Bijlage 2
Gelijkvormigheid

Deze bijlage hoort bij het hoofdstuk
2 De kracht van vectoren
juli 2011

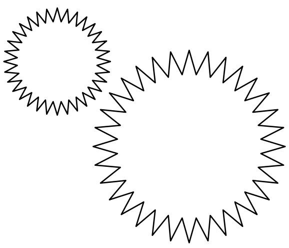
Opgaven gemarkeerd met ⌘ kunnen worden overgeslagen.

Uitgave juli 2011

Colofon

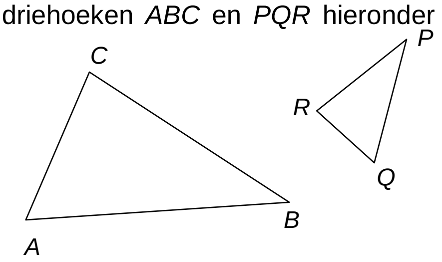
© 2011	cTWO
Auteurs	Aad Goddijn, Leon van den Broek, Dolf van den Hombergh
Met medewerking van	Josephine Buskes, Richard Berends, Sieb Kemme, Dick Klingens
Illustraties	

1 Gelijkvormigheid



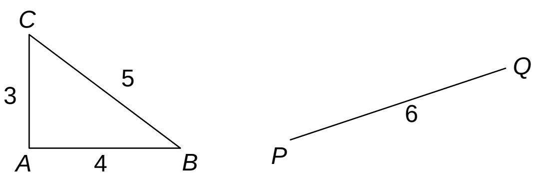
Twee figuren zijn gelijkvormig als de ene figuur een vergroting is van de andere, eventueel na spiegeling. (Een verkleining is een vergroting met factor tussen 0 en 1.)

De twee driehoeken *ABC* en *PQR* hieronder zijn gelijkvormig.

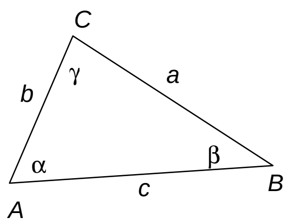


We noteren dat zó: $\Delta ABC \sim \Delta QPR$. We spreken af dat we de volgorde van de hoekpunten in deze notatie zó nemen dat corresponderende hoekpunten op corresponderende plaatsen staan.
Hier: *A* correspondeert met *Q*,
B correspondeert met *P*,
C correspondeert met *R*.

1



Gegeven driehoek *ABC* met zijden 3, 4 en 5, verder een lijnstuk *PQ* met lengte 6 cm.
a. Teken een driehoek *PQR* zó, dat $\Delta PQR \sim \Delta ABC$.
Bereken de lengte van de zijden *PR* en *QR*.
b. Teken een driehoek *PQR* zó, dat $\Delta PQR \sim \Delta ACB$.
Bereken de lengte van de zijden *PR* en *QR*.
c. Teken een driehoek *PQR* zó, dat $\Delta PQR \sim \Delta BCA$.
Bereken de lengte van de zijden *PR* en *QR*.



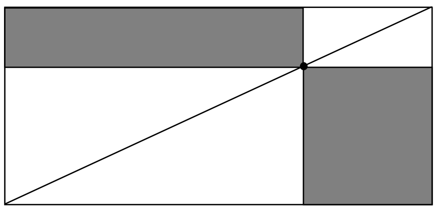
Notatie
In driehoek *ABC* noteren we:
de zijde tegenover hoek *A* met *a*,
de zijde tegenover hoek *B* met *b*,
de zijde tegenover hoek *C* met *c*,
de hoek met hoekpunt *A* met α,
de hoek met hoekpunt *B* met β en
de hoek met hoekpunt *C* met γ.

Als $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, dan is de vergrotingsfactor $\frac{p}{a}$. Maar ook $\frac{q}{b}$ en $\frac{r}{c}$, dus $\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c}$.

