

3 Discrete kansverdelingen



Inhoudsopgave

3.0	Verschillende mogelijkheden	3
3.1	Kansverdelingen	4
3.2	Verwachtingswaarde en standaardafwijking	6
3.3	Zonder terugleggen	22
3.4	Wel/Niet	24
3.5	De variantie	31
3.6	Extra opgaven	35
3.7	Grotere opgaven	40
3.8	Samenvatting Verdelingen	45

Bij dit hoofdstuk hoort een *digimap*. Daarin staan opgaven waarbij er iets met ict valt te beleven. Ze hebben hetzelfde nummer als de bijbehorende opgave in deze tekst. Je herkent ze aan het icoontje . Via de digimap kom je bij VU-Statistiek of op een website terecht.

De opgaven in de digimap kunnen op drie manieren worden gebruikt:

- niet,
- aanvullend op de corresponderende opgave in deze tekst,
- vervangend voor de corresponderende opgave in deze tekst.

Colofon

© 2010 cTWO

Experimentele uitgave Kansrekening en Statistiek, vwo, wiskunde A en C

versie 3 (dec 2012)

auteurs Leon van den Broek, Maris van Haandel

digiboek Carel van de Giessen

met medewerking van Simon Biesheuvel, Piet Versnel, Peter van Wijk

3.0 Verschillende mogelijkheden

-  **1** Frank houdt erg veel van strips. Vooral Guust Flater vindt hij geweldig. Er zijn zestien Guust-albums; daarvan heeft Frank er al negen. Op zijn verjaardag komen twee tantes op bezoek. Elk van de tantes heeft een album van Guust voor hem meegenomen. Alleen hebben zij niet van tevoren gevraagd welke albums hij nog niet had. De tantes hebben ook niet van tevoren met elkaar overlegd. Het is dus mogelijk dat Frank een van de albums of zelfs beide albums al heeft.
- a.** Bereken de kans dat hij beide albums al heeft.
 - b.** Bereken de kans dat hij twee verschillende nieuwe albums krijgt.
 - c.** Maak een kanstabel voor de aantallen (verschillende) albums dat Frank na zijn verjaardag heeft.

Aantal albums	9	10	11
Kans			

Veronderstel dat de tantes van tevoren met elkaar overlegd hebben, maar niet met Frank. Ze hebben dan dus verschillende albums gekocht.

- d.** Maak ook in dit geval de kanstabel:

Aantal albums	9	10	11
Kans			

Veronderstel dat de tantes van tevoren met Frank overlegd hebben, maar niet met elkaar.

- e.** Maak weer de kanstabel:

Aantal albums	9	10	11
Kans			



3.1 Kansverdelingen

In deze paragraaf gaat het niet om afzonderlijke kansen, maar om de hele kansverdeling, dat wil zeggen het geheel van kansen op de verschillende mogelijkheden. Bij elke opgave ga je zelf een kanstabel opstellen. Door na te gaan of de som van de kansen 1 is, kun je controleren of je het goed hebt gedaan. In een enkel geval (opgave 6) is het handig om niet alle kansen in de tabel direct te berekenen, maar de lastigste kans uit de andere kansen af te leiden. (Hoe?)

Met behulp van een lijst van alle mogelijkheden

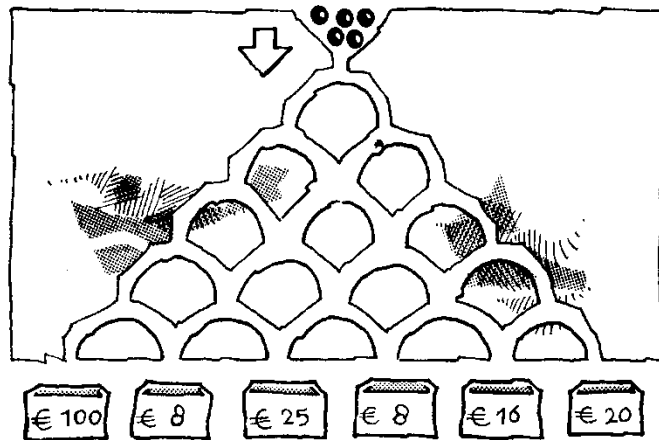
-  2 Anneke krijgt nieuwe burens. Ze heeft gehoord dat het gezin drie kinderen telt, alledrie ongeveer van haar leeftijd. Ze is dan ook benieuwd of het jongens of meisjes zijn.
- Wat is de kans dat er twee jongens zijn en één meisje?
 - Wat is de kans dat de drie kinderen van hetzelfde geslacht zijn?
 - Maak een kanstabel voor het aantal meisjes in het gezin.
-  3 Sharon heeft in de avonden een bijbaantje als telemarketeer. Zij belt mensen op om krantenabonnementen, verzekeringen en dergelijke te verkopen. Deze avond moet ze mensen telefonisch overhalen een proefrit te maken in een nieuw type auto. Volgens haar baas is 40% van de mensen geïnteresseerd in een proefrit. Op grond van dit percentage is het minimum aantal proefritten dat elke telemarketeer moet regelen, gesteld op 20. Op een gegeven moment heeft Sharon nog maar tijd voor drie telefoontjes. Op dat moment heeft ze al 18 afspraken gemaakt.
- Bereken de kans dat Sharon alsnog het minimum aantal afspraken regelt, ervan uitgaande dat de baas gelijk heeft.
 - Maak een kanstabel voor het aantal afspraken dat Sharon die avond weet te regelen.
- 4 Je hebt drie brieven (a , b en c) geschreven aan vrienden en hun adressen op enveloppen (A , B en C) gezet. Je pakt envelop A en zonder ergens op te letten stop je er een brief in. Daarna doe je hetzelfde met de andere twee enveloppen.
- Maak een lijst van alle mogelijkheden waarop de brieven in de enveloppen kunnen worden gestopt.
 - Wat is de kans dat er geen enkele brief goed zit?
 - Wat is de kans dat er precies een brief goed zit?
 - Maak een kanstabel voor het aantal brieven dat in de goede envelop zit.

- 5 Matthijs zit in een klas met 10 leerlingen. De leraar kiest elke les twee leerlingen in de klas, van wie hij het huiswerk controleert.
Vandaag hebben drie leerlingen in de klas hun huiswerk niet gemaakt. De leraar kan 0, 1 of 2 leerlingen betrappen op het niet maken van huiswerk.
Bereken de kansen op elk van deze drie mogelijkheden. Schrijf je antwoorden in een kans-tabel.
- 6 Manon staat bij een spelletje ganzenbord op het vierde vakje voor de finish. Als ze aan de beurt is, gooit ze met een dobbelsteen en gaat zoveel vakjes vooruit als ze heeft gegooit. Als ze 4, 5 of 6 ogen werpt, passeert ze de finish en is het spel afgelopen.
- a. Hoeveel beurten heeft ze minimaal nodig? En hoeveel maximaal?
 - b. Bereken de kans dat ze het minimale aantal beurten nodig heeft.
 - c. Bereken ook de kans dat ze het maximale aantal beurten nodig heeft.
 - d. Maak een kanstabel voor het benodigde aantal beurten.
- 7 Iemand werpt met twee dobbelstenen. X_1 is het aantal ogen dat hij met de ene dobbelsteen werpt en X_2 het aantal ogen met de andere dobbelsteen.
 $S = X_1 + X_2$ is de som van de aantallen ogen.
- a. Welke waarden kan S aannemen?
 - b. Hoe groot is $P(S = 2)$? En $P(S = 3)$? En $P(S = 4)$?
 - c. Maak een kanstabel voor S .

3.2 Verwachtingswaarde en standaardafwijking

Naar verwachting

- 8 Hieronder staat schematisch het inwendige van een speelautomaat. Bovenaan wordt in de trechter een balletje losgelaten. Dat rolt naar beneden en komt onderaan in een van de bakjes terecht. De speler ontvangt het bedrag dat op het bakje geschreven staat. We gaan ervan uit dat een balletje bij elke splitsing met gelijke kans naar links of naar rechts gaat.

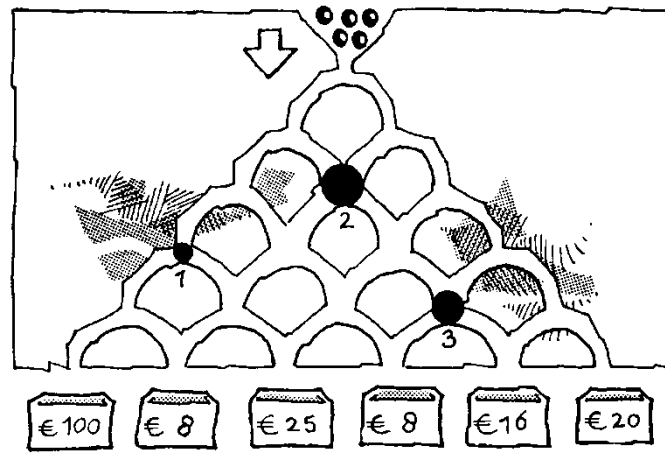


Stel dat dit spel per jaar 40.000 keer gespeeld wordt.

- Hoe vaak zou je het balletje in het bakje €100 verwachten?
En hoe vaak in elk van de andere bakjes?
Als je niet meer goed weet hoe dit te bepalen, zie het pakketje *Rekenen met Patronen*.
- Hoeveel zou de eigenaar van de automaat naar verwachting per jaar moeten uitbetalen?
- Natuurlijk zal hij niet precies het bedrag uit onderdeel **b** moeten uitbetalen.
Wat is in theorie het maximale bedrag dat de eigenaar per jaar zou kunnen moeten uitbetalen?
En het theoretisch minimale bedrag?
- Om dit spelletje te mogen spelen moet je €15 betalen.
Is dit een aantrekkelijke prijs voor een speler om te spelen?

Na enige tijd verandert de eigenaar het spel. Op drie plaatsen zet hij een “stop”. Rolt het balletje daarin dan stopt het spel en er wordt niets uitbetaald. Het inwendige van de speelautomaat ziet er nu uit zoals op de volgende bladzijde te zien is.

- Hoeveel moet de eigenaar nu naar verwachting per jaar uitbetalen?
- Bij welke inzet is het net niet meer aantrekkelijk om het spel te spelen?

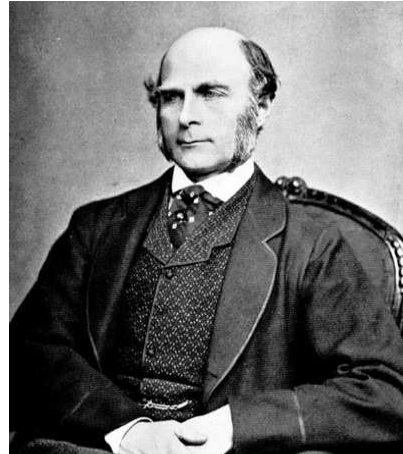
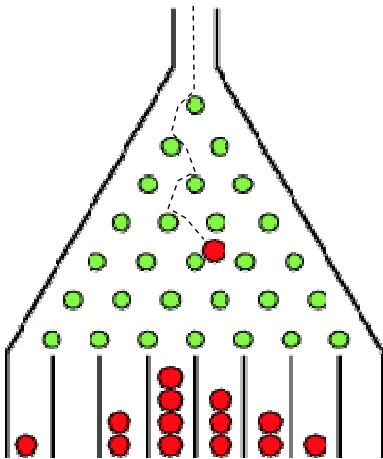


Galtonbord

Als we de speelautomaat schematisch weergeven, krijgen we een zogenaamd Galtonbord. Dat bestaat uit een aantal rijen pinnen. Bovenaan worden kogeltjes losgelaten; die vallen via de pinnen naar beneden. Als het een goed bord is, is voor elk kogeltje bij elke pin de kans $\frac{1}{2}$ om naar links of naar rechts te gaan. Onderaan worden de kogeltjes in bakjes opgevangen. In de middelste bakjes zullen de meeste kogeltjes komen, aan de uiteinden de minste.

Het bord is ontworpen door de Britse statisticus sir Francis Galton, en is naar hem genoemd.

Het spel in opgave 8 is gebaseerd op dit idee.



Sir Francis Galton
(1822-1911)

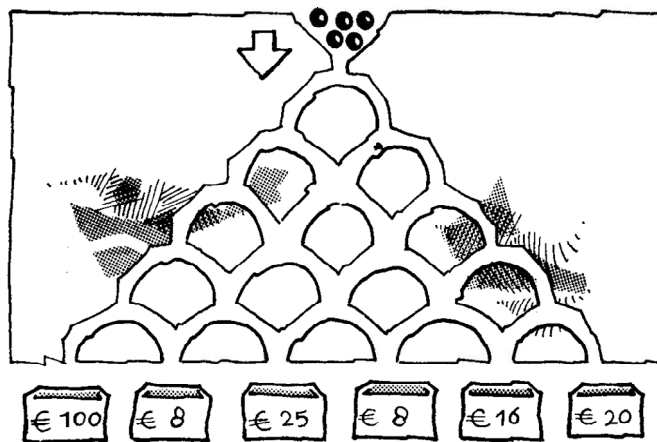
-  **9** Ga naar de digimap of naar VU-Statistiek, Kansrekenen, Bord van Galton. Maak een paar simulaties op borden van verschillende aantallen rijen. Varieer ook de kans dat een kogeltje naar rechts valt.

- 10 Bij wintersportvakanties gebeurt nogal eens een ongeluk. Daarvoor kun je je verzekeren. Om de verzekeringspremie te bepalen schatten verzekeringsmaatschappijen de kans op een ongeluk aan de hand van historische gegevens. Ongeveer 6% van alle wintersporters raakt in meer of mindere mate gewond. De behandelingskosten variëren van enkele tientjes tot duizenden euro's; gemiddeld liggen de kosten per gewonde rond de 4000 euro.

