1 Meetkunde en Algebra

Het eerste deel van dit hoofdstuk is een bewerking van
Meetkunde met coördinaten, Blok *Redeneren met vormen, getallen en formules*
van Aad Goddijn
ten behoeve van het nieuwe programma (2015) wiskunde B vwo.

⌘ Opgaven met dit merkteken kun je overslaan zonder de opbouw aan te tasten.

* Bij opgaven met dit merkteken hoort een werkblad.

Inhoudsopgave

Bij dit hoofdstuk hoort de bijlage *Rekenen met wortels.*

Uitgave juli 2011

Colofon

Auteurs Aad Goddijn, Leon van den Broek, Dolf van den Hombergh

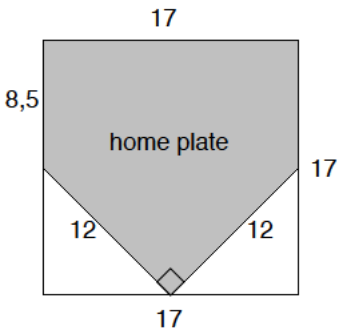
Met medewerking van Josephine Buskes, Richard Berends, Gert Dankers, Sieb Kemme, Dick Klingens

1 Pythagoras, meetkundig en algebraïsch

In dit hoofdstuk worden dezelfde problemen zowel meetkundig als algebraïsch aangepakt.

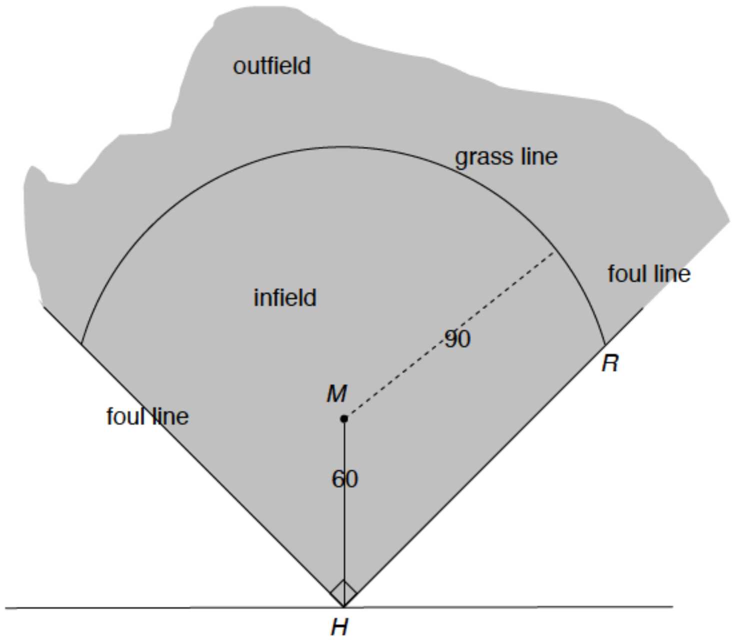
1 Het baseball veld

Baseball wordt gestart vanaf de zogenaamde *home plate*. Dat is een vierkant van 17 bij 17 inch (1 inch ≈ 2,54 cm) waar symmetrisch twee rechthoekige driehoeken uitgehaald zijn.



a. De lengte 12 inch in de tekening is niet precies 12 inch. Bereken de exacte maat.

Hieronder is het speelveld getekend.



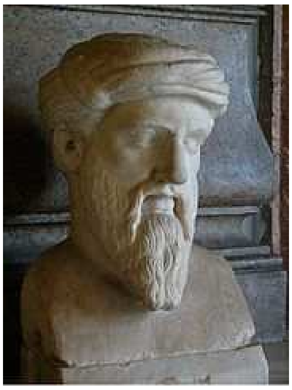
De bal moet binnen de *foul lines* blijven. De grens tussen *infield* en *outfield* is de *grass line*. Het is een deel van een cirkel met middelpunt *M*. Voor de afmetingen, zie het plaatje op de vorige bladzijde. (De maten zijn nu in feet, 1 foot ≈ 30 cm.)

b. Bereken de afstand van de homeplate *H* tot het eindpunt *R* van de grass line in feet nauwkeurig.

Tip. Teken een loodlijn vanuit *M* op een foul line. Als je de lengte hiervan niet kunt berekenen, bekijk dan de Rekentechniek over de 45-45-90-graden driehoek.

c. Bereken de oppervlakte van het infield.

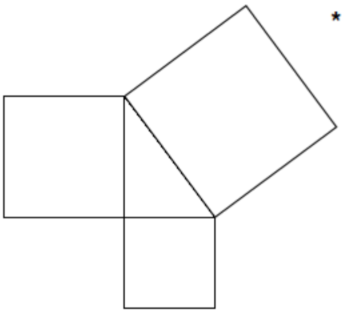
In de opgave hierboven heb je de stelling van Pythagoras gebruikt. In het volgende bewijzen we deze stelling opnieuw. En wel op verschillende manieren. We geven twee *algebraïsche* bewijzen; daarvoor moet je *rekenen*. We geven ook twee *meetkundige* bewijzen; daarvoor moet je *redeneren.*



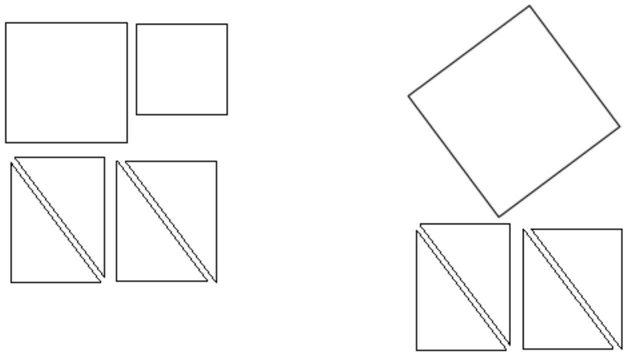
Pythagoras, geboren op het Griekse eiland Samos, leefde in de zesde eeuw voor Chr. Hij reisde naar Babylonië en Egypte en heeft daar waarschijnlijk zijn wiskundekennis opgedaan. Hij hield zich bezig met rekenkunde, meetkunde, muziek en astrologie. Pythagoras vestigde zich in Croton (een Griekse handelsstad in zuid Italië), waar hij een filosofische school stichtte, een soort religieuze sekte met een heleboel regels (die op de moderne mens eigenaardig overkomen). Pythagoras' grote verdienste is dat hij de dingen met getallen uitdrukte. De stelling van Pythagoras is naar hem genoemd.

De stelling van Pythagoras is misschien wel de bekendste stelling uit de wiskunde. Elke middelbare scholier in Nederland leert hem.
De stelling is minstens 2500 jaar oud, en speciale gevallen van de stelling zijn nog ouder. Er zijn honderden bewijzen van de stelling.
De meest bekende vorm van de stelling luidt: $a^2 + b^2 = c^2$; dan moet je voor *a*, *b* en *c* wel de juiste zijden nemen, en weten dat hij voor rechthoekige driehoeken geldt.

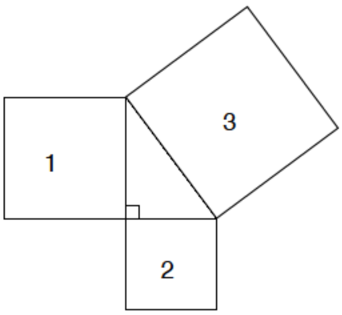
We gaan de stelling van Pythagoras eerst meetkundig bewijzen. Hierbij wordt niet gerekend; er wordt alleen met meetkundige figuren geschoven.



*** 2 De stelling van Pythagoras als legpuzzel**
Hiernaast zijn op de zijden van een rechthoekige driehoek vierkanten gezet. Hieronder zijn de drie vierkanten getekend en acht kopieën van de rechthoekige driehoek.



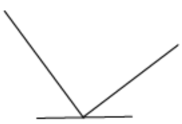
Links staan de twee kleinere vierkanten en vier driehoeken. Daarmee kun je een vierkant leggen.
Rechts staat het grote vierkant en vier driehoeken. Ook hiermee kun je een vierkant leggen.
a. Teken hoe je dat kunt doen. (Als je hulp nodig hebt: op het knipblad staan de acht rechthoekige driehoeken met de drie vierkanten.)
b. Leg nu uit dat de oppervlakte van de twee kleinere vierkanten samen hetzelfde is als de oppervlakte van het grote vierkant.



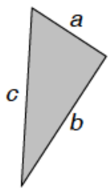
Uit bovenstaande volgt de **stelling van Pythagoras**:

> De oppervlakte van de vierkanten op de rechthoekszijden samen is gelijk aan de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde.
> In het plaatje:
> oppervlakte 1 + oppervlakte 2 = oppervlakte 3

Nog even terug naar de puzzel rechts: van het grote vierkant en de vier driehoeken kan een vierkant worden gelegd.
c. Voor de preciezen (en dat zijn wij): hoe weet je zeker dat er geen 'knik' zit bij het punt waar het grote vierkant met twee driehoeken samenkomen?
Tip. Toon aan dat de drie hoeken in de punt samen 180° zijn.



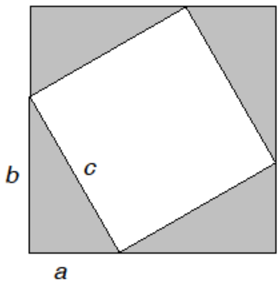
We gaan de stelling van Pythagoras nu algebraïsch bewijzen. Hierbij wordt wel gerekend; we hebben “merkwaardige producten” nodig.



De **stelling van Pythagoras** algebraïsch:

> De rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek noemen we a en b, de schuine zijde c.
> Dan is $a^2 + b^2 = c^2$.

3 De stelling van Pythagoras algebraïsch (1)

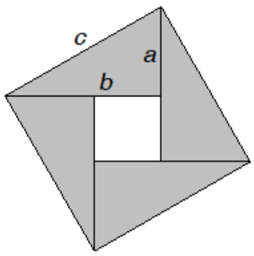


Met een rechthoekige driehoek en drie kopieën wordt de nevenstaande figuur gelegd. Er ontstaan twee vierkanten. De zijden van de rechthoekige driehoeken zijn: a, b en c.

De oppervlakte van het grote vierkant is: $(a+b)^2$.

Je kunt de oppervlakte van dat vierkant ook in a, b en c uitdrukken door de oppervlakte van de vijf stukken bij elkaar op te tellen. Dit leidt tot een vergelijking.
Laat door vereenvoudigen zien dat hieruit de stelling van Pythagoras volgt.

4 De stelling van Pythagoras algebraïsch (2)



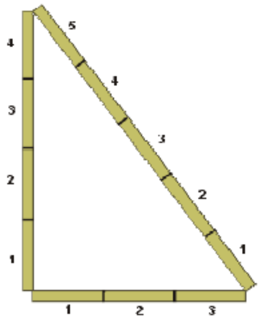
Met een rechthoekige driehoek en drie kopieën wordt de nevenstaande figuur gelegd. Er ontstaan twee vierkanten.
De zijden van de rechthoekige driehoeken zijn: a, b en c.
Door de oppervlakte van het grote vierkant op twee manieren te berekenen, kun je laten zien dat $a^2 + b^2 = c^2$.

a. Doe dat.
b. Waarom is de grote vierhoek een vierkant?

In opgave **3** en **4** gebruik je twee van de drie merkwaardige producten.

> **Merkwaardige producten**
> $(z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$
> $(z-w)^2 = z^2 - 2zw + w^2$
> $(z+w)(z-w) = z^2 - w^2$

“Merkwaardig” moet hier in een oude betekenis gelezen worden: waard om te merken = onthouden.



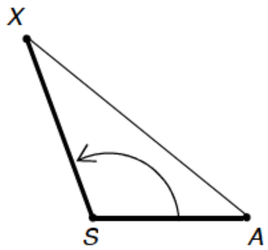
In *Bouwtechniek, Meten en Uitzetten* wordt uitgelegd hoe je een rechte hoek uit kunt zetten. Daarvoor gebruik je een zogenaamde bouwhaak.
De bouwhaak wordt ook wel de 3-4-5-steek genoemd.
Op de drie latten zet je lengtes uit in de verhouding 3 : 4 : 5. Bijvoorbeeld: 3×20 cm, 4×20 cm en 5×20 cm.
http://www.xs4all.nl/~desnor/bouwtechniek/pag.%20metselen/bb.meten_en_uitzetten.htm

Voor de zijden van een 3-4-5-steek geldt de stelling van Pythagoras.
Om een rechte hoek uit te zetten wordt dus eigenlijk de *omkering* van de stelling van Pythagoras gebruikt!

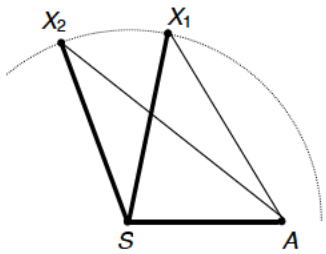
Redenering
Stel dat je van een driehoek met zijden a, b en c weet dat $a^2+b^2=c^2$.
Dan is deze driehoek congruent met een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a en b, want ze hebben alle zijden gelijk. (Welk congruentiegeval?), dus heeft de driehoek een rechte hoek (namelijk de hoek tegenover zijde c).

De *omkering* van de stelling van Pythagoras is dus ook waar: als voor de zijden a, b en c van een driehoek geldt: $a^2+b^2=c^2$, dan is de driehoek rechthoekig.

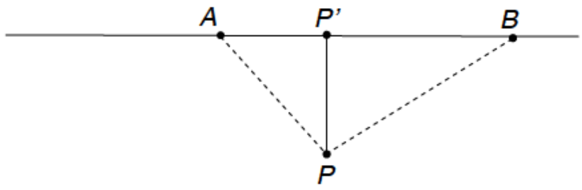
Stomp, recht, scherp



Bekijk de tekening hiernaast.
Het latje SX zit scharnierend aan latje SA vast. Tussen A en X is een elastiekje gespannen.
De volgende uitspraak ligt voor de hand.
Hoe groter de hoek tussen de latjes wordt, hoe langer het elastiekje wordt.



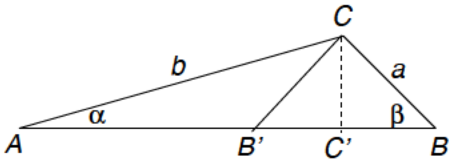
Hiernaast is het latje SX in twee posities getekend: SX_1 en SX_2. Het ziet ernaar uit dat $AX_2 > AX_1$. Maar is dat altijd zo? Ook als X_2 minder ver naar rechts geschoven is, of als $\angle ASX_1$ en $\angle ASX_2$ kleiner zijn (maar wel $\angle ASX_1 < \angle ASX_2$, of A verder naar links of rechts ligt?
Dat moet bewezen worden. Op de volgende bladzijde doen we dat. Verder op, als we de cosinusregel eenmaal kennen, volgt een eenvoudiger bewijs.



In het plaatje hierboven is P' de loodrechte projectie van P op lijn door A en B.

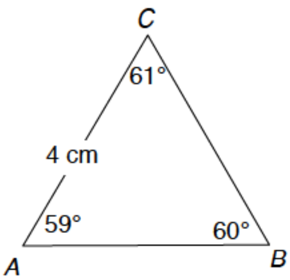
Als B verder dan A van P' ligt, is $PB > PA$, en omgekeerd. Ga na dat dit uit de stelling van Pythagoras volgt.

