Verbanden

Exponenten & Logaritmen

Inhoudsopgave

1	Vouwen en rekenen met machten van 2	3
2	Lineaire functies	7
3	Exponentiële functies	9
4	Herhaling en oefening met exponentiële functies	16
5	$3^{\frac{1}{5}}$ en 2^{-3}, wat is dat?	19
6	Logaritme	25
7	Logaritmische schaal	30

Experimentele uitgave voor Verbanden, vwo4, wiskunde A
versie 2 (augustus 2009)

auteurs: Leon van den Broek, Gerard Koolstra, Peter Kop

Hoofdstuk 1: Vouwen en rekenen met machten van 2

In dit hoofdstuk gaan we een blad papier steeds weer dubbelvouwen. Het aantal lagen papier neemt razendsnel toe. Probeer maar eens een A4tje zoveel mogelijk keren dubbel te vouwen.

Het lukt je niet een blad papier meer dan zeven (misschien acht) keer dubbel te vouwen.
Het aantal lagen dat het pakketje dik wordt, kun je ook berekenen

Opgave 1
a) Vul de tabel verder in. (zonder rekenmachine)

Aantal keer gevouwen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aantal lagen papier	1	2	4	.	..	..	..	…	…	…	…

b) Bereken welke dikte je krijgt als je een vel papier zeven keer hebt dubbelgevouwen
   Bedenk zelf een manier om de dikte van een vel te weten te komen.

Met echt dubbelvouwen komen we niet zo ver. Het pakketje wordt al snel te dik om verder te gaan, maar daar stappen we maar even overeen. We gaan virtueel dubbelvouwen, en dat geeft onbegrensde mogelijkheden.

Opgave 2
a) Hoe kun je snel op je rekenmachine uitrekenen hoeveel lagen papier je krijgt na 25 keer dubbelvouwen? (De uitkomst is 33 55 44 32)

De uitkomsten worden zo groot dat de meeste rekenmachines ze niet meer exact geven, maar gaan benaderen.
b) Welke uitkomst geeft jouw rekenmachine bij 2^{35}? Vertel precies wat de cijfers op het scherm betekenen.
c) Zoals gezegd, zijn de mogelijkheden onbegrensd. Hoeveel keer moet je virtueel vouwen om de maan te bereiken? (De afstand Aarde-Maan is ca. 384 450 km.)

In bijlage 1 staan de exacte uitkomsten van machten van 2, t/m 2^{64} . Daarmee kun je dus preciezer rekenen dan met je rekenmachine.

Opgave 3
a) Zoals je ziet eindigen alle getallen in de rechter kolommen (behalve het eerste) op 2, 4, 6 of 8, en bijv. nooit op 0. Kun je dat verklaren?
b) De laatste cijfers komen steeds in dezelfde volgorde voor. Kun je dat verklaren?

Voorbeeld
In de tabel kun je de uitkomst vinden van de vermenigvuldiging 16777216 × 256. Dat doe je als volgt:
- zoek 16777216 op in de tabel (dat is het aantal lagen bij … keer dubbelvouwen),
- zoek 256 op in de tabel (dat is het aantal lagen bij … keer dubbelvouwen),
- 16777216 × 256 hoort bij … keer dubbelvouwen
- de uitkomst kun je nu aflezen uit de tabel.

Opgave 4
a) Lees de uitkomst van 16777216 × 256 af uit de tabel.
b) Lees ook uit de tabel de uitkomsten af van:

- 16777216^2
- 18 446 744 073 709 551 616 / 16384

We kunnen de vragen uit opgave 4 ook schrijven als machten van 2.
In plaats van 18446744407370995516 16 schrijven we dan gewoon 2^{64}; dat is veel korter.
Evenzo mag jij bijv. voor 1125899906842624 de afkorting 2^{50} schrijven.
Met die notatie gaat de som van opgave 4a er zó uitzien: $2^{24} \times 2^8 = 2^{32}$.

Opgave 5
a) Schrijf zo ook de sommen uit opgave 4b met machten van 2.

b) Bereken (eventueel met behulp van de tabel of met behulp van de vouw-context); schrijf de uitkomsten als macht van 2.

- $2^{35} \times 2^3$
- $2^{35} \times 256$
- $2^{35} \times 2^{10}$
- $2^{17} \times 2^{13}$
- $2^{17} / 2$
- $2^{35} / 32$
- $2^{16} / 2^6$

c) Deze rekensommen zijn voorbeelden van de volgende algemene regels:

- $2^k \times 2^m =$ ……. (vul in)
- $\dfrac{2^k}{2^m} =$ …… (vul in)

Centrale vraag

Het vermenigvuldigen en delen van machten van 2 (zoals 2^3 en 2^{37}) is vrij eenvoudig. Hoe zit dat met optellen en aftrekken?

Je kunt je $2^{37} + 2^{37}$ voorstellen als twee pakken papier (ieder het gevolg van 37 keer dubbelvouwen) die op elkaar zijn gelegd. In onze virtuele vouwwereld is deze stapel net zo hoog als een vel dat 38 keer is dubbelgevouwen. Met andere woorden: $2^{37} + 2^{37} = 2^{38}$.
Zonder te praten over "papier vouwen", kun je het zó begrijpen (en opschrijven):
$2^{37} + 2^{37} = 2 \cdot 2^{37} = 2^{38}$.

Opgave 6
Schrijf de uitkomst met een zo groot mogelijke macht van 2:

- $2^{20} + 2^{20}$
- $2^{20} + 2^{20} + 2^{20} + 2^{20}$

Maar wat krijg je als je 2^{37} optelt bij 2^{38}? Dat zie je in de volgende opgave.

Opgave 7

a) Laat zien dat $2^{37} + 2^{38} = 3\times 2^{37}$
   Laat zien dat $2^{37} + 2^{39} = 5\times 2^{37}$
   Herschrijf: $2^{41} + 2^{43}$
   Laat zien dat $2^{41} + 2^{42} + 2^{43} = 7\times 2^{41}$
   Herschrijf: $2^{41} + 2^{42} + 2^{43} + 2^{44} + 2^{45}$

b) Laat zien dat $2^{61} - 2^{60} = 2^{60}$
   Herschrijf $2^{52} - 2^{50}$
   Herschrijf $2^{63} - 2^{60}$
   Wat is groter $2^{34} - 2^{30}$ of $2^{44} - 2^{43}$?
   Wat is groter $2^{60} - 2^{6}$ of $2^{64} - 2^{63}$?

Zoals je gemerkt hebt, is het vermenigvuldigen en delen met machten van 2 eenvoudig maar het optellen en aftrekken niet. We zullen daar ook geen algemene regels voor trachten op te stellen.

Opgave 8

We keren terug naar het vermenigvuldigen.

a) Bij 2^3 kun je denken aan het aantal lagen papier dat je krijgt bij 3 maal dubbelvouwen, en bij 2^{10} kun je denken aan 10 maal dubbelvouwen. Wat kun je je voorstellen bij $\left(2^{10}\right)^3$?
b) Leg in termen van dubbelvouwen uit dat $\left(2^{10}\right)^3 = 2^{30}$.
c) Schrijf $\left(2^7\right)^2$ als macht van 2.
d) Ook: $\left(2^{12}\right)^5$.

Sommige machten van 2 komen ‘bijna mooi’ uit.

2^{10}	1 024	≈ 1 000	10^3	kilo	duizend	thousand
2^{20}	1 048 576	≈ 1 000 000	10^6	mega	miljoen	million
2^{30}	1 073 741 824	≈ 1 000 000 000	10^9	giga	miljard	billion
2^{40}	1 099 511 627 776	≈ 1 000 000 000 000	10^{12}	tera	biljoen	trillion

Dit heeft ertoe geleid dat voorvoegsels als kilo, mega en giga in de digitale wereld vaak iets anders gebruikt worden dan daarbuiten. Zo betekent een kilobyte 2^{10} (=1024) bytes, 8 megabyte betekent 8×2^{20} pixels, en 4 gigabytes betekent 4×2^{30} bytes. Dit kan soms verwarrend zijn, en is aanleiding geweest tot rechtzaken en nieuwe afspraken (zie bijlage 2), maar als globale aanduiding werkt het prima.

Opgave 9

a) Leg uit dat in de eerste kolom en de vierde kolom dezelfde regelmaat zichtbaar is.

b) Hoe groot zijn de volgende machten van 2 ongeveer? Zeg dat met behulp van voorvoegsels als mega en giga (zie eventueel bijlage 2).
   - 2^{12}
   - 2^{23}
   - 2^{31}
   - 2^{37}

Bijlage 1

aantal keer gevouwen	aantal lagen
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1 024
11	2 048
12	4 096
13	8 192
14	16 384
15	32 768
16	65 536
17	131 072
18	262 144
19	524 288
20	1 048 576
21	2 097 152
22	4 194 304
23	8 388 608
24	16 777 216
25	33 554 432
26	67 108 864
27	134 217 728
28	268 435 456
29	536 870 912
30	1 073 741 824
31	2 147 483 648
32	4 294 967 296

aantal keer gevouwen	aantal lagen
33	8 589 934 592
34	17 179 869 184
35	34 359 738 368
36	68 719 476 736
37	137 438 953 472
38	274 877 906 944
39	549 755 813 888
40	1 099 511 627 776
41	2 199 023 255 552
42	4 398 046 511 104
43	8 796 093 022 208
44	17 592 186 044 416
45	35 184 372 088 832
46	70 368 744 177 664
47	140 737 488 355 328
48	281 474 976 710 656
49	562 949 953 421 312
50	1 125 899 906 842 624
51	2 251 799 813 685 248
52	4 503 599 627 370 496
53	9 007 199 254 740 992
54	18 014 398 509 481 984
55	36 028 797 018 963 968
56	72 057 594 037 927 936
57	144 115 188 075 855 872
58	288 230 376 151 711 744
59	576 460 752 303 423 488
60	1 152 921 504 606 846 976
61	2 305 843 009 213 693 952
62	4 611 686 018 427 387 904
63	9 223 372 036 854 775 808
64	18 446 744 073 709 551 616

