen).

Zo'n slimme truc als in Manier 2 heb je toevallig bij de functie $y = x^2$, maar niet bij elke functie.
In de redenering van Manier 3 is het woord "ongeveer" een zwak punt. We kunnen de redenering precies maken met een differentiequotiënt. Bovendien werkt de uitleg met het vierkant alleen voor positieve getallen x, en de functie $y = x^2$ bestaat ook negatieve getallen x.
We gaan nu een manier behandelen die altijd werkt.

Manier 4: met een differentiequotiënt

We willen weer de groeisnelheid van $y = x^2$ in $x = 3$ berekenen. Daarvoor gebruiken we nu de “sluitertijd-methode” die we ook gebruikt hebben bij het bepalen van de snelheid van de auto in het vorige hoofdstuk. In dat voorbeeld hadden we vooraf een kleine sluitertijd (0,01 sec) gekozen.

Opgave 39

WB a. Probeer onderstaande vier denkstappen te volgen. Schrijf op het werkblad bij elke denkstap op waarom hij juist is.

① Het beginpunt is $x = 3$ en $y = 9$; als eindpunt kiezen we: $x = 3{,}01$ en $y = 9{,}0601$.

② $\Delta y = 0{,}0601$

③ De gemiddelde verandering op het kleine interval is: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6{,}01$

④ De groeisnelheid op $x = 3$ is (ongeveer) gelijk aan 6.

WB b. Probeer weer onderstaande denkstappen te volgen. Schrijf op het werkblad bij elke denkstap op waarom hij juist is.

① Het beginpunt is $x = 3$ en $y = 9$; als eindpunt kiezen we: $x = 3 + \Delta x$ en $y = 9 + 6.\Delta x + (\Delta x)^2$

② $\Delta y = 6.\Delta x + (\Delta x)^2$

③ De gemiddelde verandering op het kleine interval is: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6 + \Delta x$.

④ De groeisnelheid op $x = 3$ is gelijk aan 6.

Opgave 40

Als je de groeisnelheid bij $x = 4$ wilt berekenen, kun je vergelijkbare denkstappen opschrijven als in opgave 39b

a. Ga na welke uitkomst je voor de groeisnelheid bij $x = 4$ krijgt.
b. Op welke groeisnelheid bij $x = 7$ kom je uit?
c. Welke groeisnelheid zou je vinden bij een gegeven x-waarde $x = a$?

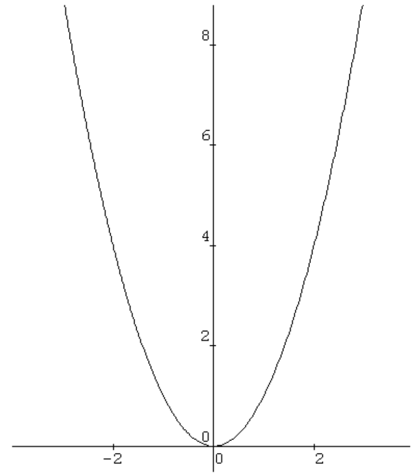
Bij de volgende opgaven gebruiken we deze formule voor de groeisnelheid van $y = x^2$.

De groeisnelheid van $y = x^2$ een gegeven x-waarde is $2x$.

We weten nu de helling van de grafiek van $y = x^2$ in elk van zijn punten. Deze kennis gaan we in het vervolg toepassen.

⌛ *Centrale vraag: wat is de groeisnelheid van $y = ax^2+bx+c$ bij een gegeven x-waarde?*

Opgave 41
Hiernaast staat nog eens de grafiek van $y = x^2$.



a. Vergelijk daarmee de groeisnelheden in $x = a$ en $x = -a$?
Wat is het verband tussen die groeisnelheden?
Klopt dat met de formule voor de groeisnelheid?

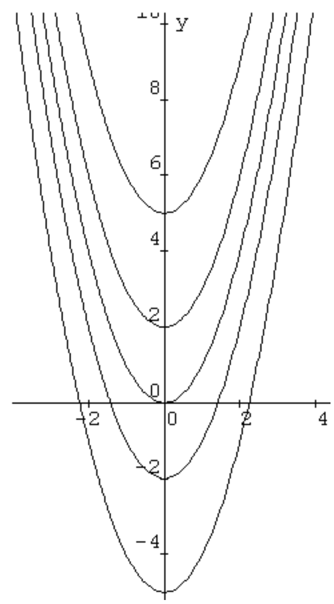
b. Bereken voor welke x de groeisnelheid 9,4 is?
En bij welke x is hij -1,234?

c. Is er een x waarin de groeisnelheid 1 miljoen bedraagt?
En is er een x waarin de groeisnelheid – 1 miljoenste bedraagt?

d. Welke waarden kan de groeisnelheid aannemen?

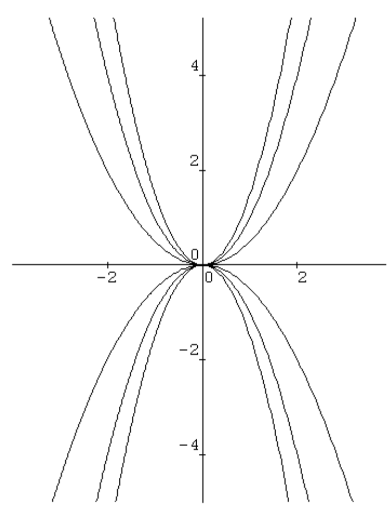
We bekijken nu hoe we de groeisnelheid van andere tweedegraadsfuncties kunnen berekenen.

Opgave 42
Hiernaast staan in één figuur de grafieken van de functies
$y = 5 + x^2$
$y = 2 + x^2$
$y = x^2$
$y = -2 + x^2$
$y = -5 + x^2$



a. Leg uit dat al deze functies in $x = 2$ dezelfde groeisnelheid hebben. Hoe groot is die groeisnelheid?
b. En hoe groot is de groeisnelheid van deze functies bij een gegeven x-waarde in $x = a$?

Opgave 43
Hiernaast staan in één figuur de grafieken van
$y = x^2$
$y = 0{,}5x^2$
$y = 1{,}5x^2$
$y = -x^2$
$y = -0{,}5x^2$
$y = -1{,}5x^2$



a. Hoe groot is de groeisnelheid van $y = x^2$ in $x = 2$?
b. Hoe kun je nu de groeisnelheid van de andere functies in $x = 2$ vinden? Wat zijn die groeisnelheden?

c. Hoe groot is de groeisnelheid van $y = x^2$ in een gegeven x-waarde $x = a$?
d. Wat zijn de groeisnelheden van de andere functies in een gegeven x-waarde $x = a$?

Opgave 44
We weten dat de groeisnelheid van $y = x^2$ in een gegeven x-waarde $x = a$ gelijk is aan $2a$.
Je hebt in opgave 42 gezien wat er met de groeisnelheid van $y = x^2$ gebeurt, als je bij die functie een constante optelt. En in opgave 43 heb je gezien wat er met de groeisnelheid gebeurt, als je de functie met een constante vermenigvuldigt.
Formuleer je conclusies:
a. Als je bij $y = x^2$ een getal c optelt (je krijgt dan $y = x^2 + c$),
dan is de groeisnelheid in een gegeven x-waarde $x = a$ gelijk aan ...
b. Als je $y = x^2$ met een getal c vermenigvuldigt (je krijgt dan $y = c\,x^2$),
dan is de groeisnelheid in een gegeven x-waarde $x = a$ gelijk aan …

Opgave 45
Wat is de helling van de grafiek bij een gegeven x-waarde $x = a$ als
$y = 1{,}5 + 3x^2$
$y = 10x^2 + 40$
$y = -0{,}5 - x^2$
$y = -2 + 10x^2$
$y = 4{,}5\,(3000 + 2x^2)$

De groeisnelheid van tweedegraadsfuncties

Opgave 46
In opgave 33 liet iemand een kogeltje van een toren van 110 meter hoogte vallen. De hoogte van het kogeltje na t seconden vallen wordt gegeven door $h = 110 - 5t^2$ (meter). Er werd gevraagd de snelheid van het kogeltje na 4 seconden te bepalen.
Van $y = t^2$ weet je de groeisnelheid als $t = 4$.
a. Beredeneer hiermee de groeisnelheid van $y = 5t^2$, als $t = 4$.
En van $110 - 5t^2$?
Klopt je antwoord met het resultaat van opgave 33?
b. Controleer je antwoord met behulp van de GR.

Opgave 47
We bekijken de functie $y = x^2 + 0{,}5x + 4$ en willen weten wat de groeisnelheid is bij $x = 6$.
a Beredeneer wat de groeisnelheid is van $y = 0{,}5x + 4$ bij $x = 6$.
b. Wat is de groeisnelheid van $y = x^2$ bij $x = 6$?
c Beredeneer nu wat de groeisnelheid is van $y = x^2 + 0{,}5x + 4$ bij $x = 6$.
d. Wat is nu de groeisnelheid van $y = x^2 + 0{,}5x + 4$ bij een gegeven x-waarde $x = a$?

We verdubbelen de functie $y = x^2 + 0{,}5x + 4$ en krijgen $y = 2x^2 + x + 8$.
e. Beredeneer nu ook wat de groeisnelheid van $y = 2x^2 + x + 8$ is bij $x = 6$.
f. Wat is nu de groeisnelheid van $y = 2x^2 + x + 8$ bij een gegeven x-waarde $x = a$?

Opmerking

In de laatste opgaven heb je drie regels gezien.

- Als we de groeisnelheid van een functie kennen, kennen we ook de groeisnelheid van de functie die 2 (of een ander getal) groter is. De groeisnelheid verandert niet.
- Als we de groeisnelheid van een functie kennen, kennen we ook de groeisnelheid van de functie die 2 (of een ander getal) keer zo groot is. De groeisnelheid wordt ook 2 keer zo groot.
- Als we de groeisnelheid van twee (of meer) functies kennen, kennen we ook de groeisnelheid van de som van die functies (die krijg je door de twee functies op te tellen). Je moet gewoon de groeisnelheden optellen.

  Dit laatste lichten we nog even toe. Stel dat we de groeisnelheden van $y1$, $y2$ en $y3$ bij een gegeven x (zeg $x = 8$) kennen en dat die respectievelijk 3, 4 en 7 zijn. Als we nu kijken naar de grafiek van de som $y = y1+y2+y3$, zal de groeisnelheid bij $x = 8$ gelijk zijn aan 3+4+7 (immers, als x 1 groter wordt, zal $y1$ stijgen met 3, $y2$ met 4 en $y3$ met 7, dus het totaal met 3+4+7).

Deze drie regels gelden algemeen, dus niet alleen voor tweedegraadsfuncties.

We oefenen nog even in de volgende opgaven.

Opgave 48

Wat is de groeisnelheid in een gegeven x-waarde $x = a$ van

a. $y = -0{,}1\,x^2$
b. $y = 7x^2 + 8x + 9$
c. $y = 8x - 10$
d. $y = 8x^2 - 10$
e. $y = 12 - 5x + 3x^2$

Opgave 49

Wat is de groeisnelheid een gegeven x-waarde in $x = a$ van

a. $y = 7(x^2\text{-}6x\text{-}1)$
b. $y = 3(x+2)^2$
c. $y = 3(4–x)$

We kennen nu de groeisnelheid van elke tweedegraadsfunctie:

Voorbeeld

De groeisnelheid van $y = 7x^2 - 3x + 8$ voor een willekeurige waarde van x is

- 7 keer de groeisnelheid van x^2

  plus
- de groeisnelheid van $-3x + 8$.

Dus is de groeisnelheid $7 \cdot 2x + -3 = 14x - 3$.