Laat in driehoek ABC de loodlijn uit C neer op AB; noem het voetpunt C'.
We gaan bewijzen: als $b > a$, dan $\beta > \alpha$.

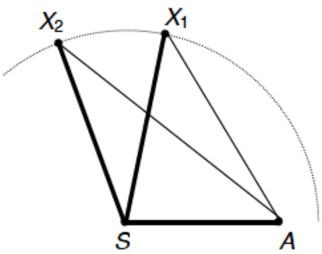


Eerst spiegelen we B in C': dat geeft het punt B'.
Als $b > a$, dan ligt B' dichter dan A bij C'.
Omdat $\angle CB'B = \angle CAB' + \angle ACB'$, volgt dat $\beta > \alpha$.

In een driehoek ligt tegenover een grotere hoek een langere zijde.



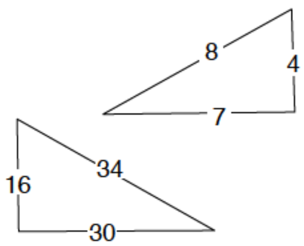
Voorbeeld:
Hiernaast is driehoek ABC op schaal getekend.
Wat weet je van de zijden BC en AB?



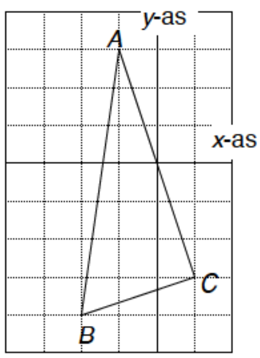
We komen terug op het elastiekje.
X_1 en X_2 liggen op de cirkel met middelpunt S. Verder is $\angle X_2SA > \angle X_1SA$.
We gaan bewijzen dat $AX_2 > AX_1$.

$\angle X_2X_1A > \angle X_2X_1S = \angle X_1X_2S > \angle X_1X_2A$
In driehoek X_2X_1A ligt tegenover $\angle X_2X_1A$ zijde X_2A en tegenover $\angle X_1X_2A$ ligt zijde X_1A. Nu hoeven we alleen nog de bovenstaande stelling toe te passen.

Stelling
Voor een driehoek met zijden a, b en c geldt:
$a^2+b^2<c^2 \Leftrightarrow$ de hoek tegenover c is stomp.
$a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow$ de hoek tegenover c is recht.
$a^2+b^2>c^2 \Leftrightarrow$ de hoek tegenover c is scherp.



5 Hiernaast is een driehoek getekend waarvan de zijden 4, 7 en 8 cm lang zijn.
a. Ga na of de driehoek scherphoekig, stomphoekig of rechthoekig is.
b. Doe dat ook voor een driehoek met zijden van 16, 30 en 34.

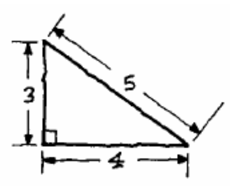


6 In een assenstelsel zijn de punten $A(-1,3)$, $B(-2,-4)$ en $C(1,-3)$ gegeven.
a. Zonder de zijden van de driehoek uit te rekenen kun laten zien dat hoek ACB recht is. Hoe?
b. Bereken BC en AC.

Nu kun je op twee manieren AB berekenen met de stelling van Pythagoras.
c. Doe dat.

7 In een assenstelsel zijn de punten $A(7,10)$, $B(11,12)$ en $C(6,12)$ gegeven.
a. Is hoek BAC scherp, recht of stomp?

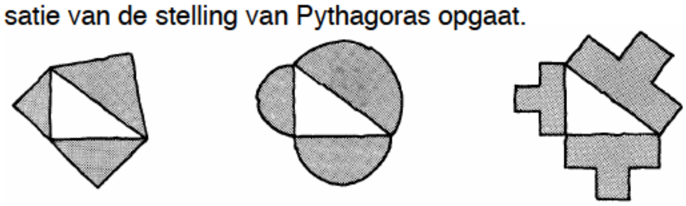
In een assenstelsel zijn de punten $O(0,0)$, $P(4,3)$ en $Q(a,0)$ gegeven.
b. Voor welke waarden van a is driehoek POQ rechthoekig?
c. Voor welke waarden van a is $\angle OPQ$ stomp?

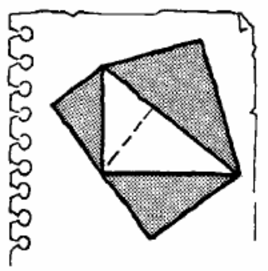


8 In de meetkundige formulering van de stelling van Pythagoras worden *vierkanten* gezet op de zijden van een rechthoekige driehoek. Je kunt ook andere figuren op de zijden zetten; die moeten wel *gelijkvormig* zijn en in dezelfde stand op de zijden gezet worden. Altijd geldt dat de oppervlakte van de figuur op de schuine zijde gelijk is aan de som van de oppervlaktes van de twee figuren op de rechthoekszijden.
We bekijken drie voorbeelden bij de 3-4-5-driehoek:

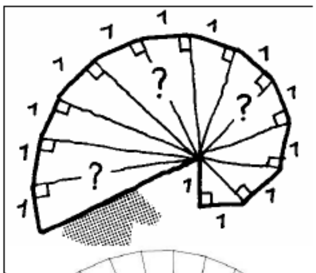
- met op elke zijde een geodriehoek,
- met op elke zijde een halve cirkel,
- met op elke zijde een letter T, die bestaat uit vier vierkanten.

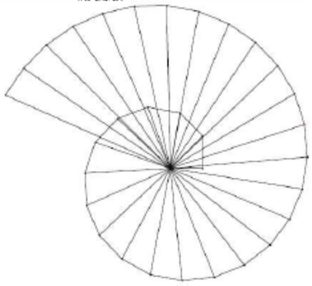
Ga na dat voor elk van deze voorbeelden de generalisatie van de stelling van Pythagoras opgaat.





9 We plaatsen nu op de zijden van een rechthoekige driehoek bijzondere figuren, namelijk figuren die gelijkvormig zijn met de rechthoekige driehoek zelf! Zie plaatje.
Hoe kun je heel eenvoudig zien dat de generalisatie van de stelling van Pythagoras opgaat?
Deze laatste beschouwing van de stelling van Pythagoras is afkomstig van Albert Einstein.





10 Het "slakkenhuis" hiernaast bestaat uit op elkaar aansluitende rechthoekige driehoeken, waarvan een rechhoekszijde lengte 1 heeft. De kleinste driehoek heeft twee rechthoekszijden van lengte 1.
Bij de lijnstukken vanuit het centrum na 4, 7 en 11 stappen staat een vraagteken.

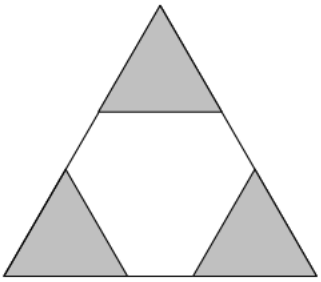
a. Hoe lang zijn de zijden waar een vraagteken bij staat? Geef exacte antwoorden; laat wortels die je niet kunt vereenvoudigen staan.

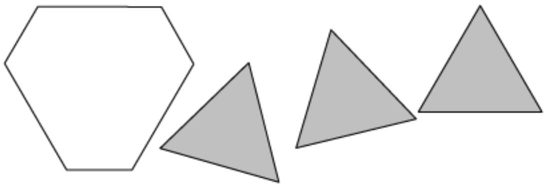
In de tweede figuur is het slakkenhuis voortgezet.
b. Zijn de hoeken om het centrum alle even groot? Licht je antwoord toe.
c. Na hoeveel stappen is het lijnstuk vanuit het centrum langer dan 1000?

2 Descartes' aanpak

Probleemaanpak volgens Descartes

1 In deze opgave bekijken we twee problemen waar je de stelling van Pythagoras overigens niet nodig hebt.





Van een gelijkzijdige driehoek met zijde 15 worden de punten afgeknipt. Die zijn ook weer gelijkzijdig en even groot.
a. Hoe moet je dat doen als de omtrek van de drie afgeknipte driehoeken samen dezelfde omtrek hebben als de zeshoek die over blijft.
b. Hoe moet je dat doen als de oppervlakte van de zeshoek even groot is als de oppervlakte van de drie driehoeken?

Opgave **1a** zou je als volgt aan kunnen pakken. De zijde van een afgeknipte driehoek noem je bijvoorbeeld x. Drie zijden van de zeshoek zijn dan ook x, de andere drie kun je in x uitdrukken. De eis over de omtrekken geeft je een vergelijking in x. Die los je op en je hebt de oplossing van het probleem.

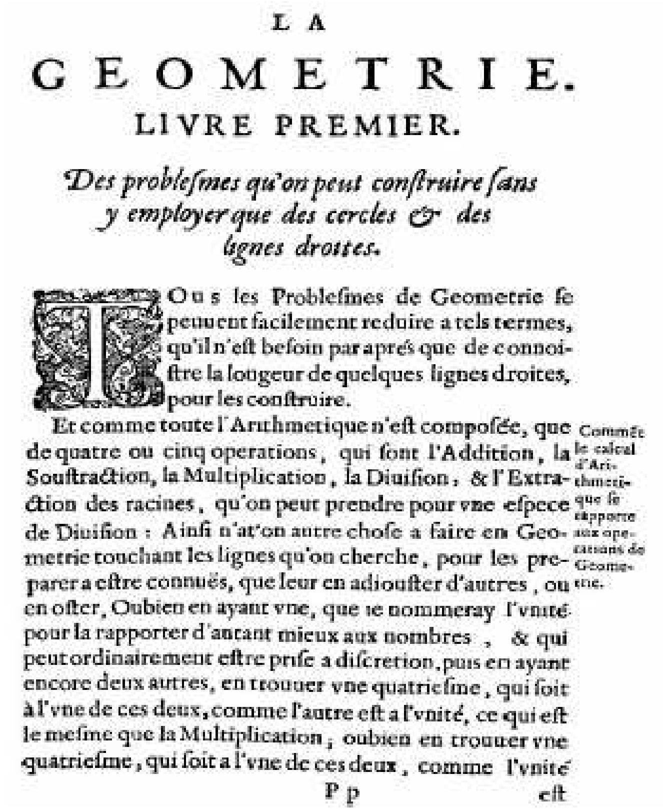
René Descartes (Cartesius)
1596 – 1650

De filosoof en wiskundige René Descartes heeft een enorme invloed gehad. Hij begon zijn filosofie met absolute twijfel: niets mocht als waar aangenomen worden. Hij bedacht: *'Ik denk, dus ik besta'*, (Latijn: *Cogito, ergo sum*) en vond zo tenminste één zekerheid om vanuit te gaan.
In Descartes' filosofie waren lichaam en geest van de mens geheel onafhankelijk.
Rond 1630 had Descartes al regels geformuleerd voor 'de richting van het denken'. Eenvoudig gezegd kwamen die hier op neer.

- Elk vraagstuk of probleem in de wereld kan worden teruggebracht tot een *meetkundig* probleem.
- Elk meetkundig probleem moet worden teruggebracht tot een *algebraïsch* probleem.
- Elk algebraïsch probleem moet worden teruggebracht tot het *oplossen* van een *vergelijking* met één onbekende

Omdat de wiskunde zekerheid bood, kon zo zekerheid in andere zaken bereikt worden.
Als denker is Descartes een extreme *rationalist*: alleen het denken leidt de mens op weg naar de waarheid (en de ervaring der zintuigen of geloven bijvoorbeeld niet).

De wiskunde van de tweede en derde stip publiceerde Descartes in 1637 in het slot-essay van zijn *'Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences'* met de ondertitel *'La Geometrie*'.


LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la lougeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision: Ainsi n'a-t'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Comment le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

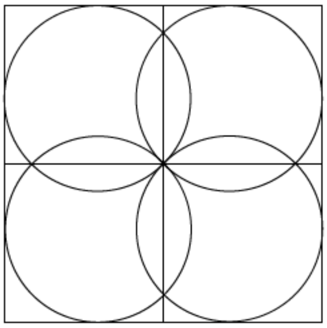
Pp est

Facsimile van de eerste bladzijde van 'La Geometrie' van René Descartes (1637)

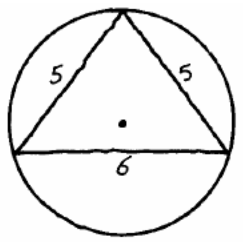
Elk meetkundeprobleem is uiteindelijk het bepalen van lengtes van lijnstukken, stelde Descartes in de eerste zin van *'La Geometrie*'. Hij bedacht daarbij de volgende zeer algemene methode.

- Geef alle lijnstukken in de figuur namen (letters), bekende zowel als onbekende.
- Probeer één grootheid op twee verschillende manieren uit te drukken in de aldus benoemde lijnstukken.
- De uitdrukkingen zijn gelijk, dat geeft een *vergelijking*.
- Los de onbekende uit de vergelijking op. Dan is alles bekend in de figuur en het probleem opgelost.

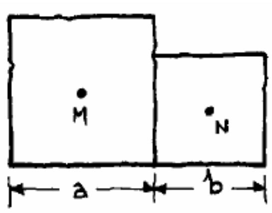
Descartes stimuleerde zo de toen nog tamelijk jonge letteralgebra en leverde meteen een van de belangrijkste toepassingen hiervan.
Vaak volgen we zijn methode bij het onderwerp *Meetkunde met coördinaten.* Het eerste punt (dat *elk* probleem in wiskunde is te vertalen) is een filosofisch uitgangspunt, waar uiteraard de meningen over uiteenlopen.



2 In het plaatje hiernaast staan vier vierkanten met zijde 2 en vier cirkels.
Bereken de straal van die cirkels exact.

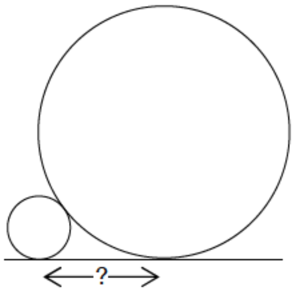


3 Van een driehoek zijn de zijden 5, 5, en 6. De straal van de omgeschreven cirkel noemen we R.
a. Bereken de oppervlakte van de driehoek.
b. Laat zien dat $R^2 = (4 - R)^2 + 9$.
c. Bereken R.



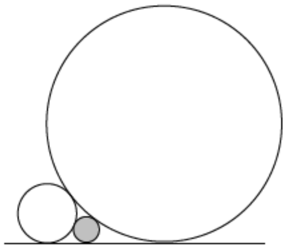
4 Twee vierkanten met middelpunten M en N en zijden a en b grenzen aan elkaar zoals hiernaast is getekend.
a. Neem aan dat $a = 16$ en $b = 2$ en bereken de lengte van lijnstuk MN.
Tip. Teken een geschikte rechthoekige driehoek.
b. Bereken de lengte van lijnstuk MN ook als $a = 7$ en $b = 4$.

In de gevallen **a** en **b** is de oppervlakte van de twee vierkanten samen 260. De lengte van lijnstuk MN is in deze gevallen hetzelfde.
Omgekeerd kun je uit de oppervlakte van de twee vierkanten samen de lengte van lijnstuk MN bepalen.
c. De oppervlakte van de twee vierkanten samen is 18.
Hoe groot is de lengte van lijnstuk MN?

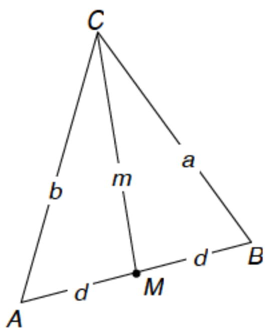


5 Twee cirkels met straal 1 en 4 raken elkaar uitwendig en raken een rechte lijn.

a. Bereken de afstand van de raakpunten op de rechte lijn.