Bijlage 2: waar machten van 2 en van 10 elkaar (bijna) ontmoeten

Voor-voegsel	Afkorting	SI-waarde	'digitale waarde'	Verschil
-	-	10^0 =1	$2^0 = 1$	0%
kilo	k	10^3 =1 000	2^{10} = 1 024	2%
mega	M	10^6 =1 000 000	2^{20} = 1 048 576	5%
giga	G	10^9 =1 000 000 000	2^{30} = 1 073 741 824	7%
tera	T	10^{12} =1 000 000 000 000	2^{40} = 1 099 511 627 776	10%
peta	P	10^{15} =1 000 000 000 000 000	2^{50} = 1 125 899 906 842 624	13%
exa	E	10^{18} =1 000 000 000 000 000 000	2^{60} = 1 152 921 504 606 846 976	15%
zetta	Z	10^{21} =1 000 000 000 000 000 000 000	2^{70} = 1 180 591 620 717 411 303 424	18%
yotta	Y	10^{24} =1 000 000 000 000 000 000 000 000	2^{80} = 1 208 925 819 614 629 174 706 176	21%

Hoofdstuk 2: Lineaire functies

In dit hoofdstuk en de daaropvolgende bekijken we verschillende soorten functies: lineaire, exponentiële, logaritmische en machtsfuncties. Elk soort heeft haar eigen kenmerken. We beginnen met de lineaire.

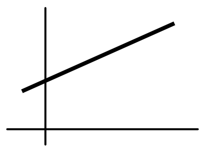
Centrale vraag
Wat is een lineaire functie en hoe herken je die in verschillende representaties?

Opgave 10
Zeg in eigen woorden wanneer er sprake is van een lineaire functie.

In onderstaand schema zie je verschillende representaties: context, tabel, grafiek en formule. In iedere representatie moet je een lineaire functie kunnen herkennen.

<table>
<tr>
<td>Context

‘gelijkmatige groei’
of
‘vaste hoeveelheid per ... erbij’</td>
<td>Tabel
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>y</td><td>83</td><td>89</td><td>95</td><td>101</td><td>107</td><td></td><td></td></tr>
</table>
Steeds hetzelfde erbij (hier steeds plus 6)</td>
</tr>
<tr>
<td>Formule

$y = a \cdot x + b$
(hier $y = 6 \cdot x + 83$)</td>
<td>Grafiek

Rechte lijn
(hier door (0,83) en
met helling 6)</td>
</tr>
</table>

Opgave 11
Je koopt een beltegoed van €20. Iedere minuut bellen kost €0,10. Het beltegoed dat je overhebt is een lineaire functie van het aantal minuten dat je gebeld hebt.
a) Maak een tabel, grafiek en formule.
b) Zeg bij elk van deze drie representaties hoe je eraan ziet dat het een lineaire functie betreft.

Opgave 12
Kies zelf een context met een lineaire functie. Maak daarbij de drie andere representaties: tabel, grafiek en formule.

Centrale vraag:
Hoe maak je een formule van een lineaire functie aan de hand van een tabel?

Opgave 13
Vul de ontbrekende waarden in en maak een formule bij de volgende tabellen (er is steeds sprake van een lineaire functie).
a)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	83	70	57	44			

b)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	70		95		120		

c)

x	0	1	2	3	4	5	6
y				36			76

d)

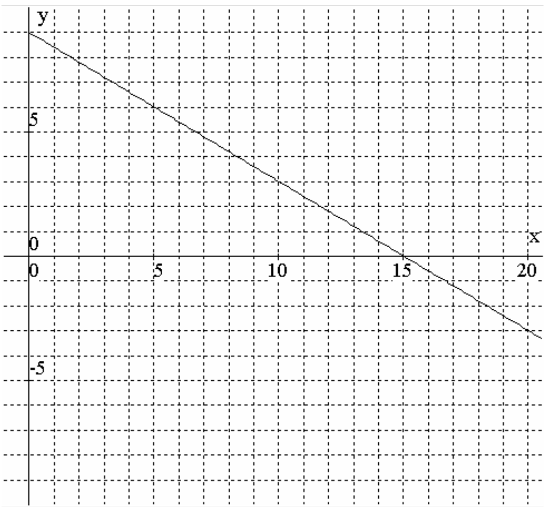
x			5		20		
y			120		75		

e)

x			15		36		
y			67		145		

Opgave 14

Maak een formule bij de grafiek



Opgave 15

Per jaar stijgt een hoeveelheid met 7. In 1987 is de hoeveelheid 31.

a) Hoe groot is de hoeveelheid in 2010?
b) In welk jaar passeert de hoeveelheid de grens 600?

Opgave 16

Het is belangrijk dat je zelf kunt overgaan van de ene representatie naar de andere.

Bij welke overgangen kan de GR een rol spelen?

Hoofdstuk 3: Exponentiële functies

Centrale vraag
Wat is een exponentiële functie en hoe herken je die in verschillende representaties?

Er is sprake van een exponentiële functie als er een vaste groeifactor per (tijds)eenheid is. Dit patroon zie je misschien wel het beste in een tabel.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	10
y	5	15	45	135	405	1215	?	?	?

Je ziet dat steeds als x één groter wordt, y met 3 wordt vermenigvuldigd: we zeggen dat de **groeifactor** 3 is. Welke y-waarden horen dus bij x=6, bij x=7 en bij x=10?
We zullen ook vaak de **beginwaarde** vermelden. Dit is de y-waarde bij x=0; in ons voorbeeld dus 5.

Opgave 17
De exponentiële functie kom je veel in de wereld om je heen tegen. De volgende voorbeelden illustreren dat.
Zeg in elk voorbeeld wat x voorstelt en wat y voorstelt. Zoek steeds naar de groeifactor en naar de beginwaarde.

a We vouwen een stuk papier steeds dubbel en kijken naar het aantal lagen.

b Een zeker soort bacteriën verdrievoudigt ieder uur. Op tijdstip 0 zijn er 20 bacteriën.

c Op een spaarrekening krijg je 5% rente per jaar; je zet 2000 euro op de spaarrekening en laat de rente ieder jaar bijschrijven.

d Een A_0-vel is 2 keer zo groot als een A_1-vel. Een A_1-vel is 2 keer zo groot als een A_2-vel. Enzovoort. De oppervlakte van A_0-formaat is 1 m^2.

e In de afgelopen twee eeuwen is de hoeveelheid gedrukt materiaal – boeken, tijdschriften etc. – enorm toegenomen. Niet alleen werden er steeds meer exemplaren gedrukt, maar ook het aantal (verschillende) publicaties is erg sterk gestegen. Zo is sinds 1820 wereldwijd het aantal tijdschriften elke 18 jaar verdubbeld.

f Hoe dieper je onder water komt des te donkerder het wordt. Iedere meter die je dieper gaat neemt de hoeveelheid licht met ongeveer 25% af. Zeg dat de hoeveelheid licht op het wateroppervlak 100 is.

Net zoals bij lineaire functies kunnen we kijken naar de verschillende representaties en nagaan hoe je een exponentiële functie herkent.

Opgave 18

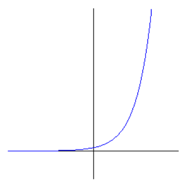
a) Zeg in eigen woorden wanneer er sprake is van een exponentiële functie.
b) Bestudeer onderstaand schema.

<table>
<tr>
<td>Context

‘vaste groeifactor’
of
‘vast percentage per … erbij’</td>
<td>Tabel

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>y</td><td>12</td><td>36</td><td>108</td><td>324</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Steeds met hetzelfde vermenigvuldigen (hier steeds maal 3)</td>
</tr>
<tr>
<td>Formule

$y = a \cdot g^x$ (hier $y = 12 \cdot 3^x$)</td>
<td>Grafiek

kromme lijn in de gedaante zoals hiernaast (hier door (0,12))
</td>
</tr>
</table>

Opgave 19

We vouwen een stuk papier steeds dubbel en kijken naar het aantal lagen. x is het aantal keren vouwen en y het aantal lagen.

a) Maak hierbij een tabel, grafiek en formule.
b) Zeg bij elk van deze drie representaties hoe je eraan ziet dat het een exponentiële functie betreft.

Opgave 20

Kies zelf een context met een exponentiële functie. Maak daarbij de drie andere representaties (tabel, grafiek en formule).

Centrale vraag

Hoe maak je een formule van een exponentiële functie bij een tabel?

Opgave 21

Vul de ontbrekende waarden in en maak een formule bij de volgende tabel (er is sprake van een exponentiële functie)

x	0	1	2	3	4	5	6	8	10
y	120	96	76,8	61,4	49,2				

Opgave 22

In de volgende tabellen is het niet direct duidelijk hoe groot de groeifactor is.
Probeer steeds eerst zelf de groeifactor per eenheid te vinden en daarna de formule. Lukt dat niet, volg dan de hulpvragen die na de tabellen staan.

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	8	10
y	51		64		80				

b)

x	0	1	2	3	4	5	6
y				36			76

c)

x	0	1	2	3	4	6	10
y			180		80		

d)

x	0	5	10	15	20	25	30
y			900		810		

Hulpvragen bij tabel a)

Hulp1
Toon aan dat de groeifactor meer dan 1,2 is en minder dan 1,4.

Hulp2
Voor de groeifactor g geldt de vergelijking: $51 \cdot g \cdot g = 64$.
Leg dit uit.
Welke vergelijking(en) had je ook kunnen opschrijven?

Hulp3
Nu moet je de vergelijking oplossen; gebruik je GR om een oplossing te vinden.