Om te onthouden:

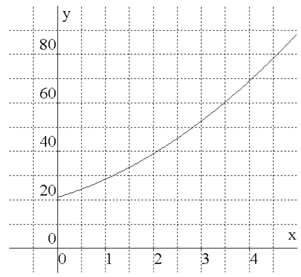
De groeisnelheid van $y = ax^2 + bx + c$ voor een willekeurige waarde van x is

- a keer de groeisnelheid van x^2

  plus
- de groeisnelheid van $bx + c$.

Dus is de groeisnelheid $a \cdot 2x + b = 2ax + b$.

Samenvatting van de hoofdstukken 3, 4 en 5 aan de hand van de functie $y = 15 + 1{,}5(x+2)^2$.

<table>
<tr><th></th><th>tabel</th><th>grafiek</th><th>context</th></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>21</td></tr><tr><td>1</td><td>28,5</td></tr><tr><td>2</td><td>39</td></tr><tr><td>3</td><td>52,5</td></tr><tr><td>4</td><td>69</td></tr></table></td><td>
</td><td>Een auto heeft 21 meter afgelegd en trekt op.
Na 1 sec heeft hij 28,5 meter afgelegd.en na 3 sec. 52,5 meter.
y is de afgelegde weg in m,
x is de tijd in sec.</td></tr>
<tr><td>hfd. 3</td><td>Gemiddelde verandering van y ten opzichte van x op [1,3] =
differentiequotiënt op [1,3]
begin: $x = 1 \rightarrow y = 28{,}5$
eind: $x = 3 \rightarrow y = 52{,}5$
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{24}{2} = 12$</td><td>Helling van de lijn tussen (1 ; 28,5) en (3 ; 52,5)

beginpunt: $x = 1 \rightarrow y = 28{,}5$
eindpunt: $x = 3 \rightarrow y = 52{,}5$
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{24}{2} = 12$</td><td>Gemiddelde snelheid tussen de tijdstippen 1 en 3 seconden bereken je als volgt:

In 2 seconden worden 24 meter afgelegd.
Dat is gemiddeld 12 m/s.</td></tr>
<tr><td>hfd. 4</td><td>Groeisnelheid (momentane snelheid) bij x=3</td><td>Helling van de grafiek
in het punt (3 ; 52,5)</td><td>De snelheid na 3 seconden.
Dat is de afstand die per seconde zou worden afgelegd als vanaf $x = 3$ de snelheid niet meer zou veranderen.</td></tr>
<tr><td>hfd. 5</td><td>Groeisnelheid bij elke x</td><td>De afgeleide functie</td><td>De snelheid van de auto op een willekeurig tijdstip x.</td></tr>
</table>

6. De afgeleide van tweedegraadsfuncties en economische toepassingen

Als we van een functie de formule kennen, is er dan een snelle manier om de groeisnelheid in zo maar een punt van de grafiek exact te bepalen? We zoeken als het ware een formule waarin we de waarde (van x) maar hoeven in te vullen en de groeisnelheid rolt er uit.

formule van de functie	$\Rightarrow$	formule van de groeisnelheid

Van twee type functies weten we al hoe dat gaat, namelijk van lineaire functies en van tweedegraadsfuncties.

formule van de functie	$\Rightarrow$	formule van de groeisnelheid:
$y = ax+b$		*groeisnelheid* $= a$

formule van de functie	$\Rightarrow$	formule van de groeisnelheid:
$y = x^2$		*groeisnelheid* $= 2x$

formule van de functie	$\Rightarrow$	formule van de groeisnelheid:
$y = ax^2 + bx + c$		*groeisnelheid* $= 2ax + b$

Je ziet dat we bij deze functies snel de groeisnelheidsfunctie kunnen bepalen. Later zullen we zien hoe we ook bij andere functies snel die groeisnelheidsfunctie kunnen bepalen.
We zullen daarbij de volgende begrippen en notaties gebruiken:

- de groeisnelheidsfunctie heet in de wiskunde de **afgeleide functie**.
- het bepalen van de afgeleide functie (de groeisnelheidsfunctie) bij een gegeven functie heet **differentiëren**
- we gebruiken een accent om de afgeleide functie aan te geven, dus $h'(t)$ is de afgeleide functie van $h(t)$ en $y'(x)$ is de afgeleide functie van $y(x)$
- in plaats van de afgeleide functie spreken we vaak kortweg over de **afgeleide**

Je moet de volgende zinnen begrijpen:

- Om de helling van de grafiek van de functie $y(x) = x^2$ in $x = 4$ te vinden, kun je eerst $y'(x)$ bepalen en dan $x = 4$ invullen.
- De waarde van de afgeleide van de functie $y = 3x^2 + 4x + 6$ bij $x = 6$ geeft de helling van de grafiek bij $x = 6$.

Soms hebben functies namen. Als een functie f heet, wordt de afgeleide functie daarvan genoteerd met f'.

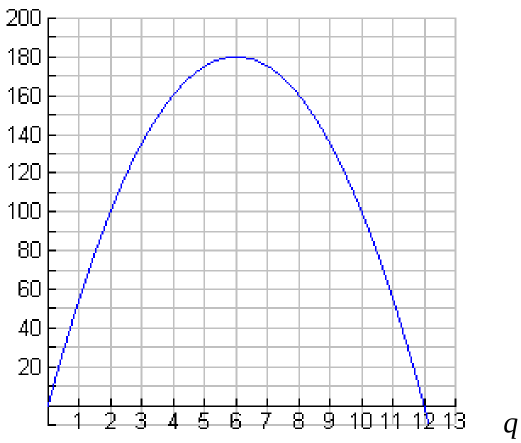
Vaak wordt voor de afgeleide ook de notatie $\frac{dy}{dx}$ of $\frac{df(x)}{dx}$ gebruikt.

⌛ *Centrale vraag: wat zijn marginale grootheden en hoe bereken je deze met behulp van wiskunde?*

In de economie wordt de afgeleide functie gebruikt om **marginale** grootheden te benaderen, zoals de marginale kosten en de marginale opbrengst. De marginale kosten zijn de extra kosten die gemaakt worden als je één extra product maakt. Op dezelfde wijze is de marginale opbrengst de extra opbrengst als je één extra product verkoopt.

Hieronder zullen we dit in een voorbeeld uitleggen.

In de economie werkt men vaak met modellen als $TO = -5q^2 + 60q$, waarbij TO staat voor de totale opbrengst en q voor het aantal producten dat een producent maakt. Zie figuur hieronder (*).



We bekijken de marginale opbrengst MO bij q = 3, dat wil zeggen de extra opbrengst als de producent vier producten maakt in plaats van drie.
Bij $q = 3$ is $TO = 135$ en bij $q = 4$ is $TO = 160$. Dus de marginale opbrengst MO bij $q = 3$ is 160 – 135 = 25.
De marginale opbrengst wordt in de economie vaak benaderd door de afgeleide functie van TO. Dus spreekt men van $MO = -10q + 60$ (ga na dat dit de afgeleide van TO is). In dit geval levert dat bij $q = 3$ een benadering die nogal afwijkt: MO = 30, terwijl volgens de definitie MO = 25. Hieronder in opdracht 50 zie je dat in 'echte' voorbeelden deze afwijking vaak verwaarloosbaar is.

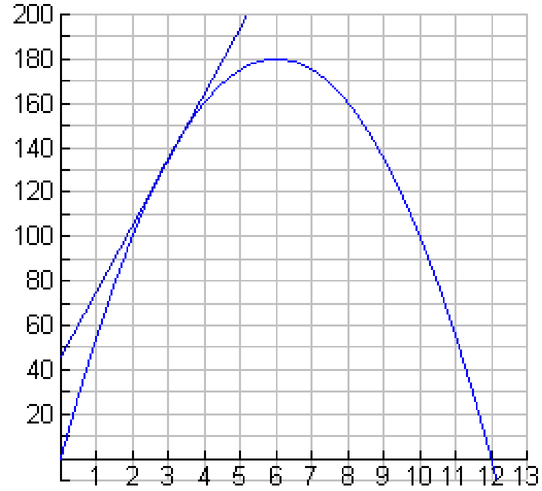
Als we spreken over marginale grootheden, zullen we in dit boekje de benadering van de marginale grootheden met behulp van de afgeleide (de groeisnelheidfunctie) bedoelen, tenzij anders vermeld wordt. Deze marginale grootheden zijn geen eindexamenstof. We gebruiken deze als voorbeeld om met groeisnelheden te redeneren en rekenen.

(*) Als q toeneemt, kan de prijs dalen, en daardoor ook de opbrengst.

WB Opgave 50 (facultatief)

In deze opgave bekijken we waarom de marginale opbrengst goed te benaderen is met de afgeleide.

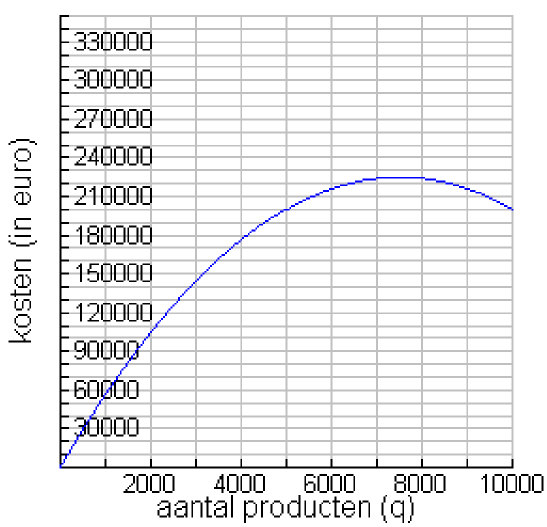
Hiernaast staat de grafiek van het voorbeeld van de vorige bladzijde nog eens. Het stuk ervan rond q = 3 staat sterk vergroot op het werkblad.



a. Geef daarin het verschil aan tussen de ‘echte’ marginale opbrengst en de benadering van de marginale opbrengst met behulp van de afgeleide bij $q = 3$.

b. Bereken met behulp van de formule $TO = -5q^2 + 60q$ het verschil tussen de ‘echte’ marginale opbrengst en de benadering van de marginale opbrengst met behulp van de afgeleide bij $q = 3$.

Het verschil tussen de ‘echte’ marginale opbrengst en de benadering van de marginale opbrengst met behulp van de afgeleide is in de praktijk verwaarloosbaar klein. Dat komt omdat het in de praktijk altijd gaat om een groot aantal producten dat geproduceerd wordt.
Hieronder zie je een voorbeeld van zo’n opbrengstfunctie: $TO = -0,004q^2 + 60q$



c. Ga na dat het verschil tussen de ‘echte’ marginale opbrengst en de benadering van de marginale opbrengst met behulp van de afgeleide bij $q = 6000$ nauwelijks zichtbaar kan zijn.

d. Bereken met behulp van de formule $TO = -0,004q^2 + 60q$ het verschil tussen de ‘echte’ marginale opbrengst en de benadering van de marginale opbrengst met behulp van de afgeleide bij $q = 6000$.

Centrale vraag: hoe bereken je een maximale of minimale functiewaarde?