We tekenen een zo groot mogelijk cirkeltje in het gebied dat wordt ingesloten door de twee cirkels en de rechte lijn.
b. Bereken de straal van dat cirkeltje.

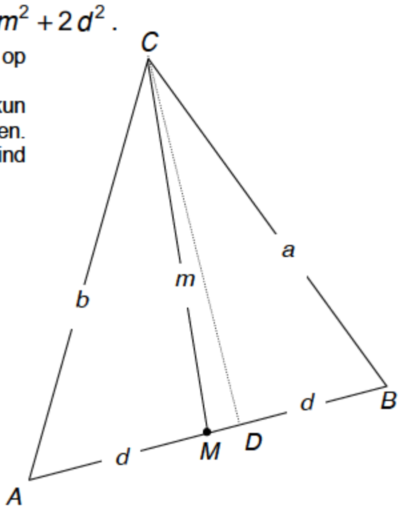


6 De stelling van Apollonius

M is het midden van zijde *AB* van driehoek *ABC*, verder zie plaatje. *CM* heet zwaartelijn in driehoek *ABC*.

Toon aan dat: $a^2 + b^2 = 2m^2 + 2d^2$.

Tip. Teken de projectie *D* van *C* op lijn *AB*. Noem $MD = x$.
Met de stelling van Pythagoras kun je drie vergelijkingen opstellen. Door ze handig te combineren vind je het antwoord.



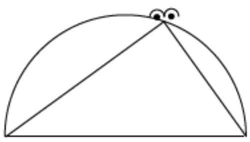
Apollonius was een beroemd Grieks wiskundige die leefde in de derde eeuw voor Christus. Hij schreef een groot werk over kegelsneden.

3 De stelling van Thales

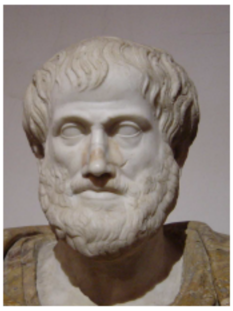
Een bekende stelling uit de meetkunde is de stelling van Thales en zijn omgekeerde.

Stelling van Thales
In een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel van die rechthoekige driehoek.

Omgekeerde stelling van Thales
Als het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek op een zijde ligt, dan is de hoek tegenover die zijde recht.

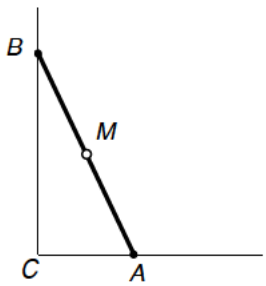


De omgekeerde stelling van Thales wordt ook wel als volgt geformuleerd.
Vanuit een punt van een cirkel "zie je" een middellijn onder een hoek van 90°.



Thales van Milete (ca. 624 v.Chr - 545 v.Chr.) was een Griekse filosoof. Hij kwam uit Milete (in het huidige Turkije). De oude Grieken zagen hem als een van de Zeven Wijzen.
Hij schijnt de zonsverduistering van 585 v.Chr. voorspeld te hebben. Mogelijk heeft hij zijn kennis over sterrenkunde opgedaan tijdens een reis naar Babylon

We gaan de stelling en zijn omgekeerde meetkundig en algebraïsch bewijzen.

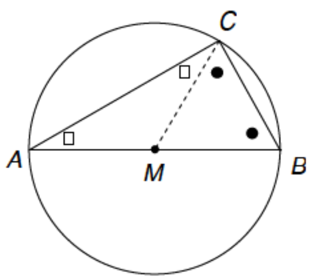


1 De stelling van Thales meetkundig
Een ladder glijdt langs een muur naar beneden. We nemen de ladderlengte 2. We volgen de baan die het midden M van de ladder volgt.
a. Bekijk hiervoor de applet: 3.1_ladder_midden.ggb.

A en B zijn de uiteinden van de ladder en C de rechte hoek tussen de muur en de grond.
De baan van M lijkt een kwartcirkel.
b. Als dat zo is, wat is dan het middelpunt en de straal?

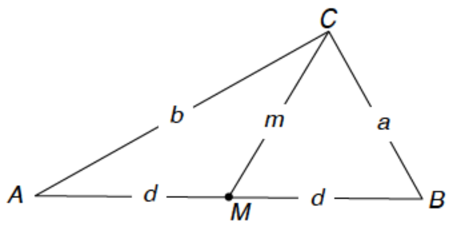
M heeft steeds afstand 1 tot *C*. Dat zie je als volgt.
c. Gegeven een rechthoekige driehoek. Je kunt die driehoek zien als een halve rechthoek. Hoe volgt hieruit dat het midden van de schuine zijde evenver van de drie hoekpunten van de driehoek afligt?

De afstand van *M* tot *C* is dus in elke stand van de ladder 1. Het midden van de schuine zijde van een rechthoekige driehoek is dus middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek. Dit is de stelling van Thales.



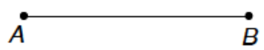
2 De omgekeerde stelling van Thales meetkundig
Zie plaatje. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* is *M*, een punt op zijde *AB*.
Je moet laten zien dat hoek *ACB* recht is. Zie plaatje.
a. Waarom zijn de hoeken waarin gelijke tekens gezet zijn even groot?
b. Wat kun je zeggen over de vier hoeken, waarin tekens gezet zijn, samen?
c. Hoe volgt nu dat hoek *ACB* recht is?

3 In de laatste opgave van de vorige paragraaf hebben we de stelling van Apollonius bewezen: $a^2+b^2=2m^2+2d^2$, zie plaatje.

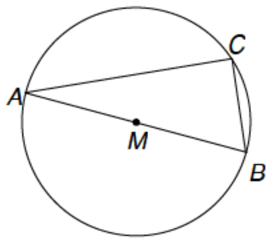


De stelling van Thales algebraïsch
Driehoek *ABC* is rechthoekig in *C*. Je moet laten zien dat *M* het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* is, dus dat $m=d$.
a. Hoe volgt dat uit de formule $a^2+b^2=2m^2+2d^2$?

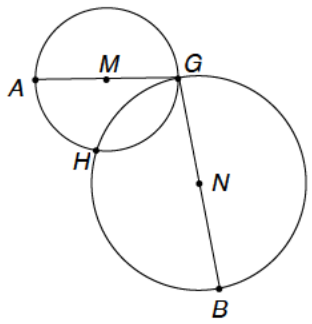
De omgekeerde stelling van Thales algebraïsch
In de driehoek hierboven is *M* het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*, dus $m=d$.
b. Hoe volgt hieruit dat hoek *ACB* recht is?



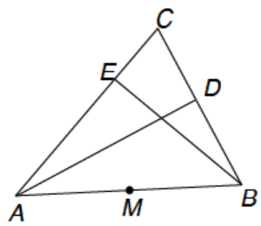
4 Gegeven een lijnstuk *AB*. Teken het gebied waar *C* kan liggen als driehoek *ABC* scherphoekig is.



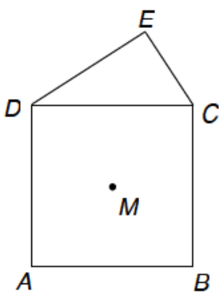
5 Lijnstuk AB is een middellijn van ΔABC. $AB = 6\frac{1}{2}$ en $BC = 2\frac{1}{2}$.
Bereken AC exact.



6 Gegevens: zie plaatje.
Bewijs dat de punten A, H en B op één lijn liggen.
Tip. Laat zien dat hoek AHB 180 graden is.



7 AD en BE zijn hoogtelijnen in driehoek ABC. M is het midden van zijde AB.
Bewijs dat D en E even ver van M afliggen.



8 $ABCD$ is een vierkant met middelpunt M.
DCE is een rechthoekige driehoek (hoek E is recht).
Bewijs dat vierhoek $DMCE$ een omgeschreven cirkel heeft.

4 De sinusregel

Een rechthoekige driehoek ligt vast

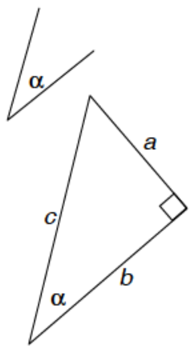
- *als je twee zijden kent.*
  De derde zijde kun je met de stelling van Pythagoras uitrekenen en de niet-rechte hoeken met sinus, cosinus of tangens.
- *als je een zijde en een niet-rechte hoek kent.*
  De andere zijden en hoeken kun je uitrekenen met sinus, cosinus of tangens.

In dit hoofdstuk zullen we onze berekeningen uitbreiden tot scherphoekige en stomphoekige driehoeken.

Onderzoek

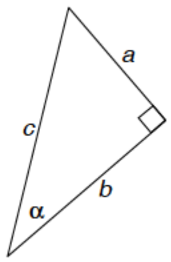
1 Teken met passer en liniaal een driehoek
a. met zijden van 3, 4 en 6 cm.
Hoeveel echt verschillende driehoeken kun je tekenen?
b. met zijden van 3 en 4 cm, waarbij de hoek tussen die zijden 70° is.
Hoeveel echt verschillende driehoeken kun je tekenen?
c. met hoeken van 50° en 60° waarbij de zijde tussen die twee hoeken 5 cm is.
Hoeveel echt verschillende driehoeken kun je tekenen?
d. met zijden van 3 en 5 cm, waarbij de hoek die grenst aan de zijde van 5 cm maar niet aan die van 3 cm 30° is.
Hoeveel echt verschillende driehoeken kun je tekenen?

In drie van de vier gevallen van opgave **1** ligt de driehoek door de gegevens vast. In het vierde geval heb je twee mogelijkheden. Hoe je de niet gegeven zijden en hoeken kunt bepalen, is onderwerp van deze en de volgende paragraaf.



Herhaling

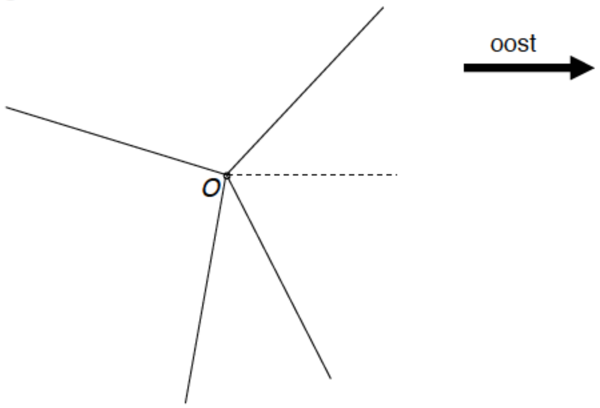
Sinus, cosinus en tangens van een scherpe hoek, zeg α, hebben we als volgt gedefinieerd.
Maak een rechthoekige driehoek waarvan één van de hoeken de scherpe hoek α is.
De rechthoekszijde tegenover de hoek α noemen we a.
De rechthoekszijde waar α aanligt, noemen we b.
De schuine zijde noemen we c.
Dan $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ en $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$.
Meestal gebruik je sinus en cosinus in de volgende vorm.



$a = c \cdot \sin\alpha$ en $b = c \cdot \cos\alpha$

De koershoek

2 Vier plaatsen op afstand 3 van O. De koershoeken ten opzichte van het oosten, linksom gedraaid zijn achtereenvolgens 47°, 163°, 260° en 294°.
a. Hoeveel liggen die plaatsen oostelijk en noordelijk van O? Als een plaats westelijk van O ligt, gebruik je een negatief getal.



Je komt in plaats X door vanuit O ten opzichte van het oosten met koershoek α over een afstand r lopen. Hierbij is α scherp.
b. Hoeveel ligt X oostelijk van O en hoeveel noordelijk?

Het antwoord uit **b** nemen we over voor *alle* draaihoeken α.
Dus als je met koershoek 163° vanuit O loopt over afstand 3, kom je $3 \cdot \sin 163°$ noordelijk van O en $3 \cdot \cos 163°$ oostelijk van O.
c. Wat is het verband tussen $\sin 163°$ en $\sin 17°$? En tussen $\cos 163°$ en $\cos 17°$?
d. Geef ook het verband tussen $\sin 260°$ en $\sin 80°$ en $\cos 260°$ en $\cos 80°$.
e. Ook tussen $\sin 294°$ en $\sin 66°$ en tussen $\cos 294°$ en $\cos 66°$

Voorlopig gebruiken we de sinus en cosinus voor hoeken in driehoeken, dus voor hoeken tussen 0 en 180 graden.

Definitie
Als $90° < \alpha < 180°$, dan: $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$
$\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$

3 **a.** Voor welke hoeken α is $\cos\alpha$ negatief?
Voor welke hoeken α is $\sin\alpha$ negatief?
b. $\sin\alpha = \sin 83°$ en α is stomp. Hoe groot is α?
c. $\cos\alpha = -\cos 83°$ en α is stomp. Hoe groot is α?

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

Sinus, cosinus en tangens van een gegeven hoek kun je met je rekenmachine vinden. In speciale gevallen hebben we ze ook exact berekend. De resultaten staan in de tabel hiernaast.

4 **a.** Maak een tabel zoals hieronder en vul de exacte-waarden in, zonder rekenmachine.

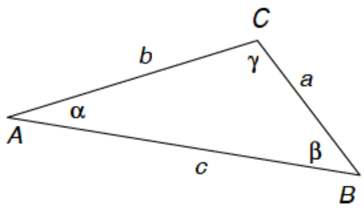
	90°	120°	135°	150°	180°
sin					
cos					

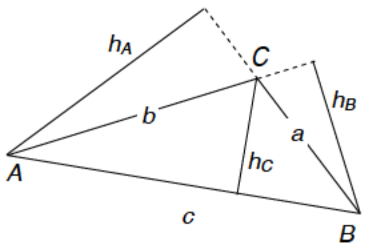
b. Controleer enkele antwoorden met de GR.

5 **a.** Van een hoek α tussen 0° en 180° is gegeven:
$\sin\alpha = \frac{1}{2}$.
Hoe groot is α (zonder GR)?
b. Van een hoek β tussen 0° en 180° is gegeven:
$\cos\beta = \frac{1}{2}$.
Hoe groot is β?
c. Van een hoek γ tussen 0° en 180 ° is gegeven:
$\cos\gamma = -\frac{1}{2}$.
Hoe groot is γ?

6 Van een hoek α tussen 0° en 90° is gegeven: $\sin\alpha = 0{,}7$.
a. Zoek met de GR een hoek α in twee decimalen met $\sin\alpha = 0{,}7$.

De GR geeft een scherpe hoek. Er is ook een stompe hoek α met $\sin\alpha = 0{,}7$.
b. Voor welke stompe hoek α geldt: $\sin\alpha = 0{,}7$?
c. Voor een hoek α tussen 0° en 180° geldt: $\cos\alpha = -0{,}2$.
Bepaal α met de GR.
Zijn er meer mogelijkheden?





Afspraak

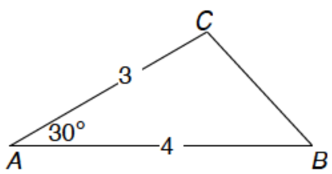
In driehoek *ABC* noemen we:

de grootte	van hoek *A*	α
	van hoek *B*	β
	van hoek *C*	γ
de lengte	van zijde *AB*	*c*
	van zijde *BC*	*a*
	van zijde *AC*	*b* .

