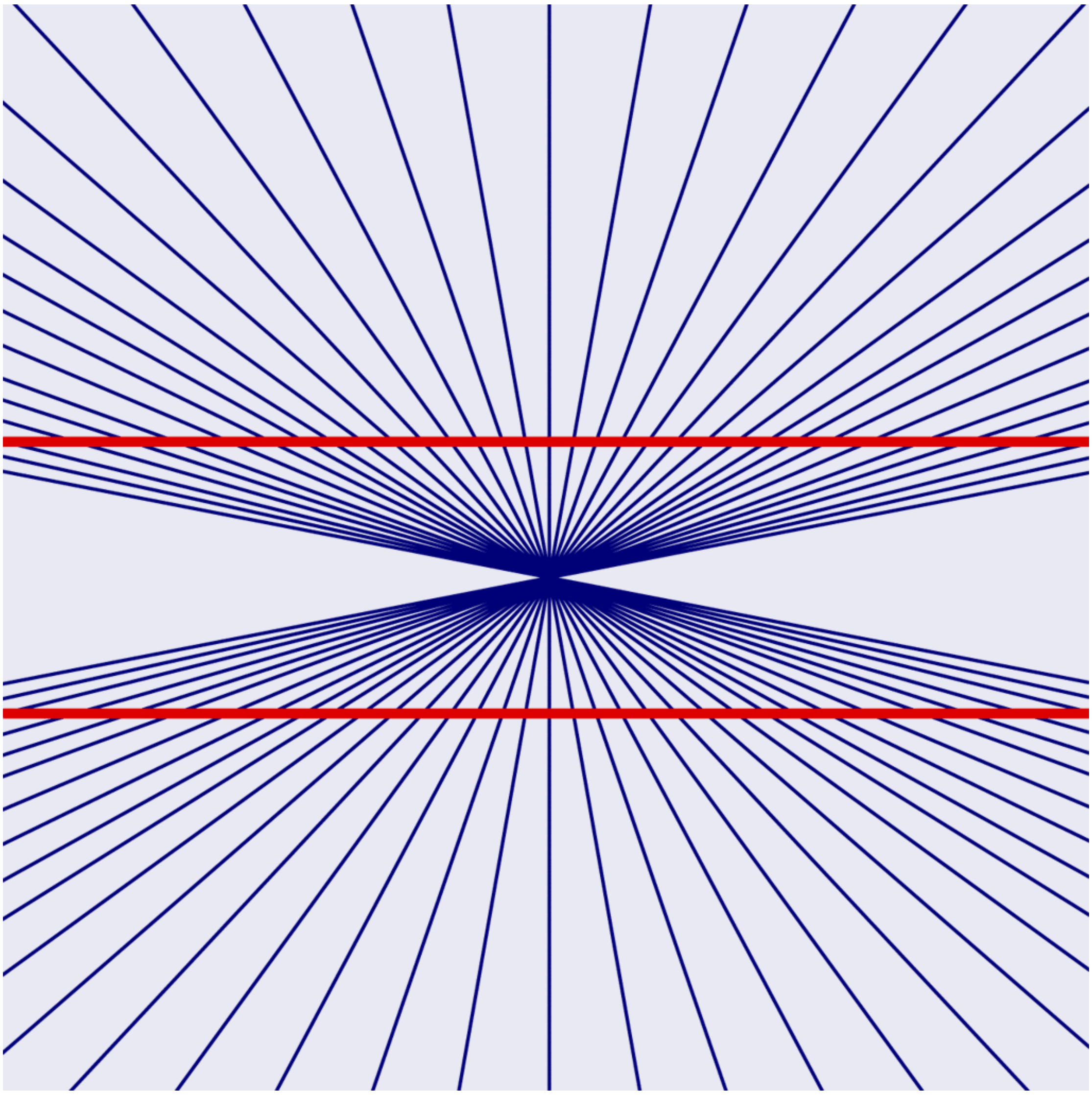
3 Rekenen aan lijnen



Dit is een bewerking van
Meetkunde met coördinaten
Blok *Lijnen, richtingen en waaiers*
van Aad Goddijn
ten behoeve van het nieuwe programma (2015) wiskunde B vwo.

⌘ Opgaven met dit merkteken kun je zonder de opbouw aan te tasten, overslaan.

* Bij opgaven met dit merkteken hoort een werkblad.

Inhoudsopgave

uitgave december 2011

Colofon

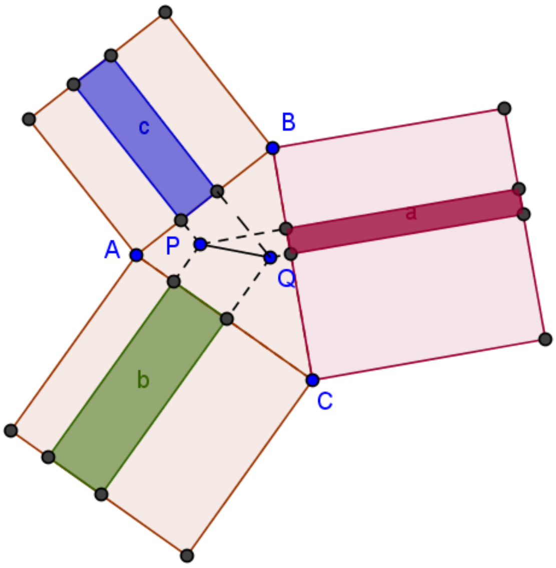
Auteurs: Leon van den Broek, Dolf van den Hombergh,

Met medewerking van: Josephine Buskes, Richard Berends, Theo van den Bogaart, Gert Dankers, Aad Goddijn, Dick Klingens

Illustraties

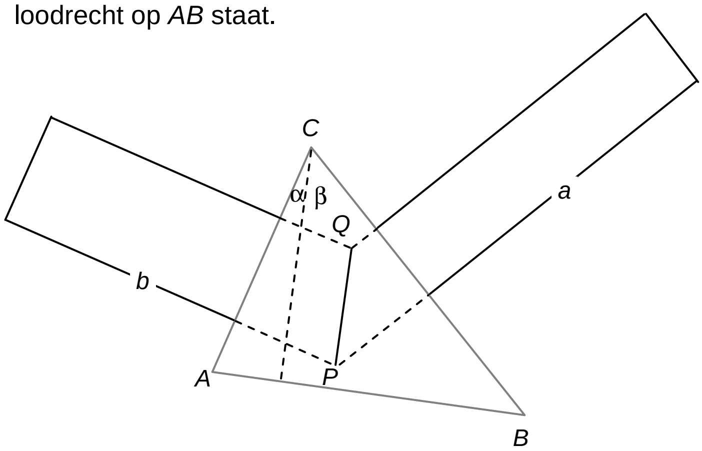
1 Projecties

Een vermoeden



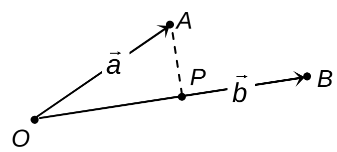
Hierboven staat een scherphoekige driehoek *ABC* met daarin de punten *P* en *Q*. Op de zijden van de driehoek worden vierkanten gezet. Trek door *P* en *Q* lijnen loodrecht op de zijden van de driehoek. Die snijden drie rechthoeken uit de vierkanten; die zijn donker gekleurd.
De oppervlakten van de drie rechthoeken noemen we *a*, *b* en *c*. In de GeoGebra applet *oppn* kun je de som van twee oppervlakten vergelijken met de derde door in het invoerveld in te voeren: Relatie[$a+b$,c] , Relatie[$a+c$,b] of Relatie[$b+c$,a].
(Je kunt de driehoek veranderen en de punten *P* en *Q* verplaatsen.)
Welk vermoeden krijg je?
Een algemeen bewijs van het vermoeden is niet eenvoudig. In de volgende opgave bekijken we een eenvoudig geval. Hoe het algemene bewijs met het inproduct gaat, zullen we verderop zien.

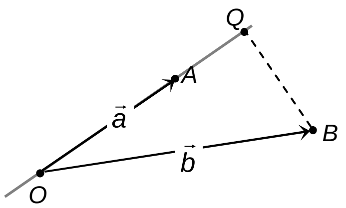
1 We bekijken het vermoeden voor een speciale ligging van *PQ*.
De punten *P* en *Q* in driehoek *ABC* liggen zó, dat *PQ* loodrecht op *AB* staat.



a. Wat moet je nu laten zien?

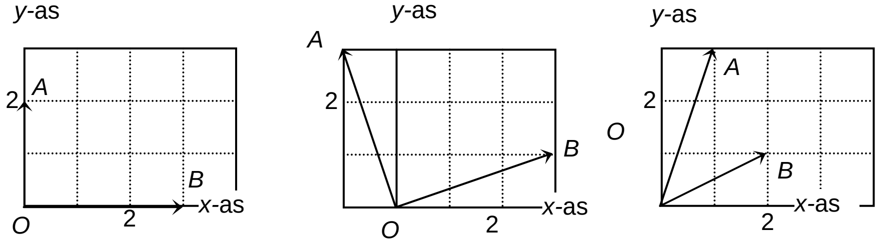
De hoogtelijn uit *C* verdeelt hoek *C* in α en β.
Je kunt de twee oppervlaktes uitdrukken in *a*, *b*, *PQ*, α en β.
b. Ga na dat dit tot het gewenste resultaat leidt.





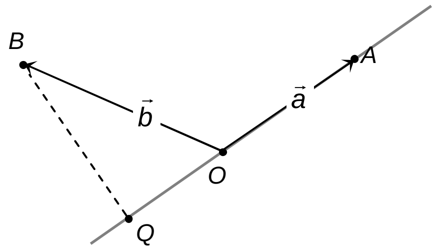
Bij twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ maken we een getal als volgt: projecteer de vector $\vec{a}$ (loodrecht) op de lijn *OB* ; de projectie noemen we $\vec{p}$. Vervolgens vermenigvuldig je de lengte van $\vec{p}$ met de lengte van $\vec{b}$, dus je berekent $|\vec{p}|\cdot|\vec{b}|$.
Je kunt de vector $\vec{b}$ ook op de lijn *OA* projecteren en vervolgens $|\vec{q}|\cdot|\vec{a}|$ uitrekenen.
Je krijgt dan hetzelfde.

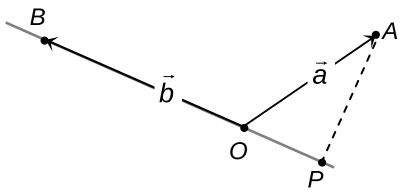
2 **a.** Toon dat aan.
Tip. Gebruik gelijkvormigheid.
b. Bereken $|\vec{p}|\cdot|\vec{b}|$ of $|\vec{q}|\cdot|\vec{a}|$ in de drie gevallen hieronder.

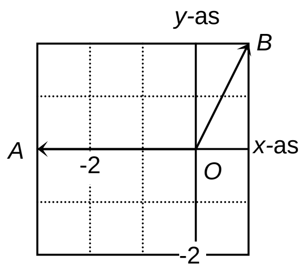


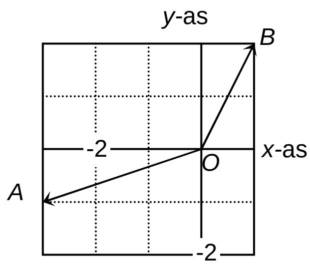
Opmerking

In bovenstaande gevallen was de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ scherp. Als de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ groter is dan 90°, spreken we af $-|\vec{q}|\cdot|\vec{a}|$ te nemen of $-|\vec{p}|\cdot|\vec{b}|$.







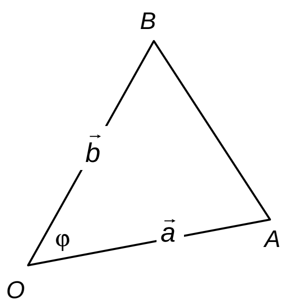


c. Bereken het getal bij de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in de gevallen hierboven.