Per jaar gaan 100.000 Nederlanders op wintersport. Laten we aannemen dat ze zich allemaal bij één verzekeringsmaatschappij verzekeren en dat deze maatschappij geen winst hoeft te maken.

- Hoe hoog zal de verzekeringspremie per persoon moeten bedragen, opdat de verzekeringsmaatschappij de verwachte kosten kan betalen?
- Stel dat slechts de helft van de wintersporters zich verzekert. Wat is nu de hoogte van de premie?

-  11 We bekijken opnieuw het spel van opgave 8.



In de tabel hieronder staan de kansen op de verschillende uitbetalingen.

uitbetaling	100	8	25	16	20
kans	$\frac{1}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Stel dat er 160 keer gespeeld wordt.

- Hoe groot is dan de totale uitbetaling, naar je mag verwachten?
- Wat is de gemiddelde uitbetaling per keer?
- Wat is de gemiddelde uitbetaling per keer als er n keer gespeeld wordt?

Bij een experiment wordt een aantal geteld: dat noemen we X .

Stel dat X n verschillende waarden kan aannemen; noem die $x_1, x_2, \dots, x_n$.

De bijbehorende kansen noemen we $p_1, p_2, \dots, p_n$.

- 12 Zeg wat in opgave 11 de grootte X is.
En wat is n ? Wat zijn de waarden $x_1, x_2, \dots$? Wat zijn $p_1, p_2, \dots$?

Verwachtingswaarde

In bovenstaande notatie is $E(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n$ de **verwachtingswaarde** van X .

Als je de **tabel van de kansverdeling** kent (zoals in opgave 11):

waarde	x_1	x_2	...	x_n
kans	p_1	p_2	...	p_n

kun je de verwachtingswaarde dus eenvoudig uitrekenen: vermenigvuldig elk van de mogelijke uitkomsten met de kans op die uitkomst en tel vervolgens de producten op.

$E(X)$ kun je zien als een theoretisch gemiddelde: je neemt het gemiddelde van de mogelijke waarden, rekening houdend met de kansen waarmee ze voorkomen.

Als je het experiment bij herhaling uitvoert, zal de gemiddelde waarde (hoogst waarschijnlijk) dicht bij $E(X)$ liggen.

De letter E komt van *expectatio*.

De redenering is als volgt.

Voer in gedachten het experiment een (groot) aantal keren uit, zeg N keer.

Dan zal naar verwachting $p_1 \cdot N$ keer de waarde x_1 optreden, $p_2 \cdot N$ keer de waarde x_2 , enzovoort.

De gemiddelde uitkomst is $(p_1 \cdot N \cdot x_1 + p_2 \cdot N \cdot x_2 + \dots) / N$

en dat is gelijk aan $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots$, de verwachtingswaarde van X .



13 Ga naar de digimap of naar VU-Statistiek, Simulaties, Dobbelstenen.

a. Werp 300 keer met één dobbelsteen. Noteer hoe vaak elk van de aantallen ogen optreedt.

Bereken met behulp van deze frequenties hoe groot de verwachtingswaarde van het aantal ogen is.

b. De verwachtingswaarde van het aantal ogen bij het werpen met een dobbelsteen kun je ook met de theoretische kansen berekenen. Doe dat.

Werp 300 keer met drie dobbelstenen en let op de som van de ogen bij een worp.

c. Welke waarden kan die som aannemen?

d. Elke mogelijke waarde komt een zeker aantal onder die 300 keer voor (eventueel 0 keer).

Bereken met behulp van deze frequenties hoe groot de verwachtingswaarde van de som van de aantallen ogen is.

Merk op dat je nu niet zo gemakkelijk kunt zeggen wat de theoretische kansen op de verschillende ogensommen zijn. Dus is de verwachtingswaarde van de ogensom van drie dobbelstenen niet zo eenvoudig met de tabel van de kansverdeling te vinden. We komen hier verderop op terug.

- 14 Reisbureaus bieden vlak voor vertrek zogenaamde last minute-reizen aan. Ze proberen door de prijzen te verlagen het vliegtuig en/of hotel op die manier alsnog vol te krijgen. Reizen die normaal bijvoorbeeld €800 kosten, kunnen dan geboekt worden voor €550. Wie zou dat niet willen? Maar dit kan alleen als er nog plaatsen over zijn. Dus als je gokt op zo'n last minute-aanbieding, loop je het risico dat er geen plaats is.

Familie Jansen telt vier personen en wil komende zomer naar Turkije. Zo'n reis kan in april geboekt worden voor €800 per persoon. Vorig jaar zomer zag de familie een last minute-aanbieding van deze reis voor €550 per persoon. Neem aan dat de kans 0,60 is dat deze aanbieding dit jaar weer komt (met plaats voor vier personen). Als de aanbieding niet komt, zal de familie, om toch naar Turkije te kunnen, een duurdere lijnvlucht moeten boeken van €900 per persoon.

Welk advies zou jij de familie Jansen geven: in april boeken of wachten tot de zomer? Ondersteun je advies met verwachtingswaarden.



- 15 In een doos zitten zes ballen: twee witte en vier zwarte. Uit die doos nemen we aselect drie ballen. X is het aantal witte ballen als met terugleggen getrokken wordt, Y als er zonder terugleggen getrokken wordt.

a. Geef in een tabel de kansverdeling van X en bereken $E(X)$.

b. Geef in een tabel de kansverdeling van Y en bereken $E(Y)$.

- 16 Anne speelt Mens-erger-je-niet. Ze heeft geen pionnen op het speelbord. Zodra ze een zes heeft gegooid met de dobbelsteen, mag ze een pion op het bord zetten. Daar zit ze dus op te wachten. Het kan zijn dat ze meteen de eerste beurt een zes gooit (dan heeft ze geluk), maar het kan ook zijn dat ze een heleboel beurten moet wachten alvorens haar dobbelsteen 6 ogen geeft.

Het aantal beurten dat Anne nodig heeft voordat ze een zes gooit noemen we X .

a. Wat is de kans dat $X = 3$?

b. Welke waarden kan X aannemen?

c. Maak een tabel van de kansverdeling van X voor de eerste vijf waarden.

d. Hoe groot is de kans dat $X > 8$?

e. Hoe groot schat jij dat $E(X)$ is?



f. Controleer je schatting met een simulatie: ga naar de digimap of naar VU-Statistiek, Simulaties, Random Generator, Gooien tot (bij Verdeling).

Extra

In onderdeel f heb je een idee gekregen hoe groot de verwachtingswaarde $E(X)$ ongeveer is. Het is niet eenvoudig $E(X)$ exact te berekenen. Daarvoor gebruiken we een speciale truc.

Anne gaat beginnen; het duurt gemiddeld $E(X)$ beurten voordat ze de eerste zes gooit. Er kunnen twee dingen gebeuren.

- Anne werpt meteen een zes; dan duurt het 1 beurt. Dit gebeurt met kans $\frac{1}{6}$.
- Of Anne werpt niet meteen een zes; dan duurt het gemiddeld nog $E(X)$ beurten, dus in totaal $E(X)+1$ beurten. Dit gebeurt met kans $\frac{5}{6}$.

Dus is de gemiddelde duur $\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot (E(X)+1)$.

We hebben nu de vergelijking $E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot (E(X)+1)$.

g. Bereken hieruit $E(X)$.

De somregel voor de verwachtingswaarde

- 17 In twee warenhuizen is gedurende een doordeweekse dag bijgehouden hoe lang de mensen met hun boodschappen voor de kassa moesten wachten, afgerond op halve en hele minuten.

wachttijd in minuten	0	0,5	1	1,5	2
percentage klanten in winkel A	20	10	20	25	25
percentage klanten in winkel B	0	40	40	20	0

Zo moesten bijvoorbeeld in winkel A 20% van de klanten 1 minuut wachten. Met deze gegevens maken we een model: we nemen aan dat bovenstaande verdeling voor iedere doordeweekse dag geldt. Voor iedere klant geldt in dit model dus dat de kans dat hij 1 minuut in winkel A moet wachten 0,20 is. Voor de andere wachttijden en voor winkel B worden op dezelfde wijze de kansen gedefinieerd.

- Bereken de verwachtingswaarde van de wachttijd voor winkel A.
Ook voor winkel B.
- Een klant bezoekt beide winkels. Bereken de kans dat hij in de winkels even lang moet wachten.

De totale wachttijd W voor iemand die beide winkels bezoekt, varieert van 0,5 tot en met 3,5 minuut.

- Maak een tabel van de kansverdeling van W .
- Bereken de verwachtingswaarde van W .

De som van je twee antwoorden van **a** is – als het goed is – exact gelijk aan je antwoord van **d**. Als je daar even over nadenkt, is dat nogal logisch.

- Waarom?

- 18 Op een dobbelsteen is de som van de ogen op twee tegenover elkaar liggende kanten 7. Het aantal ogen dat boven komt noemen we X , het aantal ogen dat onder komt Y .

Verder bekijken we de som $S = X + Y$.

- Hoe groot is Y , als $X = 2$?
- Welke waarden kan X aannemen? En Y ? En welke waarden kan S aannemen?
- Bereken $E(X)$, $E(Y)$ en $E(S)$.
- Geldt: $E(S) = E(X) + E(Y)$?

- 19 Iemand werpt met twee dobbelstenen. X_1 is het aantal ogen dat hij met de ene dobbelsteen werpt en X_2 het aantal ogen met de andere dobbelsteen.

$S = X_1 + X_2$ is de som van de aantallen ogen. Zie opgave 7 voor de kanstabel voor S .

- Hoe groot is $E(X_1)$? En hoe groot is $E(X_2)$?
- Bereken $E(S)$.
- Geldt: $E(S) = E(X_1) + E(X_2)$?

Somregel voor de verwachtingswaarde

Bij een experiment worden twee aantallen geteld. De verwachtingswaarde van de som van twee aantallen is gelijk aan de som van de verwachtingswaarden van de twee afzonderlijke aantallen. Dit geldt ook als een uitkomst van het eerste aantal van invloed is op de uitkomst van het tweede (zie opgave 18). In opgave 88 staat een ander voorbeeld.

De regel geldt ook bij de som van meer dan twee aantallen; bijvoorbeeld:

als $S = X_1 + X_2 + X_3$, dan $E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$.

Deze somregel maakt berekeningen vaak veel eenvoudiger. Bijvoorbeeld bij opgave 13 wisten we dat $E(X_1) = E(X_2) = 3,5$; zonder de kansverdeling van $S = X_1 + X_2$ uit te rekenen, weten we dat $E(S) = E(X_1) + E(X_2) = 3,5 + 3,5 = 7$.

In opgave 13d hebben we door simulatie de verwachtingswaarde van de som van de ogen bij drie dobbelstenen kunnen schatten. Met de somregel weten we dat die verwachtingswaarde 10,5 is.

- 20 De verwachtingswaarde van het aantal geboortes per dag is in Nederland 554 (gegevens van 2004).
- Wat is de verwachtingswaarde van het aantal geboortes in een week?
 - Wat heeft dit met bovenstaande somregel te maken?
- 21 Bridge wordt gespeeld met een pak van 52 kaarten, waaronder dertien hartenkaarten. Een speler krijgt hieruit dertien kaarten. Het aantal hartenkaarten dat hij bij de eerste kaart krijgt is natuurlijk 0 of 1.
- Wat is de verwachtingswaarde van het aantal hartenkaarten bij de eerste kaart.

De verwachtingswaarde van het aantal hartenkaarten bij de zesde kaart is hetzelfde. Dat is logisch want de zesde kaart is met dezelfde kans een harten als de eerste.

- Wat is de verwachtingswaarde van het aantal hartenkaarten bij de dertiende kaart.
- Wat is de verwachtingswaarde van het aantal hartenkaarten die de speler krijgt?

Begrepen?

Joyce bezoekt met 100 euro een braderie. Er is een loterij met duizend loten en met slechts één prijs: 1.000 euro. Een lot kost 15 euro. Aan het eind van de middag zal de notaris het winnende lot trekken.

Joyce heeft besloten op de braderie alleen geld aan de loterij te besteden.

- Joyce koopt een lot.
Wat is de verwachtingswaarde van haar bezit na de braderie?
- Joyce koopt vijf loten.
Wat is de verwachtingswaarde van haar bezit na de braderie?



Spreiding

- 22 We kijken opnieuw naar opgave 17. Die ging over de wachttijden aan de kassa in twee warenhuizen op een doordeweekse dag.

wachttijd in minuten	0	0,5	1	1,5	2
percentage klanten in winkel A	20	10	20	25	25
percentage klanten in winkel B	0	40	40	20	0

De verwachtingswaarde van de wachttijd bleek in winkel A 1,125 te zijn; om die waarde liggen de wachttijden in winkel A *gespreid*. Voor winkel B was de verwachtingswaarde B 0,9; de wachttijden in winkel B liggen om 0,9 gespreid.

- a. In welke winkel variëren de wachttijden het minst, in winkel A of in winkel B, vind je? Met andere woorden, in welke winkel is de spreiding van de wachttijden het kleinst? Licht je antwoord toe.

We vergelijken de klasseringen van twee wielrenners in vijf grote koersen. Renner A werd 3^e, 4^e, 20^e, 1^e en 17^e. Renner B werd 6^e, 12^e, 9^e, 15^e en 3^e.

- b. Bereken het gemiddelde van de klasseringen van renner A. Ook van renner B.
c. De prestaties liggen om de gemiddelden gespreid. Welke renner presteert het wisselvalligst, vind je? Met andere woorden, van welke renner is de spreiding van de klasseringen het grootst? Licht je antwoord toe.

