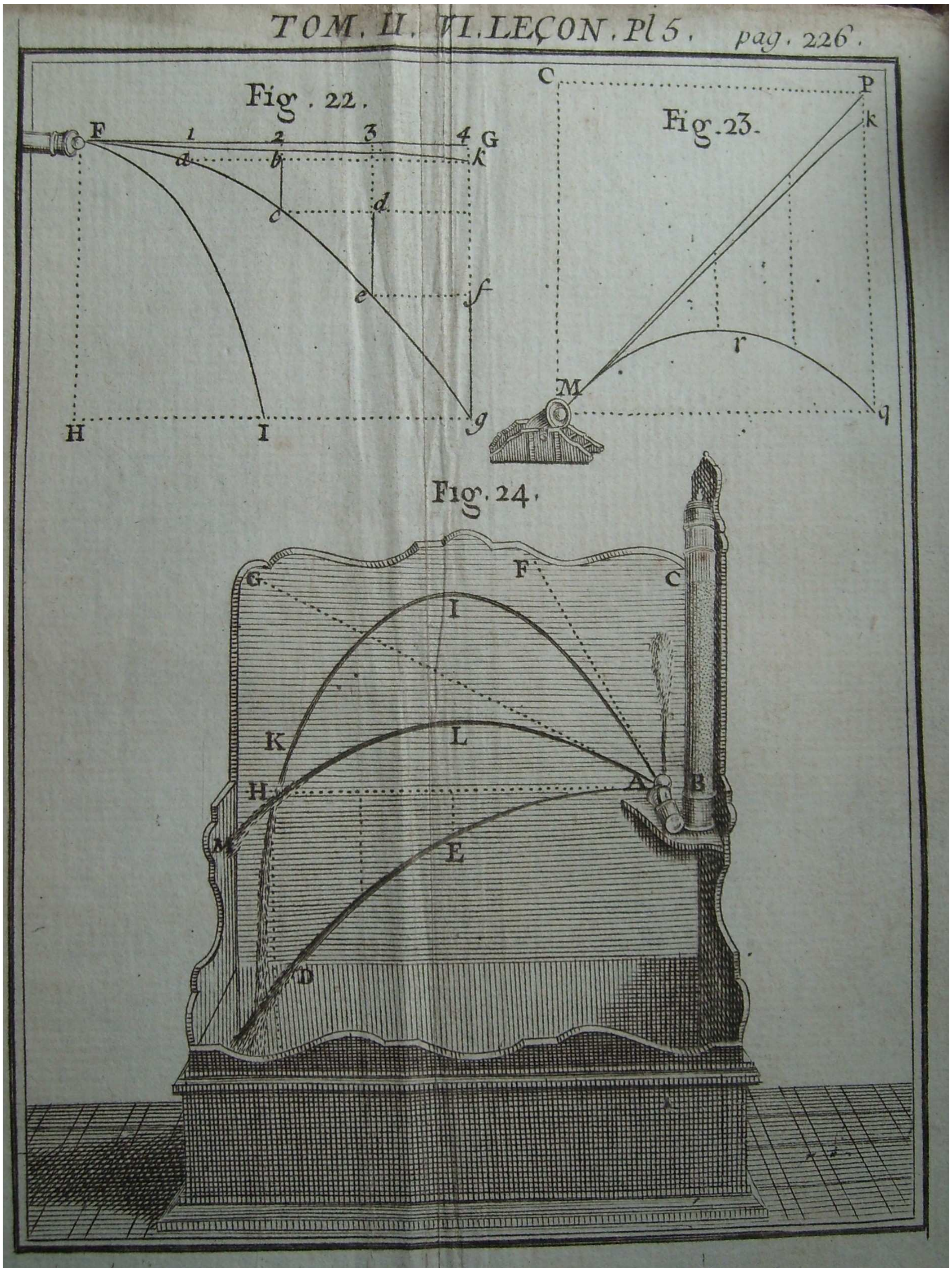
# 5 Formules en figuren



Dit is een bewerking van
*Meetkunde met coördinaten*
Blok *Formules en figuren*
van Aad Goddijn
ten behoeve van het nieuwe programma (2015) wiskunde B vwo.

✖ Opgaven met dit merkteken kun je zonder de opbouw aan te tasten, overslaan.

* Bij opgaven met dit merkteken hoort een werkblad.