Bij exponentiële functies worden de begrippen *groeipercentage* en *verdubbelingstijd* of *halveringstijd* gebruikt.
Omdat er bij exponentiële functies een vaste groeifactor is, is er ook een vast groeipercentage.
Het verband tussen groeifactor en groeipercentage zie je in de volgende tabel.

Opgave 23
Vul deze tabel verder in en leg in eigen woorden uit hoe het verband tussen beide is.
(Een formule is een mooie manier om zo'n verband te beschrijven.)

groeifactor	groeipercentage
1,05	5%
1,40	40%
0,85	-15%
0,20	-80%
3,40	?
?	300%
1,76	?
0,01	?

Opgave 24
Een hoeveelheid groeit met 200% per jaar (dat is het groeipercentage).
Bereken het groeipercentage per tien jaar.

Bij exponentiële functies is de verdubbelingstijd interessant, tenminste als de groeifactor groter dan 1 is. Dat is de tijdsduur waarin de hoeveelheid twee keer zo groot wordt.
De verdubbelingstijd hangt bij exponentiële functies niet af van het tijdstip waarop je kijkt of van de hoeveelheid die er is. Bij bijvoorbeeld lineaire functies is dat wel het geval, zoals blijkt uit opgave 25.

Opgave 25
Een hoeveelheid groeit lineair in de tijd volgens de formule $y = 2x+10$, waarbij y de hoeveelheid is in kg en x de tijd in uur.
a) Kies x = 1. Hoe lang duurt het voordat de hoeveelheid is verdubbeld?
b) Kies x = 2. Hoe lang duurt het voordat de hoeveelheid is verdubbeld?
c) Kies x = 5. Hoe lang duurt het voordat de hoeveelheid is verdubbeld?

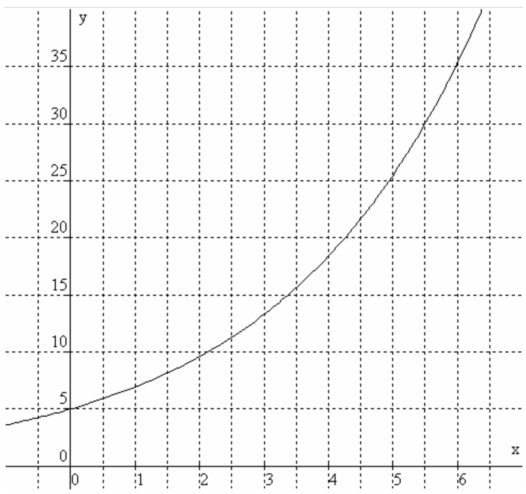
Je ziet dat de verdubbelingstijd afhangt van het tijdstip waarop je kijkt (en van de hoeveelheid die er dan is). Bij exponentiële groei is de tijd die het duurt voordat de hoeveelheid is verdubbeld altijd hetzelfde; die hangt dus niet af van het tijdstip waarop je kijkt (of van de hoeveelheid die er is). In opgave 26 en 27 gaan we dat in twee voorbeelden na.

Opgave 26
Een hoeveelheid groeit exponentieel in de tijd volgens de formule $y = 10 \cdot 2^x$, waarbij y de hoeveelheid is in kg en x de tijd in uur.
a) Kies x = 1. Hoe lang duurt het voordat de hoeveelheid is verdubbeld?
b) Kies x = 2. Hoe lang duurt het voordat de hoeveelheid is verdubbeld?
c) Kies x = 5. Hoe lang duurt het voordat de hoeveelheid is verdubbeld?

Op een gegeven moment x is er een zekere hoeveelheid y.
d) Leg uit dat 1 uur later, dus op het moment x+1, de hoeveelheid is verdubbeld.

Opgave 27
Een hoeveelheid groeit exponentieel met groeifactor 1,07 per jaar.
a) Neem beginwaarde 100. Toon aan dat de hoeveelheid in ongeveer 10 jaar verdubbelt.
b) Leg uit dat ook bij andere beginwaarden de hoeveelheid in ongeveer 10 jaar verdubbelt.
c) Leg uit dat uit b) volgt dat ook voor andere tijdstippen geldt dat de hoeveelheid in ongeveer 10 jaar verdubbelt.

Conclusie
Bij exponentiële functies (met groeifactor groter dan 1) is de tijdsduur waarin de hoeveelheid wordt verdubbeld onafhankelijk van het tijdstip en van de hoeveelheid, maar slechts afhankelijk van de groeifactor. Die tijdsduur heet de **verdubbelingstijd**.



Opgave 28
Hiernaast staat de grafiek van een exponentieel groeiproces.
a) Lees de verdubbelingstijd af.
b) Bepaal de verdubbelingstijd van een exponentieel groeiproces met groeipercentage 1% per jaar.

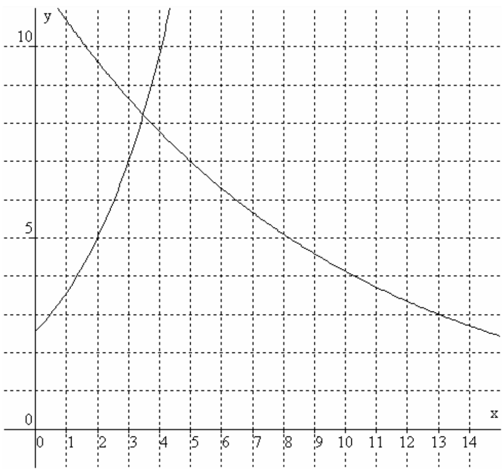
Nu omgekeerd. Stel dat de verdubbelingstijd 18 jaar is, dat wil zeggen dat iedere 18 jaar de hoeveelheid twee keer zo groot wordt.

Opgave 29
We werken met de context van opgave 17e). Sinds 1820 is wereldwijd het aantal tijdschriften elke 18 jaar verdubbeld.
a) Bepaal het jaarlijkse groeipercentage.

Een hoeveelheid groeit exponentieel. De halveringstijd is 20 jaar.
b) Bepaal met hoeveel procent de hoeveelheid per jaar afneemt.

Opgave 30
Een hoeveelheid groeit met 20% per jaar. De beginhoeveelheid is 60.
a) Maak een formule.
b) Bereken het groeipercentage per 10 jaar.
c) Bereken het groeipercentage per maand.

Opgave 31
Hieronder staan de grafieken van twee exponentiële functies.
Maak bijbehorende formules.



Opgave 32
Bij de datering van archeologische vondsten wordt vaak gebruik gemaakt van kennis over het verval van radioactieve isotopen. Tot een ouderdom van ca 60 000 jaar gebruikt met de C-14 methode (radioactief koolstof). Voor nog oudere vondsten wordt o.a. Kalium-40 gebruikt.
De halveringstijd van C-14 is 5730 jaar.
a) Laat zien dat de hoeveelheid C-14 elke eeuw met ca. 1,2 % afneemt
b) Laat zien dat na 60 000 jaar meer dan 99,9 % van de C-14 is verdwenen.

In de praktijk wordt bij een archeologische vondst van organisch materiaal (bijvoorbeeld een stuk hout) de ouderdom als volgt vastgesteld. Men meet hoeveel procent C-14 het materiaal bevat in vergelijking met "vers" soortgelijk materiaal (bijvoorbeeld een levende boom), waarvan de hoeveelheid C-14 op 100% wordt gesteld. Na de dood van het organisme neemt de hoeveelheid C-14 exponentieel af.

Opgave 33
Veronderstel dat in een opgegraven houten beeldje nog 60% van de C-14 over blijkt te zijn.
Bereken de ouderdom van het beeldje.

Opgave 34
Er is een verband tussen het groeipercentage en de verdubbelingstijd van een exponentiële functie.
a) Vul de tabel in:

groeipercentage	verdubbelingstijd	groeipercentage × verdubbelingstijd
1		
2		
3		
	20	
	25	
	30	

Als het groeipercentage *p* niet te groot is, geldt voor de verdubbelingstijd d dat d × p nagenoeg gelijk is aan … .
Deze vuistregel is redelijk goed als $p < 7\%$. Hoe kleiner *p*, des te beter is de vuistregel.
b) Welk getal past op de … ?

Opgave 35
Mijn huidige spaarrekening geeft slechts 3,3% rente per jaar. Mijn oog viel op een advertentie van een concurrent die 3,75% per jaar aanbood. Nadeel was wel dat er 1% boete betaald moet worden als geld van de spaarrekening gehaald wordt. Maar, stond erbij, ´dit aanbod is meer dan 2,75% per jaar´.

Stel ik breng mijn geld naar de concurrent en besluit het na 1 jaar weer op te nemen.
a) Toon aan dat de concurrent geen gelijk heeft met zijn opmerking dat 3,75% per jaar met een boete van 1% meer oplevert dan 2,75% per jaar.

Stel ik breng mijn geld naar de concurrent en besluit het na 2 jaar weer op te nemen.
b) Toon aan dat de concurrent nu wel gelijk heeft met zijn opmerking dat 3,75% per jaar met een boete van 1% meer oplevert dan 2,75% per jaar.

Stel ik breng mijn geld naar de concurrent en besluit het na 4 jaar weer op te nemen.
c) Hoeveel procent rente heb ik dan effectief per jaar ontvangen?
d) Na hoeveel jaar is het spaarbedrag bij de concurrent groter dan bij mijn huidige bank met zijn 3,3%?

Opgave 36
Uit de Volkskrant van januari 2000
Per etmaal verwerkt de A2 in Maastricht zestigduizend voertuigen. Die intensiteit groeit met 3 procent per jaar. De prognoses gaven de gemeente vorig jaar aanleiding alarm te slaan.
….
De gemeente opperde daarna het plan van een toltunnel. Voor wethouder J. Aarts van Maastricht blijft de tunnel absolute noodzaak. 'Over tien jaar hebben we hier een verkeers-toename van 50%. Dat los je met geen techniek meer op. Bovendien blijven we zonder die tunnel met een gigantische lawaai- en stankoverlast zitten'.