- 23 a. In welke politieke staatsvorm is de spreiding van het inkomen het grootst, in een communistische of in een kapitalistische?
Schets een globale grafiek van de inkomensverdeling in beide staatsvormen in één figuur.
b. In welk klimaat is de spreiding van de dagelijkse temperatuur het grootst, in een landklimaat of in een zeeklimaat?
Schets een globale grafiek van de temperatuursverdeling in beide klimaattypen in één figuur.
c. Bij welke sport is de spreiding van de lichaamslengte het grootst, bij basketbal of van bij voetbal?
Schets een globale grafiek van de lengteverdeling van beide groepen sporters in één figuur.

In de voorbeelden van de vorige twee opgaven kun je "op gevoel" wel zeggen in welk geval de spreiding het grootst is. Dat kan natuurlijk niet altijd, bijvoorbeeld als in eerste instantie de verdelingen niet zo veel verschillen. Dan hangt het er maar vanaf hoe je kijkt of hoe je rekent bij welke verdeling de spreiding het grootst genoemd zou moeten worden. Daarom moeten we precies zeggen wat we met spreiding bedoelen. Dat kan op verschillende manieren.

Eerder al hebben we ontmoet:

- de spreidingsbreedte; dat is de grootste min de kleinste waarde,
- de kwartielafstand; dat is het derde kwartiel min het eerste kwartiel,

- de gemiddelde absolute afwijking,
- de standaardafwijking.

Hiervan is de standaardafwijking de belangrijkste.

De standaardafwijking van een frequentieverdeling (databestand)

We herhalen wat we in hoofdstuk 1 – **Verschillen** hebben geleerd.

De standaardafwijking is $sd = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$.

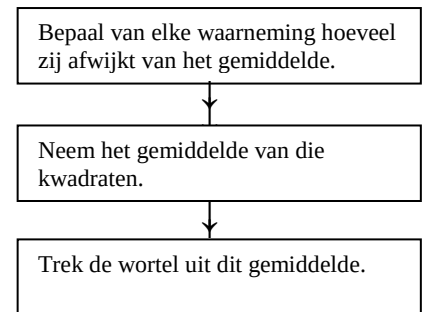
Hierbij staat n voor het aantal waarnemingen en d voor de afwijkingen (= deviaties) van de waarnemingen van het gemiddelde.

In woorden: *de standaardafwijking is de wortel van het gemiddelde van de kwadraten van de afwijkingen (van het gemiddelde).*

Hiernaast staat nog eens hoe je de standaardafwijking berekent.

Bijvoorbeeld als er drie waarnemingen zijn: 1, 5 en 6, verloopt de berekening van de standaardafwijking als volgt:

- het gemiddelde is 4,
- de afwijkingen van het gemiddelde zijn -3, 1 en 2,
- de kwadraten van deze afwijkingen zijn 9, 1 en 4,
- het gemiddelde van deze kwadraten is ongeveer 4,67,
- de wortel hiervan is ongeveer 2,16 en dat is de sd.



24 Uit de set waarnemingen 1, 5, 6 van bovenstaand voorbeeld maken we op verschillende manieren een nieuwe set waarnemingen.

Ga voor elke van de volgende sets waarnemingen a stap voor stap na wat de sd is.

- 2, 6, 7
- 101, 105, 106
- 2, 10, 12
- 10, 50, 60
- 1, 1, 5, 5, 6, 6
- 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6

- 25
- Vergelijk de sd van de set 1, 5, 6 met die van de sets in opgave 24a en 24b. Welke conclusie trek je?
 - Vergelijk de sd van de set 1, 5, 6 met die van de sets in opgave 24c en 24d. Welke conclusie trek je?
 - Vergelijk de sd van de set 1, 5, 6 met die van de sets in opgave 24e en 24f. Welke conclusie trek je?

In de praktijk werk je met grote databestanden en dan bereken je de sd op de computer, bijvoorbeeld in Excel, in VuStatistiek of op de GR.

-  26 a. Bereken met een computer of de Grafische Rekenmachine de sd van de aantallen doelpunten per voetbalwedstrijd in de eredivisie, seizoen 2006-2007:

aantal doelpunten	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
aantal wedstrijden	18	46	63	58	53	35	19	10	3	2

- b. Ga naar het bestand kinderen in de Digimap. Zie opgave 6 van hoofdstuk 2 - **Verdelingen**. Bereken de sd van het gewicht van de kinderen.
c. Ga naar het bestand oldfaithful in de Digimap. Zie opgave 7 van hoofdstuk 2 - **Verdelingen**. Bereken de sd van de duur van de erupties.

- 27 Van een databestand is het gemiddelde 187 cm en de standaardafwijking is 7,2 cm.
a. Wat zijn het gemiddelde en de sd als we in dm rekenen in plaats van in cm?
b. Wat zijn het gemiddelde en de sd als we in inches rekenen? 1 inch = 2,54 cm.

Van Dale over spreiding:

(statistische wiskunde) middelbare fout; mate van uiteenlopen van de uitkomsten van een waarneming, syn. standaarddeviatie, strooiing

In de wiskunde verstaan we onder *spreiding* een getal, dat aangeeft hoezeer de data in een bestand uit elkaar liggen.

Als de spreiding 0 is, dan zijn alle data gelijk. Kleiner kan de spreiding niet zijn.

Als de spreiding heel groot is, dan liggen de data ver uit elkaar.

De belangrijkste maat voor de spreiding van een databestand is de standaardafwijking sd. Van

een databestand berekenen we die als volgt: $sd = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$; hierbij zijn d de afwijkingen van het gemiddelde en is n het aantal waarnemingen.

Voorbeeld

Stel dat er zes verschillende waarden voorkomen met de volgende frequenties:

waarde	3	4	5	6	7	8
frequentie	19	22	18	23	17	1

Er zijn in totaal 100 waarnemingen, het gemiddelde is 5 en de afwijkingen van het gemiddelde zijn -2, -1, 0, 1, 2 en 3. Dan gaat de berekening van de sd als volgt:

$$sd = \sqrt{\frac{19 \cdot (-2)^2 + 22 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot 0^2 + 23 \cdot 1^2 + 17 \cdot 2^2 + 1 \cdot 3^2}{100}} \approx 1,41.$$

Algemeen

gegeven is de frequentietabel:

waarde	x_1	x_2	x_3	...
frequentie	f_1	f_2	f_3	...

Er zijn $n = f_1 + f_2 + f_3 + \dots$ waarnemingen, het gemiddelde is $\bar{x}$ en de afwijkingen van het gemiddelde zijn $x_1 - \bar{x}$, $x_2 - \bar{x}$, $x_3 - \bar{x}$, Dan gaat de berekening van de sd als volgt:

$$sd = \sqrt{\frac{f_1 \cdot (x_1 - \bar{x})^2 + f_2 \cdot (x_2 - \bar{x})^2 + f_3 \cdot (x_3 - \bar{x})^2 + \dots}{n}}.$$

De wortel is genomen om de kwadraten op te heffen. Dankzij de wortel is in bijvoorbeeld opgave 27 de sd in cm als de gegevens in cm zijn en is de sd in inch als de gegevens in inch zijn. Zonder het wortelteken heb je dus sd^2 . Dat heet ook wel de **variantie**. In het vervolg zullen we zien dat het met de variantie gemakkelijker rekent dan met de sd.

-  28 De wachttijden aan de kassa in twee warenhuizen op een doordeweekse dag zijn (zie opgave 17)

wachttijd in minuten	0	0,5	1	1,5	2
percentage klanten in winkel A	20	10	20	25	25
percentage klanten in winkel B	0	40	40	20	0

De verwachtingswaarde van de wachttijd bleek in winkel A 1,125 te zijn en in winkel B 0,9.

- Bereken de standaardafwijkingen van de wachttijden in beide winkels.
- In opgave 19a heb je intuïtief gezegd in welke winkel de spreiding van de wachttijden het grootst is. Is het resultaat in a hiermee in overeenstemming?

In opgave 22b hebben we de klasseringen van twee wielrenners in vijf grote koersen opgevoerd. Renner A werd 3^e, 4^e, 20^e, 1^e en 17^e, renner B werd 6^e, 12^e, 9^e, 15^e en 3^e. Van beide klasseringen is 9 het gemiddelde.

- Bereken de standaardafwijkingen van de klasseringen.
- In opgave 22c heb je intuïtief gezegd van welke renner de spreiding van de klasseringen het grootst is. Is het resultaat in c hiermee in overeenstemming?

De standaardafwijking van een kansverdeling

De stap naar een kansverdeling is nu snel gemaakt.

Voorbeeld

Bij een experiment wordt een aantal geteld, dat we X noemen.

Stel dat X zes verschillende waarden kan aannemen met de volgende kansen:

waarde	3	4	5	6	7	8
kans	0,19	0,22	0,18	0,23	0,17	0,01

De verwachtingswaarde is 5 en de afwijkingen van de verwachtingswaarde zijn -2, -1, 0, 1, 2 en 3. Dan gaat de berekening van de sd als volgt:

$$sd(X) = \sqrt{0,19 \cdot (-2)^2 + 0,22 \cdot (-1)^2 + 0,18 \cdot 0^2 + 0,23 \cdot 1^2 + 0,17 \cdot 2^2 + 0,01 \cdot 3^2} \approx 1,41.$$

Algemeen

Als de tabel van de kansverdeling is:

waarde	x_1	x_2	x_3	...
kans	p_1	p_2	p_3	...

en E is de verwachtingswaarde, dan is $sd(X) = \sqrt{p_1(x_1 - E)^2 + p_2(x_2 - E)^2 + \dots + p_n(x_n - E)^2}$

In woorden:

$sd(X)$ is de wortel van de verwachtingswaarde van de kwadratische afwijking van E .

- 29 Vergelijk de formules voor de sd van een frequentieverdeling en de sd van een kansverdeling. Wat is het verband tussen p_1 , f_1 en n ?

- 30 Bereken de standaardafwijking van het aantal ogen bij een worp met een dobbelsteen.

-  31 Op een braderie draait het rad van avontuur. Voor twee euro mag je één keer spelen. Als het rad stopt, geeft de pijl aan hoeveel euro je krijgt uitbetaald. We nemen aan dat het rad goed is uitgebalanceerd.

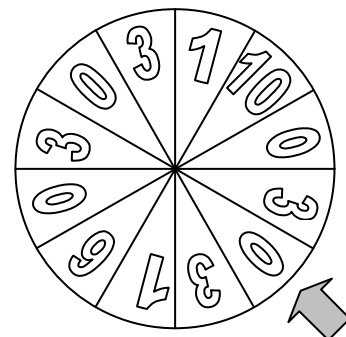
- a. Hoe groot is de kans dat je winst maakt als je één keer speelt?

De uitbetaling per keer noemen we X .

- b. Bereken de verwachtingswaarde van X .

- c. Bereken de standaardafwijking van X .

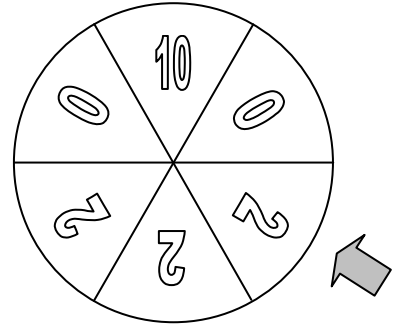
- d. In hoeveel procent van de keren zal de uitbetaling meer dan $2 \cdot sd$ van de gemiddelde uitbetaling afwijken?



- 32 Een tweede rad van avontuur ziet er eenvoudiger uit.
De uitbetaling noemen we Y .
a. Bereken $E(Y)$.

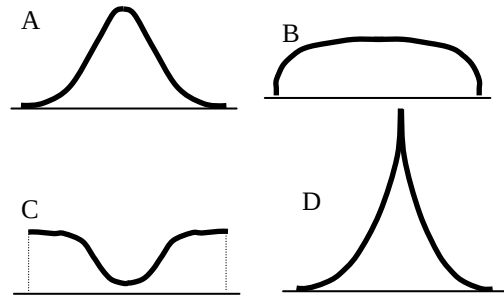
Het is niet onmiddellijk duidelijk welk rad de grootste spreiding heeft, dit rad of het rad van opgave 31.

- b. Gebruik de sd om te bepalen welk rad de grootste spreiding heeft.



Begrepen?

- Hiernaast zie je vier verdelingen. Ze hebben dezelfde spreidingsbreedte en ze betreffen evenveel waarnemingen. Zet ze op volgorde van grootte van sd.



- Ad en Ed hebben allebei gedurende een week 's ochtends de temperatuur gemeten. Ze kwamen met precies dezelfde zeven resultaten. Beiden krijgen dus ook dezelfde gemiddelde temperatuur: 8°C en dezelfde standaardafwijking: 3°C . We stoppen hun resultaten bij elkaar en hebben nu 14 waarden. Wat is het gemiddelde daarvan en wat de standaardafwijking?
- Iemand beantwoordt op de gok twee driekeuzevragen. X is het aantal antwoorden dat hij goed heeft. Bereken $\text{sd}(X)$, met rekenapparatuur en ook op papier (d.w.z. met de formule).

3.3 Zonder terugleggen

Twee manieren

-  **33** Bij het kaartspel toepen worden alleen de kaarten B, V, H, A, 7, 8, 9, 10 gebruikt van elk van de kleuren schoppen, harten, ruiten en klaveren. De 10'en zijn de hoogste kaarten; het is gunstig als je veel 10'en hebt.

Jan speelt het spel en krijgt vier willekeurige kaarten uit de 32 kaarten.