**Inhoudsopgave**




Versie december 2011

**Colofon**

© 2011 cTWO

Auteurs Leon van den Broek, Dolf van den Hombergh

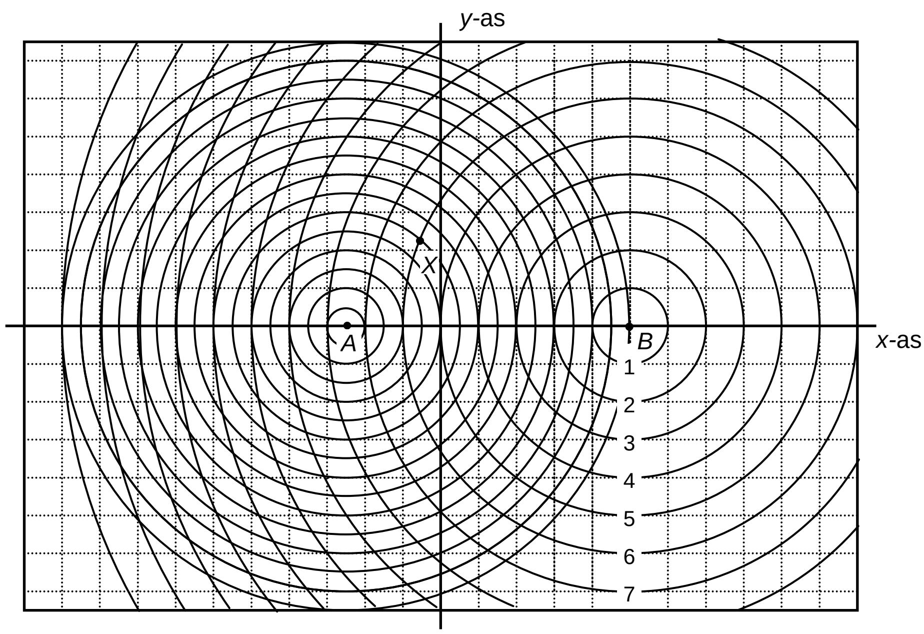
Met medewerking van Theo van den Bogaart, Josephine Buskes, Gert Dankers, Aad Goddijn, Dick Klingens

# 1 Cirkels


*** 1** Twee ziekenhuizen A en B beschikken beide over een trauma-helicopter voor spoedeisend vervoer. De helicopter van ziekenhuis B vliegt twee keer zo snel als die van A.
Als iemand snel naar een ziekenhuis moet, kan er voor A en voor B gekozen worden; dat hangt af van de plek waar de patiënt zich bevindt. Er zijn ook plekken waar het niets uitmaakt of de helicopter van A of van B komt.
Zoek op het werkblad de plekken waar het niets uitmaakt ongeveer liggen.

We gaan het probleem van opgave 1 systematisch aanpakken in een assenstelsel. Omdat de afstanden tot twee punten een rol spelen, roepen we cirkels rond die punten te hulp.

*** 2** Gegeven zijn de punten $A(-2\frac{1}{2},0)$ en $B(5,0)$. We bekijken alle punten $X$ met de eigenschap: $XB = 2 \cdot XA$. Onderstaande figuur staat ook op het werkblad. Daarop zijn cirkels getekend met middelpunt $B$, met straal 1, 2, 3, enzovoort en cirkels met middelpunt $A$ en straal $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, enzovoort.

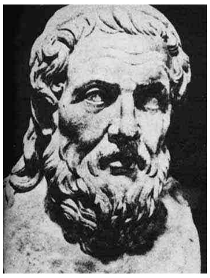


In de figuur kun je gemakkelijk punten vinden met de genoemde eigenschap. Een van de punten $X$ is aangegeven; het ligt op de cirkel met middelpunt $A$ en straal 3 en op de cirkel met middelpunt $B$ en straal 6.

**a.** Kleur op het werkblad alle punten $X$ met $XB = 2 \cdot XA$ die je met behulp van de cirkels kunt vinden.

**b.** De punten die je gekleurd hebt, lijken op een cirkel te liggen. Wat denk je, is het middelpunt en wat is de straal van die cirkel?

**c.** Ga met een exacte berekening na dat het punt $X$ met coördinaten $(-5+2\sqrt{3}, \sqrt{13})$ bovengenoemde eigenschap heeft en ook op de cirkel met middelpunt (-5,0) en straal 5 ligt.



Apollonios van Perga
Grieks: Ἀπολλώνιος
ca. 262–190 v.Chr
Grieks meetkundige en astronoom, beroemd door zijn werken over kegelsneden.
Uit: Wikipedia

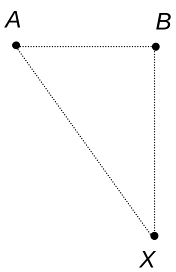
Je kunt ook de GeoGebra applet opg 5_1_2 bekijken.