Onderzoek of de genoemde 3% groei per jaar past bij de genoemde 50% groei over tien jaar.

Opgave 37

Een verdovingsmiddel verdwijnt maar langzaam uit het bloed. We nemen aan dat de concentratie verdovingsmiddel exponentieel afneemt.
Een dierenarts moet een hond van 25 kg opereren. De operatie zal maximaal drie uur duren. Van het verdovingsmiddel is bekend dat de concentratie in 4 uur gehalveerd wordt, en dat er minimaal 12 mg per kg lichaamsgewicht aanwezig moet zijn om de hond verdoofd te houden.

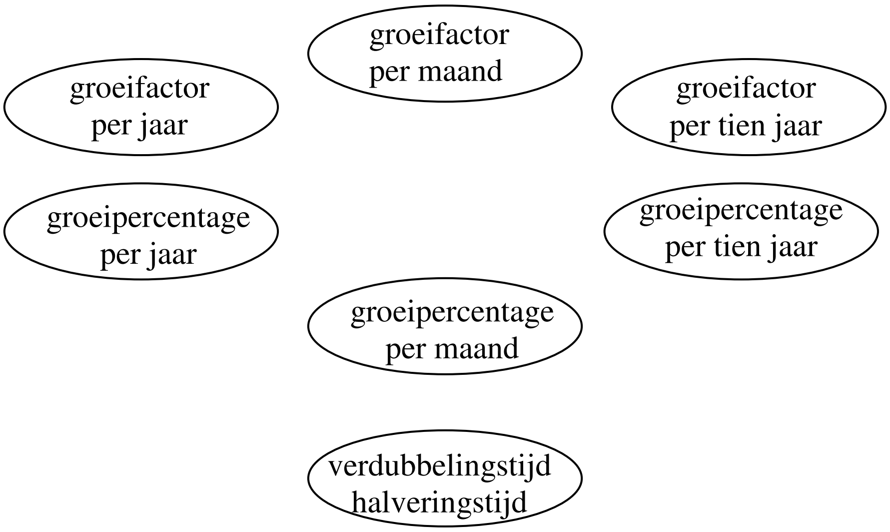
a) Toon aan dat de concentratie verdovingsmiddel per uur met (ongeveer) 16% afneemt.
b) Bereken hoeveel verdovingsmiddel voor de operatie bij de hond ingespoten moet worden.

Centrale vraag

Hoe is het verband tussen de verschillende begrippen bij een exponentiële functie?

Opgave 38

Als het goed is heb je zo langzamerhand een overzicht van de verbanden tussen de begrippen bij exponentiële functies. Die begrippen vind je in de figuur hieronder.



a) Geef door middel van lijnen aan of je rechtstreeks uit het ene het andere kan berekenen. Bijv. als je rechtstreeks vanuit het ´groeipercentage per jaar´ het ´groeipercentage per maand´ kan berekenen (en omgekeerd), dan trek je een lijn tussen ´groeipercentage per jaar´ en ´groeipercentage per maand´.
b) Geef bij alle lijnen een getallenvoorbeeld of een formule.

Hoofdstuk 4: Herhaling en oefening met exponentiële functies

Maak een keuze:
- maak opgave 39 (zelf veel puzzelen)

of
- maak de opgaven 40 t/m 52 (recht voor zijn raap oefenen met ook opgaven over lineaire functies)

Opgave 39
In deze opgave werken we met maanden van 4 weken.
Hieronder zie je van zeven verschillende exponentiële functies steeds vier kaartjes.
Zoek de kaartjes bij elkaar die bij dezelfde exponentiële functies passen.

<table>
<tr><td>Formule $y = 240 \cdot 0{,}81^x$, met x in weken</td><td>Groeipercentage per week is 18%</td><td>Bij $x = 3$ hoort $y = 90$</td></tr>
<tr><td>Formule $y = 200 \cdot 0{,}95^x$, met x in weken</td><td>Groeipercentage per week is 10%</td><td>Bij $x = 6$ hoort $y = 177{,}2$</td></tr>
<tr><td>Formule $y = 80 \cdot 1{,}04^x$, met x in weken</td><td>Groeipercentage per 2 weken is 39,2%</td><td>Bij $x = 10$ hoort $y = 259{,}4$</td></tr>
<tr><td>Formule $y = 100 \cdot 1{,}03^x$, met x in weken</td><td>Groeipercentage per jaar is 365%</td><td>Bij $x = 9$ hoort $y = 235{,}8$</td></tr>
<tr><td>Groeifactor per week is 1,18</td><td>Groeipercentage per week is 3%</td><td>Bij $x = 1$ hoort $y = 190$
Bij $x = 2$ hoort $y = 180{,}5$</td></tr>
<tr><td>Groeifactor per 10 weken is 5,23</td><td>Groeipercentage per maand is 26%</td><td><table><tr><td>x</td><td></td><td>3</td><td></td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>127,5</td><td></td><td>67,8</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>De verdubbelingstijd is 17,7 weken</td><td>Groeipercentage per week is 6%</td><td>De hoeveelheid neemt per week af met 19%.</td></tr>
<tr><td>De verdubbelingstijd is 11,9 weken</td><td>Groeipercentage per maand is 17%</td><td>Afnamepercentage per 4 weken is 19%</td></tr>
<tr><td>De halveringstijd is 13,5 weken</td><td>Groeipercentage per maand is 13%</td><td>Verachtvoudiging in 35,7 weken</td></tr>
<tr><td>De halveringstijd is 3,3 weken</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Opgave 40

Toon aan dat het verband tussen x en y exponentieel kan zijn.

x	0	1	2	3	4	5	…	
y	5	15	45	135	405			

Opgave 41

Geef zelf twee voorbeelden van tabellen van een exponentieel verband tussen x en y.

x								
y								

x								
y								

Opgave 42

a) Leg uit dat formules bij exponentiële verbanden van de vorm $y = a \cdot g^x$ zijn.

b) Maak een formule bij de tabel in opgave 40.

Opgave 43

a) Maak een tabel voor de formule $y = 200 \cdot 1{,}5^x$ zoals hieronder.

x		3	5	10				
y								

b) Leg uit hoe je, uitgaande van de tabel, de formule terug kunt vinden.

Opgave 44

Maak bij de volgende tabellen een formule; er is steeds sprake van een exponentieel verband.

x		20	30	
y		5000	7000	

x		5	8	11	
y		250	200	160	

x		100	105	110	
y		200	220	242	

Opgave 45

Uit onderzoek blijkt dat de bevolking in een land iedere 10 jaar groeit met 18%.

a) Vul onderstaande tabel in.

Tijd	2000	2010	2020	2030	2040	2050
Aantal	100					

b) Wat is de groeifactor per 10 jaar?

c) Bereken de groeifactor per jaar.

d) Met hoeveel procent neemt de bevolking per jaar toe?

Opgave 46
De bevolking van een stad groeit exponentieel. Elke 10 jaar neemt hij toe met 25%. Op 1 januari 1990 waren er 27000 inwoners.
In welk jaar passeert de stad de grens van 100000 inwoners?

Opgave 47

t	0	3	6	9	
y	120	187	292	456	

t is de tijd in weken, *y* is de hoeveelheid.
a) Toon aan dat er sprake kan zijn van exponentiële groei.
b) Bereken het wekelijkse stijgingspercentage.

Opgave 48
De halveringstijd bij de radioactieve stof Strontium90 is 28 jaar.
a) Bereken de groeifactor per jaar.
b) Met hoeveel procent neemt de straling per jaar af?

Opgave 49

t	0	5	10	15				
y	48,0	42,4	36,8	31,2				

a) Toon aan dat er sprake kan zijn van een lineaire afname.
b) Maak een formule bij de tabel.

Opgave 50
Als de prijs van een product, dat nu 230 euro kost, vijf jaar achtereen stijgt met 7% per jaar en vervolgens vijf jaar daalt met 5% per jaar, komt de prijs dan na 10 jaar even hoog uit als wanneer de prijs tien jaar lang gestegen zou zijn met 2% per jaar?

Opgave 51
Hieronder staat van twee exponentiële functies een tabel.

t	0	1	2	3	4			
y	123	148	177	213	255			

t		6	10	14				
y		800	736	677				

Maak voor beide functies een formule.

Opgave 52
Bij een lineaire groei is na 8 weken de hoeveelheid 160 kg en na 13 weken 280 kg.
Bereken de hoeveelheid na 15 weken.

Hoofdstuk 5: $3^{\frac{1}{5}}$ *en* 2^{-3}*, wat is dat?*

Centrale vraag

Wat is handig aan gebroken en negatieve exponenten zoals bij $3^{\frac{1}{5}}$ ***en*** 2^{-3} ***?***

Hoe groot zijn $3^{\frac{1}{5}}$ ***en*** 2^{-3} ***?***

Bij exponentiële groeiprocessen hebben we tot nu toe enkel gekeken naar de hoeveelheid op *positieve gehele* tijdstippen. Als bijvoorbeeld de groeifactor 1,02 per uur is en de begin-hoeveelheid is 17, dan is de hoeveelheid na 7 uur: $17 \cdot 1{,}02^7$.
De vouw-context geeft geen aanleiding om over andersoortige exponenten te praten. Maar als je bijvoorbeeld een bedrag zet op een spaarrekening met 5% rente per jaar en de rente wordt steeds op die rekening bijgeschreven, dan zouden gebroken exponenten wel een rol kunnen spelen. Het is immers mogelijk dat je het spaargeld na 2,5 jaar van de rekening wilt halen. Stel dat het startbedrag 1000 euro is, dan zou je na 2,5 jaar op de rekening hebben: $1000 \cdot 1{,}05^{2,5}$.
De betekenis van $1000 \cdot 1{,}05^3$ is duidelijk: $1000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05$.
De betekenis van $1000 \cdot 1{,}05^{2,5}$ is heel wat lastiger.
Je rekenmachine heeft geen enkele moeite met de berekening; probeer maar. Blijkbaar is er met gebroken exponenten goed te rekenen, en we willen natuurlijk begrijpen hoe dat zit.