Het inproduct $\vec{a}\cdot\vec{b}$ van de vectoren $\vec{a}$ met kentallen a_1 en a_2 en $\vec{b}$ met kentallen b_1 en b_2 hebben we in hoofdstuk 2 leren kennen als $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2$

d. Bereken in de vijf gevallen hierboven het inproduct van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Je krijgt in **b** en **c** dezelfde uitkomsten als in **d**! In de volgende opgave zullen we zien dat dit algemeen zo is.



3 Gegeven de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Het zijn de plaatsvectoren van de punten $A(a_1,a_2)$ en $B(b_1,b_2)$.

a. Druk $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ en $|\vec{b}-\vec{a}|$ uit in a_1, a_2, b_1 en b_2.

b. Ga na dat uit de cosinusregel in driehoek OAB volgt:

$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$.

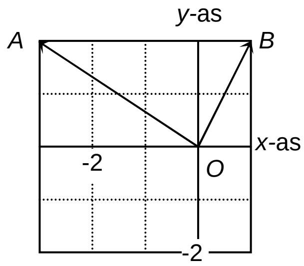
Als je **a** en **b** combineert, krijg je $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$.

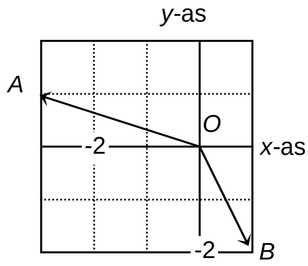
c. Laat dat zien.

> **Inproductregel**
> $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$, waarbij φ de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is.

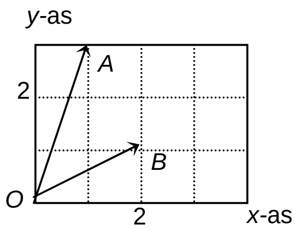
Hoeken berekenen met het inproduct

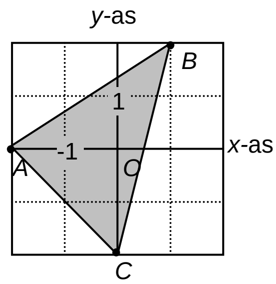
4 **a.** Bereken op de manier van hoofdstuk 2 het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in onderstaande gevallen.





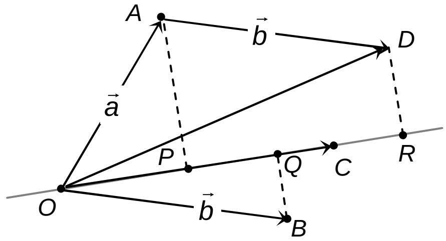
b. Bereken ook de lengtes van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en gebruik vervolgens de inproductregel om $\cos \varphi$ uit te rekenen.
Hoe groot is de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ (in graden nauwkeurig?
c. Bereken zo ook $\angle AOB$ in het geval hier linksonder. Je krijgt nu een mooi resultaat. Die hoek kun je ook wel eenvoudiger vinden. Hoe?
d. Bereken $\angle ABC$ hier rechtsonder mbv het inproduct.





Het vermoeden bewijzen en toepassen

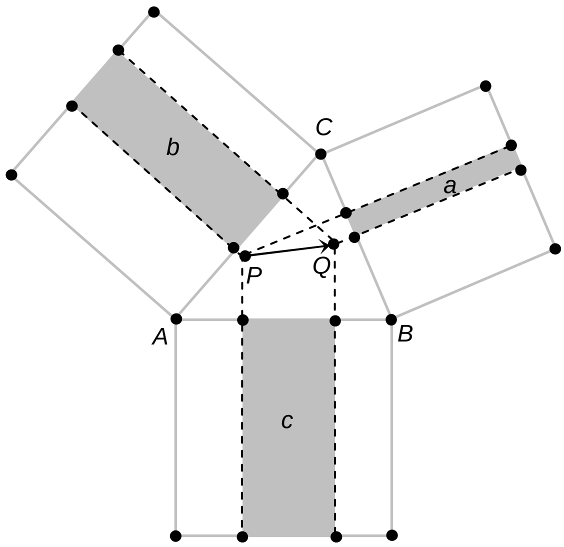
5 In het plaatje hieronder is $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$.
P, *Q* en *R* zijn de projecties van *A*, *B* en *D* op lijn *OC*.
a. Leg met het plaatje uit dat:
$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.



b. Maak ook zo'n plaatje waarmee je laat zien dat $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ als de hoek tussen $\vec{b}$ en $\vec{c}$ groter dan 90° is.

Opmerking
Je kunt $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$ en $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ in kentallen uitschrijven; op die manier kun je ook laten zien dat $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

6 Hieronder staat een plaatje bij het probleem waarmee we de paragraaf begonnen zijn.



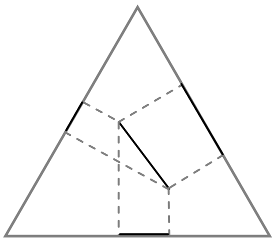
Voor het gemak korten we af:
$\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ en $\overrightarrow{PQ} = \vec{p}$.

a. Leg uit dat $\vec{p}\cdot\vec{a} = \text{-}a$ en ga na wat het verband tussen $\vec{p}\cdot\vec{b}$ en b en het verband tussen $\vec{p}\cdot\vec{c}$ en c is.

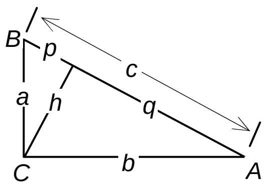
b. Waarom geldt: $\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$?

c. Hoe volgt uit **a** en **b** dat $\text{-}a + \text{-}b + c = 0$?

Hiermee is het vermoeden bewezen.

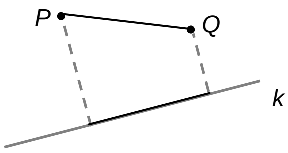


7 Binnen een gelijkzijdige driehoek ligt een lijnstuk. We projecteren dat lijnstuk op de zijden van de driehoek.
De lengtes van twee van de projecties zijn 4 en 7.
Wat is de lengte van de derde projectie?
Er zijn twee antwoorden mogelijk. Geef ze allebei.
WISKUNDE-ESTAFETTE RU 2006, opgave 15



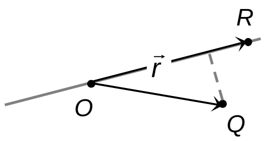
8 Hiernaast staat een bekend plaatje: ABC is rechthoekig, h is de hoogtelijn uit C.
a. Wat levert het (inmiddels bewezen) vermoeden op als je $PQ = BC$ neemt?
b. En wat als je $PQ = AB$ neemt?

De lengte van een projectie berekenen

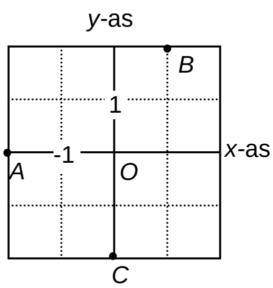


Lijnstuk PQ wordt (loodrecht) op lijn k geprojecteerd.

De lengte van de projectie is: $\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{r}\,|}{|\,\vec{r}\,|}$, waarbij $\vec{r}$ een richtingsvector van k is.



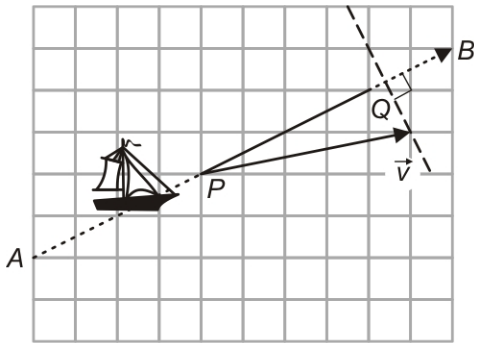
Bewijs
We kiezen de oorsprong in P en laten $\vec{r}$ in O beginnen. De lengte van de projectie van PQ op k is dan hetzelfde als de projectie OQ op lijn OR. Bovenstaande volgt dan direct uit de 'nieuwe' definitie van het inproduct.



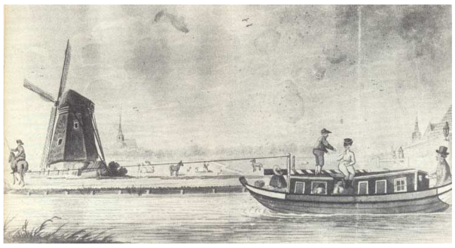
9 **a.** Bereken de lengte van de projectie van lijnstuk OB op lijn AC.
b. Bereken de lengte van de projectie van lijnstuk AB op lijn AC.

10 Een schuit beweegt in de richting $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ van A naar B.

Ze wordt voortgetrokken door een paard.
De trekkracht van het paard wordt gegeven door de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$: zie het plaatje hieronder. Voor de voortbeweging van de schuit is alleen de grootte van de projectie van $\vec{v}$ op de richting waarin het schip beweegt van belang.

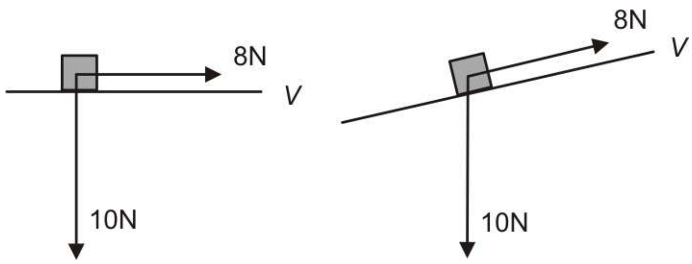


Bereken de grootte van die projectie.



Trekschuit Den Haag - Delft
Aquarel zonder naam
Atlas van Stolk, 19e eeuw.

11 Een voorwerp met een gewicht van 10 N kan wrijvingsloos bewegen over een vlak *V.* Er wordt met een kracht van 8 N aan getrokken. Als *V* scheef gehouden wordt, krijgt de trekkracht ‘tegenwerking’ van de zwaartekracht. Als de hellingshoek van *V* groot genoeg is, zal het voorwerp omlaag glijden.



We brengen het gebruikelijke assenstelsel aan: de positieve *x*-as naar rechts en de positieve *y*-as naar boven.

a. Neem aan dat *V* richtingsvector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ heeft.

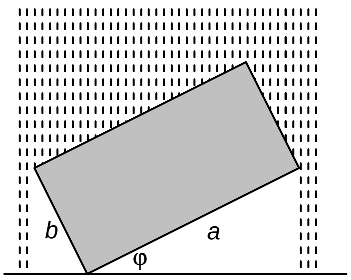
Bereken de grootte van de projectie van de kracht van 10 N in de richting van vlak *V*. Glijdt het voorwerp naar beneden?

Tip. De kracht van 10 N wordt gegeven door $\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}$.

b. Neem nu aan dat *V* richtingsvector $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ heeft.

Maak een berekening zoals in **a** om te bepalen of het voorwerp naar beneden glijdt.
We gaan de *kritische waarde* van de helling bepalen, dat is de helling van *V* waarbij het voorwerp op het punt staat naar beneden te glijden. De bijbehorende richtingsvector van *V* noemen we $\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$.

c. Stel een vergelijking voor *a* op en bereken hieruit *a*.



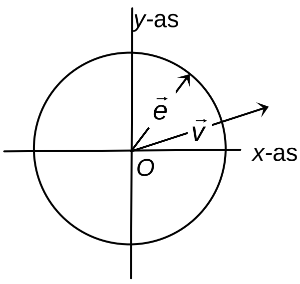
12 Een kunstwerk in de vorm van een blok, staat in de stromende regen. Gelukkig waait het niet, de regen valt verticaal. In het plaatje hiernaast kijken we in de richting van de ribben die evenwijdig met de grond zijn. De lengten van de ribben die niet evenwijdig met de grond zijn noemen we *a* en *b*, met $a > b$.
De hoek die de ribben van lengte *a* met de grond maken noemen we φ.

a. Heb je enig idee hoe groot φ moet zijn opdat er zoveel mogelijk droog blijft onder het blok en ook opdat er zo weinig mogelijk droog blijft?

We gaan vectoren gebruiken om vraag **a** te beantwoorden.