In opgave **19** zullen we bewijzen dat de punten $X$ die twee keer zo ver van A afliggen als van B inderdaad een cirkel vormen. Een dergelijke cirkel wordt een *cirkel van Apollonius* genoemd.

## Vergelijkingen van cirkels

Een rechte lijn heeft in een assenstelsel een vergelijking van een bepaald type, namelijk $ax + by + c = 0$. Evenzo hebben cirkels een bepaald type vergelijking. Daarbij spelen “afstand” en “de stelling van Pythagoras” een grote rol.

**3** **a.** Bereken de exacte afstand van (3,5) tot (7,2).




Gegeven zijn het punt $A(3,5)$ en het punt $X(x,y)$; zie de figuur hiernaast. $X$ ligt 'rechtsonder' $A$, dus $x > 3$ en $y < 5$. Het punt $B$ heeft dezelfde $y$-coördinaat als $A$ en dezelfde $x$-coördinaat als $X$.

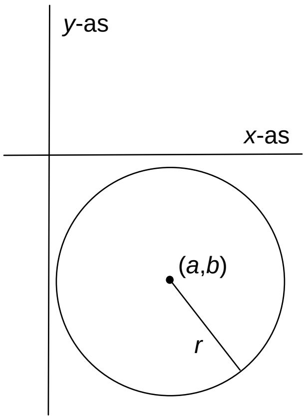
**b.** Druk de lengte van de rechthoekszijden van driehoek $AXB$ uit in $x$ en $y$.

**c.** Wat weet je van $x$ en $y$ als $AX = 5$?

Neem aan: $A = (a,b)$ en $A$ ligt 'linksboven' $X$.
Als je de stelling van Pythagoras toepast in driehoek $ABX$, vind je: $(x-a)^2 + (b-y)^2 = AX^2$ of, als je wilt,
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = AX^2$

**d.** Waarom geldt: $(b-y)^2 = (y-b)^2$?

Afhankelijk van de positie van $A$ ten opzichte van $X$ is de rechthoekszijde $AB$ gelijk aan $x-a$ of $a-x$ en de rechthoekszijde $BX$ gelijk aan $y-b$ of $b-y$. Maar vanwege de kwadraten in de stelling van Pythagoras maakt dat geen verschil voor de uiteindelijke formule.




De cirkel met middelpunt $(a,b)$ en straal $r$ heeft vergelijking:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

**4** Geef een vergelijking van:

**a.** de cirkel met middelpunt (2,-4) en straal $\sqrt{13}$ ;

**b.** de cirkel met middelpunt (-1,3) die door $O(0,0)$ gaat;

**c.** elk van de cirkels die de $x$-as en de $y$-as raken met straal 5.

**5** Bepaal de roosterpunten op de cirkel met vergelijking $x^2+y^2=65$.

### Met en zonder haakjes

**6** Als je de haakjes wegwerkt in de vergelijking van onderdeel **b** van opgave **4**, vind je:
$x^2+y^2+2x-6y=0$.

**a.** Ga dat na.


Aan de vergelijking $x^2+y^2+2x-6y=0$ zie je niet onmiddellijk dat je te maken hebt met een cirkel en ook niet wat het middelpunt en de straal van die cirkel is.
Het middelpunt en de straal van de cirkel vind je terug, als je de weg in onderdeel **a** in omgekeerde volgorde aflegt. Daarvoor moet je *kwadraatafsplitsen*.
Dit is in de derde klas aan de orde geweest.

**b.** Laat zien dat $x^2+y^2+6x-4y=14$ geschreven kan worden als $(x+3)^2+(y-2)^2=27$.
Wat zijn het middelpunt en de straal van deze cirkel?

**c.** Bepaal met kwadraatafsplitsen het middelpunt en de straal van de cirkel met vergelijking:
$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 6x - 4y = 14$
$x^2 + y^2 - 13x - 5y = 0$
$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 16$

Uit een vergelijking in de vorm $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ van een cirkel kun je onmiddellijk de straal en het middelpunt aflezen.

**7** Gegeven is de cirkel met vergelijking:
$x^2 + y^2 - 2ax - 4ay = 0$. Hierbij is $a$ een of ander getal ongelijk aan 0.
**a.** Druk de coördinaten van het middelpunt en de straal uit in $a$.
**b.** De middelpunten van de cirkels die je krijgt door $a$ te variëren, liggen op een lijn.
Leg dat uit en geef een vergelijking van die lijn.
**c.** Waarom is in de stam van deze opgave vermeld dat $a \neq 0$?

⌘ **8** Gegeven zijn de punten $A(4,0)$ en $B(6,3)$.
Bepaal het middelpunt van de cirkel door de punten $O$, $A$ en $B$ en geef een vergelijking van die cirkel.