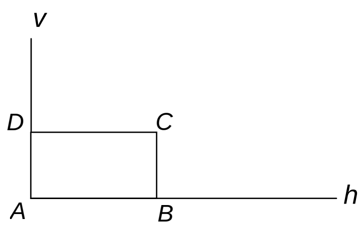
2 In de onderbouw heb je gezien dat twee driehoeken gelijkvormig zijn als de hoeken van de ene driehoek even groot zijn als de corresponderende hoeken van de andere driehoek.
Dit geldt niet voor vierhoeken.
Laat dat met een voorbeeld zien.

In het volgende laten we zien dat je verhoudingen anders kunt schrijven. We gaan – net als in hoofdstuk 1 – op twee manieren te werk: én algebraïsch én meetkundig.

3 Een rechthoek wordt door een diagonaal verdeeld in twee stukken met gelijke oppervlakte.
Gebruik dit om aan te tonen dat de twee grijze rechthoeken gelijke oppervlakte hebben.



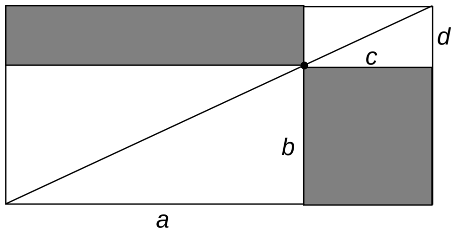
4 In het plaatje hieronder is een horizontale halve lijn h en een verticale halve lijn v getekend met gemeenschappelijk beginpunt A. $ABCD$ is een rechthoek met een zijde op h en een zijde op v.



Neem het plaatje over.
a. Teken drie rechthoeken met een zijde op h en een zijde op v die gelijkvormig zijn met $ABCD$ en net als $ABCD$ de verticale zijde korter hebben dan de horizontale zijde.
b. Wat merk je op over de hoekpunten rechtsboven van de rechthoeken?

5 Bekijk nog eens het plaatje van opgave **3**. De zijden van de ene witte rechthoek zijn *a* en *b*, die van de andere witte rechthoek *c* en *d.*

a. Druk de oppervlakte van de grijze rechthoeken in *a*, *b*, *c* en *d* uit.



b. Er geldt ook: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Waarom?

Blijkbaar komt de gelijkheid $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ op hetzelfde neer als $ad = bc$.

Door beide leden van de gelijkheid $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ met hetzelfde getal te vermenigvuldigen kun je dat ook inzien.

c. Met welk getal (uitgedrukt in *a*, *b*, *c* en *d*)?

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ komt ook op hetzelfde neer als $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

d. Hoe kun je dat laten zien? Algebraïsch en meetkundig?

6 Veronderstel dat wel of niet-roken niet afhangt van het feit of iemand man of vrouw is.

In een enquête werd gevraagd of de persoon man of vrouw was en of hij/zij rookte. De resultaten staan in de volgende tabel:

	man	vrouw
roker	120	90
niet roker	200	

Hierin lees je onder andere af dat er 120 van de ondervraagden mannen zijn die roken.

a. Welk getal verwacht je op lege plaats?

b. Geef twee manieren om dat getal te berekenen.

In opgave **6** kun je zeggen: de getallen in de kolommen hebben gelijke verhouding. Je kunt ook zeggen: de getallen in de rijen hebben gelijke verhouding,

	man	vrouw
roker	*a*	*b*
niet roker	*c*	*d*

De getallen in de kolommen hebben dezelfde verhouding betekent: $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$.

De getallen in de rijen hebben dezelfde verhouding betekent: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow ad = bc$$

Hierbij zijn a, b, c en d getallen $\neq 0$.

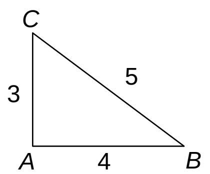
$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ vervangen door $ad = bc$ noemt men wel: **kruislings vermenigvuldigen**.