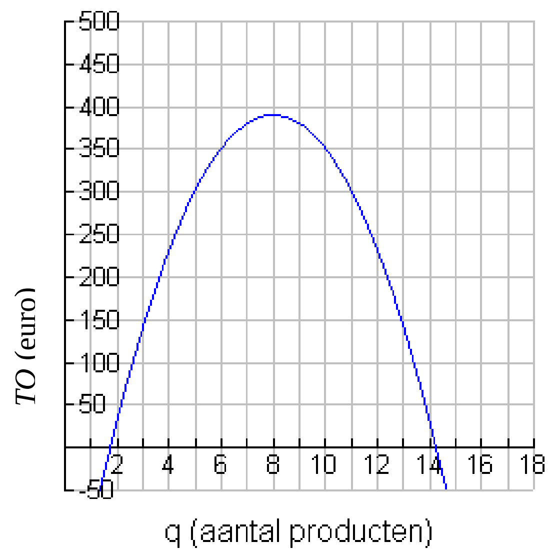
In de economie zoekt men vaak naar optimale situaties: de *maximale* opbrengst, de *minimale* kosten, de *maximale* winst. Als er formules bekend zijn, kan met behulp van de afgeleide functie snel de hoeveelheid q gevonden worden, waarbij dit optimum (minimum of maximum; als we niet vermelden dat het om een minimum of maximum gaat spreken we over extremen) optreedt.

Opgave 51

Gegeven is een formule voor de totale opbrengst TO als functie van het aantal producten q:

$TO = -10q^2 + 160q - 250$.

Hiernaast staat de grafiek van deze functie.



a. Wat is er te zeggen over de groeisnelheid van TO als de totale opbrengst maximaal is?
b. Maak een formule voor de groeisnelheid van TO (de afgeleide functie van TO).
c. Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarde van q de totale opbrengst maximaal is en vervolgens wat die maximale opbrengst is.

De methode om het maximum te bepalen (zoals in voorgaande opgave gebruikt) kan bij iedere functie gebruikt worden. Hij kan ook gebruikt worden om een minimum te bepalen. De methode gaat als volgt.

Opgave 52
We bekijken vier functies. Denk maar dat het winst-, opbrengst- of kostenfuncties zijn.
Bereken voor alle vier de functies met behulp van de afgeleide de maximale of minimale functiewaarde *y*.
Zeg ook of de gevonden functiewaarde een minimum of maximum is.

a. $y = x^2 - 14x + 34$

b. $y = -2x^2 + 50x - 30$

c. $y = 0,02x^2 - 4,3x + 415,4$

Opgave 53
Bedenk zelf een tweedegraadsfunctie en bereken met behulp van de afgeleide de maximale of minimale functiewaarde. Doe dit voor twee voorbeelden.

Opgave 54 **Maximale winst**
Een producent hanteert het volgende model:
de totale opbrengst is $TO = -4q^2 + 40q$, waarbij q het aantal producten is dat wordt afgezet.

a. Bereken met differentiëren de formule voor de marginale opbrengst *MO*.
b. Bereken de hoogst haalbare opbrengst.

Naast de opbrengst zijn er natuurlijk kosten. We nemen voor de totale kosten de formule $TK = 16q + 20$.

c. Onderzoek met de GR bij welke productie *TO* gelijk is aan *TK* en zeg wat dit in deze context voor de producent betekent.

De producent streeft naar maximale winst. Dus gaat hij op zoek naar het maximum van de winstfunctie: $W = TO - TK = -4q^2 + 24q - 20$.

d. Schets de grafiek van *W* en onderzoek bij welke productie de winst maximaal is. Gebruik je GR.
e. Je kunt deze maximale winst ook vinden met de afgeleide van *W*. Doe dit.

Opgave 55 **Marginaal denken in de economie**
We bekijken een producent, nu met de totale-opbrengstfunctie $TO = -0,7q^2 + 57q$ en totale-kostenfunctie $TK = 12 + 1,2q^2$; q is het aantal producten.

Bij $q = 10$ is de marginale opbrengst groter dan de marginale kosten.

a. Ga dit na en beredeneer dat hieruit volgt dat de winst stijgt als de producent in plaats van 10 producten 11 producten gaat maken.

b. Bereken *MO* (marginale opbrengst) en *MK* (marginale kosten) bij $q = 17$ en onderzoek hiermee of de producent zijn winst ziet stijgen als hij meer gaat produceren.

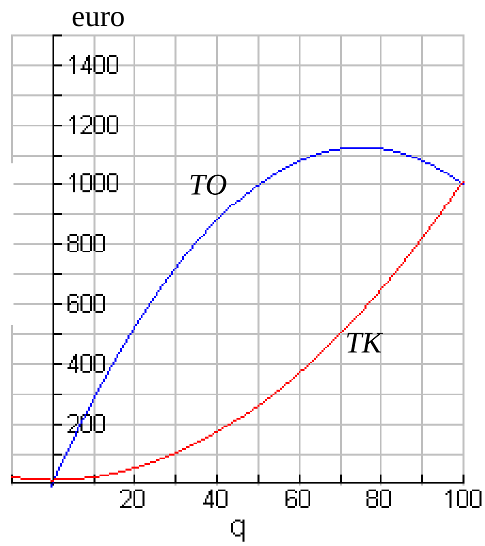
c. Beredeneer hoe je met behulp van *MO* en *MK* kunt bepalen wanneer de winst maximaal zal zijn. Bereken op deze manier ook bij welk aantal producten in dit voorbeeld de winst maximaal zal zijn.

Om de maximale winst te berekenen kunnen we dus marginaal denken (met *MO* en *MK*), maar we kunnen ook direct een formule voor de winst opstellen en daarmee de maximale winst berekenen.

d. Stel een formule voor de winst op en bereken met de afgeleide daarvan bij welk aantal producten de winst maximaal is.

WB Opgave 56

We bekijken weer een producent met een totale opbrengst- en totale kostengrafiek zoals hiernaast staan.



a. Lees de marginale opbrengst en de marginale kosten af bij $q = 30$ en beredeneer hiermee of de winst bij $q = 30$ maximaal is of dat de producent meer of minder moet produceren om maximale winst te behalen.

b. Onderzoek met de methode van vraag a. bij welke productie de winst maximaal is.

We kunnen ook eerst een schets van de grafiek van de winst maken.

c. Maak een schets van de grafiek van de winst in de figuur op het werkblad en lees af bij welke productie de winst maximaal is.

De formules bij bovenstaande grafieken zijn: $TO = -0{,}2q^2 + 30q$ en $TK = 0{,}1q^2 + 12$.

d. Bereken formules voor *MO* en *MK* en bereken bij welke productie *MO* = *MK*. Controleer je antwoord in de figuur.

e. Bereken met behulp van de afgeleide van de winstfunctie bij welke productie de winst maximaal is.

Merk op dat de antwoorden op de vragen d en e gelijk zijn. Hetzelfde heb je (hopelijk) ook bij opgave 55 c en d opgemerkt.

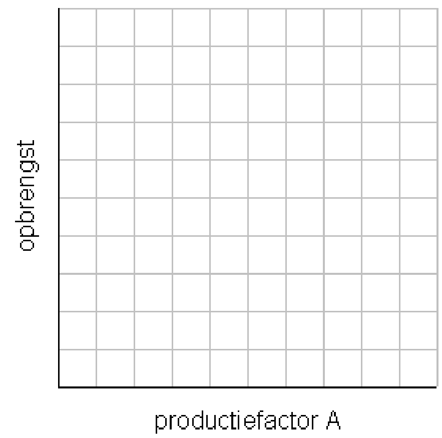
In de economie wordt de wet van de "toenemende en afnemende meeropbrengsten" gebruikt. Deze zegt ‘iets’over het verband tussen de extra inzet van productiefactoren (zoals arbeid en kapitaal) en de opbrengst: als je de inzet van de productiefactoren vergroot, zal de opbrengst eerst steeds harder toenemen, maar na een zekere inzet zal de opbrengst steeds minder hard toenemen.

De schrijver van dit boekje had daarbij het volgende beeld: stel dat je een groentetuin hebt en je teelt aardbeien. Een extra uur besteden aan het tuintje, bijvoorbeeld om onkruid te wieden, zal in het begin de opbrengst steeds meer laten toenemen, maar na een zekere inzet zal de investering van een extra uur steeds minder extra opbrengst opleveren.

WB Opgave 57

De opbrengt van een productie hangt af van een factoren A. De inzet van A is variabel.

a. Schets op het werkblad een grafiek waarin je de wet van de toenemende en afnemende meeropbrengsten illustreert: neem op de horizontale as de productiefactor A en op de verticale as de opbrengst.
b. Zeg in eigen woorden wat deze wet zegt in termen van groeisnelheid.



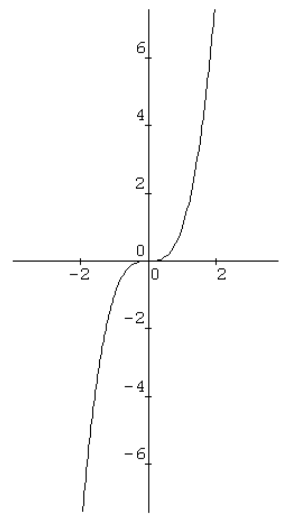
We hebben gezien dat in de economie de afgeleide gebruikt wordt om de marginale opbrengst en marginale kosten te berekenen. We vinden dan de groeisnelheid van *TO* en van *TK*. Deze afgeleide kan gebruikt worden om de ‘plaats’ van de maximale of minimale waarde van de functie te vinden.

7. De afgeleide functie van $y = x^3$

Centrale vraag: Wat is de groeisnelheid van $y = x^3$ bij een gegeven x-waarde?

formule van de functie $y = x^3$	→	formule van de groeisnelheid: $y' = ?$

Hiernaast staat de grafiek van de functie $y = x^3$. We willen de groeisnelheid weten in bijvoorbeeld in $x = 5$.



Manier 1: met de rekenmachine

Opgave 58

a. Bepaal met behulp van de GR de groeisnelheid van $y = x^3$ bij de volgende x-waarden:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
groeisnelheid									

De functie $y = x^3$ heeft dezelfde groeisnelheid bij twee gegeven tegengestelde waarden van x, zeg $x = a$ en $x = -a$.

b. Hoe zie je dat aan de grafiek?

c. Probeer een formule voor de groeisnelheid bij $x = a$ te vinden aan de hand van de tabel.

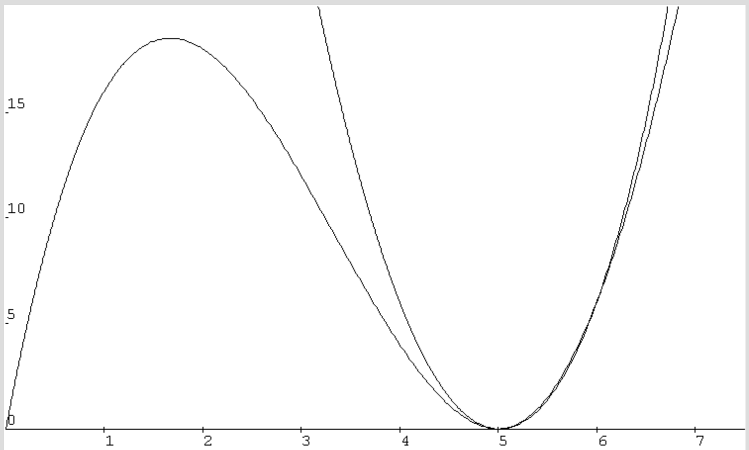
Net als bij de functie $y = x^2$ kun je goed begrijpen wat de groeisnelheid van $y = x^3$ is als $x = 5$. Op de volgende bladzijden gaan we drie manieren bekijken. De tweede en derde manier hoef je niet van buiten te leren.