⌘ **9** Gegeven is de cirkel met vergelijking:
$x^2 + y^2 - 2ax - 10y = 0$. Hierbij is $a$ een of ander getal.
**a.** Voor welke waarde van $a$ gaat de cirkel door het punt (5,5)? En voor welke waarde van $a$ door (2,10)?
En voor welke waarde van $a$ door (0,5)?
**b.** Voor welke waarden van $a$ heeft de cirkel straal $3\sqrt{5}$?

De cirkel gaat voor elke waarde van $a$ door $O(0,0)$.
Er is nog een punt waar de cirkel voor elke waarde van $a$ doorheen gaat.
**c.** Bepaal dat punt en laat zien dat de cirkel voor elke waarde van $a$ door dat punt gaat.

**10** De volgende vergelijkingen lijken veel op die van een cirkel. Ga na of de bijbehorende figuur wel of geen cirkel is.

| | |
|---|---|
| $x^2 + 2xy + y^2 = 10$ | $x + y^2 = 10$ |
| $x^4 + y^4 = 10$ | $x^2 + y^2 + 10 = 0$ |
| $(x^2 + y^2)^2 = 10$ | $2x^2 + 3y^2 = 10$ |
| $x^2 - y^2 = 10$ | $x^2 + y^2 = 0$ |

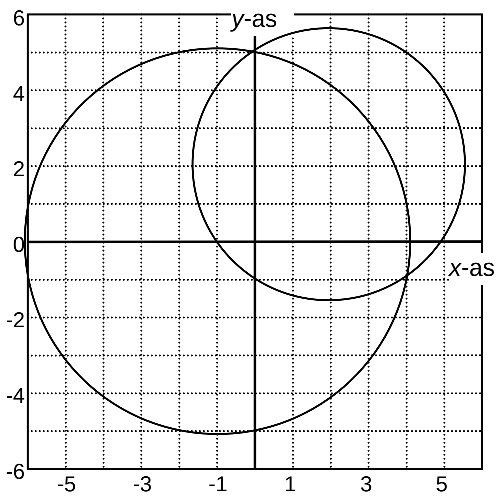
### Snijpunten uitrekenen

**11** Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2+y^2=5$.
**a.** Teken de cirkel in een assenstelsel. Geef ook alle roosterpunten aan die op de cirkel liggen.
**b.** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de lijn met pv $(x,y)=(1,\text{-}1)+t(1,2)$.
Tip. Vul $(1+t,\text{-}1+2t)$ in de vergelijking van de cirkel in.
**c.** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de lijn met vergelijking $x+y=3$ met de cirkel.
Tip. Vul voor $y$ in de vergelijking van de cirkel $3-x$ in.

**12** Gegeven is de cirkel met middelpunt (3,1) en straal 3 en de lijn met vergelijking $2x+3y=3$.
**a.** Geef een vergelijking van de cirkel.
**b.** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de lijn.

**13** Gegeven zijn de lijn met vergelijking $3x-y=11$en de cirkel met vergelijking $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.
**a.** Teken de lijn en de cirkel in een assenstelsel.
**b.** Het lijkt erop dat de cirkel en de lijn maar één punt gemeen hebben. Controleer dat met een berekening.

**14** Hieronder zijn twee cirkels getekend. Vergelijkingen van die cirkels zijn:
$(x-2)^2+(y-2)^2-13=0$ en $(x+1)^2+y^2-26=0$.




**a.** Schrijf de vergelijking
$(x-2)^2+(y-2)^2-13 = (x+1)^2+y^2-26$
zonder haakjes zo eenvoudig mogelijk.

In **a** vind je de vergelijking van een lijn.
**b.** Leg uit dat de snijpunten van de cirkels op die lijn liggen.
**c.** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de twee cirkels exact.

Voor elk punt ($x$,$y$) van de ene cirkel is de uitkomst van $(x-2)^2+(y-2)^2-13$ gelijk aan 0 en voor elk punt ($x$,$y$) van de andere cirkel is $(x+1)^2+y^2-26$ gelijk aan 0. Voor de snijpunten van de cirkels geldt dus *beide* uitdrukkingen gelijk aan 0 zijn.
Dus geldt voor de snijpunten ook bijvoorbeeld
$3\cdot((x-2)^2+(y-2)^2-13)\ -2\cdot((x+1)^2+y^2-26)=$
$3\cdot 0-2\cdot 0=0$.

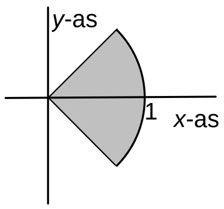
**15 a.** Vereenvoudig deze vergelijking.
**b.** Wat is de bijbehorende figuur?
**c.** Ga na deze nieuwe figuur inderdaad door de snijpunten van de cirkels uit de vorige opgave gaat.