We willen dus expressies als $2^{\frac{1}{3}}$ betekenis geven. Daarbij willen we dat de rekenregels die bij gehele exponenten gelden zoveel mogelijk intact blijven.
Deze rekenregels zijn (zie de context van vouwen):
$2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$,
$2^a : 2^b = 2^{a-b}$,
$(2^a)^b = 2^{a \cdot b}$.

Als deze rekenregels blijven gelden, zou: $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^1$, zodat $2^{\frac{1}{3}}$ een oplossing is van de vergelijking $x^3 = 2$. Deze oplossing hebben vroeger $\sqrt[3]{2}$ genoemd.

Opgave 53

We maken een soortgelijke afspraak voor $3^{\frac{1}{5}}$, $10^{\frac{1}{4}}$ en $33^{\frac{1}{23}}$.
Zeg bij elk van deze drie getallen van welke vergelijking het een oplossing is en noteer het getal met een wortelteken.

Dit kan ons helpen om bijvoorbeeld de groeifactor van een exponentieel groeiproces te zoeken. Stel dat je weet dat de groeifactor per 4 weken gelijk is aan 1,20. Dan is de groei-factor per week gelijk aan $1{,}20^{\frac{1}{4}}$. Tik in je rekenmachine in: 1.20 ^ (1/4) of 1.20 ^ 0.25 en je rekenmachine doet zijn werk.

Opgave 54
Bekijk opgave 44 van het vorige hoofdstuk waarbij je bij een tabel een formule van een exponentiële functie moest maken.
Gebruik de hierboven genoemde methode om de groeifactor te vinden.

Op een zelfde wijze kunnen we nadenken over de betekenis van expressies als 2^{-3}.

De rekenregel $\dfrac{2^a}{2^b} = 2^{a-b}$ zou je willen uitbreiden voor de gevallen dat a<b.

Neem bijvoorbeeld *a*=5 en *b*=8. De rekenregel geeft dan: $\dfrac{2^5}{2^8} = 2^{5-8} = 2^{-3}$.

Anderzijds kun je $\dfrac{2^5}{2^8}$ vereenvoudigen tot $\dfrac{1}{2^3}$. Dus zou moeten gelden: $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3}$.

Algemeen spreken we af:

$2^{-n} = \dfrac{1}{2^n}$ en $2^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{2^p} = (\sqrt[q]{2})^p$

Natuurlijk kun je voor het grondtal ook andere waarden dan 2 kiezen.

Opgave 55

a) Om deze regels beter te kunnen lezen moet je de regels opschrijven voor enkele waarden van *n* en *p*, *q*. Doe dit.

b) Deze regels moet je ook van rechts naar links kunnen gebruiken: dus bijvoorbeeld $\sqrt[q]{2^p}$ schrijven als $2^{\frac{p}{q}}$. Oefen die weer voor enkele zelfgekozen waarden van *n* en *p*, *q*.

c) Bereken zonder GR:
- $3^{-2} =$
- $64^{\frac{1}{2}} =$
- $5^{-3} =$
- $27^{\frac{2}{3}} =$
- $4^{-\frac{1}{2}} =$
- $9^{\frac{3}{2}} =$

Machten gebruiken we veel bij het vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen en worteltrekken.

Opgave 56

Schrijf de volgende wortels als machten , bereken de uitkomst als macht en schrijf die ook weer als wortel.
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$
- $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5^3}$
- $(\sqrt[5]{2^4})^3$

Ook in de context van een verdubbeling per uur kun je betekenis geven aan $2^{\frac{1}{3}}$ en aan 2^{-3}.

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	2
y	1	?	?	2	?	?	4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	?	?	?	1	2	4	8

$2^{\frac{1}{3}}$ zou de groeifactor per een-derde uur zijn. Drie keer een-derde uur na elkaar maakt een vol uur, en daarover is de groeifactor 2. Dus $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.
2^{-3} zou de groeifactor per drie-uur-terug-in-de-tijd zijn. In drie-uur-vooruit-in-de-tijd is de groeifactor 8, dus per drie-uur-terug-in-de-tijd is die $\frac{1}{8}$.

Opgave 57
Wat zijn de andere vijf getallen in de bovenstaande tabellen die met een ? zijn aangegeven.

Opgave 58
We gaan terug naar de context over de hoeveelheid gedrukt materiaal.
In de afgelopen twee eeuwen is de hoeveelheid gedrukt materiaal – boeken, tijdschriften etc. – enorm toegenomen. Niet alleen werden er steeds meer exemplaren gedrukt, maar ook het aantal (verschillende) publicaties is erg sterk gestegen. Zo is sinds 1820 wereldwijd het aantal tijdschriften elke 18 jaar verdubbeld. In 1820 waren er ca. 3000 tijdschriften.
a) Hoeveel % bedroeg de jaarlijkse groei ongeveer?

Er zijn een heleboel gedaantes voor de formule waarmee je het aantal tijdschriften N in een bepaald jaar kunt berekenen. Een paar van de mogelijke gedaantes zijn:
- $N = 3000 \cdot 1{,}04^{t}$
- $N = 3000 \cdot 2^{p}$
- $N = 3000 \cdot 2^{\frac{q}{18}}$
- $N = 3000 \cdot 1{,}04^{j-1820}$

b) Zeg bij iedere formule wat de variabele (t, p, q en j) precies voorstelt.
c) Welke van deze vier formules vind je het prettigst werken? Waarom?

Nu we beschikken over gebroken en negatieve exponenten kijken we hoe onze opa’s en oma’s dit gebruikten om hun vermenigvuldiging en deling van grote getallen te maken.
In bijlage 3 zie je een tabel van machten van 10.

Opgave 59
a) Kijk naar de waarden van 10^p voor p = -2 t/m -1,1, voor p = -1 t/m -0,1, voor p = 0 t/m 0,9 en voor p = 1 t/m 1,9. Wat valt je op? Kun je dat verklaren?
b) Wat zijn dus de ontbrekende waarden van 10^p voor p = 2,7 en p = 2,8?
c) Weet je nu ook de waarden van 10^p voor p = 3 t/m 3,9?

In de eerste kolom loopt de waarde van p op met stapjes van 0,1. In de tweede en derde kolom loopt de waarde van p op met stapjes van 0,01.

⌛ **Centrale vraag**
Hoe kun je de tabel met machten van 10 (bijlage 3) gebruiken om een de uitkomst van bijvoorbeeld 432 · 7965 uit te rekenen?

Opgave 60
Voordat we hiermee aan de slag gaan, eerst nog even de rekenregels van machten herhalen.
a) Bereken en schrijf de uitkomst als macht van 10:

- $10^3 \cdot 10^4 = 10^{\cdots}$
- $10^{1,3} \cdot 10^4 = \ldots.$
- $(10^3)^4 = \ldots.$
- $\dfrac{10^{2,5}}{10^{1,25}} = \ldots.$
- $\dfrac{10^{3}}{10^{7,5}} = \ldots.$

Bij de tweede stip heb je berekend: 19,9526… · 10000 = 1995,26…; immers $10^{1,3} = 19,9526$ en $10^4 = 10000$.
b) Schrijf zo ook berekeningen die je bij de vierde en vijfde stip hebt gedaan.

Voor heel grote en kleine getallen wordt vaak de *wetenschappelijke notatie* gebruikt. Die kom je vooral in de natuur- en sterrenkunde tegen.
Een getal wordt dan geschreven in de vorm $\ldots \cdot 10^{\cdots}$. Preciezer: in de vorm $a \cdot 10^b$, waarbij a tussen 1 en 10 ligt. Je GR schakelt daar automatisch op over als de getallen te groot worden. Je zult dat vast wel eens tegengekomen zijn.
c) Welke uitkomst geeft je GR als je 13^9 intikt? Interpreteer deze uitkomst.
d) Doe hetzelfde voor $0,16^{10}$.
e) Schrijf de volgende getallen in de wetenschappelijke notatie, dus in de gedaante $a \cdot 10^b$, met $1 \leq a < 10$. Rond a steeds af op twee decimalen.

- 325768
- 976520000000
- 0,0003456
- 0,000000005678

Nu over naar de centrale vraag:

Hoe kun je de tabel met machten van 10 (bijlage 3) gebruiken om een de uitkomst van bijvoorbeeld 432 · 7965 uit te rekenen?

Opgave 61
Bedenk zelf hoe je 432 · 7965 met behulp van de tabel kunt berekenen?

Lukt dat niet dan kun je het volgende plan volgen:
- zet het eerste getal (432) om als macht van 10. (realiseer je dat 432 te schrijven is als $4,32*10^2$, om de tabel te kunnen gebruiken),
- zet het tweede getal (7965) om als macht van 10,
- voer de berekening uit met deze machten,
- zoek m.b.v. de tabel welk getal de uitkomst van deze berekening is.

Opgave 62

Maak met behulp van bijlage 3 de volgende berekeningen; schrijf je tussenstappen op.

- $3431 \cdot 234 \cdot 456 \cdot 829 =$
- $\dfrac{3456}{895} =$
- $\dfrac{456}{8956} =$
- $345^8 =$
- $\sqrt[4]{3456} =$

Je hebt in opgave 62 gezien dat een vermenigvuldiging door te werken met machten omgezet kan worden in een optelling, en daardoor wordt het rekenwerk eenvoudiger. De hier gehanteerde methode heeft als nadeel dat de nauwkeurigheid van het antwoord afhankelijk is van de nauwkeurigheid de tabel.