We schrijven: $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ en $\vec{e} = \begin{pmatrix}\cos\phi\\\sin\phi\end{pmatrix}$.

b. Ga na dat de lengte van het stuk in de tekening dat droog blijft gelijk is aan $\vec{v}\cdot\vec{e}$.

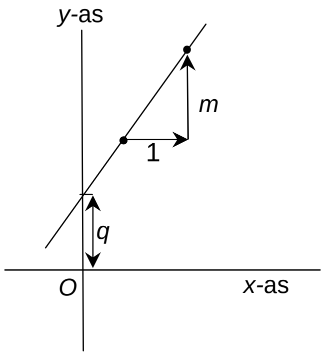


Hiernaast zijn $\vec{e}$ en $\vec{v}$ getekend, beide beginnend in *O*. Het eindpunt van $\vec{v}$ is (net als $\vec{v}$ zelf) vast en het eindpunt van $\vec{e}$ loopt over een deel van de eenheidscirkel.

c. Welk deel?

d. Voor welke φ is $\vec{v}\cdot\vec{e}$ maximaal en voor welke φ minimaal? Licht je antwoord toe.
Komt dit overeen met wat je in **a** dacht?

2 Vergelijkingen van lijnen



Oude koeien

In de onderbouw heb je met vergelijkingen van lijnen gewerkt. Die hadden de vorm: $y = mx + q$.

Het getal m geeft de steilheid van de lijn aan. Als je vanuit een punt op de lijn 1 eenheid naar rechts gaat, moet je m eenheden omhoog gaan om weer op de lijn te komen. (Als $m < 0$, moet je omlaag gaan.)

In plaats van steilheid spreekt men ook wel van helling of richtingscoëfficiënt.

> De lijn met vergelijking $y = mx + q$ snijdt de y-as op hoogte q en heeft helling m.

1 Geef van de volgende lijnen een vergelijking.
De lijn door (2,3) met helling $-\frac{1}{2}$,
de lijn door (2,3) en (-4,2),
de horizontale lijn door (2,3),
de verticale lijn door (2,3).

2 Een lijn heeft helling m.
a. Geef een richtingsvector van die lijn.
b. Geef een pv van de lijn met vergelijking $y = mx + q$.
c. Door m te variëren krijg je alle mogelijke richtingen voor de lijn op één richting na. Welke?

> Elke lijn niet evenwijdig met y-as (of de y-as zelf), heeft een vergelijking van de vorm $y = mx + q$.

3 Bekijk de vergelijking $2x + 3y + 12 = 0$.
a. Herschrijf de vergelijking in de vorm $y = mx + q$ en bepaal m en q.

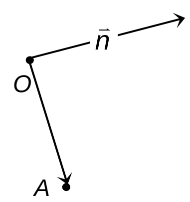
Aan de schrijfwijze in de vorm $y = mx + q$ zie je dat de grafiek bij de vergelijking $2x + 3y + 12 = 0$ een rechte lijn is.
Bekijk de vergelijking $ax + by + c = 0$ voor alle mogelijke getallen a, b en c.
b. Als je voor $c = 0$ neemt, krijg je een lijn door de oorsprong en anders niet. Waarom?

c. In welke gevallen krijg je een horizontale lijn?
En in welke gevallen een verticale lijn?

De vergelijking hierboven krijg je door $a=2$, $b=3$ en $c=12$ te nemen.
d. Wat kun je over de getallen a, b en c zeggen als je de vergelijking $ax+by+c=0$ niet in de vorm $y=mx+q$ kunt schrijven?

Soms is de vorm $ax+by+c=0$ te verkiezen boven de vorm $y=mx+q$, want in $ax+by+c=0$ komen x en y gelijkwaardig voor; in de vorm $y=mx+q$ niet.
In de vorm $y=mx+q$ is y geschreven als functie van x: x heeft de rol van input-variabele en y die van output-variabele.

De rol van *a* en *b* in *ax*+ *by*+ *c*= 0



4 Gegeven een vector $\vec{n} \neq \vec{0}$. We bekijken alle mogelijke punten X met $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = 0$.
Er zijn een heleboel punten X waarvoor $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = 0$. Hiernaast is zo'n punt A getekend.
a. Neem de tekening hiernaast over en geef daarin nog enkele mogelijke punten X aan met $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = 0$.
Wat krijg je als je alle punten X tekent met $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = 0$?
b. Veronderstel $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $X=(x,y)$.
Schrijf $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = 0$ uit.

Conclusie: de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op de lijn met vergelijking $2x+5y=0$.

c. Waarom snijden de lijnen $2x+5y=0$ en $2x+5y=8$ elkaar niet?
d. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ staat loodrecht op de lijn $ax+by+c=0$.
Waarom?

Een vector die loodrecht op de lijn k staat, noemen we **normaalvector** van k.
Een lijn die loodrecht op k staat noemen we een **normaal** van k.

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is normaalvector van de lijn met vergelijking $ax + by + c = 0$.

Voorbeeld
Gegeven de punten $A(2,3)$ en $B(-1,4)$.
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ is dan een richtingsvector van lijn AB, dus is $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ een normaalvector.

Een vergelijking van lijn AB is dus $x + 3y + c = 0$ voor een of ander getal c. Door A of B in de vergelijking in te vullen vind je c. Je krijgt: $x + 3y - 11 = 0$.

5 **a.** Geef zoals in bovenstaand voorbeeld een vergelijking van de lijn door (1,-2) en (3,4).
Ook van de lijn door (-10,7) en (15,2).

Gegeven zijn de punten $A(2,-1)$ en $B(-3,5)$.
b. Geef een vergelijking van de lijn door A loodrecht op lijn AB.
Tip. $\overrightarrow{AB}$ is normaalvector van de lijn.
c. Geef een vergelijking van de middelloodlijn van AB.
d. Geef een vergelijking van de lijn door (1,-2) evenwijdig aan de lijn met vergelijking $2x + 3y = 20$.

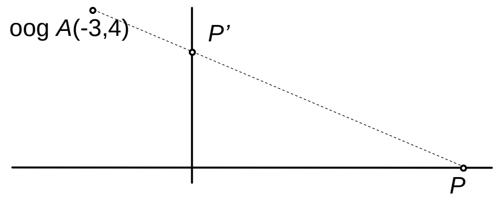
6 Zoals bekend, liggen alle punten (x,y) die aan een vergelijking van de vorm $ax+by+c=0$ (met $a \neq 0$ of $b \neq 0$) voldoen op een rechte lijn.
a. Welke bijzonderheid heeft de lijn als $a = 0$ en $b \neq 0$? En als $b = 0$ en $a \neq 0$?
b. Waarom is geëist dat $a \neq 0$ of $b \neq 0$?
c. Welke bijzonderheid heeft de lijn als $c = 0$ (en $a \neq 0$ of $b \neq 0$)?

7 Gegeven de lijnen k met vergelijking $2x - 3y - 10 = 0$ en m met vergelijking $-4x + ay - 12 = 0$, voor een zeker getal a.
a. Voor welke waarde van a zijn k en m evenwijdig?

n is de lijn met vergelijking $-4x + ay - b = 0$ voor zekere getallen a en b.
b. Voor welke a en b zijn de lijnen k en n hetzelfde?

Het snijpunt van twee lijnen

8 Iemand kijkt vanuit punt A(-3,4) naar de x-as. Een punt P van de x-as ziet hij op een plek P' op de y-as. De koppeling van de punten P op de x-as naar punten P' op de y-as komt tot stand door een zogenaamde *centrale projectie.*



De lijnen door A vormen een **lijnenbundel** of **waaier**.
a. Stel een vergelijking op van de straal die door het punt P(7,0) gaat.
b. Bepaal het bijbehorende punt P' door deze straal te snijden met de y-as.
c. Bepaal het bijbehorende punt P' ook met behulp van gelijkvormigheid.

De lijnenbundel met centrum A zorgt voor een koppeling van bijna alle punten van de x-as met bijna alle punten van de y-as.
d. Welke punten van de x- en y-as zijn de uitzonderingen?

De lijnenbundel met centrum A kan ook worden beschreven als $p(x+3)+q(y-4)=0$.
e. Leg dat uit.
f. Geef een voorbeeld van waarden die je voor p en q kunt nemen, opdat de straal door P(7,0) gaat.
g. Bepaal hiermee het bijbehorende punt P'.

9 Het oog zit nu op een andere plaats: B.
Een lijn die een punt aan de x-as aan een punt van de y-as koppelt heeft vergelijking: $2x-3y-10=0$ en een andere $3x-8y-8=0$.

De lijnenbundel met centrum B kan beschreven worden door: $p\,(2x-3y-10)+q\,(3x-8y-8)=0$.
a. Leg dat uit.
b. Kies $p=3$ en $q=$ -2, dan vind je: $7y-14=0$, dus je krijgt de lijn $y=2$. Ga dat na.

In **b** zijn p en q zó gekozen dat je een horizontale lijn krijgt.

c. Hoe moet je p en q kiezen om een verticale lijn te krijgen?
Welke lijn vind je dan?

B ligt dus op de horizontale lijn $y = 2$ en op de verticale lijn $x = 8$, dus B is (8,2).

In opgave **9** heb je het snijpunt berekend van de lijnen $2x - 3y - 10 = 0$ en $3x - 8y - 8 = 0$.
Je neemt in de uitdrukking
$p(2x - 3y - 10) + q(3x - 8y - 8) = 0$ de getallen p en q zó, dat x er niet meer in voorkomt. Je vindt $y = 2$.
Vervolgens kies je p en q zó, dat y er niet meer in voorkomt; je vindt: $x = 8$.
Het snijpunt is dus (8,2).
Als je gevonden hebt dat de y-coördinaat van het snijpunt 2 is, kun je de x-coördinaat ook berekenen door $y = 2$ in een van de vergelijkingen $2x - 3y - 10 = 0$ of $3x - 8y - 8 = 0$ in te vullen.

10 Het oog zit nu op een plaats: C. De punten (4,0) en (10,0) op de x-as worden gezien in respectievelijk (0,3) en (0,5) op de y-as.
a. Bepaal de coördinaten van C.
b. Beschrijf de lijnenbundel met centrum C.
c. Welk punt van de x-as wordt vanuit C gezien op (0,7) op de y-as?

11 Ga na of de volgende lijnen elkaar snijden. Bereken het snijpunt in geval ze elkaar snijden.
a. k: $3x + 4y - 22 = 0$ en m: $4x - 5y + 12 = 0$
b. k: $-3x + 4y = 22$ en m: $4x + 5y = 12$
c. k: $x + 4y - 12 = 0$ en m: $4x + 5y = 15$
d. k: $-3x + 4y = 12$ en m: $1\frac{1}{2}x - 2y = -6$
e. k: $-3x + 4y = 12$ en m: $-1\frac{1}{2}x + 2y = -6$

Van pv naar vergelijking en omgekeerd

In paragraaf 4 van hoofdstuk 2 hebben we parametervoorstellingen van lijnen bekeken, in deze paragraaf vergelijkingen.
Je kunt soepel overstappen van het een op het ander.

Voorbeeld: van vergelijking naar pv

Gegeven de lijn met vergelijking $-3x+4y=12$. Je kunt twee punten van de lijn berekenen, bijvoorbeeld (0,3) en (-4,0). Dan is $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ een richtingsvector van de lijn. Een pv de lijn door die twee punten is dus (x,y) = (0,3) + t(4,3). Zie bijvoorbeeld hoofdstuk 2, paragraaf 4, opgave 8.

Het kan ook zó: een punt van de lijn is bijvoorbeeld (0,3). Verder is $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ normaalvector van de lijn, dus $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ een richtingsvector. Een pv is dus: $(x,y)=(0,3)+t(4,3)$.

Voorbeeld: van pv naar vergelijking

Gegeven de lijn met pv $(x,y)=(-1,3)+t(-4,1)$. De vector $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ is een normaalvector, dus $x+4y=c$ is een vergelijking voor een of ander getal c.

Het getal c vind je door een punt van de lijn in te vullen, bijvoorbeeld (-1,3); dit geeft $c=11$.