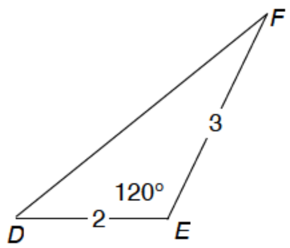
Merk op dat de zijde met lengte *a* tegenover hoek *A* ligt, de zijde met lengte *b* tegenover hoek *B* en de zijde met lengte *c* tegenover hoek *C*.
Verder noemen we

het hoogtelijnstuk	uit *A*	h_A
het hoogtelijnstuk	uit *B*	h_B
het hoogtelijnstuk	uit *C*	h_C.

De oppervlakte van een driehoek

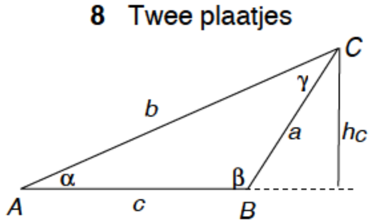


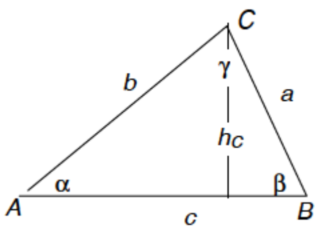
7 **a.** In driehoek *ABC* is $\alpha = 30°$, $c = 4$ en $b = 3$.
Bereken de oppervlakte van driehoek *ABC* exact.
Tip. Bereken h_C.



De gegevens van driehoek *DEF* staan in de figuur.
b. Bereken de oppervlakte van driehoek *DEF* exact.

8 Twee plaatjes





In beide plaatjes is het hoogtelijnstuk h_C uit *C* getekend.
a. Druk in beide gevallen h_C uit in *b* en sin α.
b. Druk in beide gevallen de oppervlakte van driehoek *ABC* uit in *b*, *c* en sin α.
c. Geef een soortgelijke formule voor de oppervlakte van driehoek *ABC* met daarin sin β, en ook een met sin γ.

De oppervlakte van driehoek $ABC = \frac{1}{2}\,a\,b\sin\gamma$.

d. Waarom geldt: $\frac{1}{2}\,a\,b\sin\gamma = \frac{1}{2}\,b\,c\sin\alpha = \frac{1}{2}\,c\,a\sin\beta$?

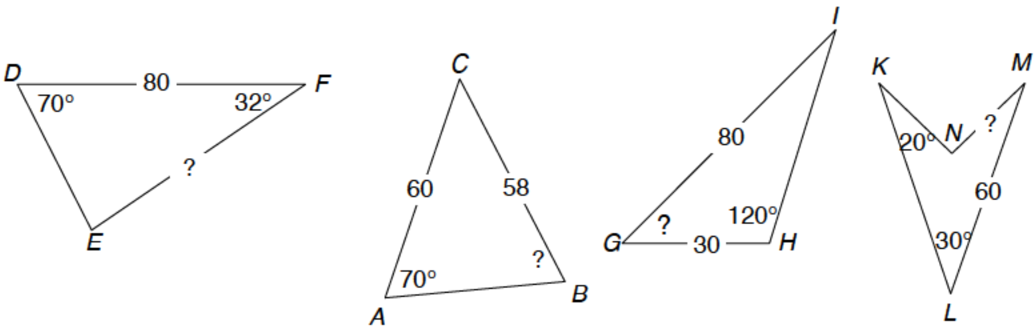
De sinusregel

Vermenigvuldig de oppervlakteregel hierboven met 2 en deel daarna door $a \cdot b \cdot c$.
Dan krijg je het volgende.

Sinusregel $\quad \dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$

e. Wat levert deze regel op als $\gamma = 90°$?

9 Bereken in de volgende figuren de zijde of hoek waar het vraagteken bij staat.
Vierhoek *KLMN* is een symmetrische pijlpuntvlieger.



10 a. Ga na dat de sinusregel niet bruikbaar is om de hoeken van de driehoek in opgave **1a** te berekenen.
b. Wel kun je er in opgave **1c** de onbekende zijden mee uitrekenen. (De onbekende hoek kun je ook zo wel uitrekenen.)
Bereken de onbekende zijden in één decimaal.
c. Ga na hoe het met de driehoek in opgave **1b** zit.
Op gevallen als in **1d** komen we nog terug.

11 Van driehoek *ABC* is gegeven: $\alpha = 30°$, $b = 6$ en $a = 4$.

a. Teken driehoek *ABC* zo nauwkeurig mogelijk. Er zijn twee mogelijkheden, één waarbij hoek *B* stomp is en één waarbij hoek *B* scherp is.

b. Wat is het verband tussen de scherpe hoek *B* in de ene driehoek en de stompe hoek *B* in de andere?

c. Bereken $\sin\beta$. Welke mogelijkheden voor β volgen hieruit?

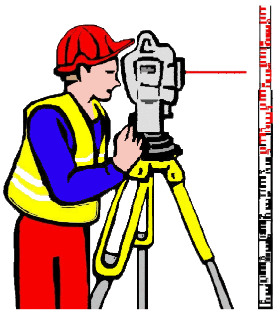
d. Bereken γ en *c* voor het geval dat hoek *B* scherp is en ook voor het geval dat hoek *B* stomp is.

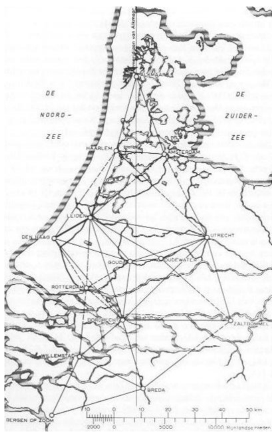
12 De sinusregel toegepast op een gelijkbenige driehoek met basishoeken α en opstaande zijden 1 geeft:
$\sin(180° - 2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

a. Leg dat uit.

De oppervlakteformule toegepast op een gelijkbenige driehoek met basishoeken α en opstaande zijden 1 geeft:
$\sin(180° - 2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

b. Leg dat uit.





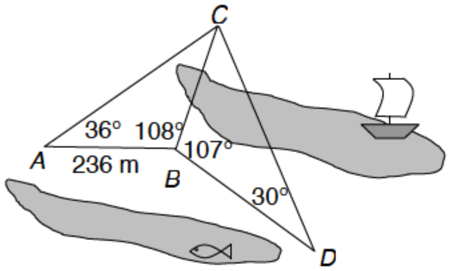
In de praktijk

Een landmeter kan met zijn theodoliet eenvoudig en nauwkeurig hoeken meten (op 0,0001° nauwkeurig!).
Het opmeten van afstanden is veel moeilijker. (Hij moet bijvoorbeeld omlopen omdat er een heg of een sloot is.) Hij beperkt zich tot het nauwkeurig meten van één afstand. Om de overige afstanden te bepalen, meet hij hoeken. De afstanden berekent hij dan met *trigono-metrie* (= driehoeksmeting; het Griekse woord γόνυ (gonu) betekent hoek). Dat heet in de landmeetkunde *voorwaartse insnijding*. Deze methode werkt alleen in de "lagere geodesie", de landmeetkunde waarbij het aardoppervlak als plat kan worden beschouwd. Hoe het werkt, zie je in de volgende opgave.

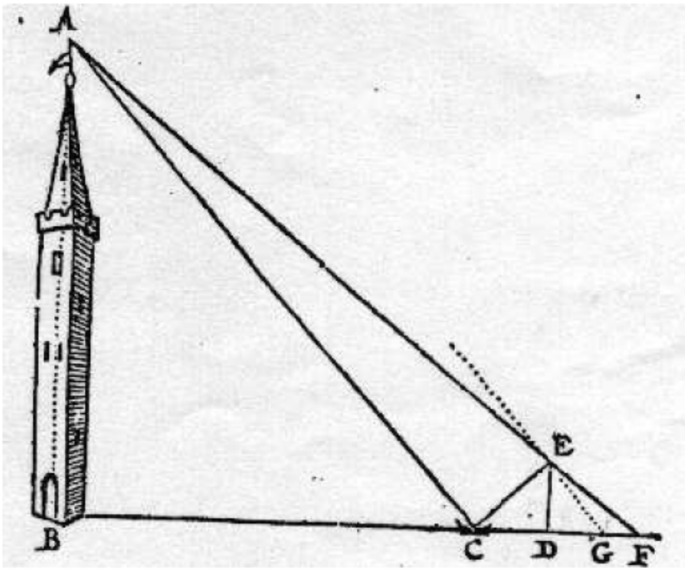
De eerste driehoeksmeting werd uitgevoerd door Willebrord Snel van Royen uit Leiden. Hij bepaalde de afstand tussen Bergen op Zoom en Alkmaar met behulp van een netwerk van aaneengesloten driehoeken tussen torens in veertien steden. Op al deze punten voerde hij richtingsmetingen naar enkele van de andere torens uit. Onder andere in een weiland bij Leiden werd door hem een basis (afstand) gemeten waarmee hij, via een aantal hulpdriehoeken, de grootte van het driehoeksnet bepaalde.
Uit: 175 jaar kadaster GEO-INFO 2007-5

Bij de berekeningen die hierbij uitgevoerd moesten worden, moet je denken aan die in de volgende opgave.

13 Een landmeter weet dat de afstand tussen *A* en *B* 236 m is. Hij wil de afstand van *C* tot *D* weten. In *A*, *B* en *D* meet hij hoeken. De resultaten zie je in de tekening hieronder. Bereken *CD*.



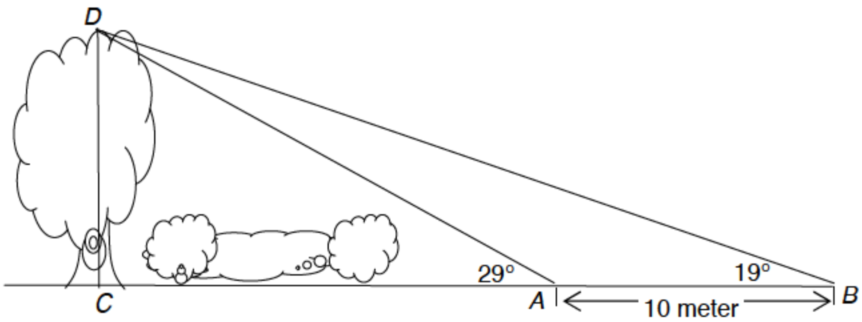
14 De Nederlandse meetkundige Sybrandt Hansz. Cardinael (1578-1647) bedacht een zeer elegante manier om de hoogte van een toren te bepalen. Je hebt er zelfs geen hoeken voor nodig. Hieronder zie je hoe hij te werk ging.



De hoogte van de toren is *AB*. Er ligt een spiegel op de grond in *C*. De verticale stok *DE* is zó geplaatst dat de top *A* van de toren in de spiegel gezien kan worden vanuit *E*. Vervolgens bepaal je de plaats van punt *F* zo, dat *F*, *E* en *A* op één lijn liggen.
Neem aan: $DE = 6$, $CD = 8$ en $DF = 9$.
Bereken de hoogte van de toren.
Naar: cTWO – havo wiskunde B – Meetkunde 2 – Vectoren en goniometrie

Het mooie van deze methode is dat je de hoogte van de toren kunt bepalen, zonder dat je er dichtbij hoeft te komen.

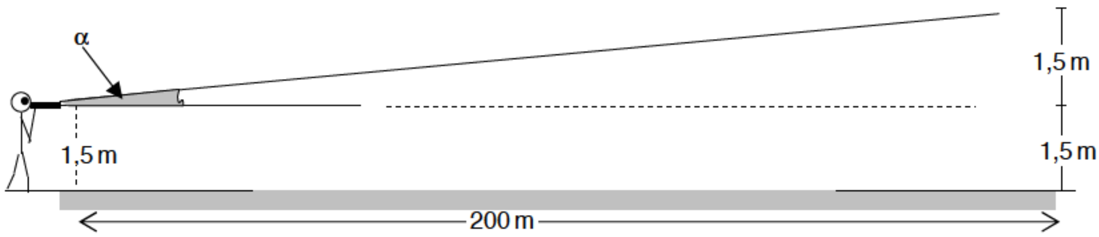
15 Ad wil de hoogte van een boom weten (de afstand *CD* in de tekening hieronder). Hij kan niet bij de boom komen. Hij meet vanuit een punt *A* de hoek *CAD*. Vervolgens loopt hij 10 meter verder van de boom weg en meet in *B* de hoek *CBD*.



De resultaten van de metingen staan in de tekening.
Bereken de hoogte van de boom.
Tip. Bereken eerst *AD*.

16 Op bladzijde 23 wordt beweerd dat je met een theodoliet hoeken tot op 0,0001 graad nauwkeurig kunt meten.
In een straat moet een landmeter 200 meter verderop een punt op 3 meter hoogte bepalen. De theodoliet staat op hoogte 1,5 meter.

a. Welke hoek α hoort bij deze hoogte (zie plaatje)?
b. Als de theodoliet 0,0001 graad teveel aangeeft, hoeveel te laag komt het punt dan?

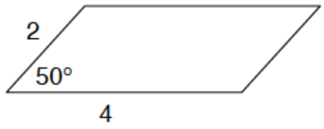


17 Van driehoek *ABC* is $AB = 20$, $BC = 15\sqrt{3}$ en $\alpha = 60°$.

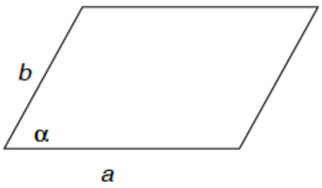
a. Toon aan dat $\sin\gamma = \frac{2}{3}$.
b. Van welke twee hoeken is de sinus gelijk aan $\frac{2}{3}$?
c. Bereken γ.
d. Bereken de lengte van *AC*.

Naar: cTWO – havo wiskunde B – Meetkunde 2 – Vectoren en goniometrie

De oppervlakte van een parallellogram

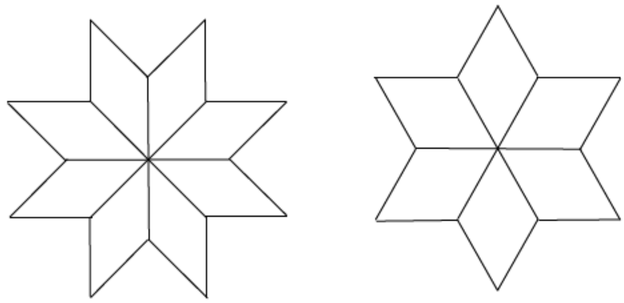


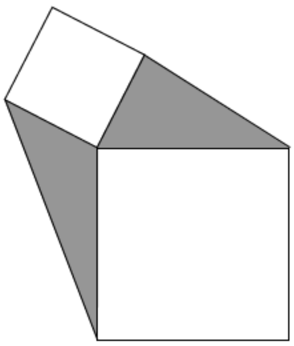
18 **a.** Bereken de oppervlakte van het parallellogram hiernaast in twee decimalen.
b. Geef een formule voor de oppervlakte van een parallellogram met zijden a en b en een hoek α.
c. Maakt het iets uit of α een scherpe of een stompe hoek van het parallellogram is?



> **De oppervlakte van een parallellogram**
> De oppervlakte van een parallellogram met zijden a en b en een hoek α is: $ab\sin\alpha$.

19 De getekende sterren hieronder zijn opgebouwd uit congruente ruiten met zijde 1.
Bereken van elke ster de oppervlakte. Geef een exact antwoord en een benadering in twee decimalen.