INTERMEZZO

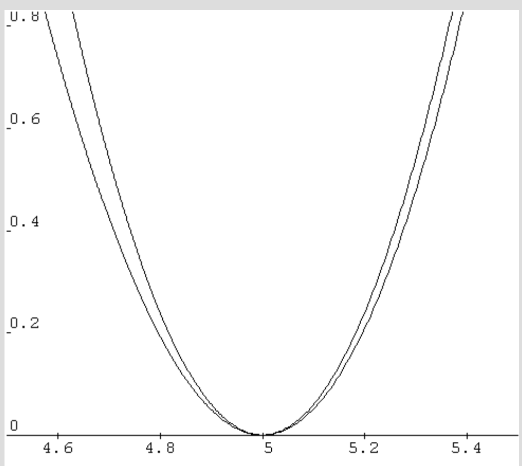
Manier 2: Bewijs met een slimme truc

Deze manier is een redenering, die bestaat uit acht denkstappen. In de volgende twee opgaven vragen we je die denkstappen een voor een te begrijpen.

WB Opgave
De truc is om de functies $y = 6(x-5)^2$ en $y = x(x-5)^2$ met elkaar te vergelijken. Hieronder staan de grafieken van deze functies.



We vergroten het stuk rond het punt (5,0) uit.



Schrijf op het werkblad bij elke denkstap op waarom hij juist is.

① Als x tussen 4 en 6 ligt, is $0 \leq x(x-5)^2 \leq 6(x-5)^2$.

② De grafiek van $y = x(x-5)^2$ ligt tussen de x-as en de grafiek van $y = 6(x-5)^2$.

③ De grafiek van $y = 6(x-5)^2$ raakt aan de x-as in (5,0).

④ De grafiek van $y = x(x-5)^2$ raakt aan de x-as in (5,0).

⑤ De groeisnelheid bij $x = 5$ van $y = x(x-5)^2$ is gelijk aan 0.

Nog drie denkstappen en we zijn er.

WB Opgave

Probeer weer elk van de volgende denkstappen te begrijpen. Schrijf op het werkblad bij elke denkstap waarom hij juist is.

⑥ De formule $y = x(x-5)^2$ kun je ook schrijven als $y = x^3 - 10x^2 + 25x$.

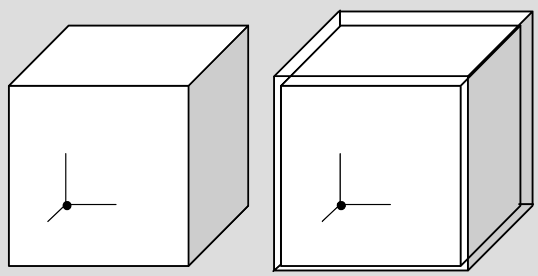
⑦ De groeisnelheid van $-10x^2 + 25x$ bij $x = 5$ is -75.

⑧ De groeisnelheid van $y = x^3$ bij $x = 5$ is 75.

Denkertje: Kun je op deze manier ook de groeisnelheid vinden van $y = x^3$ bij $x = 4$?

Manier 3: met inhoud

Een kubus groeit; als zijn ribbe x cm is, is zijn inhoud $y = x^3$ cm^3. Het hoekpunt linksachter-onder houden we vast. De kubus groeit aan drie kanten: naar rechts, naar voren en naar boven.



Als x bijvoorbeeld met 0,01 cm toeneemt, komt er aan de rechterkant ongeveer 0,01 maal de oppervlakte van het rechtergrensvlak bij. Evenzo aan de bovenkant en aan de voorkant. Totaal dus $3 \cdot x^2 \cdot 0{,}01$.

De groeisnelheid van de inhoud van de kubus is dus $\frac{3 \cdot x^2 \cdot 0{,}01}{0{,}01} = 3x^2$ (dus 3 keer de oppervlakte van een grensvlak).

Het woord "ongeveer" is een zwak punt in bovenstaande redenering. We kunnen de redenering precies maken met een differentiequotiënt. Bovendien werkt bovenstaande uitleg met de kubus alleen voor positieve getallen x, en de functie $y = x^3$ bestaat ook voor negatieve getallen x.

Manier 4: met een differentiequotiënt

We willen weer de groeisnelheid van $y = x^3$ bij $x = 5$ berekenen. Daarvoor gebruiken we nu de “sluitertijd-methode” die we ook gebruikt hebben bij het bepalen van de snelheid van de auto in een van de vorige hoofdstukken. In dat voorbeeld hadden we vooraf een kleine sluitertijd (Δx sec) gekozen.

WB Opgave 59

Probeer weer onderstaande denkstappen te volgen. Schrijf op het werkblad bij elke denkstap op waarom hij juist is.

① Het beginpunt is $x = 5$ en $y = 125$; als eindpunt kiezen we: $x = 5 + \Delta x$ en

$y = 125 + 75\Delta x + 15(\Delta \mathrm{x})^2 + (\Delta \mathrm{x})^3$.

② $\Delta y = 75\Delta x + 15(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

③ De gemiddelde verandering op het interval is: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 75 + 15(\Delta x) + (\Delta x)^2$.

④ De groeisnelheid op $x = 5$ is gelijk aan 75.

We hebben de exacte groeisnelheid bepaald van $y = x^3$ als $x = 5$. Dan kunnen we net zo doen voor andere waarden van x. We vinden dan:

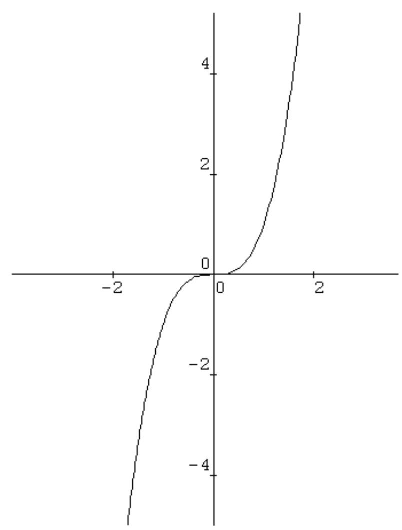
> De groeisnelheid van $y = x^3$ een gegeven x-waarde is $y' = 3x^2$.

Met andere woorden:

formule van de functie $y = x^3$	⇒	formule van de groeisnelheid: $y' = 3x^2$

Opgave 60

Hiernaast zie je de grafiek van $y = x^3$



a. Bereken de groeisnelheid in $x=a$ en in $x=-a$.
   Leg uit hoe je in de grafiek van $y = x^3$ ziet dat deze twee uitkomsten gelijk zijn.

b. Bij welke x is de groeisnelheid gelijk aan 6?
   En bij welke x is hij 1,23?

c. Welke waarden kan de groeisnelheid aannemen?

De afgeleide van derdegraadsfuncties

Opgave 61

Bereken de afgeleide functie van

$y = -0,5x^3$

$y = -2 + x^3$

$y = -12 + 10x^3$

$y = -5(3 - x^3)$

$y = 6 - 2x + 3x^2 + 0,1x^3$

$y = 4x^3 + 8x^2 - 9x + 2009$

Opgave 62

Geef een formule voor de afgeleide functie van

a. $y = x^2(x-3)$

b. $y = 2x(x^2 - 3x)$

c. $y = x(x+1)^2$

We kennen nu de groeisnelheid van elke derdegraadsfunctie:

De afgeleide functie van $y = 2x^3 + 7x^2 - 3x + 8$ is:

- 2 maal de afgeleide van x^3

  plus
- 7 keer de afgeleide van x^2

  plus
- de afgeleide van $-3x + 8$.

Dus $y' = 2 \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x + -3 = 6x^2 + 14x - 3$.

Om te onthouden:

De groeisnelheid van $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ voor een willekeurige waarde van x is

- a keer de groeisnelheid van x^3

  plus
- b keer de groeisnelheid van x^2

  plus
- de groeisnelheid van $cx + d$

Dus is de groeisnelheid $y' = a \cdot 3x^2 + b.2x + c = 3ax^2 + 2bx + c$.

Historie
Eind zeventiende eeuw werd het differentiëren ontwikkeld door Leibniz (in Duitsland) en Newton (in Engeland), ongeveer gelijktijdig.
Differentiëren is een machtig hulpmiddel gebleken in bijvoorbeeld de natuurkunde en economie. Je overdrijft niet als je zegt dat de moderne maatschappij zonder de kennis van differentiëren onmogelijk zou zijn geweest.

Gottfried Leibniz (1646-1716)
standbeeld te Leipzig

Isaac Newton (1643-1727)
standbeeld te Cambridge

8.Wat moet je weten en kunnen van hoofdstuk 1 t/m 7

- **Bereken de gemiddelde verandering op een gegeven interval als de formule of grafiek gegeven is.**

  Voorbeeld

  Gegeven: de grafiek van de functie $y(x)$ (zie hiernaast)

  Vraag: de gemiddelde verandering van y op het interval [-2,4]

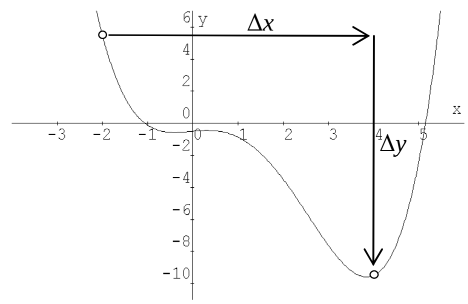
  Antwoord:

  begin: $x = -2 \rightarrow y = 5{,}5$

  eind: $x = 4 \rightarrow y = -9{,}5$

  toename: $\Delta x = 6$ $\quad \Delta y = -15$

  gemiddelde verandering: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-15}{6} = -2{,}5$



  Opmerking 1

  Deze gemiddelde verandering is gelijk aan de richtingscoëfficiënt (of helling) van de lijn door de punten (-2;5,5) en (4;-9,5).

  Opmerking 2

  Als een formule bekend is van de functie, kun je de y-waarden bij $x = -2$ en bij $x = 4$ berekenen.

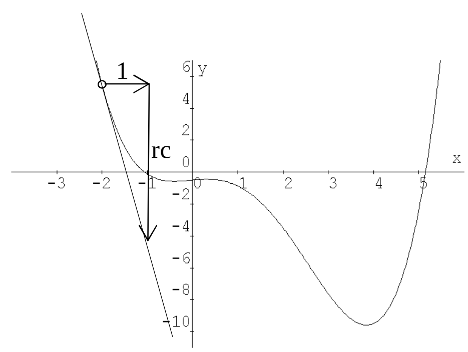
- **Bepaal de groeisnelheid in een punt als de grafiek gegeven is (of bepaal de helling van de grafiek in een gegeven punt).**

  Voorbeeld

  Gegeven: de grafiek van functie $y(x)$.

  Vraag: de groeisnelheid van y in het punt (-2;5,5)

  Antwoord: teken de raaklijn aan de grafiek in het punt (-2;5,5) en lees de richtingscoëfficiënt van de **raaklijn** af ; deze is (ongeveer) –12



- **Bereken de groeisnelheid in een punt als de formule gegeven is (of bereken de helling van de grafiek in een gegeven punt)**

  Voorbeeld

  Gegeven is de functie $y(x) = 2^x$

  Vraag: bereken de groeisnelheid van y in $x = 3$

  Antwoord

  begin: $x = 3 \rightarrow y = 8$

  eind: $x = 3{,}001 \rightarrow y \approx 8{,}00555$

  toename: $\Delta x = 0{,}001$ $\quad \Delta y \approx 0{,}00555$

  gemiddelde verandering: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx \dfrac{0{,}00555}{0{,}001} = 5{,}55$

  Dus is de groeisnelheid van y in $x = 3$ ongeveer 5,55.

- **Bereken de afgeleide functie bij een gegeven eerste-, tweede- of derdegraadsfunctie.**
  De afgeleide functie van $y = ax + b$ is $y' = a$.

  De afgeleide functie van $y = x^2$ is $y' = 2x$.
  De afgeleide functie van $y = x^3$ is $y' = 3x^2$.