Een vergelijking is dus $x+4y=11$.

Voorbeeld: eliminatie van de parameter

Een andere manier om van een pv op een vergelijking over te stappen is het zogenaamde elimineren van de parameter.

Gegeven de lijn met pv $(x,y)=(-1,3)+t(-4,1)$.

Dan $x=-1-4t$ en $y=3+t$.

Uit de laatste vergelijking volgt $t=y-3$. Dat vul je voor t in $x=-1-4t$ in; dan krijg je: $x=-1-4(y-3)$. Dit kun je herschrijven als: $x+4y=11$.

12 **a.** Van vier lijnen is een vergelijking gegeven. Geef van die lijnen een pv.

$3x+4y-22=0$

$4x-5y=-12$

$3x+4y=0$

$x=3$

b. Van vier lijnen is een pv gegeven. Geef van die lijnen een vergelijking.

$(x,y)=(-3,3)+t(4,1)$

$(x,y)=(0,2)+t(4,-1)$

$(x,y)=(4+3t\,,\,2-t)$

$(x,y)=(4\,,\,2-t)$

c. Elimineer de parameter t in: $(x,y)=(-1,2)+t(-2,3)$.

d. Elimineer de parameter t in: $(x,y)=(4+t\,,\,t^2+1)$

Welke figuur hoort bij deze pv?

Nog eens: het snijpunt van twee lijnen

Eerder in deze paragraaf heb je het snijpunt van twee lijnen berekend als beide in een vergelijking gegeven zijn. In de volgende opgave moet je het snijpunt berekenen als minstens één in pv gegeven is. Je kunt natuurlijk bij beide lijnen eerst een vergelijking maken, maar dat is niet altijd de handigste manier.

13 Gegeven de lijnen k met pv $(x,y) = (2,-1) + t(-2,3)$ en m met pv $(x,y) = (-2,2) + t(1,-2)$.
a. Je vindt het snijpunt van de lijnen waarschijnlijk niet door de vergelijking $(2,-1) + t(-2,3) = (-2,2) + t(1,-2)$ op te lossen. Waarom niet?

Bij het snijpunt hoort bij k een andere waarde van de parameter dan bij m.
Je moet dus getallen s en t vinden met:
$(2,-1) + s(-2,3) = (-2,2) + t(1,-2)$.
Dit leidt tot een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden.
b. Los dit op en bepaal de coördinaten van het snijpunt van k en m.

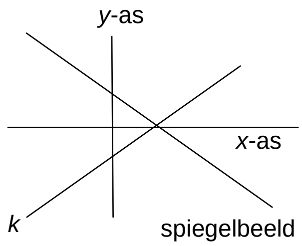
Het kan ook anders. Een vergelijking van k is $3x + 2y = 4$.
Het punt $(-2 + t\,, 2 - 2t)$ van m ligt op k als:
$3(-2 + t) + 2(2 - 2t) = 4$.
c. Bereken hiermee de coördinaten van het snijpunt van k en m.

14 Bereken de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van k en m in de volgende gevallen.
a. k: $2x - 5y = 10$ en m: $(x,y) = (4,-2) + t(3,-2)$.
b. k: $(x,y) = (-3,-4) + t(1,-2)$ en m: $(x,y) = (4,-2) + t(3,-2)$.
c. k: $(x,y) = (-3,-4) + t(1,-2)$ en m: $(x,y) = (4,-2) + t(-1,2)$.
d. k: $(x,y) = (-3,-4) + t(1,-2)$ en m: $(x,y) = (-5,0) + t(-1,2)$.

3 Hoeken

Helling en hellingshoek van een lijn

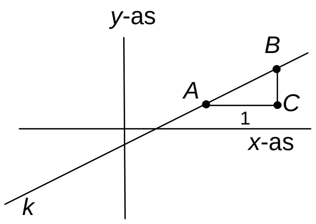
Er is een verband tussen de helling van een lijn en de hoek die die lijn met de x-as maakt.



1 Een lijn maakt dezelfde hoek met de x-as als zijn spiegelbeeld in de x-as.
a. Als k helling $-\frac{3}{4}$ heeft, wat is dan de helling van zijn spiegelbeeld in de x-as? En als k richtingscoëfficiënt m heeft?

> **Afspraak**
> Een lijn k maakt vier hoeken met de x-as. Noem een niet-stompehoek: α.
> De **hellingshoek van *k*** is α als k een positieve helling heeft en $-\alpha$ als k een negatieve helling heeft.

Zo heeft een lijn met helling 1 een hellingshoek van 45° en een lijn met helling -1 een hellingshoek van -45°.



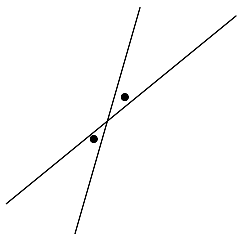
In het plaatje hiernaast liggen de punten A en B op lijn k. Het verschil tussen de x-coördinaten van A en B is 1.
b. Als k helling $\frac{1}{2}$ heeft, hoe groot is dan het verschil tussen de y-coördinaten? Bereken in dit geval $\angle CAB$ in graden nauwkeurig.
Hoek CAB is even groot als de hoek van k met de x-as.

> **Afspraak**
> Als $-90° < \alpha < 0°$, dan $\tan\alpha = -\tan -\alpha$.

c. Ga na dat de rekenmachine ook volgens bovenstaande afspraak werkt.
d. Geef de exacte waarde van $\tan -30°$, $\tan -45°$ en $\tan -60°$.
e. Geef de richtingscoëfficiënt van een lijn met hellingshoek -70° in twee decimalen.

> Als lijn k helling m heeft en α de hellingshoek van k is, dan is $\tan\alpha = m$.

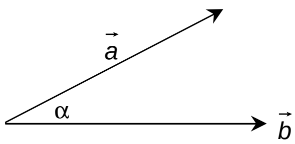
2 Geef in één decimaal nauwkeurig de hellingshoek van:
a. de lijn k met pv $(x,y) = (\text{-}1,2) + t\,(\text{-}2,3)$
b. de lijn m met vergelijking $5x + 2y = 10$.



Definitie
Onder **de hoek van twee snijdende lijnen** verstaan we de grootte van de twee niet-stompe hoeken in het snijpunt.

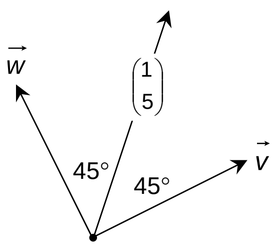
3 **a.** Geef in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen k en m van opgave 2.
b. Hoe groot is de hoek tussen een lijn met helling $\frac{3}{4}$ en een lijn met helling $\text{-}1\frac{1}{3}$. Bepaal die hoek zonder je rekenmachine. Licht je antwoord toe.

In paragraaf 1 heb je het volgende gezien.



Als α de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is, dan:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

4 **a.** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de volgende vectoren:
$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$.
Gebruik het inproduct.
b. Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen met pv $(x,y) = (\text{-}1,3) + t\,(1,1)$ en $(x,y) = (1,3) + t\,(4,1)$.
Ook de hoek tussen de lijnen met pv $(x,y) = (1,3) + t\,(\text{-}1,1)$ en $(x,y) = (1,3) + t\,(4,1)$.
c. Bereken de hoek tussen de x-as en de lijn met pv $(x,y) = (1,3) + t\,(4,1)$.



5 **a.** Teken op roosterpapier de vector $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ en met hetzelfde beginpunt twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ die een hoek van 45° met $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ maken; zie plaatje.

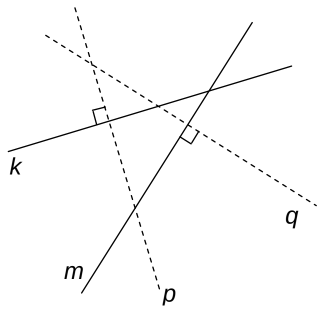
De lengte van die vectoren ligt niet vast; maak het eerste kental van $\vec{v}$ gelijk aan 1 en maak $\vec{w}$ even lang als $\vec{v}$.
Wat denk je dat het tweede kental van $\vec{v}$ is?

b. Ga met een berekening na dat $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ een hoek van precies 45° met elkaar maken.

c. Welke vector is $\vec{w}$?

d. Geef alle vectoren die een hoek van 45° met de vector $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ maken.

6



k en m zijn twee snijdende lijnen. Lijn p is een normaal van k en lijn q een normaal van m.

a. Toon aan dat hoek tussen k en m gelijk is aan de hoek tussen p en q.

De hoek tussen twee lijnen kun je dus ook bepalen door de hoek tussen hun normalen te berekenen.

> De hoek van twee lijnen en de hoek van hun normalen zijn gelijk.

De lijnen k: $2x+3y=5$ en m: $3x-4y=10$ hebben normaalvectoren $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$. De hoek tussen deze vectoren is groter dan 90°.

b. Hoe zie je dat zo snel (zonder rekenmachine)?

c. De hoek tussen k en m is wel de hoek tussen de vectoren $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$. Waarom?

Bereken de hoek tussen k en m in graden nauwkeurig met behulp van het inproduct.

c. Bereken de hoek van de lijnen $y = 2x + 3$ en $y = -x + 3$ in graden nauwkeurig met behulp van het inproduct.

> Als twee lijnen met helling m en n (beide $\neq 0$) loodrecht op elkaar staan, dan $m \cdot n = -1$.

7 **a.** Laat dat zien met behulp van richtingsvectoren en het inproduct.
b. Geef een vergelijking in de vorm $y = mx + q$ van de lijn door (4,-3) die loodrecht op de lijn $y = -1\frac{1}{4}x + 7$ staat.
c. Voor welke a staan de lijnen $2x + 3y - 12 = 0$ en $3x - ay + 7 = 0$ loodrecht op elkaar?

De hellingshoek verdubbelen

8 k is de lijn door O en het punt (4,2).
a. Teken k in een rooster.
b. Bereken de hellingshoek van k.

p is de lijn door O met een twee keer zo grote hellingshoek als k.
c. Teken p in hetzelfde rooster als k.

Het lijkt erop dat p door (3,4) gaat.
d. Bereken de hellingshoek van de lijn door O en (3,4).

Uit **b** en **d** kun je alleen maar concluderen dat p ongeveer door (3,4) gaat. Je kunt dat zeker weten door de cosinus van de hoek tussen de vectoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ en die tussen de vectoren $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ te berekenen.

e. Doe dat.

f. Tel de vectoren $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ op. Leg uit hoe hieruit volgt dat p door (3,4) gaat.

*In opgave **9** zullen we het volgende bewijzen.*

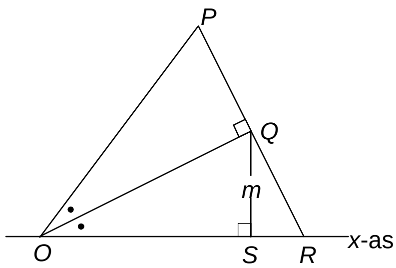
> De lijn met helling $\dfrac{2m}{1-m^2}$ heeft een twee keer zo grote hellingshoek als de lijn met helling m.

g. Waarom moet hierboven $m \neq 1$ en $m \neq$ -1 zijn?
Wat is er aan de hand als $m = 1$ of $m =$ -1?

h. Ga na dat volgens het bovenstaande de lijn met richtingsvector $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ een twee keer zo grote hellingshoek heeft als de lijn met richtingsvector $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

i. Een lijn met hellingshoek 30° heeft helling $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ en een lijn met hellingshoek 60° heeft helling $\sqrt{3}$.
Laat zien dat dit in overeenstemming is met bovenstaande formule.

9 Het bewijs



Zie het plaatje voor de gegevens. Bovendien is $OS = 1$.
De lijn OQ heeft dus helling m. De hellingshoek van OP is 2 keer zo groot als die van m.

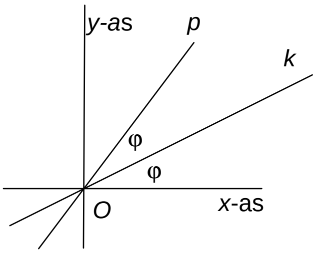
a. Laat zien dat de driehoeken OQS en QRS gelijkvormig zijn.

b. Druk de lengte van RS en de coördinaten van R uit in m.