Je kunt op allerlei manieren de formules van de twee gegeven cirkels combineren. Bijvoorbeeld:
$7\cdot((x-2)^2+(y-2)^2-13)\ +5\cdot((x+1)^2+y^2-26)=0$ ,
$((x-2)^2+(y-2)^2-12)\cdot((x+1)^2+y^2-25)=1$ ,
$2^{(x-2)^2+(y-2)^2-13}+3^{(x+1)^2+y^2-25}=2$ .
In elke van deze gevallen zal gaat de figuur door de snijpunten van de cirkels uit de vorige opgave. (De figuren kunnen bizar zijn, en verder zinloos om te bekijken, maar die twee snijpunten hebben ze gemeenschappelijk.)

**d.** Ga na dat de rechterleden in deze drie formule (dus 0, 1 en 2) goed zijn gekozen.

In opgave **14a** is gekozen voor de volgende combinatie:
$((x-2)^2+(y-2)^2-13)\ -((x+1)^2+y^2-26)=0$. Dat is met opzet gebeurd, want nu vallen de termen $x^2$ en de termen $y^2$ weg, zodat de figuur een rechte lijn is!

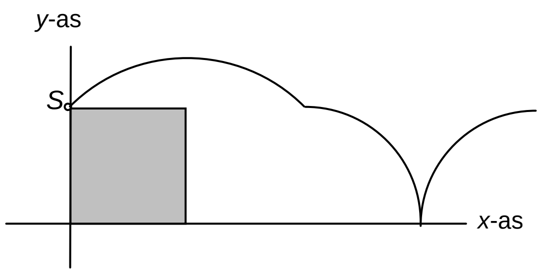
## ✂ Cirkelvaria




**16** **a.** Kleur de verzameling punten ($x$,$y$) waarvoor geldt: $1 < x^2 + y^2 \leq 5$.
**b.** Beschrijf de kwartcirkel met straal 1 hiernaast met ongelijkheden.

**17** De GR spuugt twee willekeurige getallen tussen 0 en 1 uit. Die noemen we $x$ en $y$.
Wat is de kans dat $x^2 + y^2 \leq 1$?

**18** We kantelen een kubus met ribbe 1 over de $x$-as.
Hieronder is de beginsituatie getekend.
In $S$ is een schrijfstift. Die tekent de baan bij het kantelen.

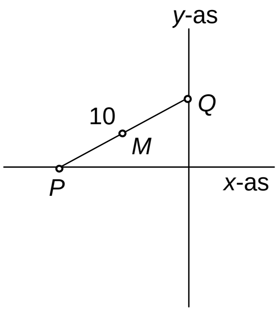



Beschrijf de baan met formules.

**19** We komen terug op opgave **2**.
Gegeven zijn de punten $A(-2\frac{1}{2},0)$ en $B(5,0)$. We bekijken alle punten $X$ met de eigenschap: $XB = 2 \cdot XA$.
Bewijs met een berekening dat deze punten een cirkel vormen.
Wat zijn het middelpunt en de straal van deze cirkel?

**20** De zijden van een driehoek zijn 13, 14 en 15.
Om de oppervlakte van de driehoek te bepalen, gaan we de hoogte berekenen als we als basis de zijde van lengte 14 nemen. We leggen de driehoek in een rooster zodat de hoekpunten $O$, $A(14,0)$ en $B(x,y)$ worden met $OB = 13$ en $AB = 15$.
$B$ ligt op twee cirkels, één met middelpunt $O$ en één met middelpunt $A$.
**a.** Geef van beide cirkels een vergelijking en teken de cirkels in het rooster.

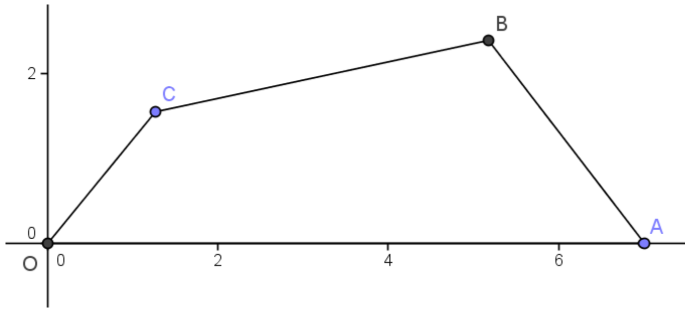
**b.** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkels.
**c.** Bereken de oppervlakte van de driehoek.