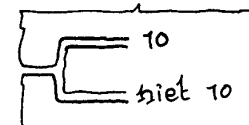
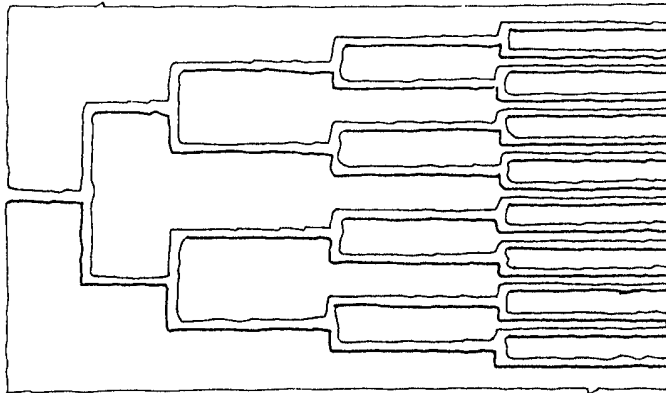
Bereken de kans dat Jan precies twee 10'en krijgt.

Als je er niet uitkomt, geen nood. In de volgende twee opgaven gaan we hier verder op in.

-  **34 Manier 1: met een kansboom**

Vervolg van opgave 33.

- a. Maak een kansboom bij het probleem van opgave 33. Schrijf bij de takken de kansen.



- b. Wat is de kans op precies twee 10'en?

35 Manier 2: door te tellen

Vervolg van opgave 33 en 34.

- a. Hoeveel combinaties zijn er van vier uit de 32 kaarten?
b. Hoeveel “gunstige” combinaties zijn er, dat wil zeggen bij hoeveel grepen zijn er twee 10'en en twee niet-10'en?
c. Wat is de kans op precies twee 10'en?

Bespreking

Dit is een voorbeeld van “trekken zonder terugleggen”. Je krijgt vier kaarten uit een pak van 52. De eerste kaart die je krijgt wordt niet teruggelegd; de tweede kaart komt dus uit een stapel van 51 kaarten. Ook die tweede kaart wordt niet teruggelegd, enzovoort.

- **Manier 1** Er zijn zes verschillende volgordes om twee 10'en te krijgen. De kansen op elk van deze zes manieren blijken hetzelfde te zijn, namelijk $\frac{1}{32} \cdot \frac{1}{31} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{29} = \frac{1}{71920} \approx 0,0105$.

De gevraagde kans is dus $6 \cdot 0,0105 \approx 0,063$.

- **Manier 2** Je moet twee van de vier 10'en krijgen en twee van de achtentwintig niet-10'en. Er zijn $\binom{4}{2} \times \binom{32}{2} = 2268$ viertallen waarbij dat het geval is. In totaal zijn er $\binom{36}{4} = 35960$ viertallen. De gevraagde kans is dus $\frac{2268}{35960} \approx 0,063$.

Bij grotere grepen (van bijvoorbeeld tien kaarten in plaats van vier) is de tweede manier handiger dan de eerste.

Combinatiegetallen

Bij de tweede manier werk je met combinatiegetallen. Het aantal verschillende combinaties van r dingen uit een verzameling van n dingen is het **combinatiegetal** " r uit n ". Dit wordt wel genoteerd met $\binom{n}{r}$. In de module *Rekenen met Patronen* heet dat C_r^n , op de GR heet dat nCr.

We zullen eerst even wat kennis over combinatiegetallen ophalen.

- 36** We gaan ter herinnering enkele combinatiegetallen uit het hoofd uitrekenen.

Stel er liggen acht verschillende dingen op tafel.

- a. Hoeveel verschillende grepen van twee dingen kun je hieruit doen?

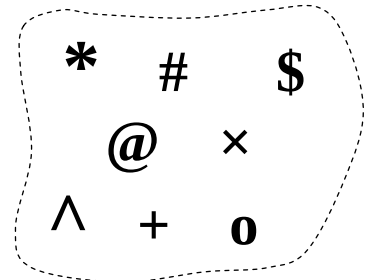
Dat is dus $\binom{8}{2}$.

- b. Bereken $\binom{8}{1}$ en $\binom{8}{7}$.

- c. Bereken $\binom{8}{6}$.

- d. Bereken $\binom{8}{8}$.

- e. Als je weet dat $\binom{8}{3} = 56$, welk ander combinatiegetal weet je dan ook?



0 dingen uit 8 pakken is misschien raar. Maar er is een goede reden om af te spreken dat $\binom{8}{0} = 1$.

- f. Kun jij die bedenken?

- g. Hoe groot zijn (voor elk getal n): $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n}$?

Onderdeel e is een voorbeeld van een algemener verband: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

- h. Welk verband?

- 37 Als nieuw lid van de boekenclub mag je gratis drie boeken kiezen uit een lijst van tien. De eerste vier zijn boeken met prachtige platen in kleur, de andere zes zijn romans. Je kiest willekeurig drie boeken uit de tien, dat wil zeggen dat alle drietallen boeken even waarschijnlijk zijn.
- Bereken de kans dat je 1 platenboek kiest en 2 romans.
 - Bereken ook de kans op
 - 3 platenboeken,
 - 2 platenboeken en 1 roman,
 - 3 romans.
 - Hoe kun je je vier antwoorden op **a** en **b** controleren?
- 38 Uit een klas van tien jongens en twaalf meisjes wordt een afvaardiging van zes leerlingen gekozen. We nemen aan dat de leerlingen gelijke kans hebben om gekozen te worden.
- Hoe groot is de kans dat er evenveel meisjes als jongens gekozen worden? Schrijf je antwoord met behulp van combinatiegetallen en bereken de uitkomst.

Trekken zonder terugleggen

Veel opgaven in deze paragraaf komen hierop neer: je hebt een populatie waarbij de leden een eigenschap wel of niet hebben; hieruit wordt een aantal gepakt; X is het aantal dat gepakt wordt dat de eigenschap wel heeft.

Dit is hetzelfde als trekken **zonder terugleggen** van een aantal ballen uit een doos met witte en zwarte ballen. Dat het zonder terugleggen is, herken je zo: de kans dat de tweede bal wit is, hangt af van de kleur van de eerste bal.

De kansverdeling van X wordt een **hypergeometrische verdeling** genoemd.

Voorbeeld

In een doos zitten tien ballen, vier witte en zes zwarte. Iemand trekt zonder terugleggen vijf ballen uit die doos. X is het aantal witte ballen in die greep.

$$\text{Dan geldt: } P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{3}}{\binom{10}{5}}.$$

			tot.
doos	4	6	10
greep	2	3	5

- 39 Van de vijftientig leerlingen van V5B hebben er vijf hun huiswerk niet gemaakt. De leraar kiest willekeurig vier leerlingen uit de klas. Van deze vier leerlingen hebben er X hun huiswerk niet gemaakt.
- Bereken $P(X = 4)$ en $P(X = 3)$.
 - Van de vier leerlingen die aan de tand gevoeld werden, hadden er drie hun huiswerk niet gemaakt. Wat denk je, zou de leraar de vier leerlingen wel willekeurig gekozen hebben?

- 40 In een vaas zitten vier witte en drie zwarte ballen. Zonder terugleggen wordt uit die vaas steeds een bal gepakt, totdat er drie witte ballen gepakt zijn. X is het aantal trekkingen dat daarvoor nodig is.
- Welke waarden kan X aannemen?
 - Het trekking wwzw (w staat voor wit, z voor zwart) geeft de uitkomst $X = 4$. Schrijf alle trekkingen op die de uitkomst $X = 4$ geven.
 - Stel dat een trekking de uitkomst $X = 4$ geeft. Hoeveel witte zijn er bij de eerste drie ballen? Wat is de kleur van de vierde bal?
 - Ga na: $P(X = 4) = \frac{9}{35}$.
 - Wat zijn de twee kenmerkende eigenschappen voor een trekking die $X = 5$ geeft?
 - Ga na: $P(X = 5) = \frac{12}{35}$.

Met meerdere mogelijkheden

- 41 Voor het schoolfeest heeft de leerlingenvereniging flink wat frisdrank ingekocht. In één van de kratten zitten zes flessen cola, vier flessen seven-up en twee flessen spa. In het donker, en daarvoor aselekt, pakt iemand drie flessen uit het krat.
- Hoe groot is de kans dat hij twee flessen cola en één fles spa pakt?
 - Hoe groot is de kans dat hij twee flessen cola pakt?
 - Bereken op twee manieren de kans dat het drie flessen van dezelfde soort zijn.
 - Bereken ook op twee manieren de kans dat hij van elke soort één fles pakt.
- 42 Een spel kaarten bestaat uit 13 schoppen-, 13 harten-, 13 ruiten- en 13 klaverenkaarten. Ad speelt bridge en krijgt dertien kaarten uit het spel van 52 kaarten. Als hij van een kleur 4 kaarten krijgt en van de andere drie kleuren 3 kaarten, spreken we van een vlakke verdeling.
- Wat is de kans dat Ad 3 klaveren-, 3 ruiten-, 3 harten- en 4 schoppenkaarten krijgt?
 - Bereken de kans op een vlakke verdeling.
- 43 We maken rijtjes van lengte 8 bestaande uit 0'en, 1'en en 2'en.
- Hoeveel van die rijtjes zijn er in totaal mogelijk?
 - Hoeveel van die rijtjes bevatten geen 0'en?

We gaan berekenen hoeveel rijtjes er zijn met twee 0'en, vijf 1'en en één 2. Daarvoor gebruiken we een vaas met de ballen genummerd 1 tot en met 8. Eerst trekken we uit de vaas twee getallen die de plaatsen voor de twee 0'en aangeven. Vervolgens trekken we uit de vaas - waar dan nog zes ballen in zitten - vijf getallen die de plaatsen voor de vijf 1'en aangeven. Het getal dat overblijft geeft de plaats voor de 2 aan.

- Stel dat je eerst de nummers 3 en 6 trekt en vervolgens de nummers 1, 2, 5, 7 en 8. Welk rijtje krijg je dan?
- Op hoeveel manieren kun je de twee plaatsen voor de 0'en trekken?
Op hoeveel manieren kun je vervolgens de vijf plaatsen voor de 1'en trekken?
Hoeveel rijtjes zijn er dus in totaal met twee 0'en, vijf 1'en en één 2?

- e. Je kunt ook eerst de plaats voor de 2 trekken en daarna de twee plaatsen voor de 0'en.
Op hoeveel rijtjes kom je dan in totaal uit?
- f. Bereken op nog een derde manier het aantal rijtjes met twee 0'en, vijf 1'en en één 2.
- g. Bereken het aantal rijtjes van lengte 10 met één 0, twee 1'en, drie 2'en en vier 3'en.

Er zijn $\binom{7}{2} \times \binom{5}{3} \times \binom{2}{1}$ rijtjes van lengte 7 met twee 0'en, drie 1'en, één 2 en één 3.

Als je eerst de drie 1'en aanwijst, dan de 2 en dan de twee 0'en, vind je voor dit aantal:

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{2}.$$

- 44** Bij Scrabble heeft iemand 3 keer de letter A, 2 keer de letter N en 1 letter S.
Door de letters achter elkaar op zijn plankje te leggen, vormt hij een "woord" (dat niet in het woordenboek hoeft voor te komen; het hoeft ook niet uitspreekbaar te zijn: de letters mogen dus in een willekeurige volgorde staan).
- a. Hoeveel "woorden" kan hij vormen?
 - b. Veronderstel dat de letters in een willekeurige volgorde op het plankje staan. Wat is dan de kans dat er het woord ANANAS staat?

Het woord MISSISSIPPI telt één M, vier I's, vier S'en en twee P's.

- c. Hoeveel verschillende "woorden" kun je met de elf letters vormen?
- d. Als je de letters in een willekeurige volgorde zet, wat is dan de kans dat er het woord MISSISSIPPI staat?

Begrepen?

Iemand produceert een rijtje van lengte 6. Hij pakt uit een bak met 2 A's, 2 B's en 2 C's.

- Hij pakt met terugleggen. Wat is de kans dat er geen A in voorkomt?
- Hij pakt met terugleggen. Wat is de kans dat er geen twee gelijke letters achter elkaar staan?
- Hij pakt zonder terugleggen. Wat is de kans op het rijtje BACCBA?
- Hij pakt zonder terugleggen. Wat is de kans dat de A's, B's en C's naast elkaar komen te staan?
- Hij pakt zonder terugleggen. Wat is de kans dat er geen twee gelijke letters achter elkaar staan?

3.4 Wel/Niet

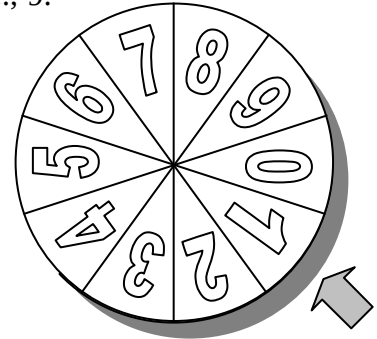
45 Draaiwiel 1

Op een draaiwiel staan, elk in een sector van 36° , de cijfers 0, 1, ..., 9.

Dit wiel wordt zes keer rondgedraaid. Hoe groot is de kans

- a. op zes verschillende cijfers?
- b. op zes keer hetzelfde cijfer?
- c. dat er geen 8 bij is?
- d. dat er minstens één 8 bij is?
- e. dat alleen de eerste twee cijfers 8 zijn?
- f. dat er precies twee cijfers 8 bij zijn?
- g. dat er precies twee cijfers 8 zijn die bovendien na elkaar komen?

Tip: Schrijf eens een aantal van die rijtjes op.