7 In driehoek ABC geldt: $\angle A = 45°$, $AB = 2$ en $AC = 3$.
Van driehoek KLM is gegeven: $\angle K = 45°$. Verder geldt: $KL : AB = KM : AC$.

a. Teken driehoek ABC. Neem de cm als eenheid.

b. Gegeven is: $KL = 3$.
Bereken KM en teken driehoek KLM.
Geldt: $\Delta ABC \sim \Delta KLM$?

c. Gegeven is: $KL = 5$
Bereken KM en teken driehoek KLM.
Geldt: $\Delta ABC \sim \Delta KLM$?



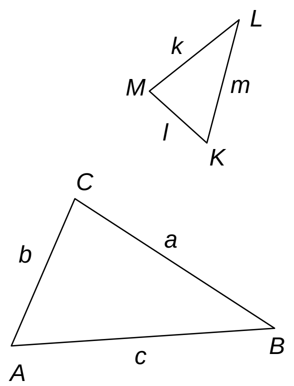
8 Driehoek ABC hiernaast heeft een rechte hoek in A. Voor de zijden: zie figuur.
Driehoek KLM heeft een rechte hoek in K en $KM = 6$.
Verder geldt: $KM : AC = KL : AB$.

a. Bereken de zijden KL en LM.

b. Zijn de driehoeken KLM en ABC gelijkvormig?

Twee driehoeken zijn gelijkvormig
- als ze twee hoeken even groot hebben;
- als ze één hoek even groot hebben en de zijden die die hoek vormen in de ene driehoek dezelfde verhouding hebben als die zijden in de andere driehoek.

Al eerder hebben we opgemerkt: als $\Delta ABC \sim \Delta KLM$, dan $\frac{k}{a} = \frac{l}{b} = \frac{m}{c}$. Dit komt op hetzelfde neer als:
$a : b : c = k : l : m$



Gelijkvormigheid

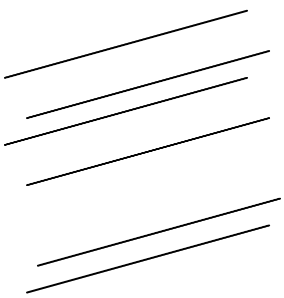
$\Delta ABC \sim \Delta KLM \Leftrightarrow \angle A = \angle K$ en $\angle B = \angle L$

$\Delta ABC \sim \Delta KLM \Leftrightarrow \angle A = \angle K$ en $b : c = l : m$

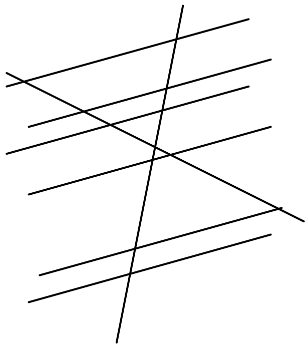
$\Delta ABC \sim \Delta KLM \Leftrightarrow \dfrac{k}{a} = \dfrac{l}{b} = \dfrac{m}{c} \Leftrightarrow a : b : c = k : l : m$

Hoe maak je gelijkvormige driehoeken?

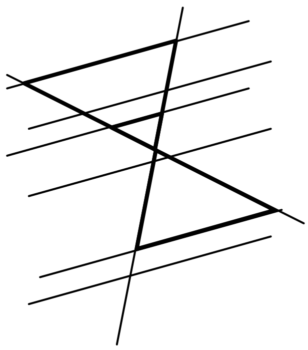
Teken een stel evenwijdige lijnen:



Teken daarover heen twee snijdende lijnen:

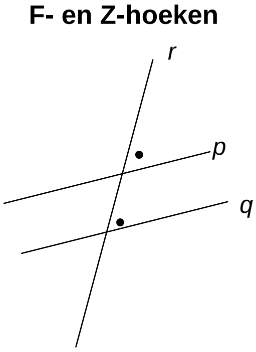


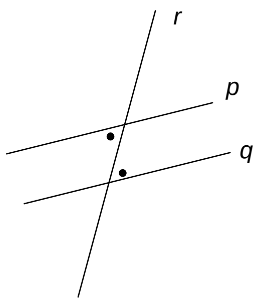
Je krijgt een patroon van gelijkvormige driehoeken