$Q(1,m)$ is het midden van PR.

c. Waarom?

d. Bepaal daarmee de coördinaten van P en leid hieruit af dat lijn OP helling $\dfrac{2m}{1-m^2}$ heeft.



10 Een bewijs met het inproduct

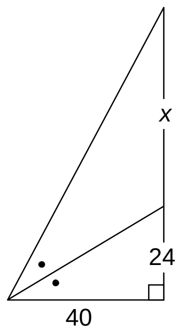
In plaats van het bewijs met gelijkvormigheid in opgave **9**, kunnen we ook een bewijs met het inproduct geven.
In het plaatje hiernaast heeft k helling m en hellingshoek φ; p heeft hellingshoek 2φ.
De helling van p noemen we x.

a. Laat zien dat dan $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \cos\varphi \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+m^2}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \cos\varphi \cdot \sqrt{1+m^2}$.

b. Laat zien dat uit **a** volgt: $1+mx=\sqrt{1+x^2}$.

c. Bereken nu x met behulp van **b**, dat wil zeggen, druk x uit in m.

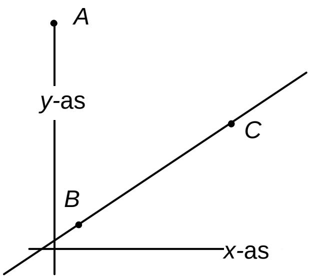
Tip. Kwadrateer beide kanten.



11 Zie het plaatje hiernaast voor de gegevens.
Bereken x exact.

4 Varia

De afstand van een punt tot een lijn



1 Gegeven zijn de punten $A(0,9)$, $B(1,1)$ en $C(7,5)$.
a. Geef een vergelijking van lijn BC.
b. Bereken de coördinaten van de (loodrechte) projectie van A op lijn BC.
c. Bereken de afstand van A tot lijn BC.
d. Bereken de coördinaten van het spiegelbeeld van A in lijn BC.

2 We gaan verder met opgave **1**.
a. Ga na dat $(x,y)=(1+3t,1+2t)$ een pv van lijn BC is.
b. Druk de afstand van A tot $(1+3t,1+2t)$ uit in t en ga na dat je die kunt schrijven als: $\sqrt{13(t-1)^2+52}$.
c. Met behulp van het vorige onderdeel kun je de projectie van A op lijn BC bepalen en de afstand van A tot lijn BC.
Doe dat. Licht je antwoord toe.

Nog een derde manier gaat als volgt.
d. Als $P(1+3t,1+2t)$ de projectie van A op lijn BC is, dan staat $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}3t+1\\2t-8\end{pmatrix}$ loodrecht op $\overrightarrow{BC}$.
Bereken hieruit t en de afstand van A tot lijn BC.

Je hebt drie manieren gezien om de afstand van een punt A tot een lijn k te bepalen.

- manier van opgave **1**

Snijd de lijn door A loodrecht op k met k. Het snijpunt is de projectie van A op k. De afstand van A tot het snijpunt is de afstand van A tot k.

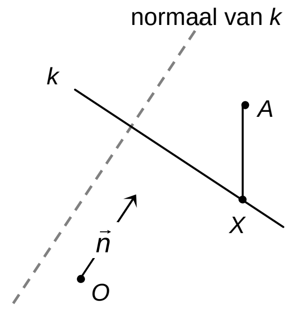
- manier van opgave **2a**,**b** en **c**

Geef een pv van k. Dit geeft je een punt van de vorm $P(\_+\_\cdot t,\ \_+\_\cdot t)$ op k. (Op de streepjes staan getallen.)
De afstand AP kun je schrijven als $\sqrt{\_(t-\_)^2+\_}$.
De wortel van de minimale waarde van $\_(t-\_)^2+\_$ geeft je de afstand van A tot k en de waarde van t waarvoor die bereikt wordt hoort bij de projectie van A op k.

- manier van opgave **2d**

P is als in de vorige manier. $\overrightarrow{AP}$ staat loodrecht op een richtingsvector $\vec{v}$ van k.
$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{v}=0$ geeft je een vergelijking in t. De oplossing hoort bij de projectie van A op k.

3 Bereken de afstand van $A(1,2)$ tot lijn k: $3x-4y-20=0$ op elk van de drie manieren.

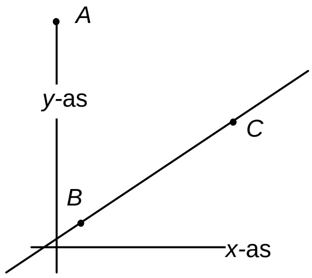


4 Je kunt ook nog anders te werk gaan om de afstand van een punt A tot een lijn k te bepalen.
Kies een willekeurig punt van k: X.
Dan is de lengte van de projectie van lijnstuk AX op een normaal van k de afstand van A tot k.
a. Ga dat na.

In geval van opgave **3** gaat dat zo.
Een punt van k is bijvoorbeeld $X(8,1)$. Een normaalvector van k is bijvoorbeeld: $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

De afstand van A tot k is: $\dfrac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8-1 \\ 1-2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right|} = 5$.

b. Leg uit wat er hierboven gebeurt.
c. Bereken zo ook de afstand van $A(0,9)$ tot de lijn met vergelijking $x-3y+1=0$.



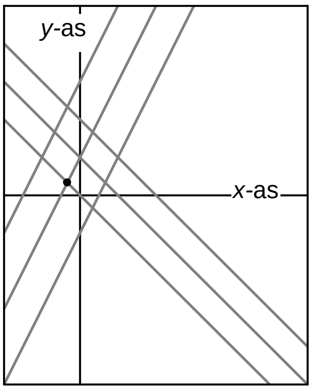
5 Zie opgave **1**: $A(0,9)$, $B(1,1)$ en $C(7,5)$.
a. Bereken de oppervlakte van driehoek ABC.

De punten X met oppervlakte ΔBCX = oppervlakte ΔABC vormen twee lijnen.
b. Welke lijnen zijn dat?
Geef van elke lijn een vergelijking.
c. Er zijn twee punten P met gelijke eerste en tweede coördinaat zo dat ΔBCP en ΔABC gelijke oppervlakte hebben.
Bereken de coördinaten van die punten P.

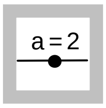
6 Gegeven de lijnen k: $2x+y=14$ en m: $x-2y=2$.
a. Bereken de coördinaten van snijpunt R van k en m.
b. Ga na dat k en m elkaar loodrecht snijden.

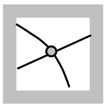
P is het punt $(6,6)$. De loodrechte projectie van P op k is Q en de loodrechte projectie van P op m is S.
c. Bereken de exacte oppervlakte van rechthoek $PQRS$.

Schuiven en draaien



7 Een lijn met helling -1 wordt met constante snelheid naar rechts geschoven. Op tijdstip t gaat de lijn door (t,0).
$x+y=t$ is een vergelijking van die lijn op tijdstip t.
Een lijn met helling 2 die op $t=0$ door (0,1) gaat wordt twee keer zo snel naar boven geschoven.
a. Geef een vergelijking van die lijn op tijdstip t.
b. In het plaatje hiernaast is het snijpunt van de lijnen op $t=0$ getekend.
Teken het snijpunt van de lijnen ook op enkele andere tijdstippen.

schuifknop


snijpunt(en) van twee objecten


Je kunt de opdracht ook in GeoGebra uitvoeren.
Als volgt.
- Maak een schuifknop voor t.
- Voer de vergelijking $x+y=t$ in in het 'invoerveld'. Voer ook de vergelijking uit **a** in.
  Geogebra tekent de twee lijnen.
- Markeer het snijpunt van de twee lijnen. GeoGebra geeft het snijpunt een naam.

\- Klik met de rechter muisknop op het snijpunt en kies 'spoor aan'.
\- Klik met de rechter muisknop op t en kies 'animatie'.

De snijpunten vormen een rechte lijn.
c. Laat dat met behulp van de vergelijkingen van de lijnen zien.
Tip. Elimineer de parameter.

8 k_t is de lijn met vergelijking $y=-tx+2$ en m_t de lijn met vergelijking $y=tx$. We laten t alle mogelijke waarden aannemen. Het snijpunt van k_t en m_t noemen we S_t.
a. Waar liggen de punten S_t?
b. Laat met algebra zien dat de punten S_t op een rechte lijn liggen en geef een vergelijking van die lijn.
c. Uit welk interval moet je t nemen om als 'spoor' het lijnstuk met eindpunten A(1,1) en B(10,1) te krijgen?

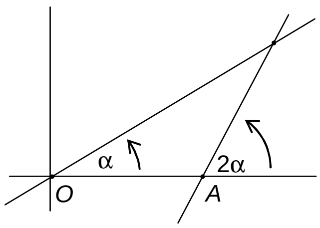
In opgave **8** krijg je, door t te variëren, voor k_t alle mogelijke lijnen, behalve de verticale, door (0,2).
De lijnen k_t vormen een **lijnenwaaier** of **lijnenbundel**

9 Bekijk de lijnen k_t met vergelijking $x + ty + 1 = 0$ en m_t met vergelijking $x - \frac{1}{t}y - 1 = 0$, voor alle mogelijke waarden van $t \neq 0$.
De lijnen k_t gaan door een vast punt. De lijnen m_t ook.
a. Welke punten zijn dat?

Het snijpunt van k_t en m_t noemen we S_t.
b. Met GeoGebra kun je de ligging van de punten S_t bepalen. Doe dat.

De punten S_t liggen op een cirkel.
c. Kun je dat meetkundig verklaren?

De eerste coördinaat van S_t is $\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.
d. Bereken hiermee de tweede coördinaat van S_t en controleer dat dit inderdaad het snijpunt van k_t en m_t is.
e. Vullen de punten S_t de hele cirkel?

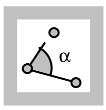


10 k_α is de lijn door $O(0,0)$ met hellingshoek α.
m_α is de lijn door $A(4,0)$ met hellingshoek 2α.
Als we α laten toenemen van 0 tot 2π, draait k_α om O en k_α om A. Zodoende ontstaan er twee waaiers. De waaier om A draait twee keer zo snel als de waaier om O.

We onderzoeken de baan van de snijpunten van k_α en m_α. Om een idee te krijgen, tekenen we de baan in GeoGebra. Als volgt.

• Eerst maak je de waaier door O.
- Teken het punt $A(4,0)$.
- Maak een schuifknop voor hoek α.
- Om lijn k te tekenen, gebruiken we de knop ‘hoek met gegeven grootte’. Daarvoor moet je eerst één been hebben: neem daarvoor de halve lijn met beginpunt O door $A(4,0)$. Als je de hoekknop gebruikt, wordt er naar de grootte gevraagd: hiervoor neem je α. GeoGebra tekent een punt op het andere been, dat gebruik je (samen met O) om k_α te tekenen.

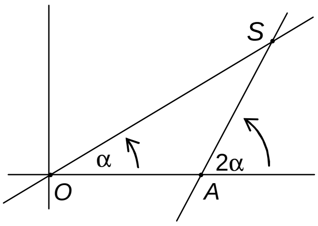
hoek met gegeven grootte



• Om de waaier door A te maken, ga je op soortgelijke wijze te werk; je moet als hoekgrootte $2 \cdot \alpha$.

a. Nu kun je de baan tekenen.
- Markeer het snijpunt van k_α en m_α. GeoGebra geeft het snijpunt een naam.
- Klik met de rechter muisknop op het snijpunt en kies ‘spoor aan’.
- Klik met de rechter muisknop op α en kies ‘animatie’.

De baan lijkt een cirkel te worden.
b. Als het een cirkel is, wat is dan het middelpunt en wat de straal?
Geef een vergelijking van die cirkel.



Noem het snijpunt van k_α en m_α: *S*.
c. Waarom is $\angle ASO = \alpha$?
d. Bewijs dat de baan van het snijpunt *S* inderdaad een cirkel is.

