Bijlage 1
Rekenen met wortels

Deze bijlage hoort bij het hoofdstuk
1 Meetkunde en Algebra
juli 2011

Opgaven gemarkeerd met ⌘ kunnen worden overgeslagen.

Uitgave juli 2011

Colofon

© 2011 cTWO

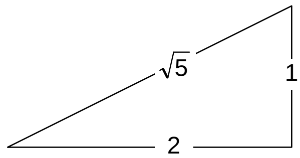
Auteurs Aad Goddijn, Leon van den Broek, Dolf van den Hombergh

Met medewerking van Josephine Buskes, Richard Berends, Sieb Kemme, Dick Klingens

Illustraties

Wortels vereenvoudigen 1

Dit is een herhaling van derdeklasstof.



1 De driehoek hiernaast is rechthoekig.
a. Ga dat na.

Bekijk de vier driehoeken met zijden
$\sqrt{\frac{1}{5}}$, $2\sqrt{\frac{1}{5}}$ en 1;
$\frac{1}{2}$, 1, $\sqrt{1\frac{1}{4}}$;
6, 12, en $\sqrt{180}$;
$\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ en 5.
Deze zijn rechthoekig.
b. Ga dat voor de eerste in de serie na.

Omdat de rechthoekszijden zich verhouden als $1:2$, is elke driehoek uit de serie gelijkvormig met de driehoek hiernaast.

Door de driehoek met zijden 1, 2 en $\sqrt{5}$ met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen, krijg je de driehoek met zijden $\frac{1}{2}$, 1, $\sqrt{1\frac{1}{4}}$ (Vergelijk de kortste rechthoekszijden.)
Dus $\sqrt{1\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

c. Hoe volgt met gelijkvormigheid dat $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$?

d. De driehoeken met zijden $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ en 5 en $\sqrt{\frac{1}{5}}$, $2\sqrt{\frac{1}{5}}$ en 1 zijn gelijkvormig.
Hoe volgt hieruit dat $\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$?

In opgave **1** hebben we met gelijkvormigheid gezien dat:
$\sqrt{1\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$, $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$.
We noemen dit *vereenvoudigen van wortels.*
Je kunt dat ook puur algebraïsch doen:

$$\sqrt{1\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

Op de middelbare school is het gebruik om wortels zo eenvoudig mogelijk te schrijven, dat betekent:

• schrijf een zo klein mogelijk geheel getal achter het wortelteken:

$\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$,

• schrijf geen wortel in de noemer:

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$,

• laat geen breuken onder het wortelteken staan:

$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

2 Schrijf de volgende wortels zo eenvoudig mogelijk.

a. $\sqrt{72}$ $\quad\sqrt{172}$ $\quad\sqrt{162}$ $\quad\sqrt{1000}$

b. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}}$

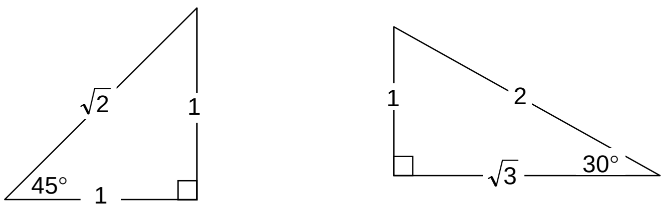
c. $\sqrt{\frac{1}{5}}$ $\quad\sqrt{\frac{3}{5}}$ $\quad\sqrt{3\frac{3}{7}}$ $\quad\sqrt{1\frac{11}{25}}$

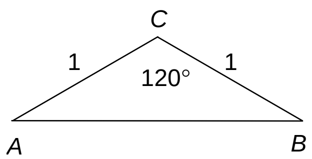
De 30-60-90- en de 45-45-90-graden driehoek

In de tweede klas heb je het volgende al gezien.

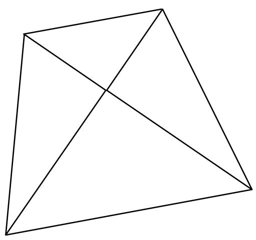
• In een 30-60-90-graden driehoek (halve regelmatige driehoek) verhouden de zijden zich als $1 : \sqrt{3} : 2$.

• In een 45-45-90-graden driehoek (half vierkant) verhouden de zijden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$





3 Van een gelijkbenige driehoek is de tophoek 120° en de gelijke benen zijn 1.
Bereken exact de basis.



4 Het trapezium hiernaast is opgebouwd uit twee 30-60-90- en twee 45-45-90-graden driehoeken. De kortste zijde is 6.
Bereken de lengte van de andere zijden en de diagonalen exact. Schrijf de wortels in je antwoord zo eenvoudig mogelijk.