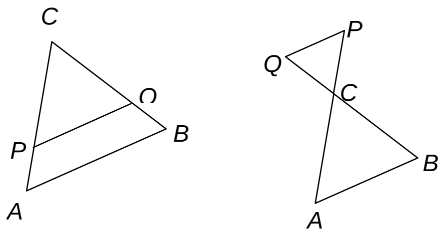
Dat je gelijkvormige driehoeken krijgt, zie je als volgt.
(We herhalen dit uit de onderbouw.)

F- en Z-hoeken



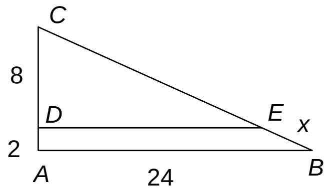


De lijnen *p* en *q* zijn evenwijdig. Dan zijn de hoeken met het puntje erin gelijk.

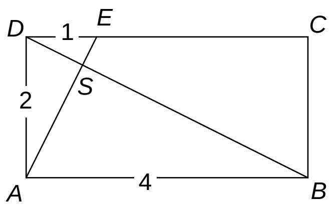


Speciale gevallen van gelijkvormigheid
Zie het plaatje hierboven.
Omdat de lijnen *PQ* en *AB* evenwijdig zijn, geldt:
$\Delta ABC \sim \Delta PQC$

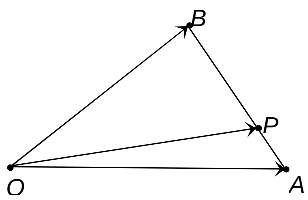
De figuur rechts noemen we wel *zandloper*.



9 Zie plaatje. *ABC* is een rechthoekige driehoek. Hoek *CDE* is recht.
Bereken *EB*.

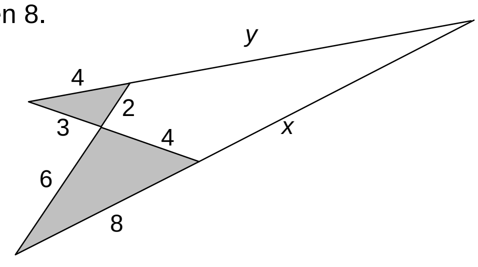


10 Zie plaatje. *ABCD* is een rechthoek van 2 bij 4. Op *CD* ligt *E* zó, dat $DE = 1$. Het snijpunt van *AE* en *DB* is *S*.
a. Bereken *AS* exact.
b. Ga met een berekening na of hoek *DSA* recht is.

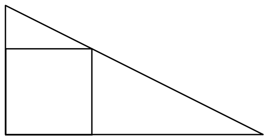


11 In het plaatje hiernaast is gegeven: $AP : BP = 3 : 7$.
Er zijn getallen *a* en *b* zó, dat $\vec{p} = a \cdot \vec{a} + b \cdot \vec{b}$
Bereken de getallen *a* en *b*.

12 Gegeven twee gelijkvormige driehoeken met zijden 2, 3 en 4 en 4, 6 en 8.

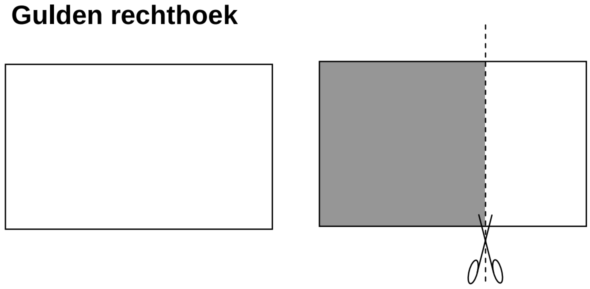


Bereken *x* en *y*.
Tip. Er zijn nog twee andere driehoeken gelijkvormig. Schrijf vervolgens een stelsel van twee vergelijkingen in *x* en *y* op, en los dat op.