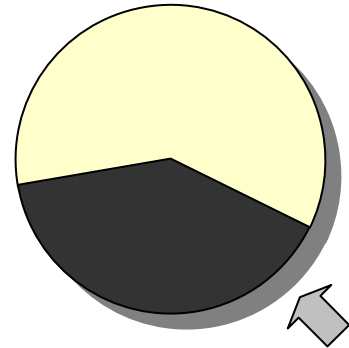
46 Draaiwiel 2

Bij een ander draaiwiel is de successector 144° .

- a. Hoe groot is bij één keer draaien van dat wiel de kans op succes?

Dat wiel wordt vijf keer rondgedraaid. Hoe groot is de kans op:

- b. vijf keer succes?
- c. de eerste vier keer succes en de vijfde keer pech?
- d. vier keer succes en één keer pech?
- e. de eerste drie keer succes en de laatste twee keer pech?
- f. drie keer succes en twee keer pech?



- 47 In een doos zitten acht ballen, waarvan er vijf rood zijn. Uit die doos nemen we blindelings met terugleggen drie keer een bal.

- a. Hoe groot is de kans dat de tweede bal rood is en de andere ballen niet?
- b. Hoe groot is de kans dat de tweede bal rood is?

X is het aantal rode ballen in deze steekproef.

- c. Maak een tabel van de kansverdeling van X .
- d. Ga na dat de som van deze kansen 1 is.
- e. Beschrijf het draaiwiel waarmee dit experiment te simuleren is.

48 Gooien met een dobbelsteen

Er wordt vijf keer met een dobbelsteen gegooid.

- a. Bereken de kans dat alleen de eerste twee worpen zes wordt gegooid.
- b. Bereken de kans dat alleen de tweede en de vierde keer zes wordt gegooid.
- c. Bereken de kans dat er precies twee keer zes wordt gegooid.

Noem het aantal keren dat zes wordt gegooid Z .

d. Maak een tabel van de kansverdeling van Z .

e. Controleer of de som van de kansen (ongeveer) 1 is.

f. Beschrijf het draaiwiel waarmee het gooien met deze dobbelsteen te simuleren is.

Veel opgaven in deze paragraaf zijn wiskundig gezien hetzelfde. Bij een experiment zijn er twee mogelijke uitkomsten: “succes” en “mislukking”. Dit experiment wordt n keer (onafhankelijk van elkaar) herhaald, steeds met dezelfde kans op succes p .

Elk rijtje met precies k successen heeft kans $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ en er zijn $\binom{n}{k}$ van zulke rijtjes.

De kans op k successen is dus: $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Noemen we het totaal aantal successen X , dan is $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

We zeggen dat X **binomiaal verdeeld** is.

Binomiaal betekent letterlijk *tweetermig*. Dat heeft te maken met het feit dat er twee alternatieven zijn: succes en mislukking.

Voorbeeld Bij 5 herhalingen, steeds met **succes**kans 0,4, is de kans op 2 successen:

$\binom{5}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^3$. Op de GR kun je ook binomiale kansen uitrekenen. De kans $\binom{5}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^3$ vind

je op de TI met Binompdf(5, 0.4, 2) en op de Casio met Binomial P.D. (Bpd).

Hierin staat *pdf* staat voor *probability distribution function*.

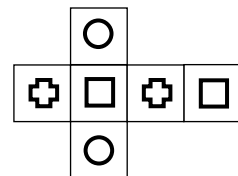
49 Een poes heeft zes jongen gekregen.

a. Hoe groot is de kans dat er evenveel katertjes als poezen bij zijn?

b. Hoe groot is de kans dat er meer katertjes dan poezen bij zijn?

c. Hoe groot is de kans dat er zowel katertjes als poezen bij zijn?

50 Een spel bevat negen identieke dobbelstenen. Elke dobbelsteen heeft twee zijvlakken met een rondje, twee met een kruis en twee met een vierkant. Hiernaast is een uitslag van zo'n dobbelsteen getekend. Men werpt de negen dobbelstenen tegelijk en kijkt dan welke figuren boven liggen.



a. Bereken de kans op allemaal gelijke figuren.

b. Bereken de kans op precies drie rondjes.

c. Bereken de kans op drie rondjes, drie kruisen en drie vierkanten.

Volgens de kans bij c treedt gemiddeld bij ongeveer één op 12 worpen (met negen dobbelstenen) de mooie configuratie met drie rondjes, drie kruisen en drie vierkanten op.

d. Bereken de kans dat dit in 12 worpen precies één keer gebeurt.

- 51 Van de penalty's bij voetballen in de eredivisie wordt 70% benut, wordt 20% door de keeper gestopt en wordt 10% over of naast geschoten.

a. Wat is de kans dat van de eerstvolgende 10 penalty's er precies 3 gemist (= niet benut) worden?

Je hebt gehoord dat er afgelopen weekend liefst 7 penalty's werden gemist.

b. Bereken de kans dat er daarvan precies 4 door de keeper werden gestopt.

Er zijn op een avond maar twee wedstrijden gespeeld. Je hebt gehoord dat er die avond liefst 7 penalty's zijn gegeven. Neem aan dat elke club met dezelfde kans een penalty krijgt.

c. Bereken de kans dat precies 4 van de penalty's aan eenzelfde club werden gegeven.

- 52 Een kolom van het totoformulier vul je in door bij elk van de dertien wedstrijden één van de hokjes 1, 2 of 3 aan te kruisen. (1 betekent "de thuisspelende club wint", 2 betekent "de uit spelende club wint" en 3 betekent "gelijkspel".) Neem aan dat elke wedstrijd met kans $\frac{1}{3}$ goed voorspeld wordt. Johan vult één kolom in.

a. Bereken de kans dat hij precies vijf wedstrijden juist voorspelt.

b. Bereken de kans dat hij geen enkele wedstrijd juist voorspelt.

Als je alle 13 wedstrijden goed voorspelt, dan win je de Jackpot. Bij 12 wedstrijden goed win je de tweede prijs en bij 11 wedstrijden goed de derde prijs. Bij minder dan 11 goede voorspellingen win je niets.

c. Bereken de kans dat Johan een prijs wint.

- 53 In het seizoen 2009-2010 werden in de eredivisie 306 wedstrijden gespeeld. Daarvan werden er 153 gewonnen door de thuisclub, 91 werden verloren door de thuisclub en 62 eindigden in een gelijkspel. Op grond van deze aantallen mag je wel zeggen dat een willekeurige thuisclub met 50% kans wint, met 30% kans verliest en met 20% kans gelijkspeelt. Neem aan dat deze percentages ook dit seizoen gelden. We kijken naar de negen eredivisiewedstrijden in een bepaald weekend.

a. Bereken de kans dat vier van de negen wedstrijden worden gewonnen door de thuisclub.

b. Bereken de kans de thuisclubs vier wedstrijden winnen en er drie verliezen en dat twee wedstrijden eindigen in een gelijkspel.

c. Bereken de kans dat geen enkele wedstrijd eindigt in een gelijkspel.

d. Bereken de kans dat drie wedstrijden eindigen in winst voor de thuisclub, drie in verlies voor de thuisclub en drie in een gelijkspel.

- 54 *Rikken* wordt gespeeld met een volledig spel van 52 kaarten. Elk van de vier spelers krijgt bij deling 13 kaarten. We letten op de verdeling van de 4 azen over de spelers. De kans dat elk van de spelers één aas krijgt is ongeveer 0,1055. We zeggen dat de azen dan “rond zitten”. We bekijken de verdeling van de azen in 10 opeenvolgende spellen.
- Bereken de kans dat de azen precies één keer rond zitten.
 - Bereken de kans dat de azen hoogstens twee keer rond zitten.
 - Bereken de kans dat de azen minstens twee keer rond zitten.
- 55 De azen kunnen bij *Rikken* op vijf manieren over de vier spelers verdeeld zijn. De eerste manier is de 1-1-1-1-verdeling (elke speler heeft één aas) met kans 0,1055, de tweede manier is de 2-1-1-0-verdeling met kans 0,5843, de derde manier is de 3-1-0-0-verdeling met kans 0,1648, de vierde manier is de 2-2-0-0-verdeling met kans 0,1348 en de vijfde manier is de 4-0-0-0-verdeling (één speler heeft alle azen) met kans 0,01056. We bekijken weer de verdeling van de azen in 10 opeenvolgende spellen.
- Bereken de kans dat bij vier spellen de azen bij hoogstens twee spelers zitten.
 - Bereken de kans dat bij minstens één spel de azen bij één speler zitten.
 - Bereken de kans dat de tweede manier hoogstens drie keer voorkomt.
 - Bereken de kans dat de eerste manier één keer voorkomt, de tweede manier zeven keer en de derde manier twee keer.
 - Bereken de kans dat de eerste manier één keer voorkomt, de tweede manier zeven keer, de derde manier één keer en de vierde manier één keer.

Als X het aantal azen is dat een van de spelers krijgt, dan staat $P(X \leq 3)$ voor de som van de kansen: $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$ en $P(X=3)$. We noemen $P(X \leq 3)$ een **cumulatieve kans**. *Cumulatief* betekent *bij elkaar opgeteld, opstapelend*.

Cumulatieve kansen bij een binomiaal kansexperiment kun je ook met de GR vinden. Bijvoorbeeld de kans van opgave 54b is op de TI te berekenen met $\text{Binomcdf}(10, 0.1055, 2)$ (*cdf* staat voor *cumulative distribution function*). Op de Casio kan deze kans worden berekend met Binomial C.D. (Bcd).

Merk op dat zowel op de TI als op de Casio alleen binomiale kansen van het type $P(X = k)$ of $P(X \leq k)$ kunnen worden berekend. Met behulp van het feit dat de som van de kansen gelijk is aan 1 kunnen ook andere binomiale kansen worden berekend. Zo is bijvoorbeeld $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$ en $P(X > 12) = P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12)$.

- 56 Een binomiaal kansexperiment heeft 14 herhalingen en succeskans 0,3. X is het aantal successen. Bereken met de GR de volgende kansen:
- $P(X \geq 7)$
 - $P(X < 8)$
 - $P(1 < X < 5)$
 - $P(3 \leq X \leq 10)$

- 57 We werpen tien keer met een dobbelsteen en letten op het aantal zessen in die tien worpen.
Hoe groot is de kans dat er minstens drie zessen bij zijn?

- 58 Zo'n 10% van de auto's die over de Nederlandse wegen razen, heeft technische gebreken. Regelmatig worden door de politie uitgebreide technische keuringen uitgevoerd langs de kant van de autoweg.



De politie controleert op zekere dag 250 auto's.

- a. Hoe groot is de kans dat er bij meer dan dertig auto's gebreken worden geconstateerd?

Gemiddeld 1 op de 500 auto's is zo gammel dat hij van de weg wordt gehaald en naar de sloper gebracht.

- b. Hoe groot is de kans dat bij 250 controles er minstens één auto rijp is voor de sloop?

Het Nederlandse wagenpark telt zo'n 7 miljoen automobielen. Als de verkeerspolitie 250 verschillende auto's uitkiest, dan wil dat zeggen, dat ze eigenlijk werkt zonder terugleggen. Omdat de populatie waaruit getrokken wordt zo groot is, maakt het nauwelijks uit of de trekking met of zonder terugleggen gebeurt. In de volgende opgave bekijken we wat het verschil is bij relatief kleine en bij relatief grote populaties.

-  59 Uit een vaas met 5 witte en 10 rode ballen worden 3 ballen getrokken. We willen weten wat de kans is op twee witte ballen.
- a. Bereken die kans als de trekking met terugleggen gebeurt in vier decimalen.
- b. Bereken die kans als de trekking zonder terugleggen gebeurt in vier decimalen.

Uit een vaas met 50 witte en 100 rode ballen worden 3 ballen getrokken. We willen weten wat de kans is op 2 witte ballen.

- c. Bereken die kans als de trekking met terugleggen gebeurt in zes decimalen.
- d. Bereken die kans als de trekking zonder terugleggen gebeurt in zes decimalen.

Hypergeometrisch $\approx$ binomiaal

Als het aantal trekkingen klein is ten opzichte van de totale populatie, dan kun je kansen zonder terugleggen (hypergeometrisch) praktisch berekenen alsof de trekking met terugleggen gebeurt (binomiaal). En dat is vaak handiger.

- 60** Bij een eerlijke munt zijn de kansen op "kop" en "munt" gelijk. Je mag dus verwachten dat in ongeveer 50% van de worpen "kop" zal worden gegoooid. De kans is groot dat het aantal keer kop ten minste 40% en ten hoogste 60% van het aantal worpen is.
- a.** We doen 10 worpen. Bereken de kans dat het aantal keer "kop" ten minste 40% en ten hoogste 60% van het aantal worpen is.
 - b.** Dezelfde vraag voor 20 worpen, voor 50 worpen en voor 100 worpen.
 - c.** Hoe groter het aantal worpen, des te groter de kans dat het aantal keer "kop" tussen de 40% en 60% ligt. Kun je dat verklaren ?
- 61** Bij een landelijk onderzoek is gebleken dat 15% van alle middelbare scholieren regelmatig spijbelt.
- a.** Hoe groot is de kans dat in een havo5-klas van twintig leerlingen er meer dan 4 zijn die regelmatig spijbelen?
 - b.** Bij vraag **a** heb je een binomiale kans berekend. Maar hebben we hier wel te doen met een binomiaal kansexperiment? Waarom is dat twijfelachtig?
- 62** In een bedrijf worden schroeven gefabriceerd. Volgens de bedrijfsleider is 5% van de productie niet bruikbaar. De slechte exemplaren worden niet verwijderd, omdat de controle op bruikbaarheid te veel geld kost. De schroeven worden in doosjes van 50 stuks verkocht aan de winkeliers.
- a.** Hoe groot is de kans dat een doosje meer dan vier onbruikbare schroeven bevat?
- Een winkelier heeft een partij van 500 doosjes schroeven besteld bij de fabriek.
- b.** Hoeveel doosjes met 50 bruikbare schroeven kan hij daarbij verwachten?
- 63** Een docent geeft een multiplechoicetest die bestaat uit twintig vierkeuzevragen. Stel dat hij voor elke goed beantwoorde vraag een half punt toekent.
- a.** Hoe groot is de kans dat iemand die alle antwoorden gokt als cijfer een 4 of hoger krijgt?
- De docent vindt dat een gokker ten hoogste 1% kans mag hebben om een 4 of hoger te halen.
- b.** Bij welk aantal goede antwoorden moet hij dan het cijfer 4 toekennen?