Opgave 63

a) Vul in: Door het werken met machten wordt een deling omgezet in een ….. .
   Vul in: Door het werken met machten wordt een derdemachtswortel omgezet in een ….. .
b) Bedenk zelf twee berekeningen die je met behulp van machten van 10 (in bijlage 3) kunt maken.

Bijlage 3: machten van 10

p	10^p
-2	0,01
-1,9	0,01259
-1,8	0,01585
-1,7	0,01995
-1,6	0,02512
-1,5	0,03162
-1,4	0,03981
-1,3	0,05012
-1,2	0,06310
-1,1	0,07943
-1	0,1
-0,9	0,1259
-0,8	0,1585
-0,7	0,1995
-0,6	0,2512
-0,5	0,3162
-0,4	0,3981
-0,3	0,5012
-0,2	0,6310
-0,1	0,7943
0	1
0,1	1,259
0,2	1,585
0,3	1,995
0,4	2,512
0,5	3,162
0,6	3,981
0,7	5,012
0,8	6,310
0,9	7,943
1	10
1,1	12,59
1,2	15,85
1,3	19,95
1,4	25,12
1,5	31,62
1,6	39,81
1,7	50,12
1,8	63,10
1,9	79,43
2	100
2,1	125,9
2,2	158,5
2,3	199,5
2,4	251,2
2,5	316,2
2,6	398,1
2,7	
2,8	

p	10^p
0	1
0,01	1,023
0,02	1,047
0,03	1,072
0,04	1,096
0,05	1,122
0,06	1,148
0,07	1,175
0,08	1,202
0,09	1,230
0,1	1,259
0,11	1,288
0,12	1,318
0,13	1,349
0,14	1,380
0,15	1,413
0,16	1,445
0,17	1,479
0,18	1,514
0,19	1,549
0,2	1,585
0,21	1,622
0,22	1,660
0,23	1,698
0,24	1,738
0,25	1,778
0,26	1,820
0,27	1,862
0,28	1,905
0,29	1,950
0,3	1,995
0,31	2,042
0,32	2,089
0,33	2,138
0,34	2,188
0,35	2,239
0,36	2,291
0,37	2,344
0,38	2,399
0,39	2,455
0,4	2,512
0,41	2,570
0,42	2,630
0,43	2,692
0,44	2,754
0,45	2,818
0,46	2,884
0,47	2,951
0,48	3,020

p	10^p
0,5	3,162
0,51	3,236
0,52	3,311
0,53	3,388
0,54	3,467
0,55	3,548
0,56	3,631
0,57	3,715
0,58	3,802
0,59	3,890
0,6	3,981
0,61	4,074
0,62	4,169
0,63	4,266
0,64	4,365
0,65	4,467
0,66	4,571
0,67	4,677
0,68	4,786
0,69	4,898
0,7	5,012
0,71	5,129
0,72	5,248
0,73	5,370
0,74	5,495
0,75	5,623
0,76	5,754
0,77	5,888
0,78	6,026
0,79	6,166
0,8	6,310
0,81	6,457
0,82	6,607
0,83	6,761
0,84	6,918
0,85	7,079
0,86	7,244
0,87	7,413
0,88	7,586
0,89	7,762
0,9	7,943
0,91	8,128
0,92	8,318
0,93	8,511
0,94	8,710
0,95	8,913
0,96	9,120
0,97	9,333
0,98	9,550

Hoofdstuk 6: Logaritmen

Centrale vraag

Wat doet de operatie 'log' ('logaritme') met een getal?

Opgave 64

a) Gebruik je GR om de volgende logaritmen uit te rekenen.

- log(10)
- log(100)
- log(1000)
- log(10000000)
- log(20)
- log(200)
- log(2000)
- log(20000000)
- log(70)

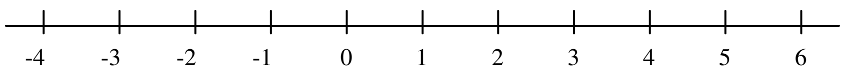
b) Formuleer wat "log" doet met een getal. Maak zo nodig nog extra voorbeelden

Wij werken (meestal) in het "tientallig stelsel". Belangrijk zijn daarin de getallen:
… , eenduizendste , eenhonderdste , eentiende , een , tien , honderd , duizend , … .
Die schrijven we ook zó:
… , 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} , 10^{0} , 10 , 10^{2} , 10^{3} , … .
De logaritmen van deze getallen zijn:
… , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , …

Met andere woorden: de logaritme van 10^n is n , voor elke geheel getal n.
Kort opgeschreven: $\log(10^n) = n$.

Deze formule nemen we over voor *alle* getallen x. Dus: $\log(10^x) = x$.

Opgave 65



Zeg van elk van de volgende getallen tussen welke twee opvolgende gehele getallen het ligt.
(Zonder rekenmachine! Gebruik die alleen als controle.)

- log(123)
- log(0,0123)
- log (96171)
- log(0,5)
- log(2010)

We willen natuurlijk preciezer zeggen hoe groot log(123) is. Dat kan met behulp van de tabel op bladzijde 24.
In de tabel vinden we $10^{0,09} = 1,230$, dus $\log(1,23) \approx 0,09$.
Controleer dat met de GR.

Nog vier voorbeelden

- log(4,7).

Op blz. 22 vinden we: $10^{0,67} = 4,677$ en $10^{0,68} = 4,786$. Dus ligt log(4,7) tussen 0,67 en 0,68. Mijn rekenmachine geeft: $10^{0,675} = 4,731\ldots$, dus is $\log(4,7) \approx 0,67$ (in twee decimalen nauwkeurig).

- log(47).

$47 = 10 \cdot 4,7 = 10^1 \cdot 10^{0,67} = 10^{1,67}$. Dus $\log(47) \approx 1,67$.

- log(4700).

$4700 = 1000 \cdot 4,7 = 10^3 \cdot 10^{0,67} = 10^{3,67}$. Dus $\log(47) \approx 3,67$.

- log(0,0047).

$0,0047 = 0,001 \cdot 4,7 = 10^{-3} \cdot 10^{0,67} = 10^{-2,33}$. Dus $\log(47) \approx -2,33$.

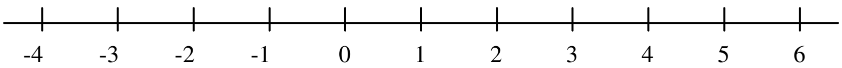
Opgave 66

Bereken zo ook:

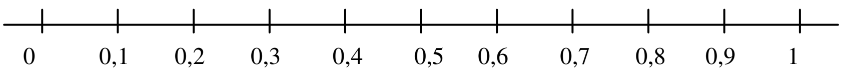
$\log(8,8)$, $\log(88)$, $\log(8,8 \cdot 10^7)$, $\log(0,088)$, $\log(8,8 \cdot 10^{-5})$

Opgave 67

Geef met behulp van de tabel op bladzijde 24 de volgende getallen aan op de getallenlijn. Zonder rekenmachine! Gebruik die alleen als controle.

a) 

log(5) , log(50) , log (500) , log(5000) , log(0,5) , log(0,05)

b) 

log(1) , log(2) , log(4) , log(6) , log(8)

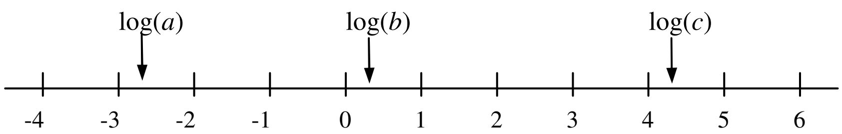
Opgave 68

a) Een getal is 10 keer zo groot als een ander getal.
Wat weet je van hun logaritmen?

b) De logaritmen van twee getallen verschillen 3.
Wat weet je van deze getallen?

Opgave 69

Op de getallenlijn hieronder zijn drie getallen aangegeven: log(a), log(b) en log(c).



Hoe groot zijn a, b en c ongeveer?

Definitie

De logaritme van bijv. 123 is de exponent waarvoor geldt: 10-tot-de-macht-die exponent is 123.

Anders gezegd: Er is maar één getal x waarvoor geldt: $10^x = 123$. Dat getal is log(123).

Om de logaritme van 123 te bepalen moet je dus een vergelijking oplossen: $10^{?} = 123$.

Algemeen:

$x = \log(a)$ is de oplossing van de vergelijking $10^x = a$.

✄ **Denkertje**
Bereken de exacte waarde van de volgende getallen, zonder een rekenmachine te gebruiken: $\log(\sqrt[3]{10})$, $\log(\frac{1}{\sqrt{10}})$, $\log(0{,}1^{3,5})$.

Opgave 70
a) Tussen welke twee opvolgende gehele getallen ligt:
- log(1234567)
- log(0,012345)
- log(9,99999)

b) Wat weet je van log(*a*), als *a* wordt geschreven met zeven cijfers voor de komma?
c) Wat weet je van log(*a*), als *a* kleiner dan 1 is en begint met zeven 0'en achter de komma?
d) Een getal is in standaardnotatie gegeven: $a \cdot 10^p$, met $1 < a < 10$ en p geheel.
Tussen welke twee opvolgende getallen ligt de logaritme van dit getal?

Je zou kunnen zeggen dat de logaritme je vertelt wat *de orde van grootte* is van een getal, ofwel met hoeveel cijfers je een getal schrijft.

✄ **Denkertje**
Mijn rekenmachine kan 2^{1000} niet uitrekenen; dat getal is namelijk te groot. Om iets van dat getal te weten te komen, gebruiken we logaritme.
a) Hoe groot is $\log(2^{1000})$, als je weet dat $2 \approx 10^{0,3010}$?
b) Hoeveel cijfers telt 2^{1000} als je dat getal volledig zou opschrijven?