13 In een rechthoekige driehoek is een vierkant getekend, zie plaatje hiernaast. De rechthoekszijden zijn 4 en 8. Bereken de zijde van het vierkant exact.

Gulden rechthoek

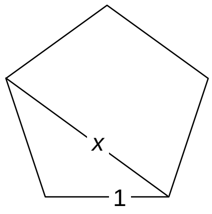


Een gulden rechthoek heeft de volgende eigenschap. Als je er een vierkant vanaf knipt, zie plaatje, houd je een rechthoek over die gelijkvormig is met de oorspronkelijke rechthoek.

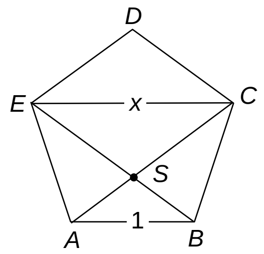
14 Verhouding van lengte en breedte in een gulden rechthoek
De korte zijde van de linker rechthoek nemen we 1 en de lange zijde *x*.
a. Druk de zijden van de rechthoek die je overhoudt in *x* uit.
b. Toon aan: de rechthoek links is een gulden rechthoek $\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.
c. Los de vergelijking exact op. Hoe groot is de zijde *x*?

De lange zijde van de rechthoek is dus $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, dit noemen we het **gulden snede getal**.

De gulden rechthoek vind je terug in kunst, natuur en architectuur. Men beweert dat deze vorm van alle rechthoeken de mooiste is. Le Corbusier maakte bijvoorbeeld gebruik van de gulden snede bij het ontwerpen van gebouwen.

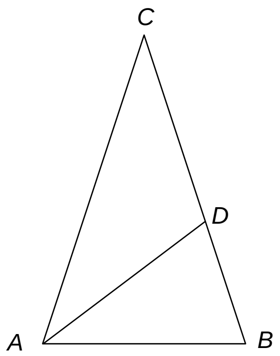


15 De verhouding tussen de zijde en de diagonaal in een regelmatige vijfhoek
Hiernaast is een regelmatige vijfhoek getekend met een diagonaal. De zijde heeft lengte 1 en de diagonaal lengte *x*.
We tekenen er nog twee diagonalen bij. Het snijpunt van de diagonalen *EB* en *AC* is *S*.

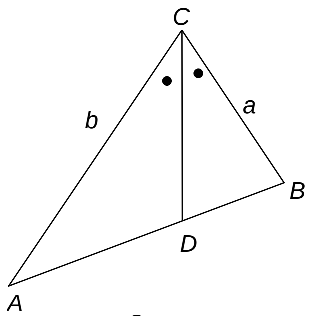


a. Druk de zijden van de driehoeken *ESC* en *ASB* in x uit.
Tip. *ESCD* is een ruit.
b. Gebruik gelijkvormigheid om een vergelijking voor x op te schrijven.
c. Bereken x.

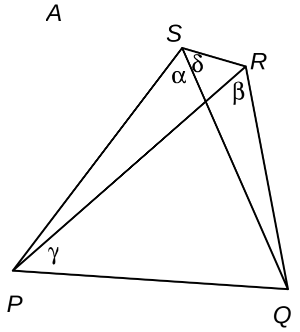
De verhouding tussen de diagonaal en de zijde van een regelmatige vijfhoek is het gulden snede getal.



16 Voor driehoek *ABC* geldt: $AC = BC$. Verder ligt er op zijde *BC* een punt *D* zó, dat $AB = AD = CD$.
a. Bereken de hoeken van driehoek *ABC*.
Tip. Noem $\angle DAC = \alpha$ en druk alle hoeken in de figuur uit in α.
b. Bereken de verhouding $AC : AB$.
Tip. Gebruik gelijkvormigheid.