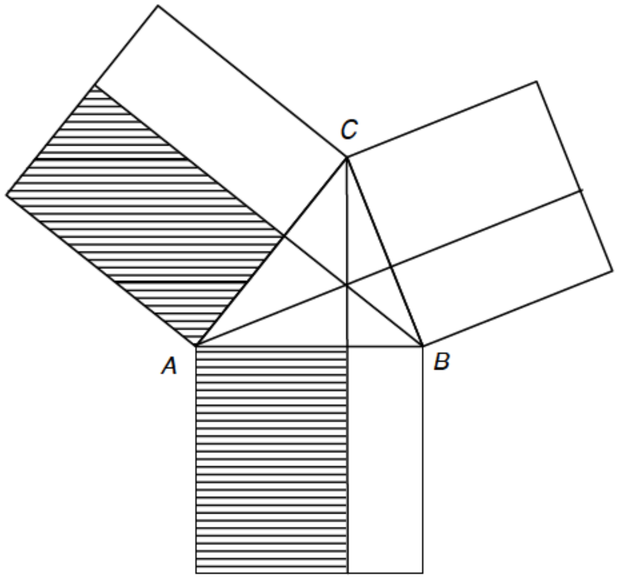




20 Hiernaast zijn twee vierkanten en twee driehoeken getekend. Eén hoekpunt hebben ze gemeenschappelijk.
Laat zien dat de twee driehoeken dezelfde oppervlakte hebben.

5 De cosinusregel

Een bewijs van de cosinusregel in een scherphoekige driehoek



Op de zijden van de scherphoekige driehoek *ABC* hierboven zijn vierkanten geplaatst. De hoogtelijnen van driehoek *ABC* verdelen elk van de vierkanten in twee stukken.

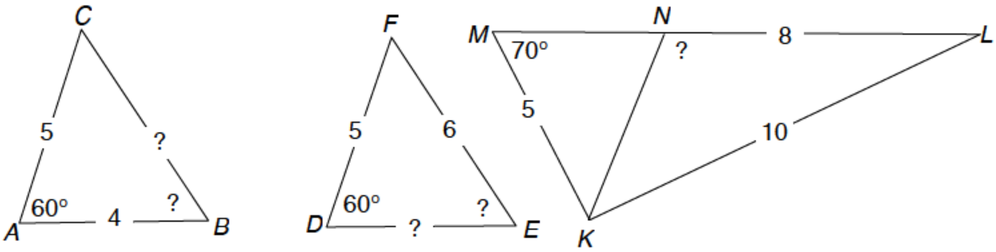
* **1** **a.** Laat zien dat beide gestreepte rechthoeken in het plaatje hierboven oppervlakte $bc\cos\alpha$ hebben en dus gelijke oppervlakte hebben.
b. Geef andere rechthoeken op het werkblad met dezelfde oppervlakte dezelfde kleur.
c. Laat nu zien waarom $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.
d. Formuleer soortgelijke regels als in **c** met $\cos\beta$ en met $\cos\gamma$.

Cosinusregel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Je kunt een soortgelijk bewijs van de cosinusregel geven in een stomphoekige driehoek, zie hiervoor opgave **6** van de volgende paragraaf.
Er is ook een algebraïsch bewijs in opgave **8**.

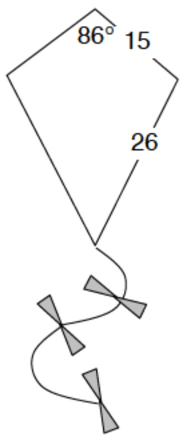
2 Bereken de onbekende zijden en de onbekende hoeken in de volgende figuren.



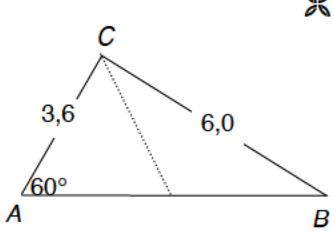
Naar: cTWO – havo wiskunde B – Meetkunde 2 – Vectoren en goniometrie

3 In driehoek *ABC* zijn de zijden *a*, *b*, *c* en de hoeken α, β, γ. In elk van de volgende onderdelen zijn drie van de zes gegeven. Bereken zo mogelijk de andere drie.
Naar: cTWO – havo wiskunde B – Meetkunde 2 – Vectoren en goniometrie

a	*b*	*c*	α	β	γ
8	5				65°
8	5		65°		
		150	120°	45°	
	12	15	55°		
6	10	8			
15	15				20°
			30°	70°	80°

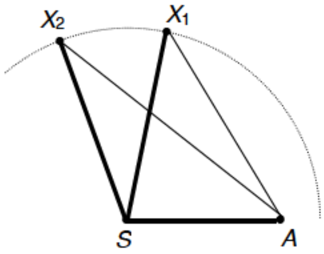


4 Van de vlieger hiernaast staan de gegevens in de figuur.
a. Bereken de lengte van de korte diagonaal in één decimaal nauwkeurig. Doe dat op twee manieren: mét en zonder cosinusregel.
b. Bereken de andere hoeken van de vlieger in graden nauwkeurig.
c. Bereken de lengte van de lange diagonaal.

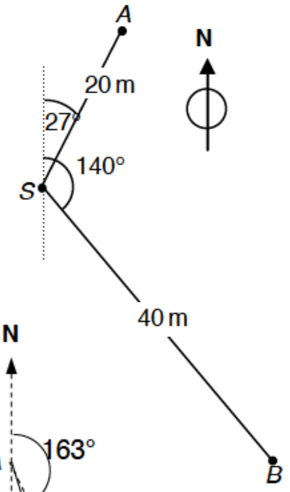


5 **a.** Bereken de lengte *AB*, de derde zijde in de driehoek hiernaast.

In de driehoek is een zwaartelijn getekend (een zwaartelijn gaat vanuit een hoekpunt naar het midden van de tegenoverliggende zijde).
b. Bereken de lengte van die zwaartelijn.



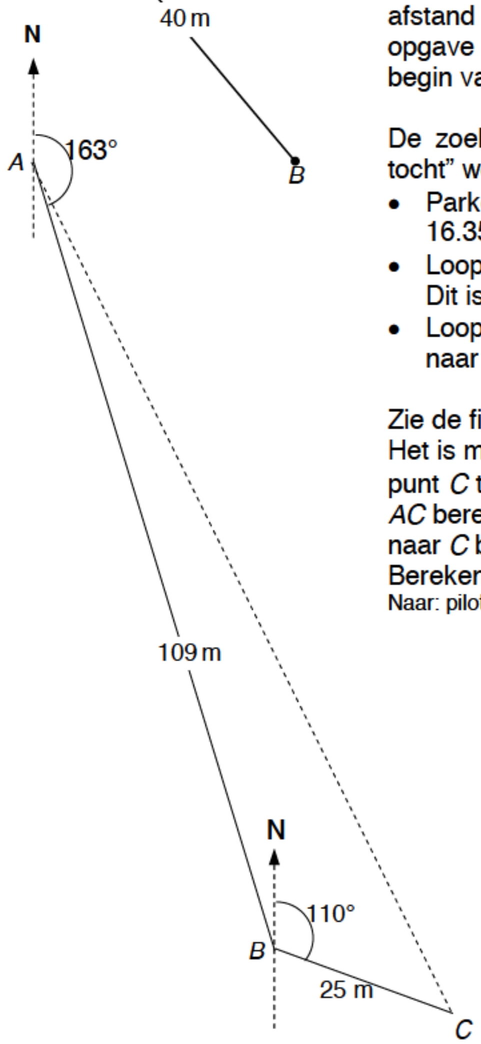
6 In driehoek ASX hebben AS en SX een vaste lengte. De zijden AS en SX scharnieren in S; $\angle ASX$ laten we groter worden.
Bewijs met de cosinusregel dat de lengte van AX dan ook groter wordt.



7 Geocaching
Met behulp van een GPS-ontvanger kunnen op iedere plaats op aarde de coördinaten van die plaats worden bepaald. Een wereldwijd beoefende hobby waarbij gebruik gemaakt wordt van GPS is *geocaching*. Bij geocaching is het de bedoeling een *cache* – een soort schatkistje – te zoeken met behulp van een GPS-ontvanger en een *loopopdracht*. Een loopopdracht bestaat uit twee onderdelen: een koers en een afstand. De koers is de hoek ten opzichte van het noorden in een geheel aantal graden, vanaf het noorden draaiend met de klok mee. De afstand is gegeven in een geheel aantal meters. (In deze opgave is de koers dus anders gedefinieerd dan in het begin van paragraaf 4.)

De zoektocht naar de cache, genaamd "Haagse zoektocht" wordt als volgt beschreven:

- Parkeer de auto langs de kant van de weg op N52 16.351 E6 57.531. Dit is punt A.
- Loop vanaf punt A 109 meter met koers 163 graden. Dit is punt B.
- Loop vanaf punt B 25 meter met koers 110 graden naar de cache op punt C.



Zie de figuur.
Het is mogelijk om in één loopopdracht vanaf punt A naar punt C te gaan. Hiervoor moet in ΔABC eerst de afstand AC berekend worden en vervolgens moet de koers van A naar C berekend worden.
Bereken de koers en de afstand van deze loopopdracht.
Naar: pilotexamen wiskunde B havo, 2011 eerste tijdvak

6 Samenvatting

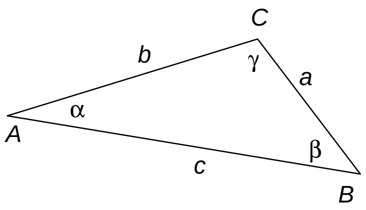
- Hoe luidt de meetkundige en hoe de algebraïsche versie van de **stelling van Pythagoras**?

- Hoe luidt de **omgekeerde stelling van Pythagoras**?

Stelling van Thales
In een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel van die rechthoekige driehoek.

Omgekeerde stelling van Thales
Als het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek op een zijde ligt, dan is de hoek tegenover die zijde recht.

Als $90° < \alpha < 180°$, dan: $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$
$\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$



De **oppervlakte** van driehoek ABC is $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Sinusregel $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$

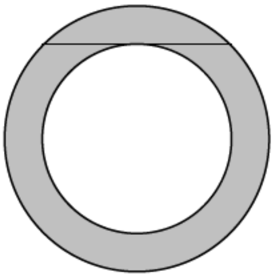
Cosinusregel $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

Maak een opgave
- waarin je de sinusregel moet gebruiken.
- waarin je de cosinusregel moet gebruiken.

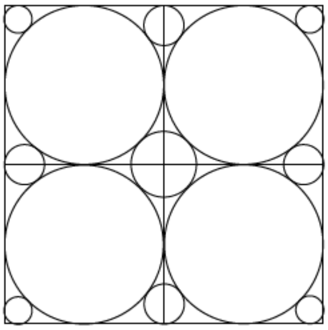
• Als je de sinus van een hoek kent, ken je de hoek zelf nog niet.
Als je de cosinus van een hoek kent, ken je de hoek wel.
Leg dat uit.

Descartes' aanpak
- Geef alle lijnstukken in de figuur namen (letters), bekende zowel als onbekende.
- Probeer één grootheid op twee verschillende manieren uit te drukken in de aldus benoemde lijnstukken.
- De uitdrukkingen zijn gelijk, dat geeft een *vergelijking*.
- Los de onbekende uit de vergelijking op. Dan is alles bekend in de figuur en het probleem opgelost.

7 Gemengde opgaven

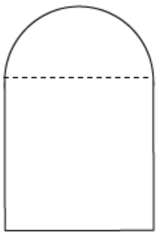


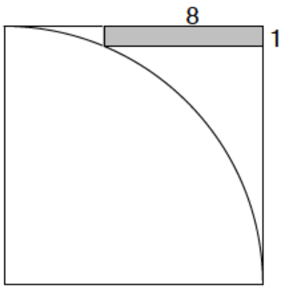
1 Hiernaast zie je twee concentrische (= met hetzelfde middelpunt) cirkels.
De koorde van de grote cirkel raakt de kleine cirkel en heeft lengte 20.
Bereken de oppervlakte van het grijze gebied (tussen de twee cirkels).



2 In het plaatje hiernaast staan vier vierkanten met zijde 2 en dertien cirkels, met vier verschillende stralen.
Bereken die stralen exact.

3 **De gedeputeerdenpoort in Nijmegen**
De gedeputeerdenpoort in Nijmegen bestaat uit een vierkant met zijde 2 met daarop een halve cirkel, zie figuur.
Bereken de straal van de 'omgeschreven cirkel' van de poort exact.

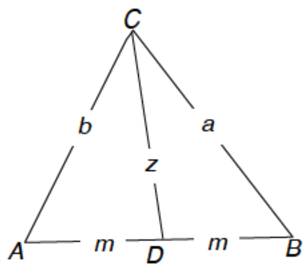




4 In een vierkant is een kwartcirkel getekend. Een rechthoek van 8 bij 1 ligt langs twee zijden van het vierkant en heeft precies één punt met de cirkel gemeenschappelijk.

Bereken de zijde van het vierkant.

Wiskunde Olympiade 1993

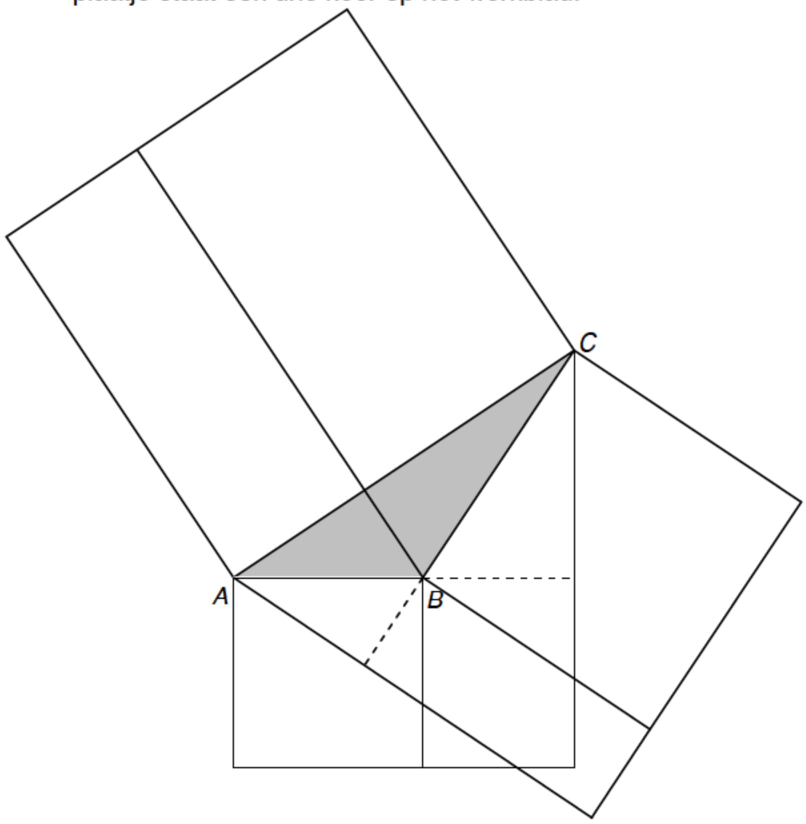


5 De stelling van Apollonius

CD is een zwaartelijn in driehoek ABC. Dan geldt:
$a^2 + b^2 = 2m^2 + 2z^2$.
Deze stelling hebben we al bewezen. Bewijs deze stelling met de cosinusregel.