**21** We bekijken de middens $M$ van verbindingslijnstukken van lengte 10 van punten $P$ op de $x$-as en $Q$ op de $y$-as.
Noem coördinaten van $M$: $(x,y)$.
**a.** Druk de coördinaten van $P$ en $Q$ in $x$ en $y$ uit.
**b.** Aan welke vergelijking voldoet $(x,y)$?
Hoe liggen de middens van de verbindingslijnstukken?

Dit hebben eerder gezien in hoofdstuk **4**, opgave **3.4**.

**22** Een driehoek ligt vast door zijn zijden, een vierhoek niet.
We bekijken een vierhoek met zijden 2, 4, 3 en 7. We leggen de vierhoek in een assenstelsel met de hoekpunten $O$ en $A(7,0)$ vast. De andere twee hoekpunten noemen we $B$ en $C$ met $OC = 2$, $BC = 4$ en $AB = 3$.

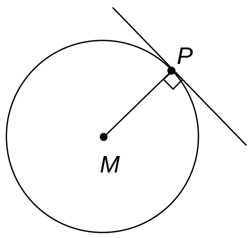



In de GeoGebra applet opg 5_2_22 kun je zien dat verschillende mogelijkheden voor vierhoek $OABC$ zijn.
We bekijken twee speciale gevallen.
**a.** Bereken de eerste coördinaat van $B$ als $C$ op lijnstuk $OB$ ligt.
**b.** Bereken de eerste coördinaat van $B$ als $OABC$ een trapezium is.

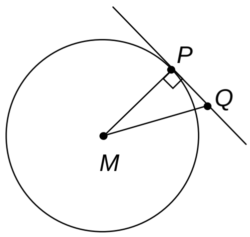
# 2 Raaklijnen aan cirkels

Met het begrip *raaklijn aan een cirkel* hebben we intuïtief al kennis gemaakt. De ingeschreven cirkel van een driehoek bijvoorbeeld raakt aan de zijden.
In het volgende hebben we een precieze beschrijving van het begrip *raaklijn* nodig, die ook werkt bij parabolen en ellipsen.

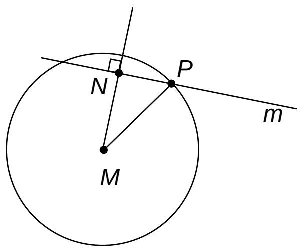
Een **raaklijn** aan een cirkel heeft één punt met de cirkel gemeen. De andere punten van de raaklijn liggen buiten de cirkel.




**stelling 1**
Gegeven is een cirkel met middelpunt *M* en een punt *P* op de cirkel.
De lijn door *P* loodrecht op *MP* is raaklijn aan de cirkel.
Er is geen andere raaklijn door *P* aan de cirkel.



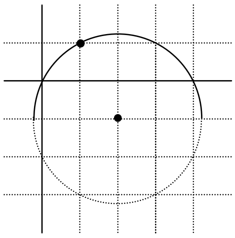

**1** **Bewijs van de stelling**
De lijn door *P* loodrecht op *MP* noemen we *k*.
Neem een ander punt dan *P* op *k*; noem dat *Q*.
**a.** Waarom geldt: $MP < MQ$?
Dus ligt *Q* buiten de cirkel.




Neem een andere lijn door *P*, zeg *m*. De projectie van *M* op *m* noemen we *N*.
**b.** Waarom geldt: $MP > MN$?
Dus ligt *N* binnen de cirkel.
Dus *m* is geen raaklijn.

**2** Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$. Op de cirkel ligt het punt *P*(3,4).
Geef een vergelijking van de raaklijn in *P* aan de cirkel.
Tip. $\overrightarrow{OP}$ is normaalvector van de raaklijn.

**3** Gegeven is de cirkel met middelpunt (2,-1). Het punt (1,1) ligt op de cirkel.
**a.** Geef een vergelijking van de raaklijn in *P* aan de cirkel.
**b.** Geef een vergelijking van de cirkel.



Het punt (1,1) ligt op de bovenkant van de cirkel. Die bovenkant is de grafiek van een functie. Een formule bij die functie is: $y = \text{-}1 + \sqrt{1 + 4x - x^2}$ .

**c.** Ga dit na.

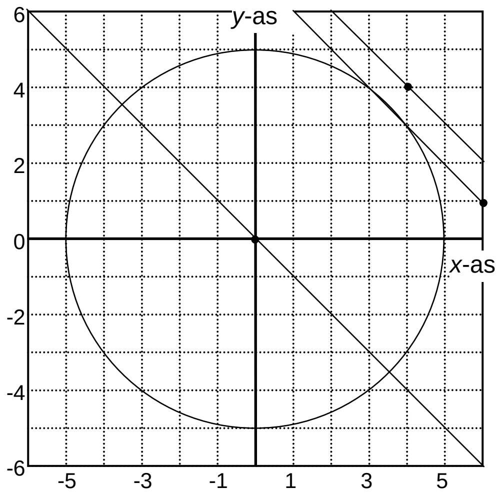
In de analyse heb je geleerd hoe je de raaklijn aan de grafiek van een functie kunt vinden met differentiëren.