17 In driehoek *ABC* snijdt de bissectrice van hoek *C* de zijde *AB* in *D*. Dan geldt: $AD : DB = b : a$.
Bewijs dit.
Tip. Verleng *CD*. Teken door *A* een lijn evenwijdig aan lijn *BC*.



18 Hiernaast staat een vierhoek met zijn diagonalen.
a. Laat zien: als $\alpha = \beta$, dan $\gamma = \delta$.

b. Als $\alpha = \beta$, wat merk je dan op over ∠SRQ ∠QPS?

19 Vermenigvuldigen, delen en omgekeerde nemen

Gegeven drie lijnstukken van lengte 1, a en b.
a. Hoe maak je een lijnstuk van lengte ab?
Tip. Gebruik een zandloper.
b. Hoe maak je een lijnstuk van lengte $\frac{a}{b}$?

2 Antwoorden

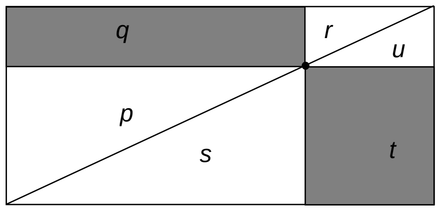
1 **a.** $PR = \frac{6}{4} \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$, $QR = \frac{6}{4} \cdot 5 = 7\frac{1}{2}$

b. $PR = \frac{6}{3} \cdot 4 = 8$, $QR = \frac{6}{3} \cdot 5 = 10$

c. $PR = \frac{6}{5} \cdot 3 = 3{,}6$, $QR = \frac{6}{5} \cdot 4 = 4{,}8$

2 Dat zou bijvoorbeeld betekenen dat alle rechthoeken gelijkvormig zijn.

3



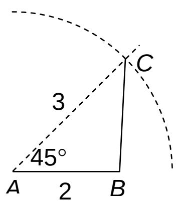
Noem die oppervlaktes p, q, r, s, t en u.
Dan: $p+q+r=s+t+u$, $p=s$ en $r=u$, dus $q=t$.

4 **b.** Die liggen op lijn AC.

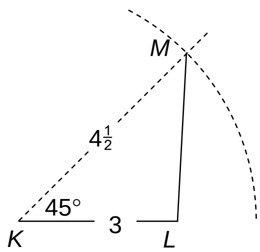
5 **a.** Linksboven: ad en rechtsonder bc.
b. Dat is de helling van de rechthoek linksonder respectievelijk rechtsboven.
c. ac
d. Algebraïsch: als je beide leden van de eerste gelijkheid met ac vermenigvuldigt en de beide leden van de tweede vergelijking met ab dan krijg je in beide gevallen $ad=bc$.
Meetkundig volgt het uit de gelijkvormigheid van de twee witte rechthoeken.

6 **a.** 150
b. $\frac{200}{120} \cdot 90$ en $\frac{90}{120} \cdot 200$

7 **a.**



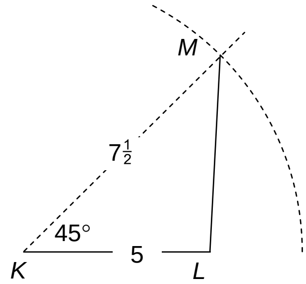
b. $3:2 = KM:3$, dus $KM = 4\frac{1}{2}$



Ja

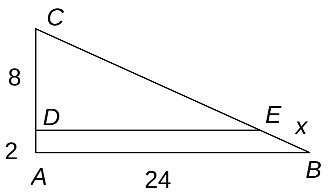
c. $KM = 7\frac{1}{2}$

Ja



8 a. $KL : AC = LM : AB$, dus $6 : 3 = LM : 4$, dus $LM = 8$ en $KM = 2\sqrt{7}$

b. Nee



9 $BC = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$ en $CE = \frac{CD}{CA} \cdot CB = 20\frac{4}{5}$

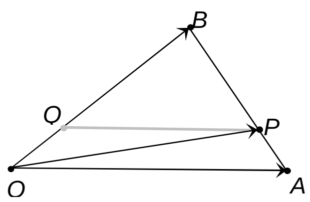
Dus $EB = 5\frac{1}{5}$.