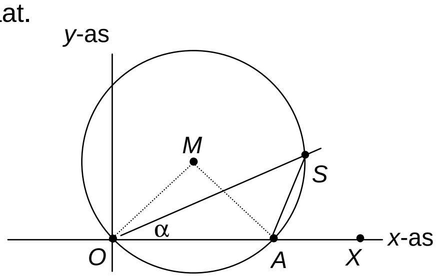
11 k_α is de lijn door *O*(0,0) met hellingshoek α. Nu is m_α de lijn door *A*(4,0) met hellingshoek $\alpha + \frac{1}{4}\pi$.

a. Teken in GeoGebra de baan van het snijpunt van k_α en m_α als α toeneemt van 0 tot π.

Op grond van het plaatje dat Geogebra laat zien, is het niet gek te veronderstellen dat de baan een cirkel is.

Neem aan dat de veronderstelling juist is.
b. Wat is dan het middelpunt van die cirkel? En wat is de straal?

Bekijk de cirkel met dat punt *M* als middelpunt die door *O* gaat.



Neem een punt *S* op de cirkel. $\angle SOA$ noemen we α.
c. Toon aan: $\angle SAX = \alpha + \frac{1}{4}\pi$. (*X* is een punt op de *x*-as met eerste coördinaat groter dan 4.)
Tip. Teken lijnstuk *MS*.

Omgekeerd is er bij elke hoek α maar één snijpunt van k_α en m_α. Dat moet dus op de cirkel liggen.
De baan is dus een cirkel.

12 k_α is de lijn door *O*(0,0) met hellingshoek α.
m_α is de lijn door *A*(4,0) met hellingshoek 3α.
Als we α laten toenemen van 0 tot 2π, draait k_α om *O* en m_α om *A*. Zodoende ontstaan er twee waaiers. De waaier om *A* draait drie keer zo snel als de waaier om *O.*

a. Onderzoek met GeoGebra de baan van de snijpunten van k_α en m_α. Schrijf je werkwijze op.

Als je met 'animatie' werkt, zie je dat k_α en m_α wel eens parallel lopen en ook wel eens loodrecht op elkaar staan.
b. Voor welke waarden van α is dit het geval?

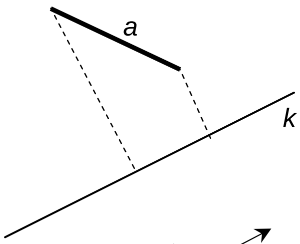
13 We bekijken twee waaiers:
$k_t: \ y = (t+2)x$ en
$m_t: \ y = t(x+2)$
voor alle mogelijke waarden van t.
a. Welk is het 'vaste' punt van de lijnen k_t ?
En welk is het 'vaste' punt van de lijnen m_t ?

We bekijken de snijpunten S_t van k_t en m_t.
b. Teken de baan van de punten S_t met GeoGebra.

De baan lijkt een parabool. Als je de baan in een rooster tekent, kun je de top (-1,-1) mooi zien.
c. Aangenomen dat de baan een parabool is, geef een vergelijking van de baan. Licht je antwoord toe.

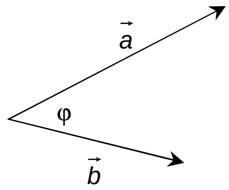
Als je bij t voor de stapgrootte 1 kiest, zul je het verband tussen de eerste coördinaat van S_t en t gemakkelijk zien.
Wat zijn de coördinaten van S_t?
d. Controleer je antwoord met de vergelijkingen van k_t en m_t.
e. Je ook kunt een vergelijking van de baan vinden door t te elimineren.
Doe dat.

5 Samenvatting



Projecties en het inwendig product

Een lijnstuk van lengte *a* maakt een hoek φ met de lijn *k*. De lengte van de loodrechte projectie van het lijnstuk op *k* is $a \cos \varphi$.



Het **inwendig product** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is in hoofdstuk 2 gedefinieerd als $a_1 b_1 + a_2 b_2$.
Stelling: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$, waarbij φ de hoek is die $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met elkaar maken.

Als $\vec{b}$ een richtingsvector is van de lijn *k*, dan is het inwendig product van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gelijk aan

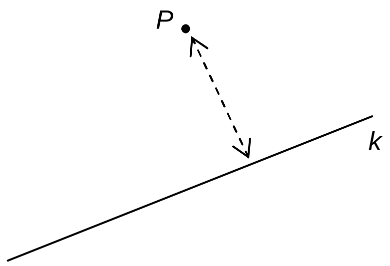
- de lengte van de projectie van $\vec{a}$ op *k* maal de lengte van $\vec{b}$, als φ scherp is,
- het tegengestelde van de lengte van de projectie van $\vec{a}$ op *k* maal de lengte van $\vec{b}$, als φ stomp is.

Lijnen

Elke lijn heeft een vergelijking in de vorm $ax + by + c = 0$, waarbij *a* en *b* niet beide 0 zijn.
$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is **normaalvector** van de lijn; die staat loodrecht op de lijn.
$\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ is een richtingsvector van de lijn en $\frac{-a}{b}$ is de helling (richtingscoëfficiënt) van de lijn, mits $b \neq 0$.

Een lijn *k* maakt vier hoeken met de *x*-as. Noem de grootte van een niet-stompe hoek: α.
De **hellingshoek** van *k* is α als *k* een positieve helling heeft en $-\alpha$ als *k* een negatieve helling heeft.
Als lijn *k* helling *m* heeft en α de hellingshoek van *k* is, dan is $\tan \alpha = m$.

Afstand van punt en lijn



De afstand van een punt P tot een lijn k kun je als volgt berekenen:

- snijd de lijn door P loodrecht op k met k,

of

- neem een variabel punt op k en bereken de minimale afstand van dat punt tot P,

of

- neem een variabel punt Q op k en eis dat $\vec{PQ} \cdot \vec{r} = 0$,

waarbij $\vec{r}$ een richtingsvector van k is.

Hoeken

Onder **de hoek van twee snijdende lijnen** verstaan we de grootte van de twee niet-stompe hoeken in het snijpunt.
De hoek van twee lijnen en de hoek van hun normalen zijn gelijk.
De hoek van twee snijdende lijnen kan worden berekend met het inproduct van hun richtingsvectoren en ook met het inproduct van hun normaalvectoren.
Als twee lijnen met helling m en n (beide $\neq 0$) loodrecht op elkaar staan, dan $m \cdot n = -1$.

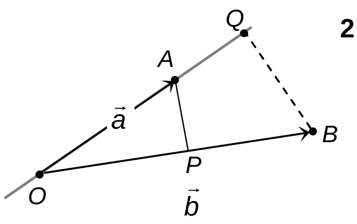
Waaier

Alle lijnen die door een vast punt gaan vormen een zogenaamde (lijnen)waaier of lijnenbundel.
Twee gegeven snijdende lijnen – zeg met vergelijkingen $ax + by + c = 0$ en $a'x + b'y + c' = 0$ – brengen een lijnenbundel door het snijpunt voort.
Een willekeurige lijn uit die bundel heeft vergelijking
$p(ax + by + c) + q(a'x + b'y + c') = 0$
Door speciale waarden voor p en q te kiezen vind je de coördinaten van het gemeenschappelijke punt.

6 Antwoorden

Paragraaf 1 Projecties

1 **a.** Dat de oppervlaktes van de twee rechthoeken gelijk zijn.
b. De oppervlakte links is: $PQ \cdot \cos\alpha \cdot b$
en rechts: $PQ \cdot \cos\beta \cdot a$.
Zowel $\cos\alpha \cdot b$ als $\cos\beta \cdot a$ is gelijk aan de lengte van de hoogtelijn uit *C* van driehoek *ABC*.



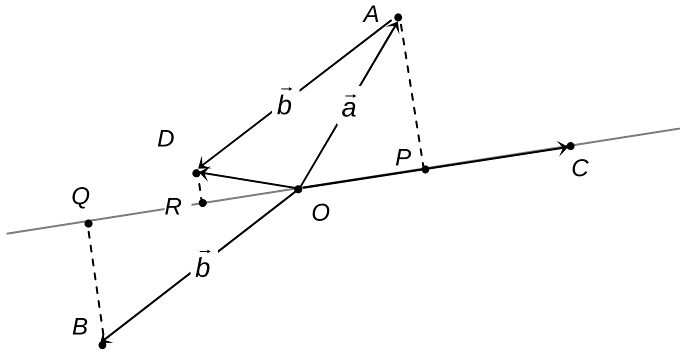
2 **a.** Driehoek *OPA* is gelijkvormig met driehoek *OQB*, want beide driehoeken hebben een rechte hoek en de hoek bij *O* hetzelfde. Dus $OP : OQ = OA : OB$, dus:
$OP \cdot OB = OQ \cdot OA$.
b. 0, 0, 5
c. -3, -5
d. 0, 0, 5, -3, -5

3 **a.** $\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$, $\sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2}}$, $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$
b. Cosinusregel: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\,OA \cdot OB \cdot \cos\varphi$.
c. $(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 =$
$a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + b_1^{\,2} + b_2^{\,2} - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$.
Haakjes wegwerken geeft:
$a_1^{\,2} - 2a_1 \cdot b_1 + b_1^{\,2} + a_2^{\,2} - 2a_2 \cdot b_2 + b_2^{\,2} =$
$a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + b_1^{\,2} + b_2^{\,2} - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$, dus
$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$ **.**

4 **a.** 1; -5
b. $|\vec{a}| = \sqrt{13}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{65}}$, dus $\varphi \approx 83°$
$|\vec{a}| = \sqrt{10}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, $\cos\varphi = \frac{-5}{\sqrt{50}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $\varphi = 135°$ exact.
c. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$ geeft: $5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\varphi$, dus
$\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $\varphi = 45°$ exact.
Driehoek *OAB* is een gelijkbenige rechthoekige driehoek.
d. We berekenen de hoek φ tussen de vectoren $\overrightarrow{BA}$ en $\overrightarrow{BC}$: $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{17} \cos\varphi$, dus $11 = \sqrt{221} \cos\varphi$,
dus $\varphi \approx 42°$.

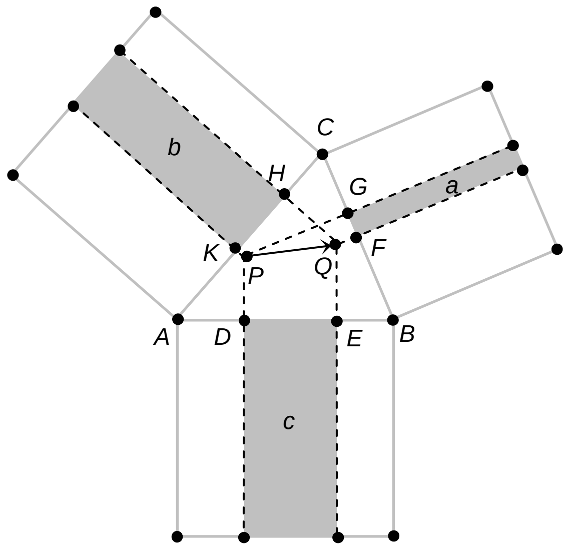
5 **a.** $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = OC\cdot OR$, $\vec{a}\cdot\vec{c} = OP\cdot OC$ en
$\vec{b}\cdot\vec{c} = OQ\cdot OC$.
Verder geldt: $OP + OQ = OR$, want $PR = OQ$.

b.



In dit plaatje geldt: -$OR = OP - OQ$, dus:
-$OR \cdot OC = OP \cdot OC$ + -$OQ \cdot OC$, dus:
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$, want in dit plaatje is de hoek tussen $\vec{a}+\vec{b}$ en $\vec{c}$ stomp, evenals de hoek tussen $\vec{b}$ en $\vec{c}$.