Willekeurig?

- 64 Nederlandse volwassen mannen zijn gemiddeld 1,81 meter.
Bij een congres in Utrecht over biometrie werd de lengte van de deelnemers gevraagd. Er antwoordden 37 mannelijke deelnemers; 24 van hen waren langer dan 1,81.
- Bereken de kans op een resultaat van ten minste 24 mannen die langer dan gemiddeld zijn bij een groep van 37 willekeurige Nederlandse mannen.
 - Zou je – op basis van je antwoord bij a – de groep deelnemers aan het congres “willekeurig” willen noemen?
- 65 Er zijn 154 vwo4-leerlingen op het Amalia College, waarvan 69 jongens en 85 meisjes.
43 van de leerlingen hebben wiskunde A/C en 111 hebben wiskunde B. Op grond hiervan veronderstellen we dat de kans dat een willekeurige leerling wiskunde A/C kiest $\frac{43}{154} \approx 0,279$ is.
- Bereken de kans dat van de 69 jongens er 13 of minder wiskunde A/C kiezen.
Bereken ook de kans dat van de 85 meisjes er 30 of meer wiskunde A/C kiezen.
- Op het Amalia College hadden 13 jongens wiskunde A/C gekozen en 30 meisjes.
- Zou je de vwo4-leerlingen op het Amalia College “willekeurig” willen noemen?

*Als men een verzameling objecten onderzoekt (bijvoorbeeld de lengte van mensen, de kwaliteit van eieren of de neerslag in Nederlandse plaatsen) is het in de praktijk vaak ondoenlijk van elk object het resultaat te meten. In plaats daarvan volstaat men met een deel van de verzameling; dat deel is een zogenaamde **steekproef**. De objecten in de steekproef moeten wel willekeurig worden gekozen, d.w.z. elk object moet van tevoren evenveel kans hebben om in de steekproef terecht te komen. In het hoofdstuk Onderzoek gaan we hier verder op in.*

-  66 Ga naar de digimap of naar VU-Statistiek, Simulatie, Steekproeven

Er zijn vier parameters:

geheime proportie blauw, omvang populatie, omvang steekproef en aantal steekproeven.

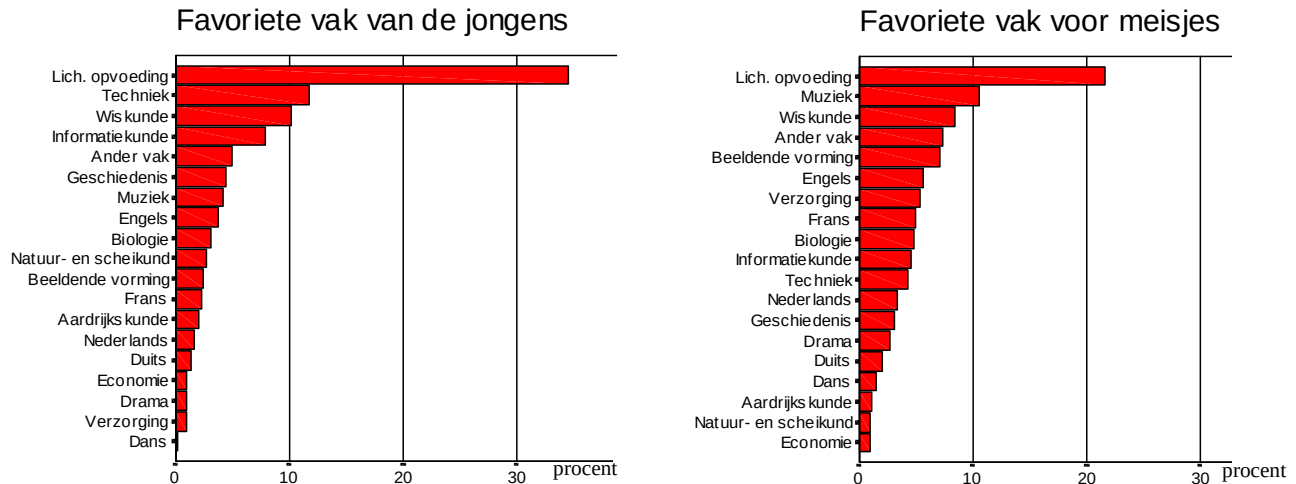
- Kies waarden voor deze parameters en voer de simulatie uit.
- Klopt het resultaat met wat je vooraf zou verwachten?

Kies geheime proportie blauw = 0.279, omvang populatie = 10000, omvang steekproef = 69 en aantal steekproeven = 100.

- Komt het resultaat overeen met het antwoord van opgave 65a?
- Dezelfde vraag bij omvang steekproef = 85.

67 In 2000 is in Nederland de massale enquête Nationale Doorsnee gehouden onder eerste- en tweedeklassers van het voortgezet onderwijs.

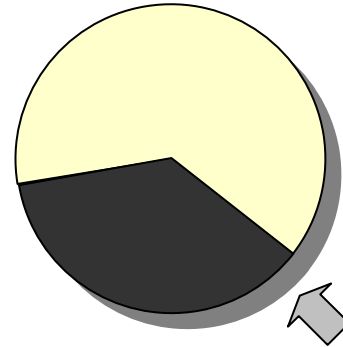
Onder andere werd gevraagd naar het favoriete schoolvak. Bij 10% van de jongens was dat wiskunde, en ook bij 8% van de meisjes. Laten we zeggen gemiddeld bij 9% van de leerlingen.



- Hoeveel leerlingen verwacht je in een brugklas van 33 leerlingen voor wie wiskunde het favoriete vak is?
- Wat is de kans dat voor precies 3 leerlingen wiskunde het favoriete vak is?
- Wat is de kans dat in een klas van 33 leerlingen er 6 of meer wiskunde als favoriete vak hebben?
- Bij c heb je waarschijnlijk een binomiale kans uitgerekend. Waarom is dat eigenlijk niet goed?

3.5 De variantie

- 68** We draaien n keer een kanstol met successector 120° .
 X is het aantal successen.
- Teken een kanshistogram voor de volgende waarden van n bereken de betreffende kansen): $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$.
 - Bereken de verwachtingswaarde van het aantal succes voor elk van deze vier waarden van n .
 - Bereken ook de variantie, dat is het kwadraat van de standaardafwijking.
 - Wat valt je op?



X is het aantal successen in een binomiaal kansexperiment met n herhalingen en succeskans p .

- Hoe groot is – denk je – $E(X)$?
 Hoe groot is – denk je – $\text{Var}(X)$?

- 69** De verwachtingswaarde van het aantal successen X bij een binomiaal kansexperiment volgt uit de somregel voor de verwachtingswaarde. Hoe, dat ga je in deze opgave uitvinden.
 Noem het aantal successen bij de eerste uitvoering van het experiment X_1 , het aantal successen bij de tweede uitvoering X_2 , enzovoort.
- Welke waarden kunnen $X_1, X_2, \dots$ aannemen?
 - Leg uit dat $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
 - Bereken $E(X_1)$. Hoe groot zijn $E(X_2), E(X_3), \dots$?
 - Hoe groot is $E(X)$ dus?

Als X het aantal successen is bij een binomiaal kansexperiment met succeskans p en aantal herhalingen n , dan is $E(X) = np$.

- 70** De standaardafwijking van het aantal successen X is lastiger te vinden. We vergelijken de aantallen successen uit opgave **68** voor $n = 1$ en $n = 2$.

De sd voor $n = 1$ is $\sqrt{\frac{2}{9}}$.

- Leg uit dat het logisch is dat de sd voor $n = 2$ groter is.

We gaan twee grootheden vergelijken:

- Y is het dubbele van X voor $n=1$. Dus $Y = 0$ met kans $\frac{2}{3}$ en $Y = 2$ met kans $\frac{1}{3}$.
- X voor $n=2$.

- Wat is het grote verschil tussen deze twee?
- Ga na dat $\text{sd}(Y) = 2 \text{sd}(X)$.
- Ga na dat $\text{sd}(X)$ voor $n = 2$ kleiner is dan $\text{sd}(Y)$.

Als het aantal herhalingen verdubbelt, wordt de sd groter, maar minder dan 2 keer zo groot.

- Kun je dat uitleggen.

Algemeen geldt de volgende **somregel voor de variantie**.

Als X en Y onafhankelijk zijn en $S = X + Y$, dan: $\text{Var}(S) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

In extra opgave **88** kun je aan de hand van een voorbeeld begrijpen dat deze regel waar is. Om de regel in zijn algemeenheid te bewijzen, is veel ingewikkeld schrijfwerk nodig. Dat zullen we hier niet doen.

- 71** De variantie van het aantal ogen bij het werpen met een dobbelsteen is $\frac{35}{12}$; zie opgave **30**.
- a.** Hoe groot is de variantie van het totaal aantal ogen bij het werpen met twee dobbelstenen? En bij het werpen met zes dobbelstenen?
 - b.** Hoe groot is de variantie van het aantal ogen dat bij het werpen met een dobbelsteen aan de onderkant komt?
 - c.** Hoe groot is de variantie van de som van de aantallen ogen die bij het werpen met een dobbelsteen aan de boven- en onderkant komen?
 - d.** Waarom geldt hier de somregel voor de variantie niet?

Als X het aantal succes is in een binomiaal kansexperiment met succeskans p en aantal herhalingen n , dan is $\text{sd}(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

- 72** **a.** Bewijs deze regel voor $n = 1$ (maak eerst een kanstabel).
b. Bewijs dit vanuit de somregel voor de variantie.
- 73** **a.** Wat is de standaardafwijking van het aantal kop bij 20 keer werpen met een zuivere munt?
b. Wat is de standaardafwijking van het aantal successen bij 20 keer draaien met de kanstol van opgave **68** (succeskans $\frac{1}{3}$)?
- 74** Bekend is de vuistregel dat bij veel experimenten de kans op een afwijking van het gemiddelde van meer dan 2 keer de sd kleiner is dan 5%. Met andere woorden: het resultaat ligt met 95% kans tussen het gemiddelde + 2 sd en het gemiddelde - 2 sd.
- a.** Als je duizend keer met een zuivere munt werpt, tussen welke waarden zal – volgens de vuistregel – het aantal kop dan liggen met 95% kans?
 - b.** Bereken de kans dat het aantal kop tussen deze twee waarden ligt.

Er wordt 186000 keer met een zuivere munt geworpen. De munt viel 95000 keer op kop.

- c.** Hoeveel keer de sd wijkt dit resultaat af van het te verwachten aantal keer kop?

In 2008 werden in Nederland 95000 jongens geboren en 91000 meisjes.

d. Wat denk je, is de kans op een jongen even groot als op een meisje?



Ga naar de digimap of naar VU-Statistiek, Simulaties, Munten

Stel het aantal worpen in op 100, de kans op kop op 0,5 en de “trechter” op 95%.

Voer het experiment een aantal keer uit. Het kan voorkomen dat bijvoorbeeld bij de 45^{ste} worp het aantal kop groter of kleiner is dan de trechtergrenzen aangeven. Maar dat komt maar in 5% van de gevallen voor.

Varieer het aantal worpen, de kans op kop en het trechterpercentage.

3.6 Extra opgaven

75 Hoeveel azen?

Bridge wordt gespeeld door vier personen en met een volledig kaartspel (52 kaarten, waaronder 4 azen). De kaarten worden gedeeld; ieder krijgt 13 kaarten.

Birgit is een van de spelers. We letten op het aantal azen dat Birgit krijgt.

- a. Bereken de kans dat Birgit geen enkele aas krijgt.
- b. Bereken de kans dat Birgit precies één aas krijgt.
- c. Maak een kanstabel voor het aantal azen dat Birgit krijgt.

76 Pincode gokken

Een pincode bestaat uit vier cijfers van 0 t/m 9. Anneke is haar pincode vergeten. Wel weet ze dat hij uit de cijfers 1, 5, 6, 8 bestaat. Ze toetst een van de mogelijkheden in.

- a. Wat is de kans dat ze de goede pincode intoetst?
- b. Maak een kanstabel voor het aantal cijfers dat ze op de goede plaats heeft staan.

77 Druivenoogst

Een druiventeler kan kiezen uit twee manieren van oogsten.

- Direct oogsten als de druiven rijp zijn.
De winst per kilo is dan €1,50. Aan deze manier van oogsten is geen risico verbonden.
- Nog twee weken wachten met oogsten als de druiven rijp zijn.
Hierdoor worden de druiven voller van smaak en zijn dan meer waard: de winst wordt €2,00 per kilo. Aan deze manier zit wel een risico. Als het gaat regenen in de extra twee weken, worden de druiven namelijk aangetast en worden ze minder waard. De winst is dan nog slechts €0,75 per kilo.

De kans dat het in de betreffende periode van twee weken regent is 0,3.

Bekijk een periode van 20 jaar.

- a. Laat zien dat de te verwachten winst per kilo bij de tweede manier groter is dan €1,50.

Als de winst van de aangetaste druiven veel lager wordt dan €0,75, is het voordeliger voor de teler om de eerste manier te kiezen.

- b. Bereken vanaf welke winst per kilo voor de aangetaste druiven hij beter voor de eerste manier kan kiezen.