⌛ **Centrale vraag**
Wat is het verband tussen log(x) en 10^x?

Op je GR zie je ‘log x’ op dezelfde toets staan als ‘10^x’. Dat is niet toevallig: de functie *logaritme nemen* is de *inverse* van de functie *10-tot-de-macht*.
(zoals *worteltrekken* de inverse is van *kwadrateren*, ‘*plus 5*’ de inverse van ‘*min 5*’ en ‘*deel door 5*’ de inverse van ‘*maal 5*’)

Opgave 71
a) - Kies het getal 7.
- Neem daar de logaritme van, dwz. bereken log(7).
- Bereken 10-tot-de-macht de uitkomst.
Welk getal krijg je?
b) Kies zelf nog een getal, het maakt niet uit welk, en doe er hetzelfde mee als wat je in a) met het getal 7 hebt gedaan.
Welk getal krijg je?
c) - Kies een getal.
- Bereken 10-tot-de-macht dit getal
- Neem de logaritme hiervan.
Welk getal krijg je?

Schematisch kan dit als volgt opgeschreven worden:

$a \rightarrow \boxed{\log} \rightarrow \ldots \rightarrow \boxed{10^{\cdots}} \rightarrow a$

In woorden: als je eerst van een getal de logaritme neemt en daarna op de uitkomst de functie 10-tot-de-macht laat werken, krijg je het oorspronkelijke getal weer terug.

En ook:

$a \rightarrow \boxed{10^{\cdots}} \rightarrow \ldots \rightarrow \boxed{\log} \rightarrow a$

In woorden: als je eerst op een getal de functie 10-tot-de-macht laat werken en daarna van de uitkomst de logaritme neemt, krijg je het oorspronkelijke getal weer terug.

Opgave 72

Hiernaast staan de grafieken van $y = \log(x)$ en van $y = 10^x$.
De twee grafieken zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

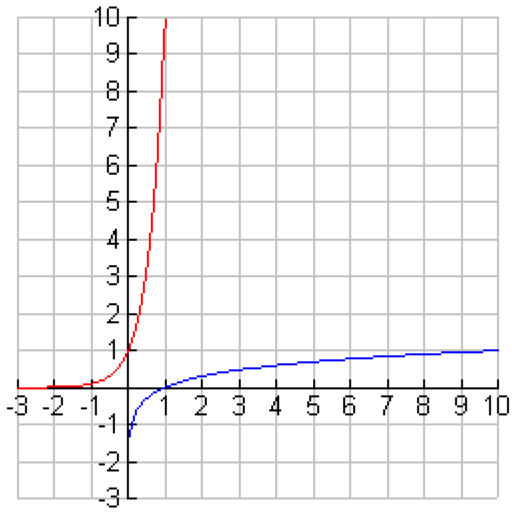
a) Kun je dat verklaren?

Het punt (π , 1385,456) ligt (nagenoeg) op de grafiek van $y = 10^x$.

b) Wat is het corresponderende punt op de grafiek van $y = \log(x)$?

In $y = 10^x$ kan x elk getal zijn en y elk positief getal.

c) Welke waarden kunnen x en y hebben in $y = \log(x)$?



Nieuwe getallen

Soms komen logaritmen mooi uit. Zo is log(0,01) geen nieuw getal: het is een andere schrijfwijze voor het getal −2.
Meestal komen logaritmen niet mooi uit. Zo kenden we het getal log(3) nog niet. En het is wel even wennen aan nieuwe getallen. Zoiets heb je al eerder ervaren, namelijk toen je in de derde klas kennismaakte met wortels; en al op de basisschool toen je voor het eerst met breuken ging werken. Eigenlijk is er nu weer hetzelfde aan de hand. Vergelijk maar eens de vragen over breuken, wortels en logaritmen in de volgende opgave.

Opgave 73

a) Zeg van elk van de volgende getallen tussen welke twee opvolgende gehele getallen het ligt. Geen rekenmachine gebruiken.
$\frac{12}{5}$, $\frac{31}{3}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{100}$, log(11) , log(700)

b) Wat is het kwadraat van $\sqrt{7}$?
Wat is het 333-voud van $\frac{88}{333}$?
Wat is 10-tot-de-macht log(7)?

c) Wat zijn de exacte oplossingen van de volgende vergelijkingen?
$x^2 = 777$
$777x = 123$
$10^x = 777$

Opgave 74

Los op; geef het exacte antwoord en (met de rekenmachine) een benadering:

- $10^x = 0{,}004$
- $10^x = 500$
- $100^x = 16$
- $0{,}1^x = 16$

Opgave 75

Leg de volgende formules uit:

$$10^{\log(a)} = a \text{ en } \log(10^a) = a$$

Opgave 76

Bereken zonder gebruik van GR

- $\log(10^5)$ = …. (schrijf zonder log)
- $\log(\sqrt{10})$ = ... (schrijf zonder log)
- Wat is x als $\log(3400) = \log(x)$?
- Wat is x als $10^x = 9$?
- Wat is x als $8*10^x = 24$?
- Wat is x als $\log(x) = 2$?
- Wat is x als $\log(2x) = 3$?

Denkmodel voor logaritme

Er is een denkbeeldige, onmetelijk grote vijver waarin 1 m^2 kroos ligt; het kroos vertienvoudigd iedere dag, d.w.z. iedere dag wordt de oppervlakte van het kroos met 10 vermenigvuldigd. We maken een tabel voor de eerste dagen:

Tijd in dagen	0	1	2	3	4	
Oppervlakte in m^2	1	10	100	1000	10000	

Bij deze tabel kunnen we de volgende formule maken: $Opp = 10^x$

In ons denkmodel kunnen we zeggen: log(70) is het tijdstip waarop er 70 m^2 kroos in de vijver ligt. Immers log(70) is de oplossing van de vergelijking $10^x = 70$.

We zouden ook kunnen zeggen: log(70) is de tijd die nodig is om de oppervlakte 70 keer zo groot te laten worden (de tijd die nodig is om van $Opp = 1$ naar $Opp = 70$ te groeien).

Dit denkmodel helpt om de volgende opgave te maken: $\log(40) + \log(70) = \log(....)$

Opgave 77

a) Interpreteer log(40) en log(70) in ons denkmodel en beredeneer wat de uitkomst moet zijn.

b) Hoeveel keer zo groot wordt de hoeveelheid in de tijdsduur log(40) + log(70)?
Kennelijk is log(40) + log(70) = log(….). (vul in)

c) Maak eventueel nog andere soortgelijke opgaven en formuleer een algemene regel:
- $\log(a) + \log(b) = \log(….)$

d) Maak soortgelijke algemene regels voor
- $\log(a) - \log(b) = \log(….)$
- $n \cdot \log(a) = \log(….)$

✄ **Denkertje**

Ook met behulp van de formules in opgave 75 kun je deze regels aantonen.
Probeer dat te doen.

Hoofdstuk 7: Logaritmische schaal

Centrale vraag
Wat is een logaritmische schaal en hoe werk je daarmee?

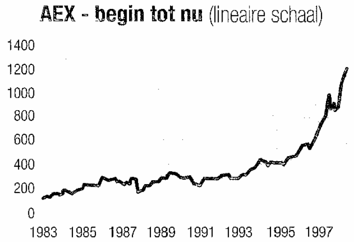
Hiernaast zie je een artikel uit een tijdschrift, dat bedoeld is om de lezer uit te leggen wat een logaritmische schaal is en waarom die gebruikt wordt.
Lees dit artikel.

De Geldboom: beleggen voor jongeren

Laat je niet misleiden door grafieken

Uit een grafiek kun je vaak meer informatie halen dan uit een stuk tekst van duizend woorden. En je krijgt die informatie ook sneller. Het verloop van de grafiek – van links naar rechts – geeft je in één klap een beeld van de ontwikkeling door de tijd. Maar laat je niet in de luren leggen door het plaatje! Je moet ook naar de zogenaamde assen kijken en die gegevens gebruiken bij het trekken van je conclusies.

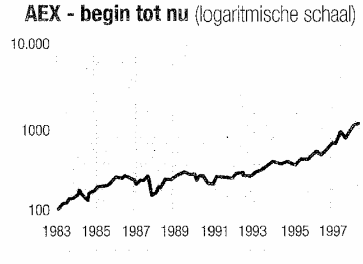
In deze Geldboom kijken we naar een grafiek van de AEX. De AEX is een graadmeter voor de vijfentwintig grootste fondsen van de Nederlandse beurs. De AEX bestaat sinds 1983 en had een startwaarde van 100. In onderstaand plaatje zie je wat er sindsdien is gebeurd. Kijk er maar eens goed naar en probeer voor jezelf een beschrijving te geven van wat je zoal ziet.



Je hebt het vast weleens op tv gehoord of in een krantenkop gelezen: de AEX is weer door een zoveel 100-puntengrens gegaan. En zo is het ook. De AEX ging in januari 1985 door de 200 punten, ruim vier jaar later door de 300 en weer bijna vijf jaar later door de 400-grens (december 1993). Daarna duurde het nog eens twee jaar voor het bereiken van de 500-puntengrens. Dat was begin 1996. En nu, twee jaar later, hebben we alweer zeven keer een 100-puntengrens doorbraak gehad. De AEX ging midden juli door de 1300 punten.