Voorbeeld

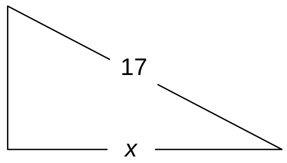
De vergelijking $3+\sqrt{3x+1}=\sqrt{10x-1}$ los je op door kwadrateren:

$3+\sqrt{3x+1}=\sqrt{10x-1} \Rightarrow 9+6\sqrt{3x+1}+3x+1=10x-1 \Leftrightarrow$

$6\sqrt{3x+1}=7x-11 \Rightarrow 108x+36=49x^2-154x+121 \Leftrightarrow$

$49x^2-262x+85=0 \Leftrightarrow x=5$ of $x=\frac{17}{49}$.

Alleen $x=5$ voldoet aan de oorspronkelijke vergelijking.



5 De rechthoekige driehoek hiernaast heeft schuine zijde 17 en omtrek 40. Een van de rechthoekszijden noemen we x.

a. Laat zien dat $x+\sqrt{289-x^2}=23$.

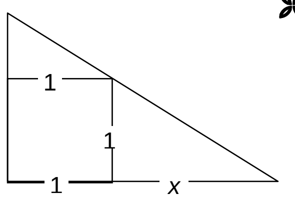
b. Los de vergelijking in **a** exact op.

6 Los op:

a. $x=\sqrt{x+2}$

b. $-x=\sqrt{x+2}$

c. $x=\sqrt{x}+2$



7 Hiernaast is een vierkant in een rechthoekige driehoek getekend. Verder zie plaatje.

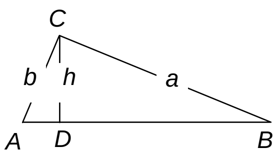
a. Druk alle lijnstukken in het plaatje uit in x.

Blijkbaar geldt:

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{(x+1)^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}$$

b. Leg dit uit met het plaatje.

c. Bewijs de gelijkheid puur algebraïsch.



Wortels vereenvoudigen 2

8 In driehoek ABC is CD een hoogtelijn. Verder is gegeven:

$CD=1$, $AD=\sqrt{2}-1$, $BD=\sqrt{2}+1$.

a. Bereken a^2 en b^2 en toon aan dat driehoek ABC rechthoekig is.

Omdat $h^2=AD\cdot BD$ geldt dat $AD=\sqrt{2}-1$ en $BD=\sqrt{2}+1$ elkaars omgekeerde zijn, dus:

$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

b. Controleer dat algebraïsch.

Voorbeeld

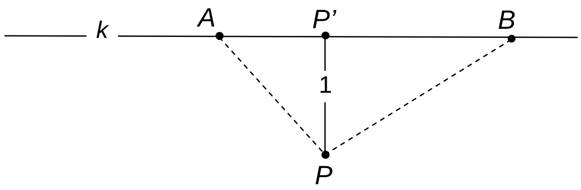
Ook (bijvoorbeeld) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$, kun je zonder wortel in de noemer schrijven.

$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}+2}{3-1} = \sqrt{3}+1$.

9 Schrijf de volgende vormen zonder wortel in de noemer.

$\frac{2}{\sqrt{3}+2}$ $\qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2}$ $\qquad \frac{3}{2\sqrt{5}+\sqrt{17}}$

10



De loodrechte projectie van P op k is P' en $PP'=1$. A en B liggen op k en $AB=8$. B ligt $4\sqrt{2}$ verder van P dan A. Stel een vergelijking op om de afstand van A tot P te berekenen en los die vergelijking op.

Antwoorden

1 **a.** $1^2+2^2=\sqrt{5}^2$

b. $\sqrt{\frac{1}{5}}^2+\left(2\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2=1^2$

c. De driehoek met zijden 6, 12, en $\sqrt{180}$ ontstaat uit die met zijden 1, 2 en $\sqrt{5}$ door met 6 te vermenigvuldigen.

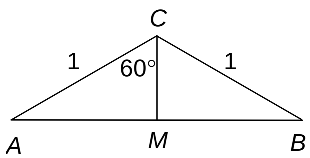
d. Als je de driehoek met zijden $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ en 5 met $\frac{1}{5}$ vermenigvuldigt, krijg je de driehoek met zijden $\sqrt{\frac{1}{5}}$, $2\sqrt{\frac{1}{5}}$ en 1. (Let op de derde zijde.)