*** 6 Een bewijs van de cosinusregel in een stomphoekige driehoek**

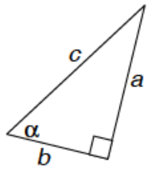
Driehoek ABC heeft een stompe hoek in B.
Op de zijden van de driehoek ABC hieronder zijn net als in opgave **1** van de vorige paragraaf vierkanten geplaatst. De hoogtelijn uit hoekpunt B verdeelt het vierkant met zijde b in twee stukken. De vierkanten met zijde a en c worden tot rechthoeken aangevuld, zie plaatje. Het plaatje staat ook drie keer op het werkblad.



a. Er zijn twee rechthoeken in het plaatje met oppervlakte $-ac\cos\beta$. Leg dat uit.
Kleur ze rood in het eerste plaatje.
b. Er zijn ook twee rechthoeken met oppervlakte $bc\cos\alpha$. Kleur ze in het tweede plaatje geel.
En er zijn twee rechthoeken met oppervlakte $ab\cos\gamma$. Kleur ze in het derde plaatje groen.
c. Leg uit dat $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$.

7

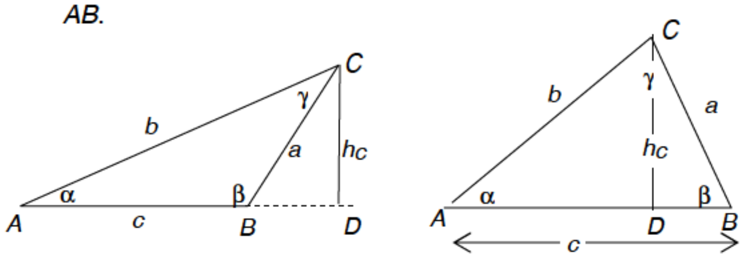
Voor alle hoeken α geldt: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$



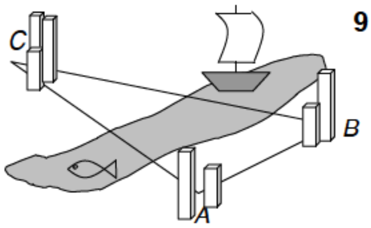
Opmerking
Om haakjes te vermijden, schrijven we $\sin^2\alpha$ in plaats van $(\sin\alpha)^2$ en $\cos^2\alpha$ in plaats van $(\cos\alpha)^2$.

a. Laat zien dat de formule klopt voor α in de figuur hiernaast.
b. Laat zien dat de formule ook voor stompe hoeken α geldt.

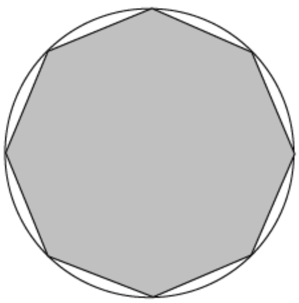
8 Algebraïsch bewijs van de cosinusregel
In de plaatjes hieronder is D de projectie van C op lijn AB.



a. Ga na dat in *beide* plaatjes geldt: $AD = c - a\cos\beta$.
b. Uit de stelling van Pythagoras volgt:
$b^2 = (c - a\cos\beta)^2 + a^2\sin^2\beta$.
Ga dat na.
c. Toon aan dat uit **d** met behulp van opgave **7** volgt:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$.

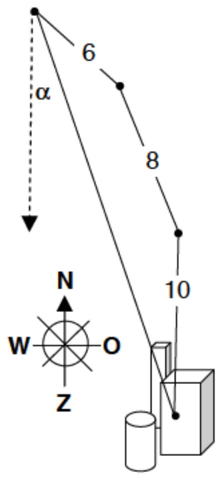


9 Aan een groot meer liggen de plaatsen A, B en C. De afstand van A tot B hemelsbreed is 23,3 km. In A kun je hoek α meten en in B hoek β: $\alpha = 124°$ en $\beta = 33°$.
Bereken hoe ver A hemelsbreed van C af ligt.

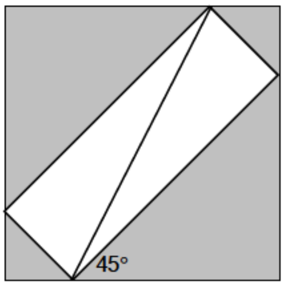


10 De oppervlakte van een regelmatige achthoek is $32\sqrt{2}$.
De hoekpunten van de achthoek liggen op een cirkel.
a. Bereken de exacte straal van die cirkel.
b. Bereken de zijde van de achthoek in één decimaal nauwkeurig.

11 Kapitein Rob verlaat met zijn schip de haven van Adam en vaart 10 mijlen in noordelijke richting. Dan wordt de koers gewijzigd in richting Noord-Noord-West (dat is $22\frac{1}{2}°$ ten opzichte van het noorden). In deze richting vaart het schip 8 mijl. Daarna gaat het in richting Noord-West verder. Na 6 mijl varen zoekt kapitein Rob de haven van Adam door zijn verrekijker.
In welke richting moet hij kijken? (Met andere woorden bereken α de hoek tussen de richting waarin Adam ligt en de zuidelijke richting.)
Hoe ver is hij nu hemelsbreed van Adam verwijderd?



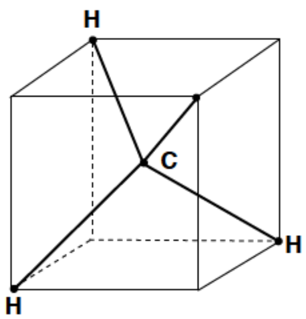
12 Zie plaatje. In een vierkant is een rechthoek getekend. De hoekpunten van de rechthoek liggen op de zijden van het vierkant.
De oppervlakte van het grijze deel is 8.
Bereken de lengte van de diagonaal van de rechthoek.
Dion Gijswijt in Pythagoras, oktober 2000



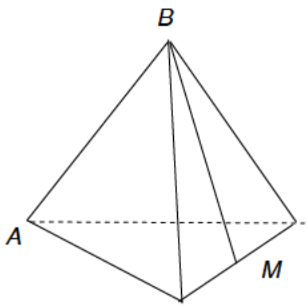
De ruimte in

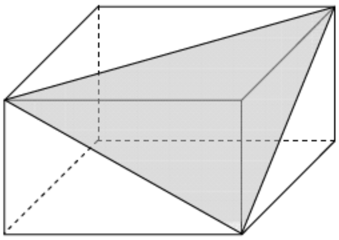
13 De valentiehoek in het CH_4-molecuul
Het molecuulmodel van methaan CH_4 ziet er als volgt uit.
In vier hoekpunten van een kubus zit een H-atoom en in het centrum van de kubus een C-atoom.
De H-C-H-hoek heet in de scheikunde de valentiehoek.
We gaan die hoek berekenen. Neem de ribbe van de kubus 2.

a. Waarom maakt het niet uit welke H's je kiest?
b. Bereken de zijden van een H-C-H-driehoek.
c. Bereken de valentiehoek in graden nauwkeurig.



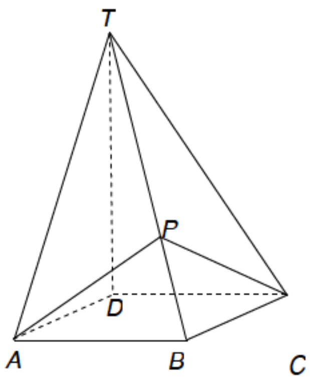
14 Hiernaast staat een regelmatig viervlak. *M* is het midden van een ribbe. *A* en *B* zijn hoekpunten van het viervlak.
Bereken hoek *AMB* in graden nauwkeurig. (Dit is de hoek tussen twee grensvlakken van het viervlak.)





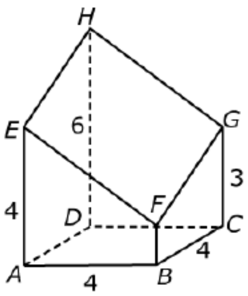
15 Het blok hiernaast is 3 hoog, 5 breed en 4 diep.
Bereken de oppervlakte van de driehoek die in het blok getekend is in één decimaal.

16 De knik in de trapleuning
De wanden waartegen de twee leuningen van de trap bevestigd zijn, staan loodrecht op elkaar.
De helling van beide leuningen is $\frac{1}{2}$.
Bereken de knik in de leuning in graden nauwkeurig.
Je kunt de situatie vertalen naar kubus *ABCD.EFGH*: *M* is het midden van *DH*, het eerste stuk van de leuning is *AM* ... .



17 De piramide hiernaast heeft een vierkant grondvlak met zijde 1. *T* ligt recht boven *D*; $TD = \sqrt{2}$.
a. Bereken de lengtes van de andere ribben van de piramide.

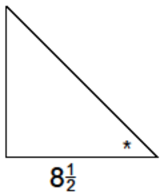
Een mier loopt van *A* via een punt van ribbe *TB* naar *C*.
P is het punt op ribbe *TB* zó, dat weg *A-P-C* zo kort mogelijk is.
b. Ga met een berekening na dat $TP = 1\frac{1}{2}$.
c. Bereken hoek *APC* in graden nauwkeurig.



18 Hiernaast is een afgeknotte balk *ABCD.EFGH* getekend.
De afmetingen staan in de figuur.
Bereken hoek *EHG* in graden nauwkeurig.
Naar: cTWO – havo wiskunde B – Meetkunde 2 – Vectoren en goniometrie

8 Antwoorden

Paragraaf 1 Pythagoras meetkundig en algebraïsch



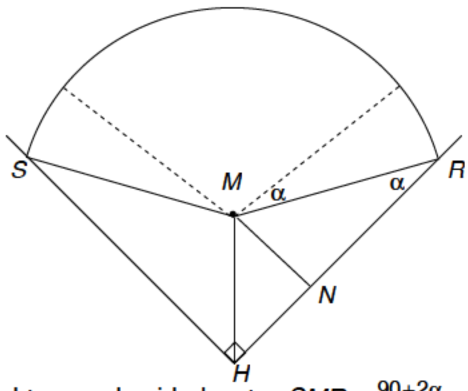
1 a. Hoek * is 45° en een rechthoekszijde is $8\frac{1}{2}$ inch, dus de andere ook. Dus is de “12 inch” exact $8\frac{1}{2}\sqrt{2}$ inch.

b. Noem de projectie van M op de foul line N, dan

$MN = 30\sqrt{2}$ en $NR = \sqrt{90^2 - \left(30\sqrt{2}\right)^2} = 30\sqrt{7}$,

dus $HR \approx 121{,}8$ ft.

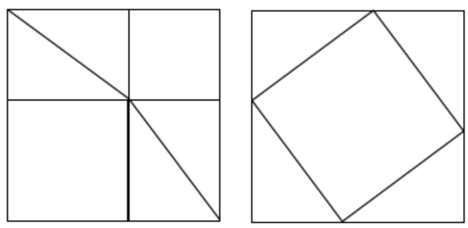
c. Zie plaatje: $\sin\alpha = \frac{30\sqrt{2}}{90} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$, dus $\alpha \approx 28{,}13°$



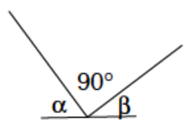
De oppervlakte van de cirkelsector $SMR = \frac{90+2\alpha}{360} \cdot \pi \cdot 90^2$

$\approx 10337{,}87$. De oppervlakte van driehoek $HMR =$
$\frac{1}{2} \cdot HR \cdot MN = 2583{,}75$.
De gevraagde oppervlakte $\approx 10337{,}87 + 22583{,}75 \approx$
$15505{,}4$ ft^2.

2 a.



b. De twee gelegde vierkanten hierboven hebben dezelfde oppervlakte; als je van beide vier dezelfde rechthoekige driehoeken afhaalt, houd je bij de linker figuur de twee kleine vierkanten over en bij de rechter figuur het grote vierkant.



c. Noem de niet-rechte hoeken van de rechthoekige driehoek α en β. De drie hoeken die in de punt samenkomen zijn bij elkaar: $\alpha + \beta + 90 = 180°$, dus ze vormen een gestrekte hoek.

3 **a.** Oppervlakte van de vier driehoeken is:
$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab = 2ab$

Oppervlakte kleine vierkant = c^2.

Dus: $c^2 + 2ab = (a+b)^2$. Haakjes wegwerken geeft het gewenste resultaat.
b. Er zit geen knik in het punt waar de twee driehoeken en het vierkant aan elkaar gelegd zijn, zie **2c**, en de zijden zijn alle $a+b$.

4 **a.** Oppervlakte van de vier driehoeken is:
$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab = 2ab$
Oppervlakte kleine vierkant is $(b-a)^2$.
Dus: $c^2 = (b-a)^2 + 2ab$. Haakjes wegwerken geeft het gewenste resultaat.
b. Een hoek is de som van de twee scherpe hoeken van de een rechthoekige driehoek, dus 90°.

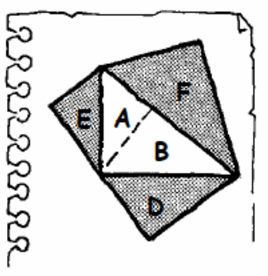
5 **a.** $4^2 + 7^2 > 8^2$, dus de hoek tegenover de zijde van 8 is scherp, dus een scherphoekige driehoek.
b. $16^2 + 30^2 = 34^2$, dus de driehoek is rechthoekig.

6 **a.** Noem het midden van CA even M. Het lijnstuk CM krijg je door het lijnstuk CB een kwart slag te draaien. Dat zie je aan de 1×3-rechthoeken waarin ze zitten.
b. $BC = \sqrt{10}$ en $AC = \sqrt{40}$
c. In driehoek ABC: $AB^2 = BC^2 + AC^2 = 10 + 40 = 50$. Dus $AB = \sqrt{50}$
AB is schuine zijde van een roosterdriehoek met rechthoekszijden 1 en 7. Dus $AB^2 = 1 + 49 = 50$. Dus $AB = \sqrt{50}$.

7 **a.** $a = 5$, $b = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ en $c = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$,
dus: $b^2 + c^2 = a^2$, dus hoek BAC is recht.
b. Hoek Q is recht als $a = 3$.
Hoek P is recht als $a^2 = 4^2 + (4^2 + (a-3)^2) = 50 + a^2 - 6a$, dus als $a = 8\frac{1}{3}$.
c. Als $a > 8\frac{1}{3}$.

8 Noem de rechthoekszijden a en b en de schuine zijde c dan hebben de geodriehoeken oppervlakte $\frac{1}{4}a^2$, $\frac{1}{4}b^2$ en $\frac{1}{4}c^2$. Uit $a^2 + b^2 = c^2$, volgt: $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}c^2$, dus voor het eerste voorbeeld klopt de stelling.
De halve cirkels hebben oppervlakte $\frac{1}{8}\pi a^2$, $\frac{1}{8}\pi b^2$ en $\frac{1}{8}\pi c^2$.
De 'T'-s hebben oppervlakte $\frac{1}{4}a^2$, $\frac{1}{4}b^2$ en $\frac{1}{4}c^2$.

Dus ook voor de andere voorbeelden klopt de stelling.



9 De oppervlakte van de hele witte driehoek noemen we C.
$A=E$, $B=D$ en $C=F$. Verder $A+B=C$, dus $D+E=F$.

10 a. $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$

b. De hoeken worden kleiner, want de overstaande rechthoekszijde blijft 1 en de aanliggende rechthoekszijde wordt groter.