Wat is hier nu het misleidende aan?
Het misleidende aan zowel bovenstaande grafiek als bovenstaande tekst, is dat we kijken naar een zogenaamde lineaire schaal. Dat wil zeggen dat we naar absolute stijgingen en dalingen kijken. Om de waarde van een absolute stijging te bepalen, heb je vaak meer informatie nodig. Stel je bijvoorbeeld voor dat jij en je kleine broertje ieder een gulden meer zakgeld krijgen. Stel dat jij van 10 naar 11 gulden gaat en je broertje van 2 naar 3 gulden. Voor je broertje betekent die ene gulden een veel grotere vooruitgang! Dat wordt nog duidelijker wanneer je vader of moeder van hun baas te horen krijgen dat zij een gulden meer in de week gaan verdienen. Voor hen is deze stijging, die absoluut gezien precies hetzelfde is, praktisch te verwaarlozen! Wat je noemt een druppel op een gloeiende plaat. Dat komt door de relatieve waarde.
Zo werkt dat ook met de AEX. Op een beginstand van 100 is een 100-puntenstijging relatief gezien veel groter dan vanaf een niveau van 1100. En daarom is het ook te verwachten, dat bij een hogere stand van de AEX zo'n stijging zich in een kortere periode voltrekt.

Dus grafieken geven altijd een verkeerd beeld?
Nee! Meestal zie je om je heen grafieken zoals hiernaast. Maar we kunnen ook een ander soort grafiek gebruiken, die wel rekening houdt met het niveau. Zo'n grafiek heeft een logaritmische schaal in plaats van een lineaire schaal. Bij een lineaire schaal heeft elke stijging van bijvoorbeeld 0,5 cm absoluut gezien dezelfde betekenis (in dit geval een stijging van 100 punten). Relatief gezien – ten opzichte van de waarde van de AEX – heeft deze stijging niet dezelfde betekenis! Bij een grafiek met een logaritmische schaal is het net andersom. Absoluut gezien betekent het niet hetzelfde, maar relatief of procentueel gezien wel. Hieronder zie je zo'n grafiek.



En nu zie je dat het verloop van de AEX eigenlijk veel geleidelijker is en dat er geen sprake meer is van een explosieve stijging!

TEKST: ARLET TE VAN DITSHUIZEN

Opgave 78

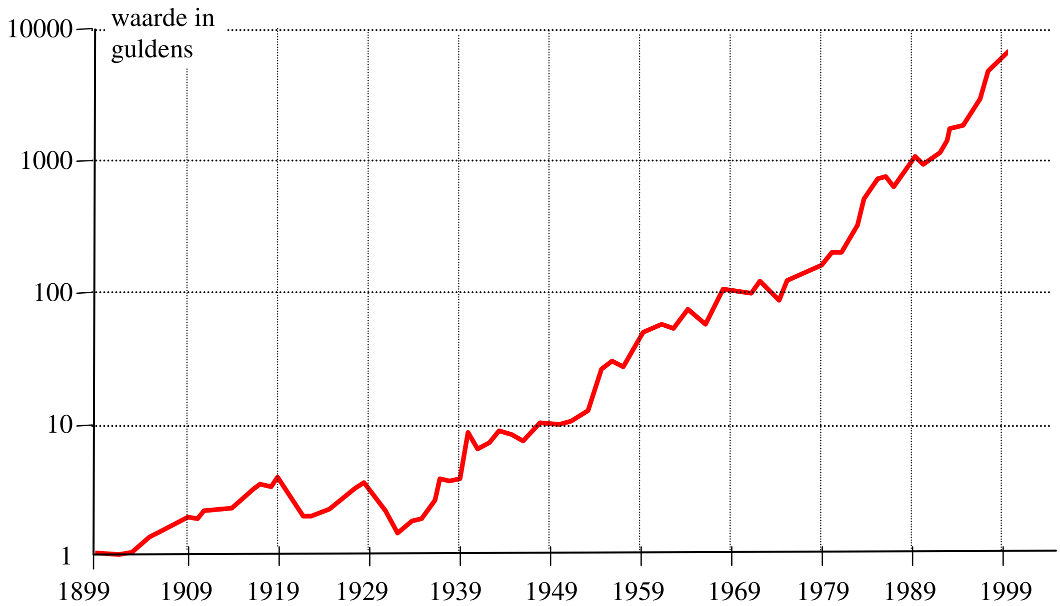
a) Maak zelf een logaritmische schaal met daarop de waarden 0,1 ($=10^{-1}$), 1 ($=10^{0}$), 10 ($=10^{1}$), 100 ($=10^{2}$), 1000 ($=10^{3}$) en 10000 ($=10^{4}$)

b) Welke waarde hoort bij het punt dat op de schaal precies midden tussen 10 en 100 ligt? En bij het punt precies midden tussen 100 en 1000?

c) Geef daarop aan het gewicht van een mens (70 kg), van een olifant (3500 kg) en van een muis (0,20 kg)

Opgave 79

De beste belegging van de twintigste eeuw was het aandeel.
Bekijk de ontwikkeling van de nominale waarde van aandelen tussen 1899 en 1999.



Je ziet dat de aandelenindex in 1999 lag tussen 1000 en 10000.

a) Lees zo nauwkeurig mogelijk af wat de waarde van een aandeel in 1999 was, dat in 1899 1 gulden waard was.

b) Bereken het gemiddelde percentage waarmee de waarde van een aandeel jaarlijks in de twintigste eeuw is gestegen.

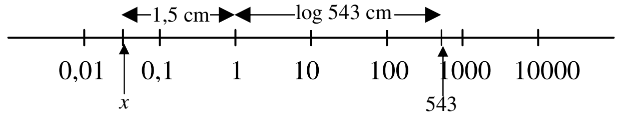
In de tweede helft van de twintigste eeuw is de groei nog veel spectaculairder.

c) Bereken het gemiddelde percentage waarmee de waarde van een aandeel jaarlijks in de tweede helft van de twintigste eeuw is gestegen

Men zegt in dit geval wel dat de grafiek op '*semi*-logaritmische papier' getekend is.

d) Kun je die naam verklaren.

Stel we hebben een logaritmische schaal met eenheid 1 cm:



Het getal 543 op een logaritmische schaal staat log(543) rechts van 1.
Het getal x dat op de logaritmische schaal 1,5 cm links van 1 staat is $10^{-1,5} \approx 0{,}0316$.

Opgave 80

Teken een logaritmische schaal met 1 cm als eenheid.

a) Geef daarop nauwkeurig aan: log(12345) en log(0,0005).
b) Welk twee getallen verdelen de cm tussen 100 en 1000 in drie stukken die precies even groot zijn?

Opgave 81

Teken het stuk van een logaritmische schaal tussen 1 en 10 met 1 dm als eenheid.
Geef daarop aan:
log 2 , log 3 , log 4 , log 5 , log 6 , log 7 , log 8 en log 9.

Opgave 82

De variatie in geluidsterkte is erg groot. Het menselijk oor is gevoelig voor heel zachte geluiden (een speld valt op een wollen vloerkleed) en voor heel harde geluiden (een startend straalvliegtuig). Om het hele bereik op één getallenlijn aan te geven gebruiken we een logaritmische schaal. We nemen het geluid van de vallende speld als basisgeluid (de gehoordrempel): 0 bel (bel is de eenheid waarin we geluidssterkte uitdrukken).
Een geluid van 1 bel is 10 keer zo sterk als het basisgeluid (dat komt dus overeen met 10 gelijktijdig vallende spelden). Een geluid van 2 bel is even sterk als dat van 100 gelijktijdig vallende spelden, enz.

a) Hoeveel bel zijn de volgende geluiden?
   - ademhaling (1000 spelden)
   - rustige huiskamer (10.000 spelden)
   - naburig onweer (10 miljoen spelden)
   - straalvliegtuig (pijngrens: 10^{14} spelden)

Maak een logaritmische schaal als bij opgave 80.
Om de plaats (= het aantal bel) van een geluid te bepalen moet je de 10-logaritme nemen van het equivalente aantal spelden.

b) Een normaal gesprek op één meter afstand heeft een geluidssterkte van 300.000 spelden. Hoeveel bel is dat ? Geef een normaal gesprek aan op de logaritmische schaal.
c) Dicht bij de boxen haalt een popgroep wel een geluidssterkte van 9,5 bel. Geef dat aan op de logaritmische schaal. Hoeveel keer zo sterk is dat als een naburig onweer?
d) De klassen V4a en V4b zijn even rumoerig. Apart brengt elk een geroezemoes van 7 bel voort. De klassen komen bij elkaar in één lokaal. Hoeveel bel meet het gezamenlijke geroezemoes?

✄ **Denkertje**

Leg met behulp van rekenregels uit dat twee klassen die ieder 6 bel lawaai maken, samen 6,3 bel lawaai maken.

Opgave 83

Een bacteriesoort wordt gekweekt op een voedingsbodem. Het aantal bacteriën groeit exponentieel; de groeifactor per dag is 10. Op tijdstip 0 zijn er 1000.

Teken een logaritmische schaal.

a) Hoeveel zijn er na $2\frac{1}{2}$ dag ?
Geef dat aantal aan op een logaritmische schaal.

b) Hoeveel bacteriën zijn er 40 uur vóór tijdstip 0 ?
Geef dat aantal ook aan op de logaritmische schaal.

c) Wanneer zijn er een half miljard ($\frac{1}{2} \cdot 10^9$) bacteriën ?
Geef dat aantal ook aan op de logaritmische schaal.

Opgave 84

Over het algemeen vertoont een groter organisme een grotere complexiteit. Het ene uiterste is een foraminifeer met maar één soort cel, in een betrekkelijk klein aantal. Het andere uiterste is een walvis met honderd verschillende celtypen.

Hiernaast staan van verschillende organismen het volume en het aantal cellen uitgezet tegen het aantal celtypen. Op de drie assen (links, rechts en beneden) staan logaritmische schalen. De grafiek is afkomstig uit *De maat van het leven*, een uitgave van Natuur en Techniek.

a) Bepaal zo nauwkeurig mogelijk met behulp van de grafiek het aantal celtypen van een paddenstoel, het volume van een paddenstoel en het aantal cellen van een paddestoel.

b) Hoeveel cellen gaan er in één kubieke centimeter?