**d.** Doe dit bij de functie $y = \text{-}1 + \sqrt{1 + 4x - x^2}$ in het punt (1,1). Vind je hetzelfde resultaat als in **a**?

**Opmerking**
Met differentiëren vind je dezelfde raaklijn als met een normaalvector. De techniek van differentiëren zullen we in dit hoofdstuk verder niet gebruiken.

## Raaklijnen met een gegeven richting

**4** Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$.




In het rooster hierboven is de cirkel getekend en voor drie waarden van *a* de lijn met vergelijking $x + y = a$.
Op elk van de drie lijnen is een roosterpunt aangegeven.
**a.** Bepaal de drie waarden van *a*.
**b.** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de lijn met vergelijking $x + y = 0$ met de cirkel.
**c.** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de lijn met vergelijking $x + y = 7$ met de cirkel.

De lijn $x + y = 7$ heeft twee gemeenschappelijke punten met de cirkel. De lijn $x + y = 8$ heeft geen gemeenschappelijke punten met de cirkel.

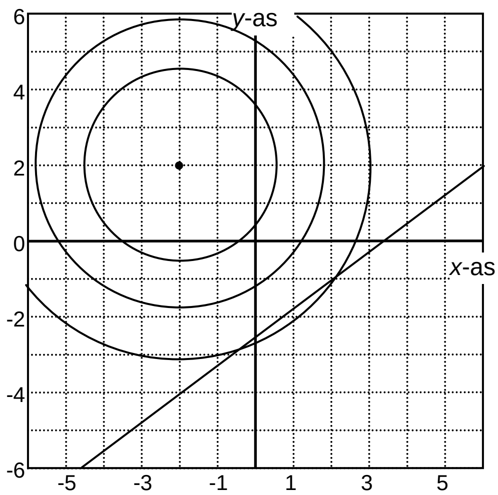
Er is één positieve waarde van $a$ tussen 7 en 8 waarvoor de lijn $x+y=a$ één punt met de cirkel gemeen heeft. Volgens stelling 1, ligt het raakpunt op de lijn door $O$ loodrecht op de lijn met vergelijking $x+y=a$.
**d.** Bepaal het raakpunt en bereken $a$.
**e.** Voor welke negatieve waarde van $a$ raakt de lijn met vergelijking $x+y=a$ aan de cirkel?

**5** Gegeven is de lijn $k$ met vergelijking $x+3y=4$ en de cirkel met vergelijking $(x-1)^2+(y+1)^2=10$.
**a.** Zoek een roosterpunt dat op de cirkel ligt en teken de cirkel en de lijn in een assenstelsel.

De lijnen $x+3y=a$ (met $a \neq 4$), zijn evenwijdig aan $k$. Er zijn twee waarden van $a$ waarvoor de lijn $x+3y=a$ de cirkel raakt. De raakpunten liggen op de lijn door het middelpunt van de cirkel met richtingsvector $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

**b.** Verklaar dat en bereken de coördinaten van de raakpunten.
**c.** Bepaal de twee waarden van $a$ waarvoor de lijn $x+3y=a$ de cirkel raakt.

**6** Gegeven de lijn $k$ met vergelijking $3x-4y=10$ en alle mogelijke cirkels met middelpunt (-2,2).




Bereken exact de straal van de cirkel die $k$ raakt.

**7** Geef vergelijkingen van de lijnen met richtingsvector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ die raken aan de cirkel met vergelijking $(x-1)^2+(y+3)^2=10$.

### Raaklijnen in een gegeven punt

**8** Het punt (3,1) ligt op de cirkel met vergelijking $(x-1)^2+(y+3)^2=20$.
Geef een vergelijking van de raaklijn in (3,1) aan deze cirkel.

**9** Gegeven de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal $r$. $P(x_0,y_0)$ ligt op de cirkel.
**a.** Leg uit dat de raaklijn in $P$ aan de cirkel een vergelijking in de vorm $x_0x+y_0y=a$ heeft, voor zekere waarde van $a$.

$a$ vind je door de coördinaten van $P$ in de vergelijking in te vullen.
**b.** Ga na dat je zo vindt: $a=r^2$.