  De afgeleide functie van $y = ax^2 + bx + c$ is $y' = a \cdot 2x + b$, *ofwel* $y' = 2ax + b$.
  De afgeleide functie van $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ is $y' = a \cdot 3x^2 + b \cdot 2x + c$, *ofwel*
  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

  Voor andere functies zoals $y = 2^x$, $y = \sqrt{x}$ en $y = \frac{1}{x}$ hebben we nog niet de formule voor de afgeleide behandeld.

  Opmerking 1
  Met behulp van de afgeleide functie kun je bij elke waarde van x de groeisnelheid (helling) bepalen. De formule van de afgeleide y' is de groeisnelheidsformule van de functie y.

  Opmerking 2
  Het bepalen van de afgeleide functie bij een gegeven functie heet **differentiëren**.

  Opmerking 3
  Principes bij differentiëren
  - Als we de groeisnelheid van een functie kennen, kennen we ook de groeisnelheid van de functie die 2 (of een ander getal) groter is. Daarvan is de groeisnelheid hetzelfde.
  - Als we de groeisnelheid van een functie kennen, kennen we ook de groeisnelheid van de functie die 2 (of een ander getal) keer zo groot is. Daarvan is de groeisnelheid ook 2 keer zo groot.
  - Als we de groeisnelheid van twee (of meer) functies kennen, kennen we ook de groeisnelheid van de som van die functies (dat is de functie die je krijgt door de twee functies op te tellen). Je moet daarvoor gewoon de groeisnelheden optellen.

- **Hoe zie je de afgeleide terug bij natuurkunde en economie**

  Bij natuurkunde:
  Gegeven is een tijd-afstand-functie; die zegt op elk tijdstip (van een tijdsinterval) hoeveel km is afgelegd. De afgeleide hiervan is de tijd-snelheid-functie; die zegt op elk tijdstip (van het tijdsinterval) wat de snelheid is.
  De gemiddelde verandering van de afstand op een tijdsinterval is de gemiddelde snelheid op dat interval.

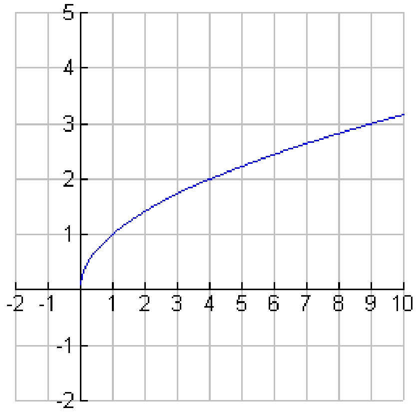
  Bij economie:
  Gegeven is een hoeveelheid-kosten-functie; die zegt bij elke hoeveelheid producten wat de productiekosten zijn. De afgeleide hiervan is de marginale-kostenfunctie; die zegt bij elke hoeveelheid producten wat de extra kosten zijn als de productie met één toeneemt.
  Evenzo wordt gesproken van marginale-opbrengstfunctie en marginale-winstfunctie.

- **Op de GR**
  De grafische rekenmachine heeft een optie om de afgeleide in elke x te berekenen.
  Zie bladzijde 32.

Opgave 63

Bereken in de volgende situaties de gemiddelde verandering op het interval [3,7] (dus beginpunt bij $x = 3$ en eindpunt bij $x = 7$) als gegeven is

a. de grafiek



b. de tabel

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	120	110	105	93	86	88	90	75

c. de formule $y = 3x^2 - 5x$

Opgave 64

In 1990 is de omvang van een bevolking 20 duizend; in 2008 is de omvang 26 duizend.

a. Bereken de gemiddelde toename per jaar.

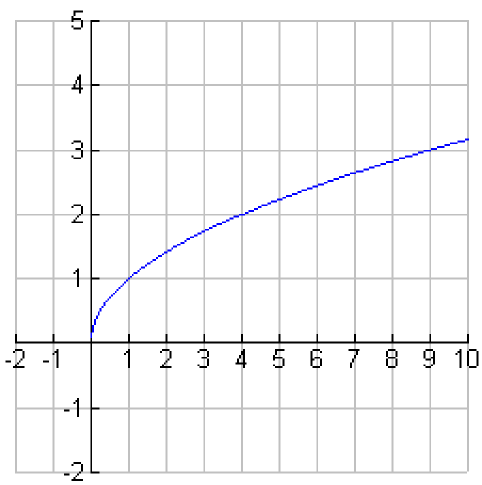
In januari 1990 groeide de bevolking met 30 mensen.

b. Wat zou de bevolking begin 2008 geweest zijn als die de hele tijd even hard was gegroeid als in januari 1990?

Opgave 65

Hoe groot is de groeisnelheid bij $x = 3$ als gegeven is:

a. de grafiek



b. de formule $y = 3x^2 - 5x$
c. de formule $y = 3^x$

Opgave 66
Bereken eerst zelf de afgeleide en controleer je antwoord met de GR (zoals bij opgave 37)
a. $y = 4x^2 + 3$
b. $y = 6x + 7$
c. $y = 6x^2 + 5x^3 + 10$
d. $y = 4x^2 - 5x^3$
e. $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$
f. $y = x(x^2 + 3x)$

Opgave 67
De groeisnelheid van de functie $y = 3^x$ in $x = 1$ is ongeveer 3,3.
a. Controleer dat met de GR.

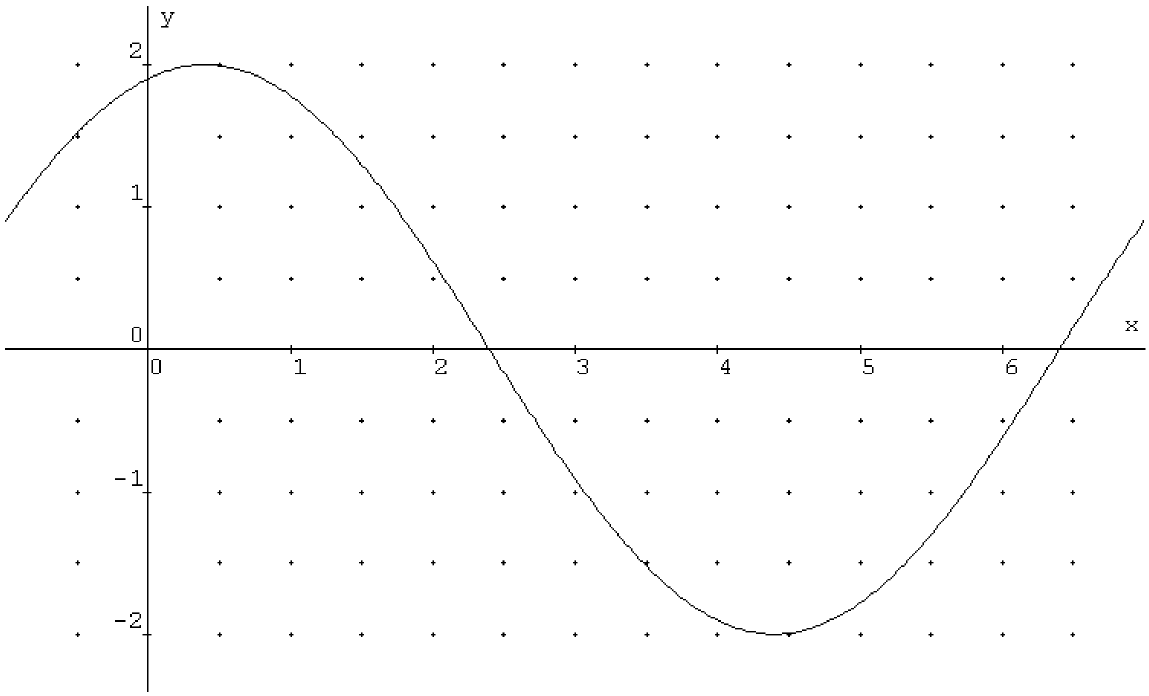
b. Beredeneer met deze 3,3 hoe groot de groeisnelheid is van de volgende functies in $x = 1$.
- $y = 2 \cdot 3^x$
- $y = 2 + 3^x$
- $y = 3^x + 4x$
- $y = 3^x + x^3$

Opgave 68
Een vuurpijl wordt op tijdstip 0 vanaf de grond verticaal omhoog geschoten. Zijn hoogte h (in m) als functie van de tijd t (in s) wordt gegeven door de formule $h = 40t - 5t^2$.
a. Geef een formule voor de snelheid van de vuurpijl op tijdstip t.
b. Met welke snelheid werd de vuurpijl afgevuurd?
c. Na hoeveel seconde is de vuurpijl op zijn hoogste punt? Hoe hoog boven de grond is de vuurpijl dan?
d. Wat was de snelheid van de vuurpijl toen hij 75 meter boven de grond was?

Opgave 69
Bij een zeker productieproces kunnen de kosten K om q stuks te maken berekend worden met de formule $K = 3q^2 + 16q$ (K in euro)
a. Bereken $K'(5)$. Wat betekent $K'(5)$ in deze context ?
b. Toon met behulp van K' aan dat een grotere productie altijd meer kosten geven.

Opgave 70
Gegeven is de functie $y = -4x^2 + 3000x - 15200$.
Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarde van x de functiewaarde y maximaal is.

Opgave 71
Gegeven is de grafiek van een functie $y(x)$.



a. Lees af voor welke waarden van x de afgeleide negatief is.
b. Wat is de minimale waarde van de groeisnelheid? (aflezen in de figuur.)
c. Lees af bij welke waarden van x de groeisnelheid gelijk aan 1 is.

Opgave 72
Bij een productieproces worden de totale opbrengst en de totale kosten bij productiehoeveelheid q gegeven door: $TO = -0{,}5q^2 + 60q$ en $TK = 1{,}5q^2 + 10$.

a. Stel een formule op voor de winstfunctie en bereken met behulp van differentiëren de maximale winst.
b. Geef formules voor de marginale opbrengst en de marginale kosten en bereken ook hiermee bij welke productiehoeveelheid q de winst maximaal is.
c. Leg uit dat je bij a. en b. eigenlijk dezelfde berekening maakt.

9. Het gebruik en de betekenis van de afgeleide in andere vakken (toepassingen)

In de vorige hoofdstukken hebben we gezien dat de tijd-afstand-bewegingen aanleiding waren het begrip afgeleide in te voeren. Maar de afgeleide is ook in andere gebieden bruikbaar gebleken. Immers, we willen naast informatie over de waarde van een grootheid ook vaak iets weten over hoe en hoe snel de grootheid verandert.

In dit soort toepassingsgebieden kijken we ook naar dimensies (*).

Voorbeeld uit de natuurkunde:
De afgelegde weg y van een auto in km is een functie van de tijd x in uur.
Dan is de verandering van de afgelegde weg Δy ook in km en de verandering van tijd Δx ook in uur.
Het quotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de gemiddelde snelheid. Willen we de snelheid op een zeker moment weten, dan kijken we naar de afgeleide y' op dat moment; deze geeft de snelheid in km per uur (km/u).

Voorbeeld uit de economie:
De opbrengst y in euro is een functie van de geproduceerde hoeveelheid x in bijvoorbeeld kg.
Dan is de verandering van de opbrengst Δy ook in euro en de verandering van productie Δx ook in kg.
Het quotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de gemiddelde stijging van de opbrengst. Willen we de marginale opbrengst bij een zekere productie weten, dan kijken we naar de afgeleide y' bij die productie; deze geeft de marginale opbrengst in euro per kg (€/kg).