6 **a.**



Zie plaatje: $\vec{p}\cdot\vec{a}$ = -$FG \cdot BC$, want de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{p}$ is stomp, dus $\vec{p}\cdot\vec{a}$ = -a. Evenzo is $\vec{p}\cdot\vec{b}$ = -b en $\vec{p}\cdot\vec{c} = c$.

b. Want $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

c. Want $\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{p}\cdot\vec{a}+\vec{p}\cdot\vec{b}+\vec{p}\cdot\vec{c}$.

7 $7-4=3$ of $7+4=11$

8 **a.** De rechthoeken hebben oppervlakte a^2, 0 en $p\,c$, dus je krijgt: $a^2 = p\,c$.
b. De stelling van Pythagoras in driehoek ABC.

9 **a.** Een richtingsvector van lijn AC is: $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

De lengte is dus: $\dfrac{\left|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

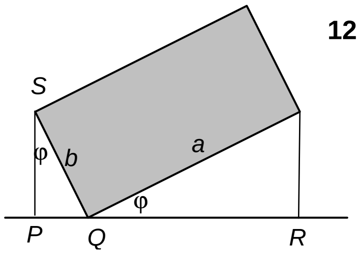
10 $\dfrac{\left|\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5}} = 2\frac{1}{5}\sqrt{5}$

11 **a.** $\dfrac{\left|\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5}} = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} > 8$, dus glijdt het voorwerp naar beneden

b. $\dfrac{\left|\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} < 8$, dus glijdt het voorwerp niet naar beneden

c. $\dfrac{\left|\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1+a^2}} = 8 \Leftrightarrow 10a = 8\sqrt{a^2+1}$

Kwadrateren geeft: $100a^2 = 64a^2 + 64$, dus $a = 1\frac{1}{3}$



12 **b.** Zie plaatje: $\angle PSQ = \varphi$, dus $PQ = b\sin\varphi$ en $QR = a\cos\varphi$ en $\vec{v}\cdot\vec{e} = b\sin\varphi + a\cos\varphi$, klopt.
c. Over het stuk in het eerste kwadrant (dus over de kwartcirkel van (1,0) tot (0,1)).
d. minimaal als $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, want dan is de projectie van $\vec{e}$ op $\vec{v}$ minimaal (dan staat het blok rechtop op de korte zijde);
maximaal als $\vec{e}$ en $\vec{v}$ in elkaars verlengde liggen, dan is $\tan\varphi = \dfrac{a}{b}$, dus dan is de diagonaal vanuit S van de rechthoek evenwijdig aan de grond.

Paragraaf 2 Vergelijkingen van lijnen

1 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ $y = \frac{1}{6}x + 2\frac{2}{3}$ $y = 3$ $x = 2$

2 **a.** Bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$
b. $(x,y) = (0,q) + t\,(1,m)$
c. De verticale (evenwijdig aan de y-as)

3 **a.** $y = -\frac{2}{3}x - 4$
b. $ax + by + c = 0$ gaat door (0,0) $\Leftrightarrow$ $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0$ $\Leftrightarrow$ $c = 0$
c. horizontaal als $a = 0$ en verticaal als $b = 0$
d. $b = 0$

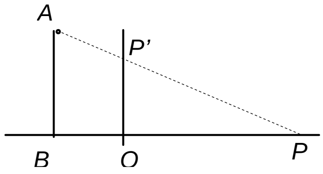
4 **a.** De lijn door O loodrecht op $\vec{n}$.
b. $2x + 5y = 0$
c. Dan zou er getallen x en y zijn waarvoor $2x+5y$ zowel 0 als 8 is.
d. Want $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ staat loodrecht op de lijn $ax + by = 0$ en de lijnen $ax + by = 0$ en $ax + by + c = 0$ zijn evenwijdig.

5 **a.** $3x - y = 5$; $x + 5y = 25$
b. $-5x + 6y = -16$
c. $-5x + 6y = 14\frac{1}{2}$
d. $2x + 3y = -4$

6 **a.** Evenwijdig aan de x-as; evenwijdig aan de y-as
b. Als $a = 0$ en $b = 0$, krijg je geen lijn.
Als $c = 0$, voldoet elk punt aan de vergelijking;
als $c \neq 0$, voldoet geen enkel punt aan de vergelijking.
c. De lijn gaat door de oorsprong (0,0).

7 **a.** Dan zijn $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -4 \\ a \end{pmatrix}$ veelvouden van elkaar, dus $a = 6$.
b. $a = 6$ en $b = -20$

8 **a.** $y = -\frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}$
b. $(0, 2\frac{4}{5})$
c. B is de projectie van A op de x-as en Q de projectie van P', dan zijn de driehoeken ABP en $P'QP$ gelijkvormig. $AB : BP = P'Q : QP$ dus $4 : 10 = P'Q : 7$, dus $P'Q = 2\frac{4}{5}$.



d. x-as: (-3,0) en y-as: (0,4)
e. Voor elke p en q krijg je een lineaire vergelijking in x

en y, dus een lijn en wel door (3,-4), want $p \cdot 0 + q \cdot 0 = 0$.
Elke rc is mogelijk, je krijgt ook de verticale lijn door (3,-4) door bijvoorbeeld $p = 1$ en $q = 0$ te nemen.

f. Dan $10p - 4q = 0$, dus bijvoorbeeld $p = 2$ en $q = 5$.

g. $2(0+3) + -5(y+4) = 0 \Leftrightarrow y = 2\frac{4}{5}$

9 a. Voor het snijpunt (a,b) geldt:
$p \cdot (2a - 3b - 10) + q \cdot (3a - 8b - 8) = p \cdot 0 + q \cdot 0 = 0$, dus het snijpunt voldoet. Dat je alle mogelijke lijnen door het snijpunt krijgt, zie daarvoor **e**.

c. $p = 8$ en $q = -3$ (bijvoorbeeld), dan: $7x - 56 = 0$, dus $x = 8$.

10 a. De straal door (4,0) en (0,3) heeft vergelijking $3x + 4y - 12 = 0$ en de straal door (10,0) en (0,5) heeft vergelijking $x + 2y - 10 = 0$.
Het snijpunt van de twee stralen bepalen:
$3x + 4y - 12 + -2(x + 2y - 10) = 0 \Leftrightarrow x = -8$.
$x = -8$ invullen in $x + 2y - 10 = 0$ geeft: $y = 9$, dus $C = (-8,9)$.

b. $p(3x + 4y - 12) + q(x + 2y - 10) = 0$, of, simpeler,
$a(x + 8) + b(y - 9) = 0$.

c. We bepalen de straal door (0,7):
$p(3 \cdot 0 + 4 \cdot 7 - 12) + q(0 + 2 \cdot 7 - 10) = 0 \Leftrightarrow 16p + 4q = 0$.
Neem bijvoorbeeld $p = 1$ en $q = -4$. De straal is de lijn met vergelijking: $3x + 4y - 12 + -4(x + 2y - 10) = 0$.
Snijpunt met de x-as: $3x + 4 \cdot 0 - 12 + -4(x + 2 \cdot 0 - 10) = 0$
$\Leftrightarrow x = 28$, dus (28,0).

11 a. snijpunt (2,4)
b. snijpunt (-2,4)
c. snijpunt (0,3)
d. De lijnen k en m vallen samen.
e. De lijnen k en m zijn evenwijdig.

12 a. Er zijn veel mogelijkheden, bijvoorbeeld:

punt (2,4), richtingsv. $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, pv:$(x,y) = (2,4) + t(4,-3)$

punt (-3,0), richtingsv. $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, pv:$(x,y) = (-3,0) + t(5,4)$

punt (0,0), richtingsv. $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, pv:$(x,y) = t(4,-3)$

punt (3,0), richtingsv. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pv:$(x,y) = (3,0) + t(0,1)$

b. $x - 4y = -15$; $x + 4y = 8$; $x + 3y = 10$; $x = 4$

c. (1) $x = -1 - 2t$ en (2) $y = 2 + 3t$. Uit (1) volgt: $t = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$.
Dit invullen in (2) geeft: $y = 2 + 3(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x)$. Vereenvoudigen geeft: $3x + 2y = 1$.

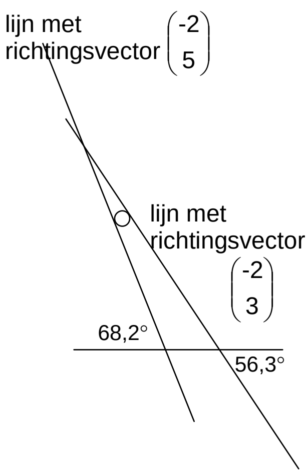
d. $t = x - 4$ invullen in $y = t^2 + 1$ geeft: $y = (x-4)^2 + 1$.
De figuur hierbij is een parabool.

13 a. Het snijpunt wordt gekregen bij een waarde van de parameter *t* in de pv van ene lijn en ook in de pv van de andere lijn. Het zou heel toevallig zijn als deze waarden van *t* hetzelfde zouden zijn.
b. $2 - 2s = -2 + t$ en $-1 + 3s = 2 - 2t$
$t = 4 - 2s$ en $3s = 3 - 2t$
Dus $3s = 3 - 2(4 - 2s)$, waaruit volgt dat $s = 5$.
$S = (-8,14)$ (Je kunt ook *t* berekenen: $t = -6$)
c. $-2 - t = 4$, dus $t = -6$, dus $S = (-8,14)$

14 a. $(2\frac{1}{2},-1)$
b. $(-8,6)$
c. Geen gemeenschappelijk punten
d. Alle punten zijn gemeenschappelijk; dus $(-5 - t, 2t)$ voor elk getal *t*.

Paragraaf 3 Hoeken

1 a. $\frac{3}{4}$; $-m$
b. $\frac{1}{2}$; $\tan \angle CAB = \frac{1}{2}$, $\angle CAB \approx 27°$
d. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, -1, $-\sqrt{3}$
e. $\tan -70° \approx -2{,}75$, dus $-2{,}75$



2 a. De richtingsvector $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ heeft hellingshoek α, dan $\tan\alpha = -1\frac{1}{2}$, dus $\alpha \approx -56{,}3°$
b. Normaalvector van die lijn is $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, dus richtingsvector $\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$. Als hellingshoek $= \alpha$, dan $\tan\alpha = -2\frac{1}{2}$, dus $\alpha \approx -68{,}2°$.

3 a. Zie het schetsje hiernaast. De onderste twee hoeken van de driehoek zijn ongeveer 56,3° en 180°–62,2° = 111,8°; dus de gevraagde hoek is $68{,}2 - 56{,}3 \approx 12°$.
b. 90°, want de richtingsvectoren $\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\-1\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ hebben inproduct 0.

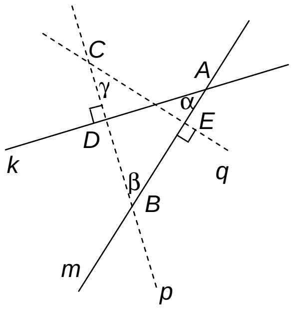
4 a. 23° ; 105° ; 127°
b. 31° ; 59°
c. 14°

5 a. Aflezen in het rooster: $\frac{2}{3}$

b. $\dfrac{\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}} = \dfrac{13}{13\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \cos 45°$

c. $\vec{v}_R = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

d. Dat zijn de positieve veelvouden van $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ en de positieve veelvouden van $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.



6 **a.** Zie plaatje: $\alpha + \beta = 90°$ (hoekensom driehoek *ABD*), $\gamma + \beta = 90°$ (hoekensom driehoek *BCE*); dus $\alpha = \gamma$.

b. Het inproduct van $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ is negatief.

c. Als je één van beide vectoren 180° draait, krijg je wel de goede hoek.

α is de hoek tussen de normaalvectoren $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

Dan $\cos\alpha = \dfrac{6}{\sqrt{13}\sqrt{25}}$, dus $\alpha \approx 71°$.

d. De lijnen hebben normaalvectoren $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Noem de hoek van die vectoren α. Dan $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, dus $\alpha \approx 72°$.
De hoek tussen de lijnen is 72°.