10 a. $AE = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Driehoek DSE is gelijkvormig met BSA. Dus $AS : ES = AB : DE = 4 : 1$, dus $AS = \frac{4}{5}\sqrt{5}$.

b. $DB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ en $DS = \frac{1}{5} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

$AD^2 = 4$ en $DS^2 + AS^2 = \frac{4}{5} + \frac{16}{5} = 4$, dus ja.

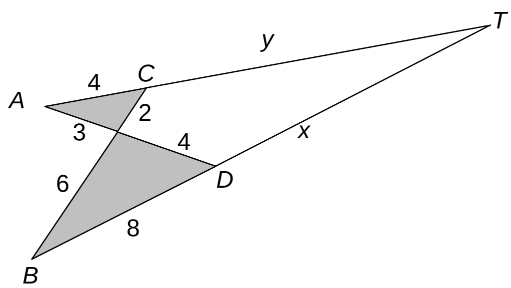
Of (bijvoorbeeld): de driehoeken ADE en ASD hebben hoek A hetzelfde en $AS : AD = AD : AE$, dus $\Delta ADE \sim \Delta ASD$, dus $\angle ASD = \angle ADE = 90°$.



11 Trek de lijn door P evenwijdig OA. Dan is driehoek BQP gelijkvormig met driehoek BOA. Dus $BQ = \frac{7}{10}OB$ en dus $OQ = \frac{3}{10}OB$. Trek ook de lijn door P evenwijdig OB en noem het snijpunt met OA: R. Dan is $OR = \frac{7}{10}OA$.

Dus $a = \frac{7}{10}$ en $b = \frac{3}{10}$.

12 Zie plaatje.



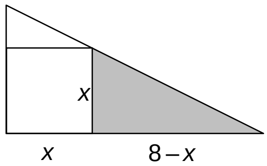
De grijze driehoeken zijn gelijkvormig, dus $\angle A = \angle B$.

Maar dan $\Delta ADT \sim \Delta BCT$ (twee hoeken gelijk).

Dus: $\frac{AT}{BT}=\frac{AD}{BC} \Leftrightarrow \frac{y+4}{x+8}=\frac{7}{8}$ en $\frac{DT}{CT}=\frac{AD}{BC} \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{7}{8}$,

dus: $8y+32=7x+56$ en $x=\frac{7}{8}y$.

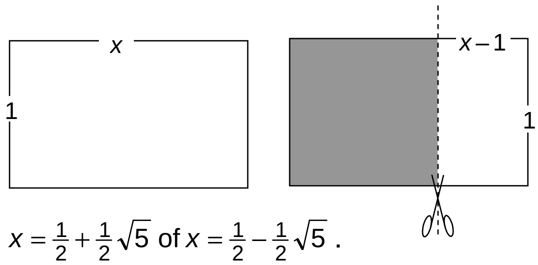
Dus: $8y+32=7\cdot\frac{7}{8}y+56$, dus $y=12{,}8$ en $x=11{,}2$.



13 De grijze driehoek is gelijkvormig met de hele driehoek, dus: $\frac{x}{8-x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=8-x \Leftrightarrow x=2\frac{2}{3}$

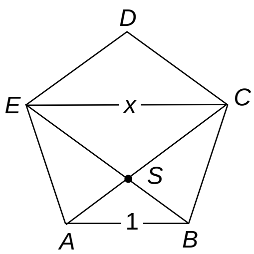
14 a. 1 en $x-1$

b. De witte rechthoek links is gelijkvormig met de witte rechthoek rechts, dus: $\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x^2-x=1$



c. $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Omdat $x > 0$, is $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$.