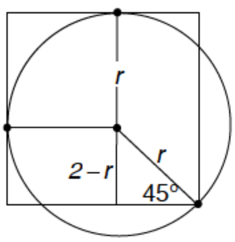
c. Na n stappen is de lengte $\sqrt{n+1}$, dus $n+1>1000^2$, dus na 1 miljoen stappen.

Paragraaf 2 Descartes' aanpak

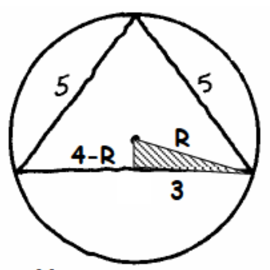
1 Noem de zijde van de afgeknipte driehoekjes x.

a. De totale omtrek van de drie driehoekjes is dan $9x$.
De omtrek van de resterende zeshoek is dan
$3x + 3(15-2x) = 45-6x$.
$3x=45-6x$ geeft $x=5$

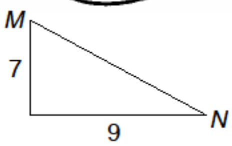
b. De totale oppervlakte van de drie driehoekjes is dan
$3\cdot\frac{1}{4}x^2\sqrt{3}$.
De oppervlakte van de resterende zeshoek is dan
$\frac{1}{4}\cdot 15^2\sqrt{3} - 3\cdot\frac{1}{4}x^2\sqrt{3}$
$3\cdot\frac{1}{4}x^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}\cdot 15^2\sqrt{3} - 3\cdot\frac{1}{4}x^2\sqrt{3}$ geeft $6x^2=15^2$, dus
$x=\dfrac{15}{\sqrt{6}}=2\frac{1}{2}\sqrt{6}$.



2 Noem de straal van zo'n cirkel r, dan (zie plaatje):
$\dfrac{2-r}{r}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $2-r=\frac{1}{2}r\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)r=2$, dus
$r=\dfrac{2}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\dfrac{4}{2+\sqrt{2}}$.
Hetzelfde is: $4 - 2\sqrt{2}$, zie opgave **9** van Rekentechniek.

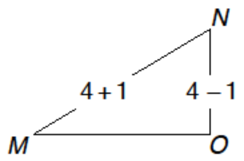


3 De hoogte van de driehoek is $\sqrt{5^2-3^2}=4$
Maak een rechthoekige driehoek met schuine zijde R en rechthoekszijden 3 en $4-R$.
$R^2 = 3^2 + (4-R)^2 \rightarrow R^2 = 25 - 8R + R^2 \rightarrow R=3\frac{1}{8}$

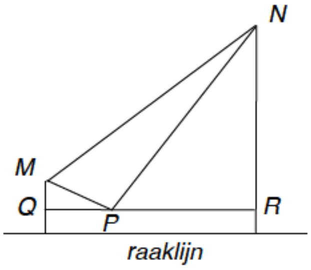


4 a. $MN^2 = 7^2 + 9^2 = 130$, $MN=\sqrt{130}$
b. $MN^2 = 3^2 + 11^2 = 130$, $MN=\sqrt{130}$

c. Bekijk de rechthoekige driehoek met MN als schuine zijde. De rechthoekszijden zijn: $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ en $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$.
$MN^2 = (\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)^2 + (\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b)^2 = ... = \frac{1}{2}(a^2+b^2) \rightarrow$
$MN = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 18} = 3.$



5 **a.** Noem het middelpunt van de kleine cirkel M en van de grote cirkel N. Het punt O ligt op dezelfde hoogte als M, recht onder N. De afstand van de raakpunten is gelijk aan $MO = \sqrt{5^2-3^2} = 4$.



b. Zie plaatje. P is het middelpunt van het kleine cirkeltje. $QR = MO = 4$. Noem de straal van het kleine cirkeltje x. Dan $MQ = 1-x$, $PM = 1+x$, $NR = 4-x$ en $PN = 4+x$.
Dus $QP = \sqrt{(1+x)^2-(1-x)^2} = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$ en
$PR = \sqrt{(4+x)^2-(4-x)^2} = \sqrt{16x} = 4\sqrt{x}$,
dus $QR = 6\sqrt{x} = 4$, dus $x = \frac{4}{9}$.

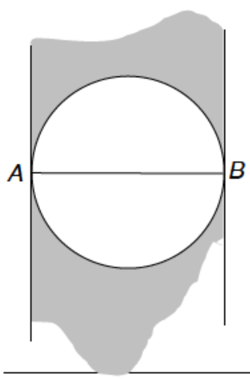
6 Noem CD: y. Dan geldt (drie maal Pythagoras):
$m^2 = x^2+y^2$, $b^2 = (d+x)^2+y^2$, $a^2 = (d-x)^2+y^2$.
Trek de eerste vergelijking van de tweede af :
$b^2 - m^2 = d^2+2xd$.
Trek de eerste vergelijking van de derde af :
$a^2 - m^2 = d^2-2xd$.
Optellen van deze resultaten geeft: $a^2+b^2-2m^2 = 2d^2$.

Paragraaf 3 De stelling van Thales

1 **b.** Het middelpunt lijkt C te zijn en de straal 1.
c. De diagonalen van de rechthoek hebben lengte 2.
M is het snijpunt van de diagonalen. CM is steeds de helft van een diagonaal en heeft dus constant lengte 1.

2 **a.** AMC en BMC zijn gelijkbenig, want $AM = BM = CM$.
b. 180°
c. $\bullet + \square + \bullet + \square = 180°$, dus $\bullet + \square = \frac{1}{2}\cdot 180 = 90°$.

3 **a.** Pythagoras in driehoek ABC geeft: $a^2+b^2 = (2d)^2$.
Samen met Apollonius: hebben we: $(2d)^2 = m^2+2d^2$.
Hieruit volgt dat $d^2 = m^2$, dus dat $d = m$.
b. $m = d$ invullen in Apollonius geeft: $a^2+b^2 = 4d^2$, dus $a^2+b^2 = (2d)^2$, dus $AC^2+BC^2 = AB^2$, dus volgens het omgekeerde van de stelling van Pythagoras is hoek C recht.



4 We nemen de cirkel met middellijn AB. Vanuit een punt van die cirkel zie je AB onder een rechte hoek. Vanuit een punt binnen de cirkel zie je AB onder een stompe hoek en vanuit een punt buiten de cirkel zie je *AB* onder een scherpe hoek. Je moet dus punten buiten de cirkel hebben. Om hoek *A* en hoek *B* ook scherp te hebben moet je tussen de lijnen door *A* en *B* loodrecht op *AB* blijven. Je krijgt dus het grijze gebied hiernaast.

5 $AB^2 = AC^2 + BC^2$, dus $AC = \sqrt{\left(6\frac{1}{2}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^2} = 6$

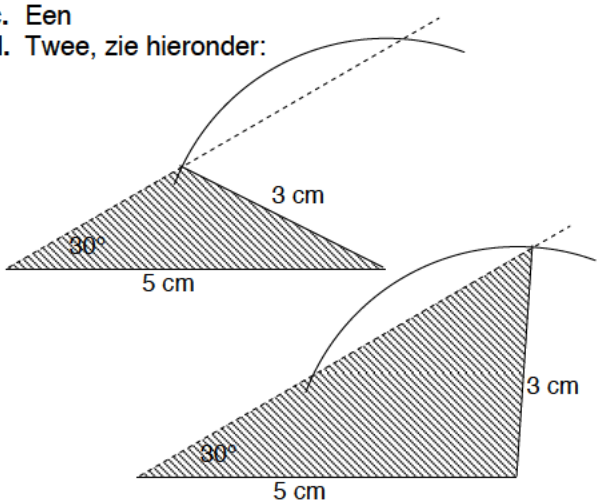
6 $\angle AHG = 90°$ en $\angle GHB = 90°$,volgens Thales.
Dus hoek *AHB* is gestrekt.

7 *D* en *E* liggen beide op de cirkel met middellijn *AB*.

8 Omdat de hoeken *DEC* en *DMC* beide recht zijn, liggen *M* en *E* op de cirkel met middellijn *CD*.

Paragraaf 4 De sinusregel

1 **a.** Een
b. Een
c. Een
d. Twee, zie hieronder:



2 **a.** 2,05 oostelijk van *O*, 2,19 noordelijk van *O*
-2,87 oostelijk van *O*, 0,88 noordelijk van *O*
-0,52 oostelijk van *O*, -2,95 noordelijk van *O*
1,22 oostelijk van *O*, -2,74 noordelijk van *O*
b. $r\cos\alpha$ oostelijk van *O*, $r\sin\alpha$ noordelijk van *O*
c. $\sin 163° = \sin 17°$; $\cos 163° = -\cos 17°$
d. $\sin 260° = -\sin 80°$; $\cos 260° = -\cos 80°$
e. $\sin 294° = -\sin 66°$; $\cos 294° = \cos 66°$

3 **a.** $90° < \alpha < 270°$
$180° < \alpha < 360°$
b. $\alpha = 180° - 83° = 97°$
c. $\alpha = 180° - 83° = 97°$

4 a.

	90°	120°	135°	150°	180°
sin	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1

5 a. $\alpha = 30°$ of $\alpha = 150°$
b. $\beta = 60°$
c. $\gamma = 120°$

6 a. $\alpha = 44{,}43°$
b. $180° - 44{,}43° = 135{,}57°$
c. $\alpha = 101{,}54°$; nee

7. a. $h_C = 3 \sin 30° = 1{,}5$
De oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 3$

b. $h_F = 3 \sin(180° - 120°) = 1{,}5\sqrt{3}$
De oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}5\sqrt{3} = 1{,}5\sqrt{3}$

8. a. In beide gevallen: $h_C = b \sin\alpha$
b. In beide gevallen: Opp $= \frac{1}{2}\, c\, b \sin\alpha$
c. Opp = $= \frac{1}{2}\, a\, c \sin\beta$; Oppervlakte $= \frac{1}{2}\, a\, b \sin\gamma$
d. Alledrie de uitdrukkingen zijn de oppervlakte van de driehoek.
e. $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{1}{c}$, dus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ en $\sin\beta = \frac{b}{c}$, de bekende definities van sin en cos.

9 *DEF*: De derde hoek is 78°.
$\frac{\sin 70°}{?} = \frac{\sin 78°}{80}$ geeft ? ≈ 76,9°
ABC: $\frac{\sin 70°}{58} = \frac{\sin ?}{60}$ geeft sin? ≈ 0,972, dus ? ≈ 76,4°
GHI: $\frac{\sin 120°}{80} = \frac{\sin \angle I}{30}$ geeft $\sin\angle I \approx 0{,}325$, dus
$\angle I \approx 19{,}0°$, dus ? ≈ 41,0°
In driehoek *LMN* is $\angle L = 15°$ en $\angle LNM = 145°$.
$\frac{\sin 145°}{60} = \frac{\sin 15}{?}$ geeft ? ≈ 26,4

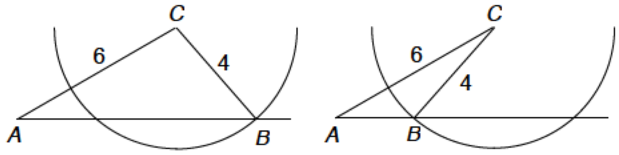
10 a. Je weet geen enkele hoek. Om de sinusregel te kunnen gebruiken moet je ten minste één hoek kennen.

b. $\dfrac{\sin 50^\circ}{a}=\dfrac{\sin 70^\circ}{5}$ geeft $a\approx 4{,}08$

$\dfrac{\sin 60^\circ}{b}=\dfrac{\sin 70^\circ}{5}$ geeft $b\approx 4{,}61$

c. De hoeken tegenover de zijden 3 en 4 zijn beide onbekend. We komen hier met de sinusregel niet verder.

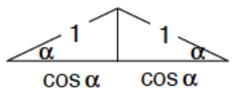
11a.



b. Die zijn samen 180°

c. 0,75 ; 48,6° en 131,4°

d. $\gamma = 101{,}4^\circ$ en $c = 7{,}8$; $\gamma = 18{,}6^\circ$ en $c = 2{,}6$



12 a. Zie plaatje: de tophoek is $180^\circ-2\alpha$ en de basis is $2\cos\alpha$. Dus: $\dfrac{2\cos\alpha}{\sin\left(180^\circ-2\alpha\right)}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$, dus $\sin(180^\circ-2\alpha)$ $=2\sin\alpha\cos\alpha$.

b. De oppervlakte van de driehoek is $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)$

De hoogte van de driehoek is $\sin\alpha$ en de basis $2\cos\alpha$, dus is de oppervlakte ook $\frac{1}{2}\cdot 2\cos\alpha\cdot\sin\alpha$.

Dus $\sin(180^\circ-2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$.

13 $\angle ACB = 36^\circ$, dus $BC = AB = 236$ m.

$\dfrac{\sin 30^\circ}{236}=\dfrac{\sin 107^\circ}{CD}$ geeft $CD = 451{,}4$ m.

14 De driehoeken ABC en EDC zijn gelijkvormig evenals de driehoeken ABF en EDF. De hoogte van de toren noemen we x en BC noemen we y, dan:

$\dfrac{x}{y+17}=\dfrac{6}{9}$ en $\dfrac{x}{y}=\dfrac{6}{8}$, dus $x=\frac{3}{4}y$ en $x=\frac{2}{3}(y+17)$.

Dit geeft: $x=102$.

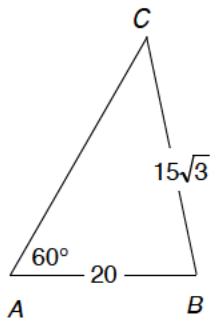
15 $\dfrac{\sin 19^\circ}{AD}=\dfrac{\sin 10^\circ}{10}$ geeft $AD = 18{,}75$ m

$CD = \sin 29^\circ \cdot AD \approx 9{,}1$

16 a. $\tan\alpha = 1{,}5 / 200$, dus $\alpha = 0{,}429710\ldots^\circ$.

b. $200\cdot\tan 0{,}429610\ldots^\circ = 1{,}49965\ldots$

Dus 0,00035 meter = 0,35 mm te laag.



17 a. We maken een schets van de situatie, zie hiernaast.

$\dfrac{15\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{20}{\sin\gamma}$, $\dfrac{15\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 30$, dus $\sin\gamma = \frac{2}{3}$.

b. Volgens de rekenmachine is $\text{inv}\sin\frac{2}{3} \approx 41{,}81$, dus $\gamma \approx 42^\circ$ of $\gamma \approx 180^\circ - 42^\circ = 132^\circ$.

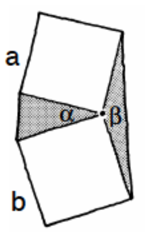
c. γ kan niet 132° zijn, omdat de hoekensom in driehoek $ABC = 180^\circ$, dus $\gamma \approx 42^\circ$.

d. $\beta \approx 78^\circ$ en $\dfrac{15\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{AC}{\sin\beta}$, dus $AC = 30 \cdot \sin\beta \approx 29{,}36$.

18 a. $2 \cdot 4 \cdot \sin 50^\circ \approx 6{,}13$

b. $ab \sin\alpha$

c. Nee, want $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$



19 $8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$

$6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}20$

20 Oppervlakte ene driehoek $= \frac{1}{2} \cdot a\,b \sin\alpha$

Oppervlakte andere driehoek $= \frac{1}{2}\,a\,b \sin\beta$

$\beta = 180^\circ - \alpha$, dus $\sin\alpha = \sin\beta$

De driehoeken hebben dus gelijke oppervlakte.