7 **a.** $\begin{pmatrix}1\\n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 + mn = 0 \Leftrightarrow mn = -1$

b. Richtingscoëfficiënt $= \frac{4}{5}$, dus $y = \frac{4}{5}x + q$. Het punt (4,-3) moet op de lijn liggen, dus: $-3 = 3\frac{1}{5} + q$, dus $q = -6\frac{1}{5}$.
Vergelijking $y = \frac{4}{5}x - 6\frac{1}{5}$.

c. Dan $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-a\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = 2$

8 **b.** 26,565…
d. 53,130…
e. cosinus hoek tussen $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \dfrac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$;

cosinus hoek tussen $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \dfrac{20}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

f. De vectoren $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ zijn even lang; als je ze optelt volgens de parallellogrammethode krijg je een vector die de hoek tussen (5,0) en (3,4) middendoor deelt. (Eigenschap van een ruit: diagonaal deelt hoeken middendoor.)

$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

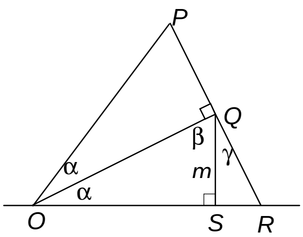
g. Anders wordt de noemer van $\dfrac{2m}{1-m^2}$ nul.

Als $m=1$ of $m=-1$, maakt de lijn een hoek van 45° met de x-as en krijg je een verticale lijn bij verdubbelen van de hellingshoek.

h. De richtingscoëfficiënt bij richtingsvector $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ is $m=\frac{1}{2}$ en bij richtingsvector $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ is die $1\frac{1}{3}$.

$m=\frac{1}{2}$ invullen in $\dfrac{2m}{1-m^2}$ geeft $1\frac{1}{3}$.

i. $\dfrac{2\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$



9 **a.** $\alpha+\beta=90°$, hoekensom in driehoek OSQ.
$\beta+\gamma=90°$ (rechte hoek), dus $\alpha=\gamma$. De driehoeken OQS en QRS hebben gelijke hoeken en zijn dus gelijkvormig.

b. Uit **a** volgt dat $\dfrac{QS}{OS}=\dfrac{RS}{QS}$, dus $\dfrac{m}{1}=\dfrac{SR}{m}$, dus $SR=m^2$, dus $R=(m^2+1{,}0)$.

c. Omdat de driehoeken ORQ en OPQ congruent zijn, want de hoeken bij Q zijn beide recht, de hoeken bij O zijn gelijk en ze hebben zijde OQ gemeenschappelijk.

d. $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{RQ}=(-m^2,m)$, dus $P=(1-m^2,2m)$.

10 **a.** Dit is zo volgens de inproductregel (blz.7).

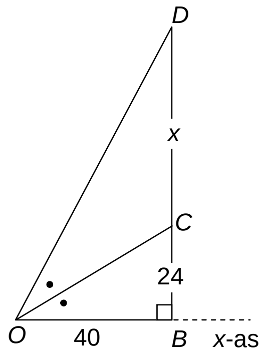
b. Uit de eerste regel van **a** volgt:

(1) $\cos\varphi\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+m^2}=1+mx$ en uit de tweede:

(2) $\cos\varphi\cdot\sqrt{1+m^2}=1$

Als je (2) in (1) invult, krijg je: $\sqrt{1+x^2}=1+mx$

c. Kwadrateren geeft: $1+x^2=1+2mx+m^2x^2 \Leftrightarrow$
$x^2=2mx+m^2x^2 \Leftrightarrow x=2m+m^2x \Leftrightarrow (1-m^2)x=2m$, dus
$x=\dfrac{2m}{1-m^2}$.

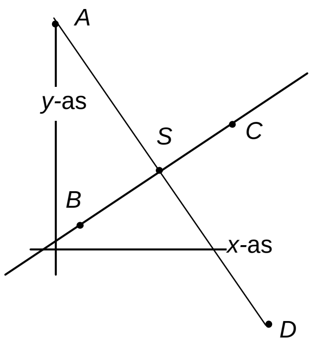


11 Zie plaatje: helling $OC = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$, dus helling $OD =$

$\frac{2 \cdot \frac{3}{5}}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{15}{8}$. Maar ook helling $OD = \frac{x+24}{40}$. Dus:

$\frac{x+24}{40} = \frac{15}{8}$, dus $x + 24 = 75$, dus $x = 51$.

Paragraaf 4 Varia



1 **a.** $2x - 3y + 1 = 0$
b. We snijden de lijn door A loodrecht op lijn BC met lijn BC. Een normaalvector van de lijn door A loodrecht op BC is: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus een vergelijking is: $3x + 2y - 18 = 0$.
Het snijpunt van de lijnen $2x - 3y + 1 = 0$ en $3x + 2y - 18 = 0$ is $S(4,3)$.
c. De afstand van $A(0,9)$ tot $S(4,3)$ is $2\sqrt{13}$.
d. Het spiegelbeeld noemen we D.
Dan $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, dus D is $(0 + 2 \cdot 4\ ,\ 9 - 2 \cdot 6) = (8,-3)$.

2 **a.** Startpunt is (1,1) en een richtingsvector is $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ en ook de helft daarvan $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
b. De afstand is de wortel van:
$(1 + 3t - 0)^2 + (1 + 2t - 9)^2 = 9t^2 + 6t + 1 + 4t^2 - 32t + 64 =$
$13t^2 - 26t + 65 = 13(t-1)^2 + 52$.
c. De minimale waarde van $13(t-1)^2 + 52$ krijg je voor $t = 1$ en die is 52.
Dus het punt bij $t = 1$ van de lijn BC ligt het dichtst bij A. Dat punt (4,3) is dus de projectie van A op lijn BC. De afstand van A tot de lijn BC is de afstand van (4,3) tot A $= \sqrt{52}$.
d. Dan $\begin{pmatrix} 3t+1 \\ 2t-8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9t + 3 + 4t - 16 = 0 \Leftrightarrow t = 1$, verder zie **c.**

3 **Manier 1** Loodlijn door A op k: $4x + 3y = 10$
Snijden met k geeft $x = 4$ en $y = -2$.
De afstand tussen (1,2) en (4,-2) is 5.
Manier 2 $P = (4t, 3t - 5)$ ligt op k.
$|AP|^2 = (4t-1)^2 + (3t-7)^2 = 25t^2 - 50t + 50 =$
$25(t-1)^2 + 50$.

Dit is minimaal 25 (namelijk voor $t = -1$).
De afstand is dus 5.

Manier 3 $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4t-1 \\ 3t-7 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 4(4t-1)+3(3t-7) = 25t-25$

Dit is 0 als $t = 1$
Dit geeft $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, dus is de afstand 5.

4 **b.** Hier wordt toegepast:
Als lijnstuk PQ (loodrecht) op lijn k geprojecteerd wordt, dan is de lengte van de projectie: $\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{r}\,|}{|\vec{r}\,|}$, waarbij $\vec{r}$ een richtingsvector van k is; zie bladzijde 6.
c. Een punt van de lijn met vergelijking $x-3y+1=0$ is bijvoorbeeld $X(-1,0)$. $\overrightarrow{AX} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix}$ en een normaalvector van de lijn is $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, dus de projectie van AX op de lijn $x-3y+1=0$ heeft lengte $\dfrac{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = 2\tfrac{3}{5}\sqrt{10}$.

5 **a.** Als je zijde BC als basis neemt, dan is de hoogte $2\sqrt{13}$, zie opgave **1**. $BC = 2\sqrt{13}$, de oppervlakte is dus 26.
b. Dat zijn de punten X die dezelfde afstand tot lijn BC hebben als A. Die liggen op de twee lijnen evenwijdig aan lijn BC op afstand $2\sqrt{13}$. Dat zijn de lijnen door A en D (spiegelbeeld van A in BC, zie opgave **1**) evenwijdig aan lijn BC.
Vergelijkingen: $2x-3y+27=0$ en $2x-3y-25=0$.
c. Zoek punten met gelijke coördinaten op de lijnen $2x-3y+27=0$ en $2x-3y-25=0$.
Dat zijn: (27,27) en (-25,-25).

6 **a.** $R(6,2)$
b. Normaalvectoren zijn $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en het inproduct van die twee vectoren $= 0$.

c. $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$,

richtingsvector k is $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, richtingsvector m is $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

de projectie van $\overrightarrow{PR}$ op k heeft lengte $\dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$,

de projectie van $\overrightarrow{PR}$ op m heeft lengte $\dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Oppervlakte $PQRS = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{8}{\sqrt{5}} = 6\frac{2}{5}$

7 **a.** $2x - y + 2t + 1 = 0$
b. Zie applet
c. Voor $t = x + y$ invullen in $2x - y + 2t + 1 = 0$ geeft:
$2x - y + 2(x + y) + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x + y + 1 = 0$

8 **a.** Op de lijn $y = 1$
b. Elimineer t bijvoorbeeld als volgt:
Vul voor $tx = y$ in in $y = -tx + 2$, dit geeft: $y = -y + 2 \Leftrightarrow y = 1$
c. $x = 1$ en $y = 1 \Rightarrow t = 1$ en $x = 10$ en $y = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{10}$.
Als t ligt in het interval $[\frac{1}{10}, 1]$.

9 **a.** De lijnen k_t gaan door (-1,0) en en m_t door (1,0).
c. De lijnen k_t en m_t staan loodrecht op elkaar (want het product van hun richtingscoëfficiënten is -1). Dat de punten S_t op een cirkel liggen volgt dus uit de stelling van Thales.
d. Invullen in bijvoorbeeld de vergelijking van k_t:
$\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1} + ty + 1 = 0 \Leftrightarrow ty = -\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - 1 = \dfrac{-t^2 + 1 - t^2 - 1}{t^2 + 1}$, dus
$ty = \dfrac{-2t^2}{t^2 + 1} \Leftrightarrow y = \dfrac{-2t}{t^2 + 1}$.
$x = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ en $y = \dfrac{-2t}{t^2 + 1}$ invullen in de vergelijking van m_t: klopt.
e. Er is geen waarde van t waarvoor je het punt (1,0) krijgt.

10 **b.** Middelpunt A en straal 4: vergelijking $(x - 4)^2 + y^2 = 16$
c. $\angle OAS = 180° - 2\alpha$. Uit de hoekensom van driehoek OSA volgt dan dat $\angle OSA = \alpha$.
d. Uit **c** volgt: $AS = OA = 4$, dus ligt S op de cirkel met straal 4 en middelpunt A.

Omgekeerd als S op die cirkel ligt, is driehoek OAS gelijkbenig, dus is $\angle OSA = \alpha$ en is de hoek die lijn SA met de positieve x-as maakt 2α.

11 b. Middelpunt (2,2) en straal $2\sqrt{2}$.
c. De driehoeken OMA, OMS en MAS zijn gelijkbenig. $\angle MSO = \angle MOS = \frac{1}{4}\pi - \alpha$, dus (hoekensom in driehoek SOM): $\angle OMS = \frac{1}{2}\pi + 2\alpha$, dus $\angle SMA = 2\alpha$, dus $\angle MAS = \frac{1}{2}(\pi - 2\alpha) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ (hoekensom in driehoek MAS).
Dus $\angle SAO = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi - \alpha$ en $\angle SAX = \frac{1}{4}\pi + \alpha$.

12 b. Evenwijdig als $3\alpha - \alpha$ een veelvoud van π is, dus als $\alpha = 0,\ \frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ 1\frac{1}{2}\pi$.
Loodrecht op elkaar als $3\alpha - \alpha = \frac{1}{2}\pi,\ 1\frac{1}{2}\pi,\ 2\frac{1}{2}\pi, \ldots$ is, dus als $\alpha = \frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ 1\frac{1}{4}\pi,\ 1\frac{3}{4}\pi$.

13 a. (0,0); (-2,0)
c. $y = (x+1)^2 - 1$
d. $x = t$ en $y = t^2 + 2t$
Voor $x = t$ en $y = t^2 + 2t$ in de vergelijkingen van k_t en m_t invullen: klopt.
e. Uit $y = t(x+2)$ en $y = (t+2)x$ volgt: $t = x$, dat in de vergelijking van van k_t of m_t invullen geeft: $y = x(x+2)$.