15 a. $DC \mathbin{//} EB$ en $ED \mathbin{//} AC$ vanwege symmetrie, dus $ESCD$ is een parallellogram, zelfs een ruit. Dus $ES=CS=1$ en $AS=BS=x-1$.

b. $\frac{EC}{AB}=\frac{ES}{BS} \Leftrightarrow x=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x^2-x-1=0$

c. Zie de vorige opgave: $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$

16 a. $\angle CAD=\alpha$, dan $\angle ACD=\alpha$ en $\angle ADB=2\alpha$ (buitenhoek van driehoek CDA.

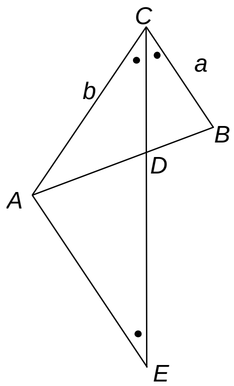
Dus $\angle DBA=2\alpha$, dan ook $\angle CAB=2\alpha$.

Hoekensom in driehoek ABC geeft: $5\alpha=180°$, dus $\alpha=36°$. De hoeken zijn dus 72, 72 en 36 graden.

b. Stel $AB=1$, en $AC=x$, dan $AD=CD=AB=1$, dus $BD=x-1$. De gelijkvormigheid van de driehoeken ADB en CAB geeft: $\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{DB}$, dus we krijgen weer: $x=\frac{1}{x-1}$, zie vorige opgave dus de verhouding is:

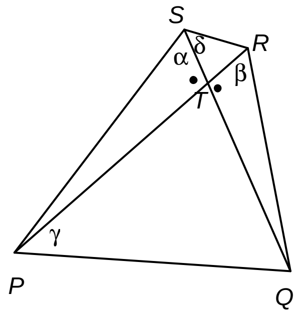
$x:1=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right):1$.

Je zou ook kunnen vinden (dat is hetzelfde): $1:\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)$, zie bijlage 1.



17 Noem E het snijpunt van de lijnen CD en de lijn door A evenwijdig met BC. Dan zijn de hoeken ECB en AEC even groot (Z-hoeken), dus $AE = b$. De gelijkvormigheid van de driehoeken DCB en DEA geeft: $\frac{BC}{AE} = \frac{BD}{AD}$

Dus $\frac{a}{b} = \frac{BD}{AD}$.

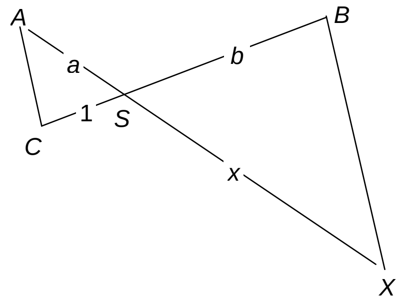


18 a. Zie plaatje: $\Delta STP \sim \Delta RTP$ (twee gelijke hoeken), dus $PT : TQ = ST : TR$. Omdat ook de hoeken STR en PTQ even groot zijn, zijn dan ook de driehoeken STR en PTQ

b. $\angle SRQ + \angle SPQ = \beta + \angle SRP + \angle SPR + \gamma =$

$\alpha + \angle SRP + \angle SPR + \delta = \angle PSR + \angle SRP + \angle SPR = 180°$.

19 a. Teken een willekeurige driehoek ACS met $CS = 1$ en $AS = a$. Teken B op het verlengde van CS bij S zó, dat $BS = b$. De lijn door B evenwijdig aan AC snijdt lijn AS in X. Dan heeft SX lengte ab; ga dat na.



b. Teken nu B op het verlengde van AS bij S, zó dat $BS = b$. De lijn door B evenwijdig aan AC snijdt lijn CS in X. Dan heeft SX lengte $\frac{a}{b}$; ga dat na.