78 Euroloterij

Met de Euroloterij is er elke week kans op extra geldprijzen, bovenop de winkans bij alleen de Lotto. Je moet wel al aan de Lotto deelnemen voordat je kunt deelnemen aan de Euroloterij. De inleg is €1,00 per trekking. Op het formulier staat een getal van zes cijfers (0 t/m 9).

Het prijzenschema:

Alle 6 cijfers goed: € 200.000

De laatste 5 cijfers goed en niet alle 6: € 5000

De laatste 4 cijfers goed en niet de laatste 5: € 450

De laatste 3 cijfers goed en niet de laatste 4: € 50

De laatste 2 cijfers goed en niet de laatste 3: € 5

Het laatste cijfer goed en niet de laatste 2: € 1

Bereken de verwachte winst per formulier voor de organisator van de Euroloterij.

79 Standaardafwijkingen vergelijken

We bekijken steeds twee databestanden. Welk van de twee heeft de grootste standaardafwijking? Waarom?

Controleer je antwoorden eventueel achteraf door de standaardafwijkingen uit te rekenen.

a. 1, 2, 2, 3 en 1, 1, 3, 3

b. 1, 1, 3, 3 en 0, 0, 2, 2

c. 1, 1, 3, 3 en 2, 2, 6, 6

d. 1, 1, 3, 3 en 1, 1, 1, 3, 3, 3

80 Boogschieten

Bij boogschieten worden pijlen geschoten op een schietschijf, het zogenaamde blazoen. Dat heeft de kleuren geel, rood, blauw, zwart en wit. Elke kleur heeft twee ringen. De puntentelling is van binnen naar buiten: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.



Boogschutter Robin H. kent zijn kansen per schot:

aantal punten	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
kans	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17	0,19

Boogschutter Wilhelm T. heeft vaker een afzwaaijer, maar zit ook vaker dicht bij de roos dan Robin. Wilhelms kansen zijn:

aantal punten	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
kans	0,1	0,1	0,1	0,1	0	0	0	0,1	0,2	0,3

a. Welke boogschutter behaalt gemiddeld de hoogste score?

b. Bij welke boogschutter is de standaardafwijking van het aantal punten het grootst?

81 Supportersrellen

Na de wedstrijd van Ajax tegen Feyenoord is het weer eens mis. Vijfentwintig supporters, tien van Ajax en vijftien van Feyenoord, gaan met elkaar op de vuist. De politie grijpt in, zonder ergens op te letten. Elke supporter heeft daardoor dezelfde kans om opgepakt te worden. In totaal worden er acht supporters gearresteerd.

Hoe groot is de kans dat er drie aanhangers van Ajax en vijf van Feyenoord naar het bureau moeten? Schrijf je antwoord eerst met combinatiegetallen en bereken daarna de kans.

82 Fototoestel

Sietse heeft twee volle batterijen nodig voor zijn fototoestel. In een laatje liggen zes oplaadbare batterijen: vier volle en twee lege. Sietse pakt willekeurig twee van de batterijen en doet die in zijn fototoestel.

Bereken de kans dat de walkman werkt op twee manieren:

- door twee kansen te vermenigvuldigen,
- door combinatiegetallen te gebruiken.

83 Telefoonnummers

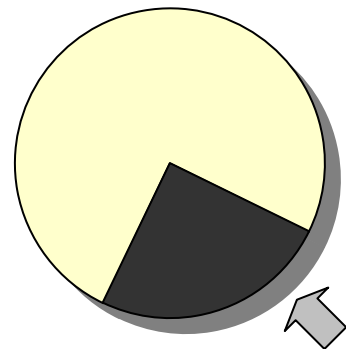
De telefoonnummers in Uden beginnen met 0413 – dat is het netnummer – waarna het abonneenummer (zes cijfers) komt.

- Hoeveel abonneenummers kun je maken met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9?
- Hoeveel abonneenummers kun je maken met de cijfers 1, 1, 3, 5, 7 en 8?
- Hoeveel abonneenummers kun je maken met de cijfers 1, 1, 1, 3, 5 en 7?
- Hoeveel abonneenummers kun je maken met de cijfers 1, 1, 3, 3, 5 en 7?

84 Draaiwiel 3

Bij een spel met een draaiwiel met een successector van 90° heb je kans $\frac{1}{4}$ om drie euro te winnen en kans $\frac{3}{4}$ om één euro te verliezen. Iemand besluit om dit spel drie keer te spelen. X is het bedrag dat hij na die drie spelletjes gewonnen heeft.

- Welke waarden kan X aannemen?
- Maak een tabel van de kansverdeling van X .
- Laat met een berekening zien dat dit spel eerlijk is.
- Wat is trouwens een *eerlijk spel*, vind je?



85 Werpen met een munt

Er wordt zes keer met een munt geworpen.

- Bereken de kans dat alleen de eerste, derde en vijfde worp kop oplevert.
- Bereken de kans dat alleen de tweede, vierde en zesde worp kop oplevert.
- Bereken de kans dat precies drie van de zes worpen kop opleveren.

Noem het aantal keren dat kop wordt gegooid Y .

d. Maak een tabel van de kansverdeling van Y .

e. Teken het kanshistogram van Y .

f. Waarom is dit kanshistogram symmetrisch?

86 Mens erger je niet

Bij het bordspel *Mens erger je niet* moet je een nieuwe pion in het spel brengen als je zes ogen gooit met de dobbelsteen, mits nog niet alle pionnen in het spel zijn.

a. Bereken de kans dat de tweede pion in de vierde beurt in het spel komt.

b. Bereken de kans dat de tweede pion pas na de vierde beurt in het spel komt.

c. Bereken de kans dat de derde pion in de tiende beurt in het spel komt.

d. Bereken de kans dat de vierde (en laatste) pion pas na de twintigste beurt in het spel komt.

87 Gripepidemie

Bij een griep epidemie wordt 20% van de bevolking ziek. Neem aan dat iedereen dezelfde kans heeft om ziek te worden.

a. Waarom is deze aanname aanvechtbaar?

Op een school werken 25 leraren.

b. Hoe groot is de kans dat minstens vijf leraren griep krijgen?

c. Hoe groot is de kans dat minstens vijf leraren geen griep krijgen?

d. En hoe groot is de kans dat precies vijf leraren griep krijgen?

Neem aan dat er op een dag vijf leraren door de griep gevelde zijn.

e. Hoe groot is de kans dat van de elf leraren die Sofie heeft er die dag drie met griep thuis zijn gebleven?

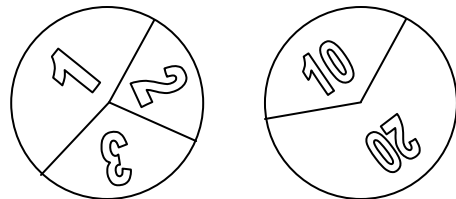
88 De variantie van de som

X neemt de waarden 1, 2 en 3 aan en Y neemt de waarden 10 en 20 aan met zekere kansen. X en Y zijn onafhankelijk. De kansverdelingen van X en Y zijn:

X :	1	2	3
	p_1	p_2	p_3

,

Y :	10	20
	q_1	q_2



We bekijken de som $S = X + Y$.

a. Welke waarden neemt S aan?

Omdat X en Y onafhankelijk zijn, geldt $P(S=11) = p_1 q_1$

b. Maak de kanstabel voor S .

c. Wat zijn $E(X)$ en $E(Y)$?

We korten af: $E(X) = a$ en $E(Y) = b$. Dus $E(S) = a + b$.

d. Laat zien dat $p_1(1-a) + p_2(2-a) + p_3(3-a) = 0$ en dat $q_1(10-b) + q_2(20-b) = 0$.

e. Wat zijn $\text{Var}(X)$ en $\text{Var}(Y)$, uitgedrukt met behulp van a en b ?

We zullen laten zien dat $\text{Var}(S) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$. Daarvoor heb je alleen maar algebra uit klas 2 nodig. Niet moeilijk, maar je moet wel nauwkeurig werken.

$$\text{Var}(S) = p_1 q_1 (11 - (a+b))^2 + p_2 q_1 (12 - (a+b))^2 + p_3 q_1 (13 - (a+b))^2 + p_1 q_2 (21 - (a+b))^2 + p_2 q_2 (22 - (a+b))^2 + p_3 q_2 (23 - (a+b))^2$$

We gaan haakjes wegwerken. Bij de eerste term geeft dat:

$$(11 - (a+b))^2 = (1-a + 10-b)^2 = (1-a)^2 + (10-b)^2 + 2(1-a)(10-b).$$

Zo ook de andere vijf termen. Die allemaal opgeteld geeft in totaal achttien termen:

$$\begin{aligned} & p_1 q_1 (1-a)^2 + p_2 q_1 (2-a)^2 + p_3 q_1 (3-a)^2 + p_1 q_2 (1-a)^2 + p_2 q_2 (2-a)^2 + p_3 q_2 (3-a)^2 + \\ & p_1 q_1 (10-b)^2 + p_2 q_1 (10-b)^2 + p_3 q_1 (10-b)^2 + p_1 q_2 (20-b)^2 + p_2 q_2 (20-b)^2 + p_3 q_2 (20-b)^2 + \\ & 2 p_1 q_1 (1-a)(10-b) + 2 p_2 q_1 (2-a)(10-b) + 2 p_3 q_1 (3-a)(10-b) + 2 p_1 q_2 (1-a)(20-b) + \\ & 2 p_2 q_2 (2-a)(20-b) + 2 p_3 q_2 (3-a)(20-b) \end{aligned}$$

- De eerste zes termen zijn samen $p_1 \cdot (1-a)^2 + p_2 \cdot (2-a)^2 + p_3 \cdot (3-a)^2$ en dat is $\text{Var}(X)$.
- De volgende zes zijn samen $q_1 \cdot (10-b)^2 + q_2 \cdot (20-b)^2$ en dat is $\text{Var}(Y)$.
- De laatste zes termen zijn samen gelijk aan $2(p_1(1-a) + p_2(2-a) + p_3(3-a)) \cdot (q_1(10-b) + q_2(20-b))$. In onderdeel **d** hebben we gezien dat dit gelijk is aan $2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

Alles bij elkaar hebben we gevonden: $\text{Var}(S) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

89 Grabbelton

In een grabbelton zitten zes plankjes. Op drie ervan staat het getal 5, op twee staat 10 en op één 25. Iemand pakt willekeurig twee keer een plankje uit de ton, met terugleggen.

X is de som van de getrokken getallen.

- Maak een kanstabel voor X .
- Bereken $E(X)$.
- Bereken $\text{Var}(X)$ met de somregel voor de variantie.
- Bereken $\text{Var}(X)$ rechtstreeks uit de tabel in **a**.

90 Dezelfde grabbelton als in opgave **89**. Er worden nu twee plankjes zonder terugleggen gepakt. Y_1 is het getal op het eerste plankje dat gepakt wordt, Y_2 dat op het tweede plankje en Y is de som van die getallen.

- Maak een kanstabel voor Y_2 .
- Bereken $E(Y_2)$.
- Maak een kanstabel voor Y .
- Bereken $E(Y)$.
- Geldt $E(Y_1) + E(Y_2) = E(Y)$?
- Bereken $\text{Var}(Y)$.
- Waarom is $\text{Var}(Y)$ niet gelijk aan de som van $\text{Var}(Y_1)$ en $\text{Var}(Y_2)$?

3.7 Grotere opgaven

91 Een leugendetector

Een leugendetector meet allerlei aspecten van het lichaam (ademhaling, hartslag, bloeddruk, zweten) tijdens een verhoor. Het idee achter het gebruik van een leugendetector is dat iemands lichaam zich anders gedraagt wanneer hij of zij liegt dan wanneer hij of zij de waarheid spreekt. Men heeft onderzocht in hoeverre een leugendetector betrouwbaar is. De uitkomsten zijn als volgt:

- als iemand liegt, wordt hij door de leugendetector in 88% van de gevallen ook als leugenaar aangewezen (en in 12% van de gevallen wordt hij niet als leugenaar aangewezen),
- als iemand de waarheid spreekt, wordt hij door de leugendetector in 25% van de gevallen toch als leugenaar aangewezen (en in 75% van de gevallen wordt hij niet als leugenaar aangewezen).

Vijf mensen worden onderworpen aan een verhoor. Het is zeker dat één van hen liegt en dat de andere vier personen de waarheid spreken. Bij het verhoor wordt gebruikgemaakt van de leugendetector.

- a. Bereken de verwachtingswaarde van het aantal personen dat bij dit verhoor door de leugendetector als leugenaar wordt aangewezen.

Er zijn twee manieren waarop de leugendetector één van de vijf mensen die worden verhoord kan aanwijzen als leugenaar:

- de leugenaar wordt aangewezen als leugenaar en de waarheidsprekers niet;
 - één van de waarheidsprekers wordt aangewezen als leugenaar en de andere vier personen niet.
- b. Bereken de kans dat één van de vijf mensen door de leugendetector als leugenaar wordt aangewezen.

De kans dat iemand die de waarheid spreekt toch door de leugendetector als leugenaar wordt aangewezen, is 25%. Daaruit volgt bijvoorbeeld dat de kans dat hij van tien mensen die de waarheid spreken er minstens één aanwijst als leugenaar ongeveer 94% is.

- c. Reken dat na.

Die 94% is onacceptabel hoog. De leugendetector moet worden verbeterd zo dat de kans dat hij van tien mensen die de waarheid spreken er minstens één als leugenaar aanwijst, hoogstens 50% is.