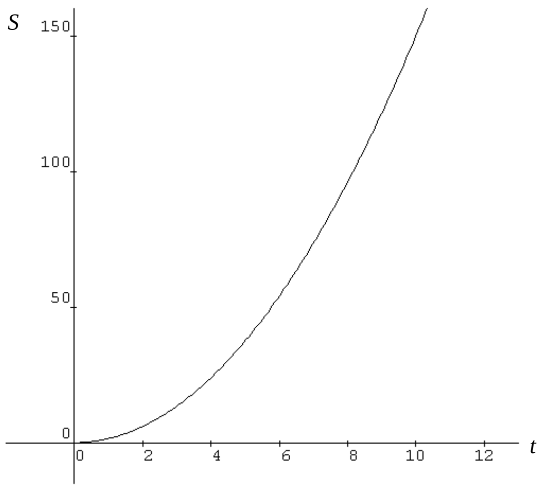
Voorbeeld uit de scheikunde:
De concentratie y van een oplossing in gram/kg is een functie van de tijd x in seconde.
Dan is de verandering van de concentratie Δy ook in gram/kg en de verandering van de tijd Δx ook in seconde.
Het quotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de gemiddelde toename van de concentratie. Willen we de reactiesnelheid weten op een zeker moment, dan kijken we naar de afgeleide y' op dat moment; deze geeft de reactiesnelheid in gram/kg per seconde.

Op de volgende bladzijden gaan we nader het gebruik van de afgeleide buiten de wiskunde bekijken.

(*) Van Dale: De dimensie van een grootheid is de soort eenheid waarin de grootheid kan worden uitgedrukt.
Voorbeelden: de dimensie van afstand is meter (of bijv. km)
de dimensie van tijd is seconde (of bijv. uur)
de dimensie van temperatuur is graden Celsius

De afgeleide in de natuurkunde

Opgave 73
Een auto trekt op vanuit stilstand. Na t seconden heeft hij $1{,}5\,t^2$ meter afgelegd.
De afstandsfunctie is dus: $S = 1{,}5\,t^2$.

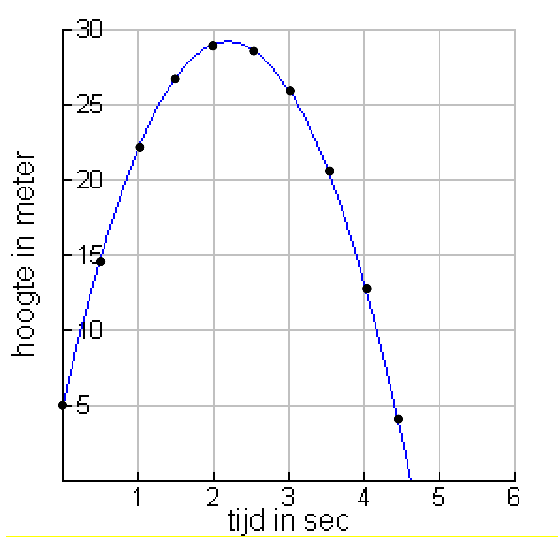


a. Toon aan dat de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval van $t = 4$ tot en met $t = 8$ gelijk is aan 18 m/s.
b. Met behulp van de raaklijn kan de snelheid op $t = 4$ uit de grafiek geschat worden. Doe dit.
c. Deze snelheid op $t = 4$ is ongeveer gelijk aan de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval van $t = 4$ tot $t = 4{,}001$. Bereken deze gemiddelde snelheid.
d. De snelheid op $t = 4$ is ook te berekenen met de afgeleide. Doe dit.
e. Teken de grafiek van de snelheid op het tijdsinterval van 0 tot 10.

De afgeleide S' van de afstandsfunctie geeft de snelheid. De afgeleide geeft hoe snel de grafiek van S in een punt stijgt; dit is precies de helling van de grafiek in dat punt.

Opgave 74
We schieten vanaf een hoogte van 5 meter een vuurpijl recht omhoog. Iedere halve seconde wordt een foto genomen en met deze gegevens is de tijd-hoogte grafiek hiernaast gemaakt.

a. Bepaal met de grafiek de gemiddelde snelheid (in m/sec) van de vuurpijl tussen $t = 0$ en $t = 2$.
b. Bepaal met behulp van de grafiek de snelheid waarmee de vuurpijl afgeschoten werd en ook de snelheid waarmee de vuurpijl de grond raakt.
c. Wat is de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval [0;4,4]? Vreemd?



De hoogte h op ieder tijdstip kan berekend worden met de formule $h = -5t^2 + 22t + 5$ met t in seconde en h in meter.

c. Bereken met de formule de snelheden die in de onderdelen a en b gevraagd werden.

d. Bereken met de formule de maximale hoogte die de vuurpijl bereikt.

Uit tijd-afstand-grafieken kun je de gemiddelde snelheid op een tijdsinterval vinden door de gemiddelde verandering op dat tijdsinterval te berekenen. Deze is gelijk aan de helling (richtingscoëfficiënt) van de rechte lijn tussen het beginpunt en eindpunt bij het tijdsinterval. Als de tijd-afstand-grafiek kromlijnig is, vind je de snelheid op een moment door de raaklijn in het betreffende punt te tekenen en de helling daarvan te bepalen. Of, als je een formule kent, kun je de snelheid via differentiëren berekenen.

De afgeleide in de economie

We zagen al eerder dat in de economie de afgeleide wordt gebruikt om marginale grootheden te benaderen, zoals de marginale kosten en de marginale opbrengst.

Opgave 75
We bekijken een model waarin het gedrag beschreven wordt van een producent die streeft naar maximale winst.
We nemen voor de totale opbrengst de formule $TO = -4q^2 + 40q$ en voor de totale kosten de formule $TK = 0{,}2q^3$. Hierbij is q het aantal producten dat de producent afzet.

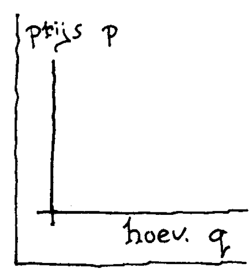
a. Zoek met de GR bij welke productie *TO* gelijk is aan *TK* en zeg wat dit in deze context van de producent betekent.

b. Stel een formule op voor de winst en zoek met de GR bij welke productie de winst maximaal is.
c. Je kunt deze maximale winst ook vinden met de afgeleide van *W*. Doe dit.

In economieboeken staat dat de maximale winst optreedt bij díe productie waarvoor *MK* gelijk is aan *MO*.
d. Controleer of dit hier klopt.

Deze regel uit de economieboeken kun je verklaren door de winstfunctie te differentiëren. Omdat $W = TO - TK$ kun je laten zien dat de maximale winst optreedt als *MO* gelijk is aan *MK*.
e. Laat dit zien.

Opgave 76 **Het verloop van de opbrengstfunctie**
Vraagfuncties geven het verband tussen de gevraagde hoeveelheid en de prijs van een product.
In de economie heeft men de gewoonte om de prijs verticaal uit te zetten en de hoeveelheid horizontaal.



a. Waarom is het bijzonder dat de prijs langs de verticale as komt te staan?

Neem bijvoorbeeld $q = -0{,}5p + 20$, waarbij q de gevraagde hoeveelheid is en p de prijs.
b. Teken de grafiek zoals economen dat doen.

De opbrengst bereken je door $p \cdot q$ (prijs $\times$ hoeveelheid).
c. Kies $q = 16$ en bereken de opbrengst.

De opbrengst bij $q = 16$ (die je in vraag c berekend hebt) kan bij de grafiek van b weergegeven worden als oppervlakte van een rechthoek.
d. Teken deze rechthoek.

Je kunt bij elke hoeveelheid q zo'n rechthoek tekenen.
e. Hoe zie je aan de rechthoek dat de opbrengst klein is bij heel hoge prijzen en bij heel lage prijzen?

Met differentiëren kun je nu de maximale opbrengst vinden en de hoeveelheid die dit maximum oplevert.

f. Maak een formule voor de opbrengst en bereken bij welke hoeveelheid de opbrengst maximaal is en hoe groot deze maximale opbrengst is.

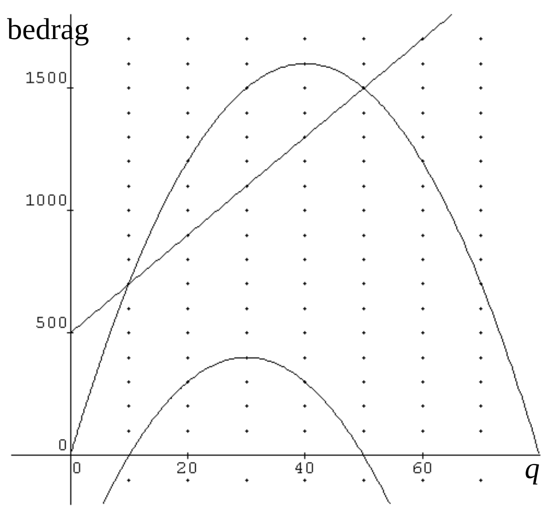
WB Opgave 77 **Het verband tussen *TO* en *MO***

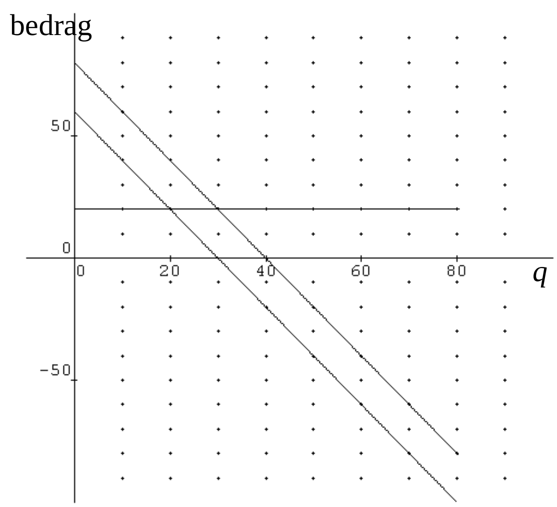
In economieboeken worden naast berekeningen ook vaak grafieken gebruikt.
We bekijken een totale opbrengstfunctie $TO = -q^2 + 80q$ en $TK = 20q + 500$.

a. Welke is in de eerste figuur de grafiek van *TO*, welke van *TK* en welke van de totale winst *TW*. Schrijf op het werkblad de juiste naam bij elk van de grafieken.

In de tweede figuur staan de grafieken van *MO* (marginale opbrengst) en *MK* (marginale kosten) en *MW* (marginale winst).

b. Welke van de grafieken in de tweede figuur hoort bij *MO*, welke bij *MK* en welke bij *MW*?
Leg uit hoe je dit enkel met de grafieken van de eerste figuur dit kunt bepalen.
Schrijf in deze tweede figuur op het werkblad de juiste naam bij elk van de grafieken.