Dus $\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{5}$. (Let op de eerste zijde.)

2 **a.** $6\sqrt{2}$ $2\sqrt{43}$ $9\sqrt{2}$ $10\sqrt{10}$

b. $\frac{1}{5}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ $\sqrt{2}$ 10

c. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ $\frac{1}{5}\sqrt{15}$ $\frac{2}{7}\sqrt{42}$ $1\frac{1}{5}$



3 Het midden van AB noemen we M, dan is ACM een 30-60-90-graden-driehoek. Dus $CM=\frac{1}{2}$ en $AM=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $AB=\sqrt{3}$.

4 Twee zijden zijn: $6\sqrt{2}$, een zijde is $6\sqrt{3}$ en de diagonalen zijn: $3\sqrt{2}+3\sqrt{6}$.

5 **a.** De andere rechthoekszijde is $\sqrt{289-x^2}$ De twee rechthoekszijden samen zijn $40-17=23$.

b. 8, 15

6 **a.** Kwadrateren geeft: $x^2=x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=2$ of $x=-1$.

Aan de oorspronkelijke vergelijking voldoet alleen $x=2$.

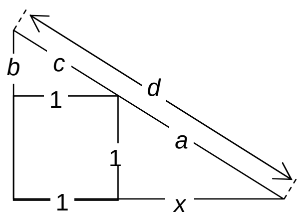
b. Kwadrateren geeft: $x^2=x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=2$ of $x=-1$.

Aan de oorspronkelijke vergelijking voldoet alleen $x=$-1.

c. $x=\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x-2=\sqrt{x}$

Kwadrateren geeft: $x^2-4x+4=x \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=1$ of $x=4$.

Aan de oorspronkelijke vergelijking voldoet alleen $x=4$.



7 **a.** $a=\sqrt{x^2+1}$; $\frac{b}{1}=\frac{1}{x}$, dus $b=\frac{1}{x}$ (gelijkvormigheid van de twee kleinere driehoeken). Verder $c=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

De rechthoekszijden van de grote driehoek zijn: $x+1$ en $1+\frac{1}{x}$, dus $d=\sqrt{(x+1)^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}$.

Anderzijds $d=a+c=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2+1}$.

b. $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{(x+1)^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}$. Kwadrateren geeft: $1+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{x^2+1}+x^2+1=(x+1)^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$

We bekijken eerst de linkerkant. Het deel

$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\cdot\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^2}}=\frac{x^2+1}{x}$,

dus de linkerkant is:

$1+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{x^2+1}+x^2+1=x^2+\frac{1}{x^2}+2+2\cdot\frac{x^2+1}{x}$

$=x^2+\frac{1}{x^2}+2+2x+\frac{2}{x}$.

en de rechterkant is:

$(x+1)^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2x+1+1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$.

Klopt!

8 **a.** $a^2=\left(\sqrt{2}+1\right)^2+1^2=4+2\sqrt{2}$,

$b^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+1^2=4-2\sqrt{2}$ en $c^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$, dus $a^2+b^2=c^2$

b. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$? Kruislings vermenigvuldigen geeft:

$\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=1$ en dat klopt.

9 Schrijf de volgende vormen zonder wortel in de noemer.

$\frac{2}{\sqrt{3}+2}\cdot\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2}=\frac{2\sqrt{3}-4}{3-4}=4-2\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{5-4}=\sqrt{15}-2\sqrt{3}$

$\frac{3}{2\sqrt{5}+\sqrt{17}}\cdot\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{17}}{2\sqrt{5}-\sqrt{17}}=\frac{3\left(2\sqrt{5}-\sqrt{17}\right)}{20-17}=2\sqrt{5}-\sqrt{17}$

10 Noem die afstand *x*, dan $AP=\sqrt{x^2+1}$ en

$BP = \sqrt{(8-x)^2+1}$, dus:

$\sqrt{(8-x)^2+1} - \sqrt{x^2+1} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(8-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} + 4\sqrt{2}$

Kwadrateren geeft:

$65 + x^2 = x^2 + 1 + 32 + 8\sqrt{2x^2+2} \Leftrightarrow 32 - 16x = 8\sqrt{2x^2+2} \Leftrightarrow$

$4 - 2x = \sqrt{2x^2+2}$

Nogmaals kwadrateren geeft: $16 - 16x + 4x^2 = 2x^2 + 2 \Leftrightarrow$
$x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = 7$.