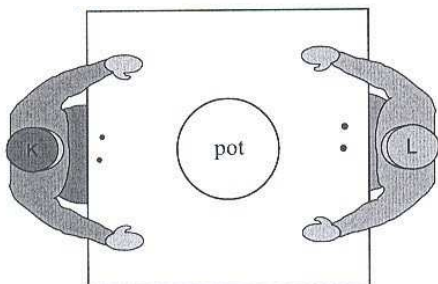
- d. Bereken hoe groot de kans dat de leugendetector iemand die de waarheid spreekt als leugenaar aanwijst maximaal mag zijn.

Naar: examen wiskunde B1 vwo 2009, 2^{de} tijdvak

92 Een dobbelspel

De personen K en L spelen een dobbelspel. Elk van de spelers begint met twee fiches; de pot is dan nog leeg.

Bij het spel wordt geworpen met *speciale* dobbelstenen: op vier kanten van zo'n dobbelsteen staat een stip (●), op één kant een A en op één kant een P. Zie de foto.



De spelregels zijn:

- De spelers werpen om de beurt met één of twee dobbelstenen.
- De speler die aan de beurt is, werpt met één dobbelsteen als hij één fiche heeft en met twee dobbelstenen als hij twee of meer fiches heeft.
- Voor elke A die een speler werpt, moet hij 1 fiche aan de andere speler geven.
- Voor elke P die een speler werpt, moet hij 1 fiche in de pot doen.
- Voor een stip (●) hoeft hij geen fiche af te geven.
- Als een speler geen fiches meer heeft, heeft hij verloren (en de andere speler gewonnen).

Hiernaast staat een mogelijk spelverloop waarbij speler K is begonnen. In zijn tweede beurt werpt speler K met één dobbelsteen, want hij heeft nog maar één fiche.

een spelverloop

	aantal fiches van:		
	K	L	pot
	2	2	0
K werpt A ●	1	3	0
L werpt P P	1	1	2
K werpt P	0	1	3
L heeft gewonnen			

Neem aan dat speler K begint.

De kans dat speler K na zijn eerste beurt nog 1 fiche heeft en L dan 3 fiches heeft, is $\frac{2}{9}$.

a. Toon dit aan.

Op een gegeven moment heeft K 2 fiches, L 1 fiche en de pot 1 fiche. Op dit moment is L aan de beurt.

b. Bereken de kans dat, na deze beurt van L, K nog één beurt krijgt en het spel daarna afgelopen is.

Een toeschouwer heeft het spel met de computer heel vaak gesimuleerd. Op grond van het resultaat beweert hij dat de speler die begint, 43% kans heeft om het spel te winnen en de andere speler 57%.

De spelers K en L spelen het spel tien keer, waarbij speler K steeds begint.

Veronderstel dat de toeschouwer gelijk heeft.

c. Bereken de kans dat een van beide spelers minstens zeven keer wint.

examen wiskunde B1, 2008, 2^{de} tijdvak

93 Controle op spieken bij multiple choice

Een toets bestaat uit tien meerkeuzevragen. Elke vraag heeft drie alternatieven, waarvan er precies één het juiste antwoord op de vraag is.

Elke leerling maakt een lijstje met antwoorden. Bij het nakijken wordt er een controle op spieken uitgevoerd.

We werken in deze opgave met het volgende model voor leerlingen die goed voorbereid meedoen aan de toets:

- de kans dat ze bij een vraag het juiste antwoord kiezen is 0,8 ,
- de kans dat ze bij een vraag het ene onjuiste alternatief kiezen is 0,1 ,
- de kans dat ze bij een vraag het andere onjuiste alternatief kiezen is ook 0,1 .

Een leerling die zich goed voorbereid heeft, en dus aan bovenstaand model voldoet, maakt de toets.

a. Bereken de kans dat ten minste één van de tien vragen door hem fout wordt beantwoord.

Twee leerlingen die zich beiden goed voorbereid hebben, en dus aan bovenstaand model voldoen, maken de toets. De kans dat zij bij een willekeurige vraag hetzelfde antwoord geven is 0,66.

b. Toon dit aan.

De twee leerlingen blijken precies hetzelfde antwoordenlijstje ingeleverd te hebben. Ze hebben dus dezelfde vragen goed beantwoord en bij de fout beantwoorde vragen hebben ze hetzelfde foute alternatief gekozen. De docent vraagt zich af of er gespiekt is. Hij berekent de kans dat twee leerlingen die zich beiden goed op de toets hebben voorbereid en die *niet* gespiekt hebben, *toch* precies dezelfde antwoordenlijstjes inleveren. Als deze kans kleiner is dan 1%, zal de docent concluderen dat er gespiekt is en een strafmaatregel treffen. Als deze kans 1% of groter is, zal hij geen strafmaatregel treffen.

c. Zal de docent een strafmaatregel treffen? Licht je antwoord toe.

examen wiskunde B1 2007, 2^{de} tijdvak

94 Rijexamen

Door het CBR (Centraal Bureau Rijvaardigheidsbewijzen) worden jaarlijks ruim 400 000 examens voor een rijbewijs voor personenauto's afgenomen. Dit examen bestaat uit twee delen: een theorie-examen en een praktijkexamen. Je moet eerst geslaagd zijn voor het theorie-examen voordat je mag deelnemen aan het praktijkexamen.



Vóór 1 oktober 2002 bestond het theorie-examen uit 50 ja/nee-vragen. Een kandidaat was geslaagd voor het theorie-examen als ten minste 45 ja/nee-vragen goed werden beantwoord. Hannie Samson wist, tijdens haar theorie-examen, van 41 ja/nee-vragen het goede antwoord. Door de overige 9 ja/nee-vragen te gokken, had Hannie Samson toch een kans om te slagen.

a. Bereken deze kans. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Sinds 1 oktober 2002 is het theorie-examen vernieuwd. In het nieuwe theorieexamen zitten bij de 50 vragen niet alleen ja/nee-vragen maar ook andersoortige vragen zoals open vragen en/of driekeuzevragen. Ook nu is een kandidaat geslaagd voor het theorie-examen als ten minste 45 vragen goed worden beantwoord.

Herman Spiering doet een theorie-examen dat bestaat uit 40 ja/nee-vragen en 7 driekeuzevragen en 3 open vragen. Hij weet alleen het goede antwoord van 36 ja/nee-vragen en 6 driekeuzevragen. De 3 open vragen heeft hij in ieder geval fout. Van de resterende vragen moet Herman het antwoord gokken.

Herman kan nog slagen voor dit examen. Dan moet hij ten minste drie van de vier resterende ja/nee-vragen goed gokken of hij moet twee van de vier resterende ja/nee-vragen én de resterende driekeuzevraag goed gokken.

b. Bereken de kans dat Herman zal slagen voor dit theorie-examen. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Als je slaagt voor het theorie-examen mag je praktijkexamen doen. Als je zakt voor je praktijkexamen, kun je enige maanden later opnieuw praktijkexamen doen. Sommige kandidaten zakken meerdere keren voor het praktijkexamen.

Het CBR houdt gegevens bij over de slaag- en zakcijfers van de kandidaten die opgaan voor het rijexamen. Uit de gegevens van het CBR blijkt dat een kandidaat steeds dezelfde kans heeft om te slagen voor het praktijkexamen. Hierbij speelt het dus geen rol of die kandidaat voor de eerste keer examen doet of al één of meer keren gezakt is. Verder blijkt dat 11% van alle kandidaten na 4 keer nog steeds niet is geslaagd voor het praktijkexamen.

Op basis van deze gegevens kun je nu berekenen hoe groot de kans is dat iemand de eerste keer al slaagt voor het praktijkexamen.

c. Bereken deze kans. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Bij het CBR bestaat het rijexamen voor de motor ook uit een theorie-examen en een praktijkexamen. Volgens de gegevens van het CBR slaagt landelijk 65,5% van alle kandidaten bij de eerste keer voor het praktijkexamen voor de motor.

Onlangs is een rijsschool gestart die gespecialiseerd is in motorrijlessen. Van de eerste 20 cursisten die de rijsschool heeft opgeleid, zijn er 17 de eerste keer geslaagd voor hun praktijk-examen. Dit is een bovengemiddeld resultaat en de rijsschoolhouder wil hieruit concluderen dat zijn rijsschool beter is dan de gemiddelde rijsschool.

Veronderstel dat de rijsschool van gemiddeld niveau is.

d. Bereken dan de kans op een resultaat van 17 of meer geslaagden van de 20 kandidaten.

Naar: examen wiskunde A12 2007, 1^{ste} tijdvak

95 Schijn bedriegt

In een speelhal kun je het volgende spel spelen. In een vaas zitten 7 ballen: 4 witte en 3 zwarte. Een speler doet willekeurig een greep van drie ballen uit de vaas. Voor elke witte bal in zijn greep ontvangt hij 1 euro (en voor een zwarte bal ontvangt hij niets). De inzet die de speler aan de speelhal moet betalen is € 1,75 per spel.

Per keer spelen ontvangt een speler dus 0, 1, 2 of 3 euro. De kansen op deze vier mogelijkheden zijn achtereenvolgens: $\frac{1}{35}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{18}{35}$ en $\frac{4}{35}$.

a. Toon aan dat de kans op 2 euro inderdaad $\frac{18}{35}$ is.

Iemand besluit het spel zestien keer te spelen. Hij maakt in een spel winst als hij meer dan € 1,75 ontvangt. De kans dat hij ten minste tien keer winst zal maken is groter dan $\frac{1}{2}$.

b. Bereken de kans dat hij ten minste tien keer winst zal maken.

Het lijkt dus wel gunstig voor een speler om het spel te spelen. Maar, schijn bedriegt!

c. Toon aan dat de speelhal op de lange termijn toch winst zal maken met dit spel.

examen wiskunde B1 vwo 2008, 1^{ste} tijdvak

3.8 Samenvatting Verdelingen

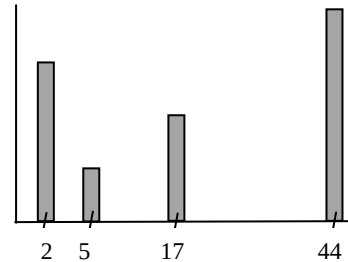
Kansverdelingen

Als een toevalsgrootheid de waarden 2, 5, 17 en 44 kan hebben, dan is de totale kans 1 verdeeld over deze vier waarden. De kansen op de vier afzonderlijke waarden vormen de **kansverdeling** van de toevalsgrootheid.

De kansverdeling kan worden gegeven in een tabel, of in een histogram, of in woorden, of ...

Bijvoorbeeld:

waarde	2	5	17	44
kans op waarde	0,3	0,1	0,2	0,4



Een manier om achter de kansen te komen is het aantal mogelijke uitkomsten te tellen, waarbij die uitkomsten dan wel even waarschijnlijk moeten zijn.

Verwachtingswaarde en standaardafwijking

$E(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n$ is de **verwachtingswaarde** van X .

Als je de tabel van de kansverdeling kent:

waarde	x_1	x_2	...	x_n
kans	p_1	p_2	...	p_n

kun je de verwachtingswaarde dus eenvoudig uitrekenen: vermenigvuldig elk van de mogelijke uitkomsten met de kans op die uitkomst en tel vervolgens de producten op.

We korten de verwachtingswaarde af met E .

Dan is de standaardafwijking $sd(X) = \sqrt{p_1(x_1 - E)^2 + p_2(x_2 - E)^2 + \dots + p_n(x_n - E)^2}$.

In woorden:

$sd(X)$ is de wortel van de verwachtingswaarde van de kwadratische afwijking van E .

De variantie van X is het kwadraat van de standaardafwijking:

$Var(X) = p_1(x_1 - E)^2 + p_2(x_2 - E)^2 + \dots + p_n(x_n - E)^2$.

Als bij een experiment twee aantallen worden geteld, zeg X_1 en X_2 , en X is de som van die twee aantallen, dan geldt: $E(X) = E(X_1) + E(X_2)$.

Als bovendien X_1 en X_2 *onafhankelijk* zijn, geldt: $Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2)$.

Zonder en met terugleggen

nCr is het aantal combinaties van r uit n . $nCr = \binom{n}{r}$.

In een vaas zitten 25 knikkers, 10 rood, 12 wit, 3 blauw

- We trekken er 5 knikkers uit, zonder terugleggen.

De kans op 3 rode knikkers is: $P(3 \text{ rood}) = P(3 \text{ rood en dus 2 niet rood}) = \frac{\binom{10}{3} \times \binom{15}{2}}{\binom{25}{5}}$

- We trekken er 5 knikkers uit, met terugleggen.

De kans op 3 rode knikkers is: $P(3 \text{ rood}) = P(3 \text{ rood en dus 2 niet rood}) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{10}{25}\right)^3 \times \left(\frac{15}{25}\right)^2$

Dit laatste is een voorbeeld van een **binomiale** kans. We zeggen dat X **binomiaal verdeeld** is als X het aantal successen is bij een aantal herhalingen van een experiment, steeds met twee alternatieven: succes en mislukking, waarbij de kans op succes vast is (en dus ook die op mislukking). Hierboven zijn er 5 herhalingen steeds met succeskans $\frac{10}{25} = 0,4$ ("rood" is hier succes).

Als X binomiaal verdeeld is met n herhalingen en succeskans p , dan

$$E(X) = np$$
$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$

Als het aantal trekkingen klein is ten opzichte van de totale populatie, dan kun je kansen zonder terugleggen (hypergeometrisch) praktisch berekenen alsof de trekking met terugleggen gebeurt (binomiaal). De binomiaal berekende kans is dan ongeveer gelijk aan de werkelijke kans.

Cumulatieve kans

Als een toevalsgrootheid X de waarden 0, 1, 2, 3, 4, ... kan aannemen, dan noemen we $P(X \leq 3)$ een cumulatieve kans. Deze is de som van de kansen: $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$ en $P(X=3)$.