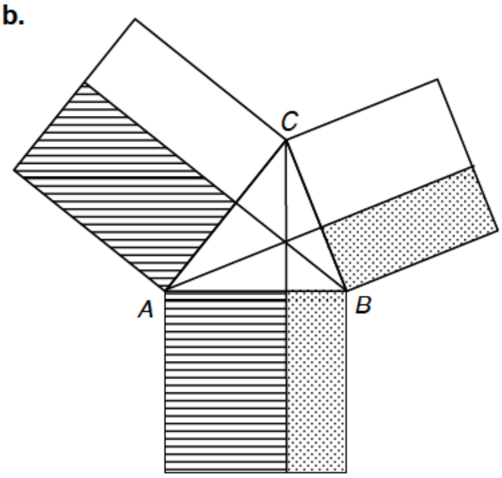
Paragraaf 5 De cosinusregel

1. a. De zijden van de bovenste gestreepte rechthoek zijn b en $c\cos\alpha$.

De zijden van de onderste gestreepte rechthoek zijn c en $b\cos\alpha$.

Dus is de oppervlakte van beide gestreepte rechthoeken $bc\cos\alpha$.

b.



c. $a^2 = \square + \square = c^2 - \square + b^2 - \square = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$

d. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

2 • $BC^2 = 25 + 16 - 40\cos 60° = 21$, dus $BC = \sqrt{21}$
$25 = 16 + 21 - 8\sqrt{21}\cos\beta$, dus $\beta \approx 70{,}9°$.

• $\dfrac{\sin 60°}{6} = \dfrac{\sin\angle DEF}{5}$, dus $\sin\angle DEF = 0{,}72..$, dus $\angle DEF \approx 46{,}2°$, dus $\angle DFE \approx 73{,}8°$.

$\dfrac{\sin 60°}{6} = \dfrac{\sin 73{,}8°}{DE}$, dus $DE \approx 6{,}65$.

• De sinusregel in $\Delta\, KLM$ geeft: $\dfrac{\sin 70°}{10} = \dfrac{\sin\angle KLM}{5}$,

dus $\sin\angle KLM = 5 \cdot \dfrac{\sin 70°}{10} \approx 0{,}465\ldots$, dus $\angle KLM \approx 28{,}0°$.
De cosinusregel in $\Delta\, KLN$ geeft dan:
$KN^2 = 64 + 100 - 160\cos 28{,}0° = 22{,}76\ldots$, dus $KN \approx 4{,}8$.
De sinusregel in $\Delta\, KLN$ geeft: $\dfrac{\sin 28{,}0°}{4{,}8} = \dfrac{\sin\angle KNL}{10}$, dus

$\sin\angle KNL = 10 \cdot \dfrac{\sin 28{,}0°}{4{,}8} \approx 0{,}98$, dus $\angle KNL \approx 102°$.

3 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$ geeft: $c^2 = 89 - 80\cos 65°$, dus $c \approx 7{,}43$.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ geeft dan:
$64 = 25 + 55{,}19\ldots - 74{,}29\ldots \cdot \cos\alpha$, dus $\cos\alpha \approx 0{,}2$ en
$\alpha \approx 78°$ en $\beta \approx 180° - 78° - 65° = 37°$.

a	b	c	α	β	γ
8	5	7,43	78°	37°	65°
8	5	8,71	65°	34,5°	80,5°
501,91	409,81	150	120°	45°	15°
12,75	12	15	55°	50,5°	74,5°
6	10	8	36,9°	90°	53,1°
15	15	5,21	80°	80°	20°
			30°	70°	80°

In het laatste geval kunnen a, b en c niet berekend worden. Wel de *verhouding* tussen de zijden. Die is:
$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 0{,}5 : 0{,}84 : 0{,}98$

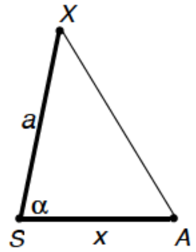
4 **a.** $2 \cdot 15 \cdot \sin 43° \approx 20{,}46$
$15^2 + 15^2 - 2 \cdot 15 \cdot 15 \cdot \cos 86° = 418{,}6$ geeft 20,46

b. $\frac{\sin 43°}{26} = \frac{\sin ?}{15}$ geeft ? = 23,2°

De hoeken zijn ongeveer: 46° ; 114° ; 114°

c. $\sqrt{26^2 - 15\sin^2 43°} + \sqrt{15^2 - 15\sin^2 43°} \approx 34{,}87$

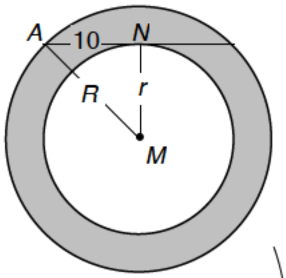
5 **a.** Met sinusregel β berekenen geeft: $\beta \approx 31{,}3°$.
Dus $\gamma \approx 88{,}7°$. Met bijvoorbeeld sinusregel krijg je $AB \approx 6{,}9$.
b. 3,5 (met bijvoorbeeld cos-regel in driehoek *ACM*, waarbij *M* het midden van *AB* is.)



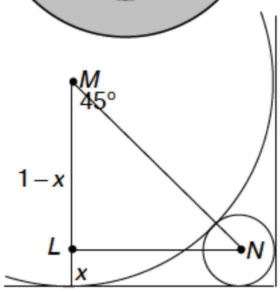
6 $AX^2 = x^2 + a^2 - 2xa\cos\alpha$
Als α groter wordt, wordt $\cos\alpha$ kleiner, dus $-2xa\cos\alpha$ groter, dus AX^2 groter, dus *AX* groter.

7 $\angle ABC = 110° - (180° - 163°) = 127°$.
Cosinusregel in driehoek *ABC*:
$AC^2 = 109^2 + 25^2 - 2 \cdot 109 \cdot 25 \cdot \cos 127° = 15785{,}89$
$AC = 125{,}64$
Sinusregel in driehoek *ABC*:
$\frac{\sin\angle A°}{25} = \frac{\sin 127°}{125{,}64}$ geeft $\angle A = 9{,}144$.
De koershoek is dus: $163° - 9{,}144° \approx 163{,}9°$

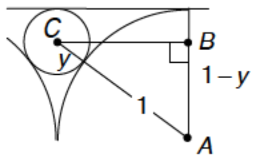
Paragraaf 7 Gemengde opgaven



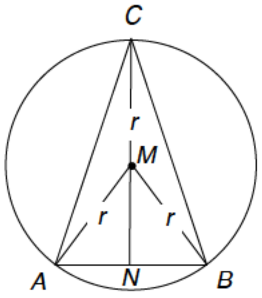
1 Noem de straal van de kleine cirkel *r* en straal van de grote cirkel *R*. Dan is de oppervlakte van het grijze gebied: $\pi(R^2 - r^2) = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$



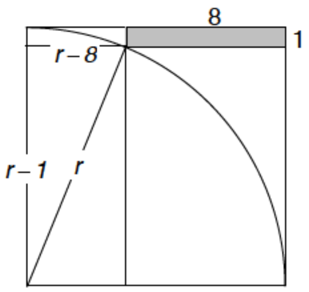
2 De vier grootste cirkels hebben straal 1.
De cirkel in het midden heeft straal $\sqrt{2} - 1$.
De straal van de vier cirkels in de hoeken noemen we *x*.
Om *x* te berekenen bekijken we de figuur links. Daar is een grote cirkel en een cirkel in de hoek getekend.
$\frac{1+x}{1-x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + x = \sqrt{2} - x\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(1 + \sqrt{2}\right)x = \sqrt{2} - 1$, dus
$x = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$.
Hetzelfde is: $3 - 2\sqrt{2}$, zie opgave **9** van Rekentechniek.



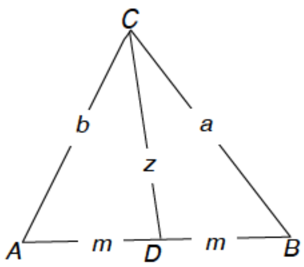
Om de straal van de vier cirkels te berekenen die de zijden van grote vierkant in het midden raken, bekijken we het plaatje hiernaast. C is het middelpunt van zo'n cirkel en A het middelpunt van een van de grote cirkels. De straal van de grote cirkel is 1 en die van de andere cirkel noemen we y. De stelling van Pythagoras in driehoek ABC geeft: $(y+1)^2 = 1^2 + (1-y)^2$, dus $y = \frac{1}{4}$.



3 Noem de het hoogste punt van de deur C en de twee hoekpunten onder A en B. Noem het middelpunt van de cirkel M en de straal r. N is het midden van AB. Dan is $AB = 2$ en $NC = 3$.. De stelling van Pythagoras in driehoek NMA geeft: $r^2 = (3-r)^2 + 1^2$, dus $r = 1\frac{2}{3}$.

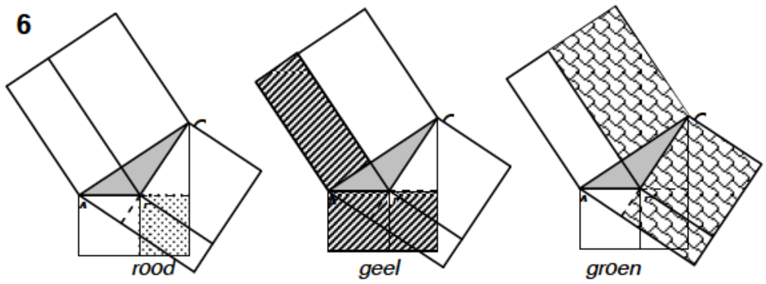


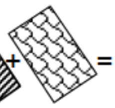
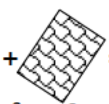
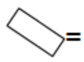
4 Noem de zijde van het vierkant r, dan (zie plaatje):
$r^2 = (r-1)^2 + (r-8)^2 \Leftrightarrow (r-5)(r-13) = 0$, dus $r = 13$.



5 Noem $\angle ADC = \delta$. Dan $\angle BDC = 180° - \delta$.
De cosinusregel in driehoek ACD:
$b^2 = z^2 + m^2 - 2zm \cos \delta$
De cosinusregel in driehoek BCD:
$a^2 = z^2 + m^2 - 2zm \cos (180° - \delta)$
Omdat $\cos (180° - \delta) = -\cos\delta$, levert optellen van deze uitdrukkingen: $a^2 + b^2 = 2z^2 + 2m^2$.

6



$b^2 =$  +  =  +  $= c^2 +$  $+ a^2 +$  =

$c^2 + a^2 + 2 \cdot -bc \cos \alpha = a^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

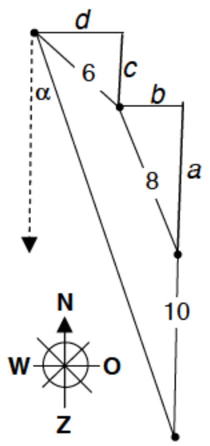
7 **a.** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

b. Als α stomp is, is $180°-\alpha$ scherp. In **a** hebben we bewezen dat $\sin^{2(}180°-\alpha) + \cos^2(180°-\alpha) = 1$.
$\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$ en $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$.
Het kwadraat van $\cos(180°-\alpha)$ =is gelijk aan het kwadraat van $-\cos\alpha$.

8 **a.** Links: $AD = AB - BD = c - a\cos(180°-\beta) =$
$c - a \cdot -\cos\beta = c + a\cos\beta$
Rechts: $AD = AB + BD = c + a\cos\beta$
b. Links: $h_c = a\sin(180°-\beta) = a\sin\beta$; rechts $h_c = a\sin\beta$
$b^2 = AD^2 + CD^2 = (c + a\cos\beta)^2 + (a\sin\beta)^2$
c. Uit **b** volgt: $b^2 = c^2 + a^2\cos^2\beta + 2ca\cos\beta + a^2\sin^2\beta$
Gebruik hierin dat $a^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta = a^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta)$
$= a^2 \cdot 1 = a^2$.

9 $AC \approx 32{,}47$

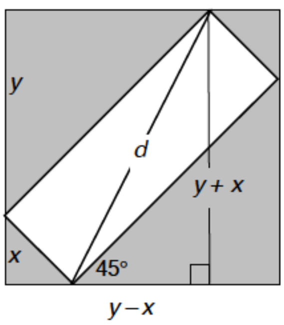
10 **a.** Twee zijden van $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{3}$ en één zijde van $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$
b. 109°



11 $a = 8\cos 22{,}5° \approx 7{,}391$, $b = 8\sin 22{,}5° \approx 3{,}061$
$c = 6\cos 45° \approx 4{,}205$, $d = 6\sin 45° \approx 4{,}205$

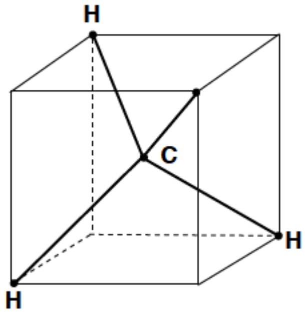
$\tan\alpha \approx \dfrac{4{,}205 + 3{,}061}{4{,}205 + 7{,}391 + 10} = 0{,}336$, $\alpha \approx 18{,}6°$

De afstand tot Adam is $\sqrt{7{,}266^2 + 21.596^2} \approx 22{,}8$ mijl



12 Zie plaatje:

$$d^2 = (y-x)^2 + (y+x)^2 = 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2) = 2 \cdot 8 = 16$$
.
De lengte van de diagonaal is dus 4.



13 a. Alle vier de driehoeken *HCH* zijn congruent (want ze hebben dezelfde zijden).

b. Een lichaamsdiagonaal is $2\sqrt{3}$. De zijden *CH* zijn de helft daarvan, dus $\sqrt{3}$.

De zijde HH is $2\sqrt{2}$

c. cosinusregel:

$(2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(\text{hoek})$

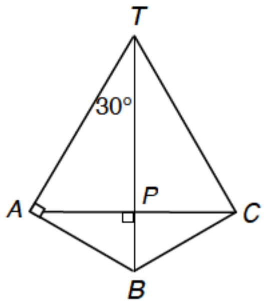
$8 = 6 - 6\cos(\text{hoek})$, dus $\cos(\text{hoek}) = -\frac{1}{3}$

De valentiehoek is ongeveer 109°.

14 71° (Veronderstel dat de zijden van het viervlak 2 zijn, dan $AM = BM = \sqrt{3}$, pas de cosinusregel toe in $\Delta\,ABM$.)

15 13,9 (Bereken bijvoorbeeld eerst de zijden, dan met de cosinus-regel een hoek en pas dan de oppervlakteregel toe.)

16 102°, hoek *AMG* in $\Delta\,AMG$. De zijden van $\Delta\,AMG$ zijn: $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ en $2\sqrt{3}$ (als de kubus ribben 2 heeft).



17 a. $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 2

b. De grensvlakken *ABT* en *BCT* hiernaast zijn plat gedrukt. De kortste weg is *A-P-C*. Omdat $AT = \sqrt{3}\,AB$, is driehoek *ABT* en dus ook driehoek *ABP* een 30-60-90°-driehoek, dus $BP = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2}$ en $TP = 1\frac{1}{2}$.

c. De cos-regel in driehoek *APC* geeft: 109°.

(De zijden van driehoek *APC* zijn $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.)

18 74°

($HG = 5$. Verder $FB = 1$, dus $FG = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = EH$ en $EG = \sqrt{33}$. Pas nu de cosinusregel toe in $\Delta\,EHG$.)