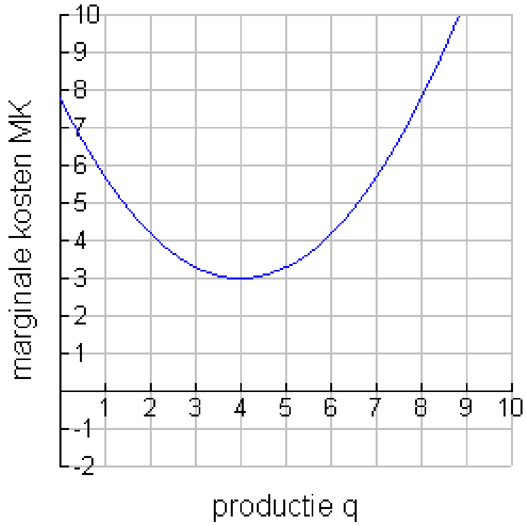


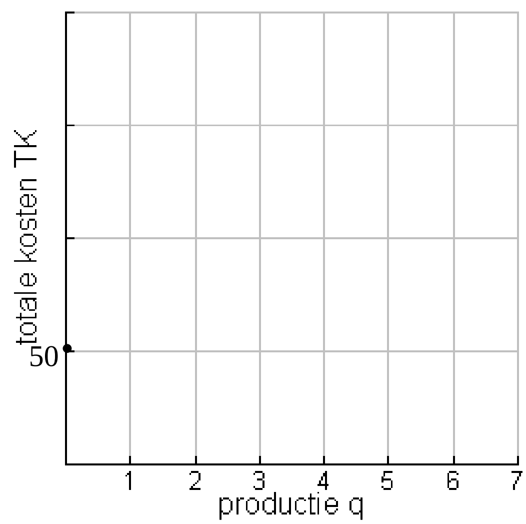
c. Lees de antwoorden van de volgende vragen af uit de figuren. Welke figuur gebruik je? Zeg ook als het antwoord uit beide figuren is af te lezen. Geef duidelijke toelichting.
   1. Hoe groot is het break-even-point? Dat is het aantal producten waarboven (voor het eerst) winst wordt gemaakt.
   2. Hoe groot is de productieomvang met maximale winst?

d. Beantwoord de twee vragen in onderdeel c ook met behulp van de formules en algebra.

WB Opgave 78

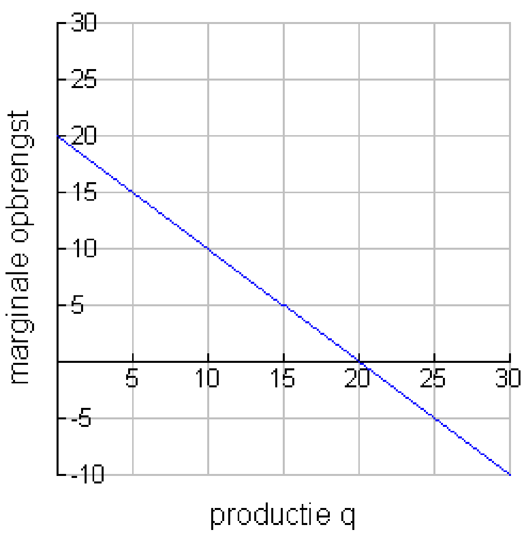
Op basis van de marginale kosten kun je de totale kosten bij elke productie schatten, als je tenminste de totale kosten kent bij één productie.
Stel je weet dat $TK = 50$ bij $q = 0$ en dat een grafiek van MK is gegeven. Zie hieronder.

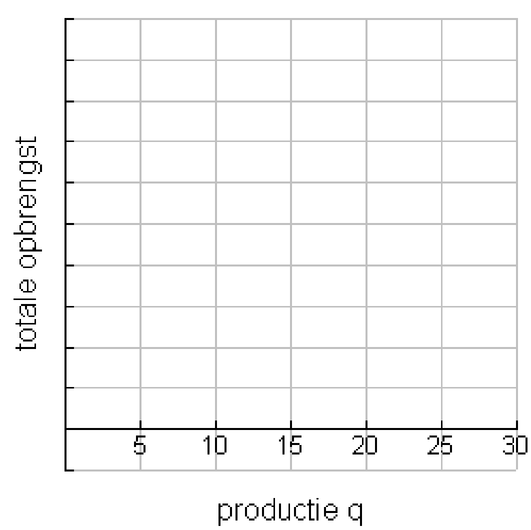




a. Schets op het werkblad de grafiek van TK.

Zo kun je ook op basis van de grafiek van MO de grafiek van TO schetsen, als je tenminste de totale opbrengst kent bij één productieomvang.
Stel dat je onderstaande grafiek van MO hebt en weet dat bij $q = 0$ de totale opbrengst 0 is.



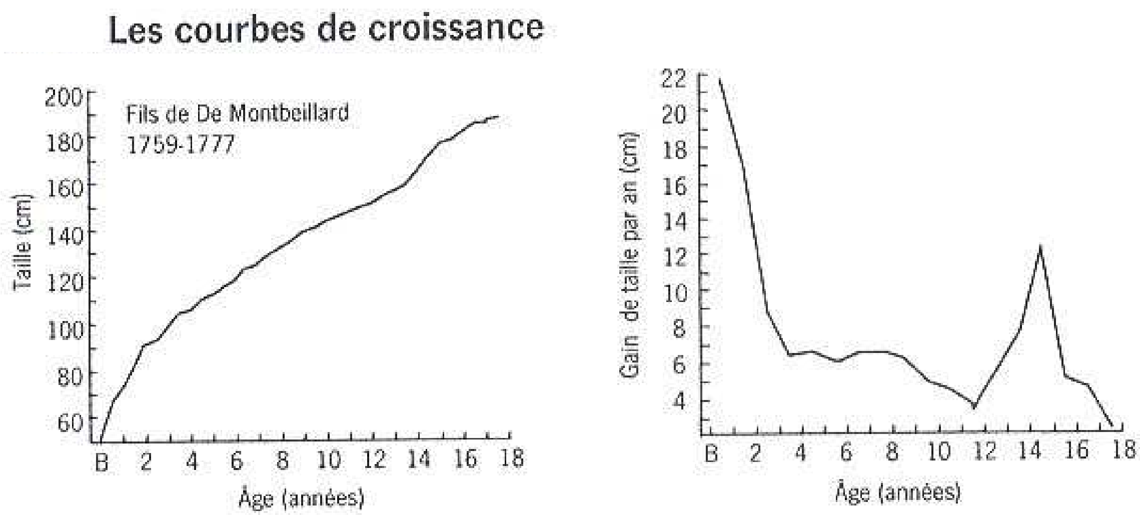


b. Schets op het werkblad de grafiek van TO.

Stel dat je weet dat de $MO = -x + 20$. De totale opbrengst bij $q = 0$ is gelijk aan 0.
c. Bedenk een formule voor TO die hieraan voldoet.

De afgeleide in de biologie

De grafiek hieronder is de oudste gepubliceerde studie van de groei van een kind. De metingen werden verricht door graaf Philibert de Montbéliard bij zijn zoon, tussen 1759 en 1777. Er blijkt duidelijk dat de lengtegroei na de tweede verjaardag afneemt. Rond de 14-15 jaar treedt er een groeispurt op. (Taille staat voor lengte)

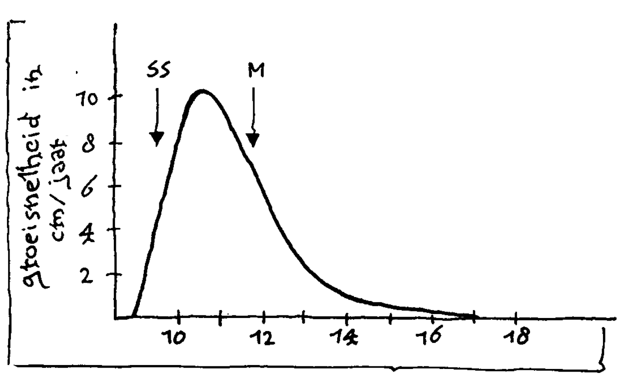


De groei verloopt natuurlijk niet bij elke jongen precies hetzelfde, maar je ziet wel bij alle jongens hetzelfde patroon.
Hierboven is ook de grafiek van de lengte*toename* getekend.

Opgave 79

a. Leg uit dat de grafiek van de lengtetoename bij benadering de grafiek van de afgeleide van de lengte is.

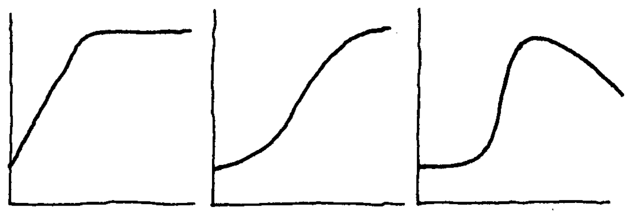
Na het negende jaar beginnen de veranderingen in het menselijk lichaam pas goed. Hoewel ook dit niet voor iedereen op hetzelfde moment gebeurt, is er wel weer een vast patroon te zien.
Bij meisjes is de borstontwikkeling meestal het eerste teken van de pubertijd (SS = start puberteit). Daarna zal het moment van de eerste menstruatie komen (M).
Hieronder zie je bij de grafiek van de groeisnelheid de momenten SS en M.



b. Rond welke leeftijd vindt bij een meisje de groeispurt plaats?

Op grond van deze groeisnelheidgrafiek kan een schets van de lengtegrafiek in de leeftijdsperiode van 0 tot 18 jaar gemaakt worden.

c. Welke van de volgende schetsen geeft het beste de vorm van de lengtegrafiek weer?



In de opgaven in dit hoofdstuk zijn we geïnteresseerd in de veranderingen van een functie. Het lijkt erop dat we altijd de beschikking hebben over een formule of grafiek van de functie. In de praktijk is vaak helemaal geen formule of grafiek bekend. Wel hebben we soms informatie over de veranderingen. Zie voor een voorbeeld uit de biologie opgave 80b, waar we de beschikking hadden over de groeisnelheid. Zie voor een voorbeeld uit de economie opgave 79, waar we de beschikking hadden over de marginale opbrengst en marginale kosten. Dan kunnen we op basis van de afgeleide *y*’ conclusies trekken over *y* zelf.

Opgave 80

In de natuur zie je groeiprocessen waarbij de toename afhankelijk is van het aantal individuen dat op dat moment aanwezig is. De groei van een populatie is afhankelijk van het geboorte- en sterftecijfer in de populatie. Beide worden uitgedrukt in aantallen per 1000 mensen/dieren. Het verschil tussen beide wordt het geboorteoverschot genoemd en wordt ook uitgedrukt in een aantal per 1000 mensen/dieren. We nemen hier aan dat dit positief is (er worden meer individuen geboren dan dat er dood gaan).

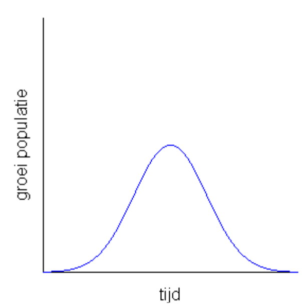
We nemen aan dat het aantal nakomelingen dat een vrouw krijgt niet afhangt van de grootte van de populatie. Dit betekent dat ‘hoe groter de populatie, des te meer kinderen er bij komen’. De groei is dus groter naarmate de populatie groter is.

a. Maak een globale schets van het aantal mensen/dieren in de populatie. Zeg ook wat dit voor de afgeleide betekent.

Zulke groeiprocessen kunnen natuurlijk niet eindeloos doorgaan. Als de populatie te groot wordt, neemt de groei door ruimtegebrek en milieufactoren af.

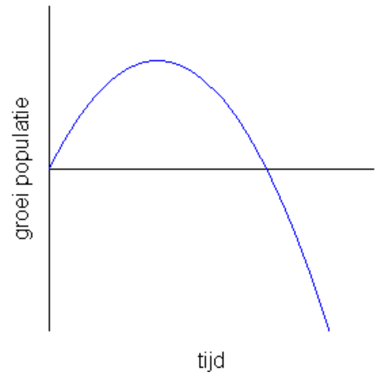
Het is mogelijk dat de groei van een populatie beschreven wordt door de grafiek hiernaast. Hierin zie je dat een populatie eerst steeds sneller groeit en later steeds minder snel.

b. Maak een globale schets van het aantal mensen/dieren in de populatie. Wat kun je zeggen over de afgeleide die bij de populatiegrafiek hoort?



Het is ook mogelijk dat de groei van een populatie beschreven wordt met de figuur hiernaast.

c. Maak weer een globale schets van het aantal mensen/dieren in de populatie.



Opgave 81

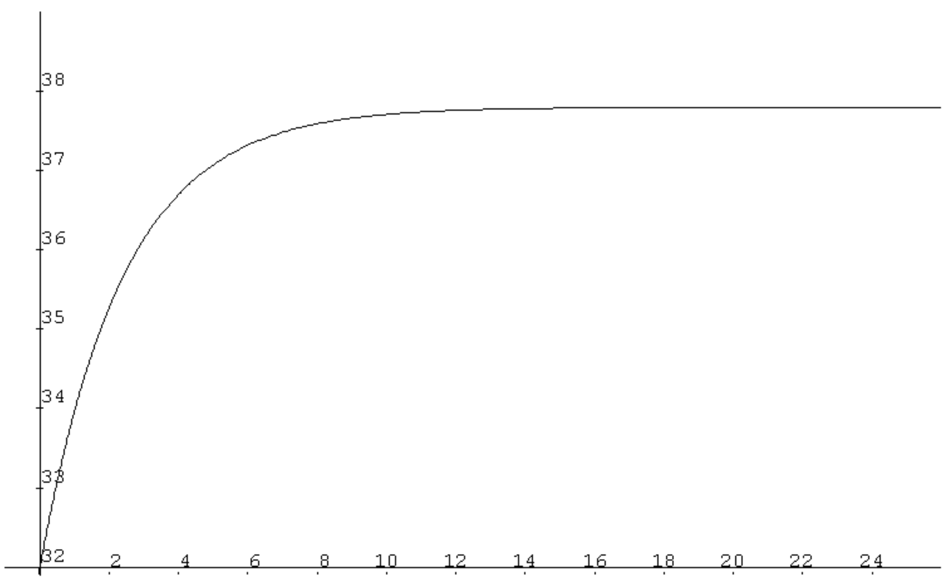
Iemand wordt de lichaamstemperatuur genomen met een elektronische digitale koorts-thermometer. Die werkt als volgt.

- Hij begint bij 32 °C.
- De temperatuur die de thermometer aangeeft stijgt in het begin erg snel.
- Zodra de temperatuur in een periode van 8 seconden minder is gestegen dan 0,02 °C, wordt gedurende 4 seconden een pieptoon uitgezonden. Dat betekent dat de temperatuur kan worden afgelezen.
- Daarna zou de temperatuur weliswaar nog enigszins oplopen, maar die toename is zeer klein.

Hierboven wordt een stopregel geformuleerd; deze zegt wanneer de thermometer klaar is.

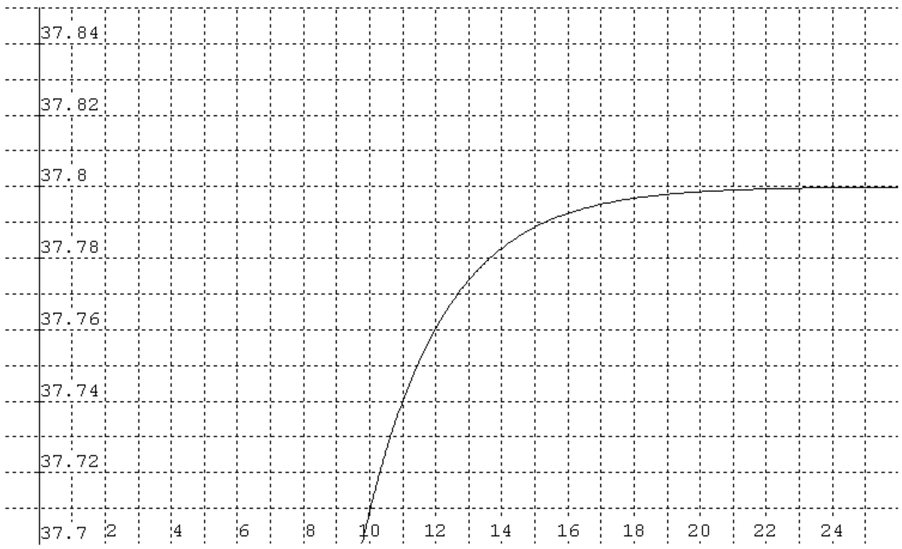
a. Waarom is zo'n stopregel ingebouwd?

Stel dat de temperatuur die de thermometer aangeeft zou verlopen zoals in de grafiek hieronder, als er geen stopregel zou zijn ingebouwd. Op de horizontale as staat de tijd in seconden, op de verticale as de temperatuur van de thermometer in °C.



b. Wat is de lichaamtemperatuur van de patiënt?

Uit de grafiek kun je slecht aflezen wanneer de thermometer zijn meting stopt. Daarom hebben we het laatste stuk van de grafiek verticaal opgerekt:

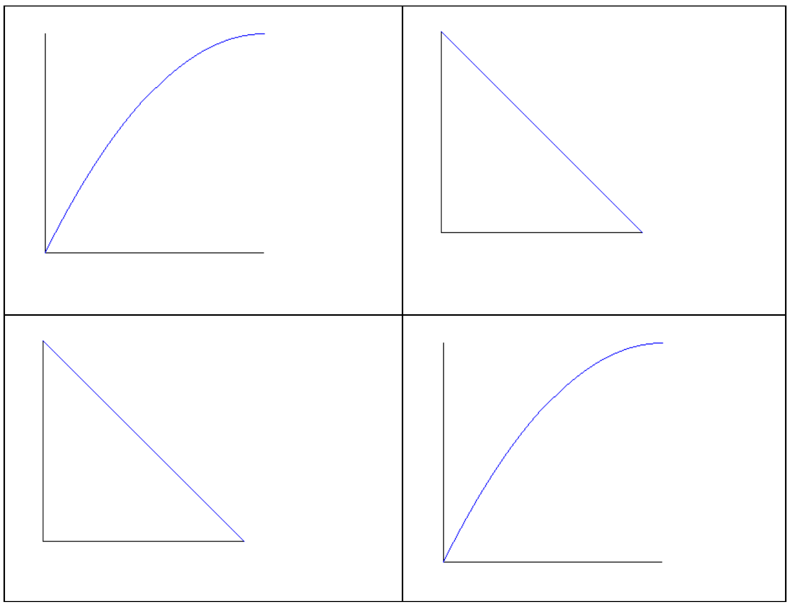


c. Wanneer stopt de thermometer de meting? Welke temperatuur geeft de thermometer dan aan?

De afgeleide en de geschiedenis

Hugo Brandt Corstius, alias Piet Grijs, schrijft in de jaren 70 in zijn bundel ‘Piet Grijs is gek’ het volgende stukje.

> *In hoog intellectueel gezelschap kwam het gesprek op het gebruik van kranten in het geschiedenisonderwijs. Ik maakte toen de opmerking die onderaan dit stukje staat. Er viel een stilte. Even dacht ik dat ze stil waren omdat mijn opmerking zo voor de hand liggend was. Maar even later werd duidelijk dat geen mens wist wat differentiëren en integreren was. U weet het ook niet, en ik ga het u uitleggen.*



> *Differentiëren.*
> *Kijk u eens naar de tekening links boven. Dat is de doorsnee van een berg. Bovenop loopt het bergpad. Hoe hoog de berg is, staat er niet bij. De wandelaar op het pad is alleen geïnteresseerd in de steilte van de berg. Hij houdt bij elke stap bij hoeveel de helling is (de helling is het aantal meters dat je omhoog moet om een meter vooruit te komen). In het begin, aan de voet van de berg is de helling het grootste. Aan het eind, op de top, is een klein vlak stukje: de helling is nul. Op de grafiek linksonder is de berghelling aangegeven zoals hij daalt naar nul. Het proces dat van de bovenste grafiek (die er best anders mag uitzien) naar de onderste grafiek (die er ook anders uitziet) heet differentiëren.*
> *U kunt de grafiek linksboven ook zien als de snelheidsmeter van een auto die op gang komt. Die snelheid stijgt in het begin het hardst en wordt op het eind constant. In de grafiek eronder staat dan de versnelling van die auto.*
> *Bij differentiëren let je er niet op hoe groot iets is, maar hoe snel iets van grootte verandert.*
>
> *Integreren.*
> *Kijk nu eens naar de tekening rechtsboven. Het is weer een doorgesneden berg. De helling op het pas verandert niet. Maar de wandelaar van links naar rechts is nu in iets heel anders geïnteresseerd. Hij wil weten hoeveel van de berg er bij zijn wandeling onder zijn voeten doorgaat. In het begin, als hij nog hoog is, komt er bij*

elke stap een hoop betreden berg bij. Maar aan het eind, waar de berg laag is, neemt ook de hoeveelheid grond waar hij overheen heeft gelopen niet zo hard meer toe. Op de grafiek rechtsonder is de betreden grond uitgezet.

U kunt de grafiek rechtsboven ook zien als de snelheidsmeter van een auto die remt. In het begin is de snelheid nog groot, aan het eind is de snelheid nul. Kun je uit die standen van de snelheidsmeter de stand van de kilometerteller afleiden? Als je weet op hoeveel hij stond kan dat inderdaad, en die afgelegde afstand is in de grafiek rechtsonder te zien.
Bij integreren let je niet op hoe groot iets nu is, maar hoeveel er tot nu toe bij elkaar is.

Een merkwaardige ontdekking
We hebben nu differentiëren en integreren onafhankelijk van elkaar uitgevoerd. Maar kijkt u nog eens naar die vier tekeningetjes. Lijken die twee linkse niet veel op die twee rechtse? Zijn integreren en differentiëren soms elkaars omgekeerde zoals optellen en aftrekken, huren en verhuren, man en vrouw? Of is het toevallig bij ons voorbeeld zo?
Newton en Leibniz vonden driehonderd jaar geleden dat het niet toevallig is: die twee processen zijn inderdaad net elkaars omgekeerde.
Hadden ze dat niet ontdekt dan was u nu veel armer, veel dommer en ging u eerder dood.
Zijn er misschien grafieken waarvan de gedifferentieerde (afgeleide) precies dezelfde vorm heeft (en de geïntegreerde dus ook)?
Ja, een exponentiele groeicurve heeft deze eigenschap.

Nieuws en geschiedenis
Nieuws is de gedifferentieerde van de gebeurtenissen; alleen wat verandert staat in de krant. Niet dat Nixon gisteren 3000 bommen op Vietnam gooide is nieuws, maar als hij het aantal verdubbelt of ermee ophoudt. (*) Geschiedenis is het totaal van alle gebeurtenissen. Niet dat er gisteren 3000 bommen op Vietnam vielen staat in het geschiedenisboekje, maar dat er in de Vietnamese oorlog zoveel miljoen bommen vielen. Geschiedenis is dus de geïntegreerde van de gebeurtenissen.
Combineren we deze feiten met bovengenoemde vondst dan blijkt: Nieuws is de tweemaal gedifferentieerde van de geschiedenis.

(*) Dit stuk werd begin jaren 70, ten tijde van de Vietnamoorlog geschreven. In 2010 zou je als voorbeeld kunnen geven ‘niet het feit dat Nederlandse militairen in Afghanistan zitten is nieuws, want die zitten er al even, maar wel nieuws is of er besloten wordt om daar te blijven of weg te gaan’)

Opgave 82
a. Aan de hand van de laatste alinea kun je onderstaand citaat aanvullen. Doe dat.
‘*De afgeleide van de geschiedenis geeft ……; als we hiervan de afgeleide nemen dan krijgen we ……*’.
b. Beschrijf in eigen woorden wat ‘integreren’ is.
c. Wat krijg je als je de functie $y = -x + 10$ integreert?
d. Zoek in deze paragraaf de opgaven waarin er ‘iets’ met integreren gebeurt.