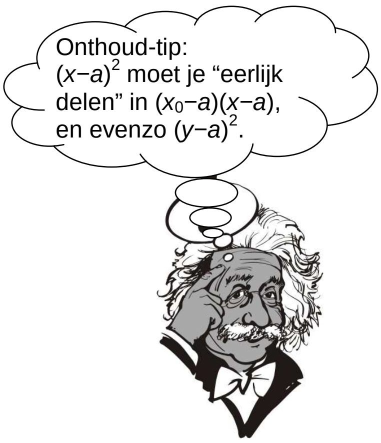
> **stelling 2**
> Een vergelijking van de raaklijn in een punt $(x_0,y_0)$ aan de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal $r$ is:
> $$x_0x+y_0y=r^2.$$

**10 a.** Controleer of de formule werkt bij opgave **2**.
**b.** Geef een vergelijking van de raaklijn aan de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ in het punt (6,-1) van de cirkel.

**11 Een tweede bewijs van stelling 2**
In deze opgave laten we met algebra zien dat de lijn $k$ met vergelijking $x_0x + y_0y = r^2$ raaklijn in $P(x_0,y_0)$ aan de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal $r$ is.
**a.** Laat zien dat uit
(1) $x_0x + y_0y = r^2$
(2) $x_0^2 + y_0^2 = r^2$
volgt:
$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = x^2+y^2-r^2$.
Tip. Werk de haakjes in het linkerlid uit.
**b.** Hoe volgt nu uit **a** dat een punt $(x,y)$ van $k$ alleen op de cirkel ligt als $(x,y)=(x_0,y_0)$ en anders er buiten?

**12** Gegeven is de cirkel met middelpunt $M(a,b)$ en straal $r$ met vergelijking: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ en een punt $P(x_0,y_0)$ op de cirkel. Een vergelijking van de raaklijn in $P$ aan de cirkel is van de vorm: $(x_0-a)x+(y_0-b)y=c$ voor een of andere constante $c$.
**a.** Leg dat uit.

**b.** Laat zien dat $(x_0 - a)(x_0 - x) + (y_0 - b)(y_0 - y) = 0$ een vergelijking is van de raaklijn in $P$ aan de cirkel.
**c.** Laat zien dat je de vergelijking in **b** kunt schrijven als: $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$.

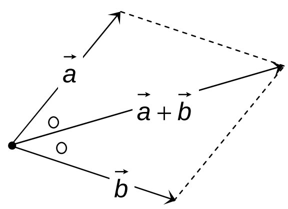



**stelling 3**
Een vergelijking van de raaklijn in een punt $(x_0,y_0)$ aan de cirkel met middelpunt $M(a,b)$ en straal $r$ is:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2.$$

## Varia

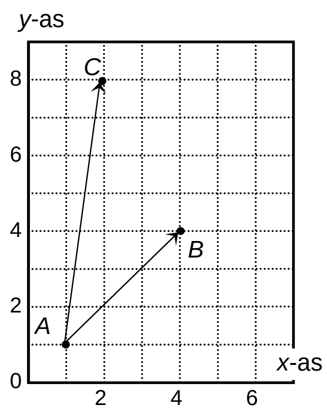
**13** Gegeven zijn de punten $P(2,0)$ en $Q(6,0)$. Er zijn twee cirkels die raken aan de $y$-as en die door de punten $P$ en $Q$ gaan.
**a.** Teken de situatie in een assenstelsel.
**b.** Bepaal de middelpunten van die cirkels en geef van elk een vergelijking.




Het volgende hebben we al eerder gezien.

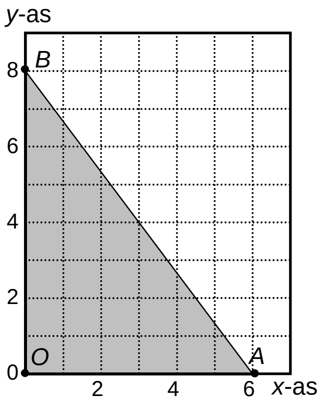
De somvector van twee vectoren van gelijke lengte deelt de hoek tussen die vectoren doormidden.

Dat is zo omdat een diagonaal in een ruit symmetrieas van de ruit is.




**Voorbeeld**
Gegeven de punten $A(1,1)$, $B(4,4)$ en $C(2,8)$. De lengte van $\overrightarrow{AB}$ is $3\sqrt{2}$ en de lengte van $\overrightarrow{AC}$ is $5\sqrt{2}$. Dus de vector $\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ is veelvoud van $\overrightarrow{AB}$ en even lang als $\overrightarrow{AC}$. Dus de vector $\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}=6\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ is richtingsvector van de bissectrice van hoek $CAB$.

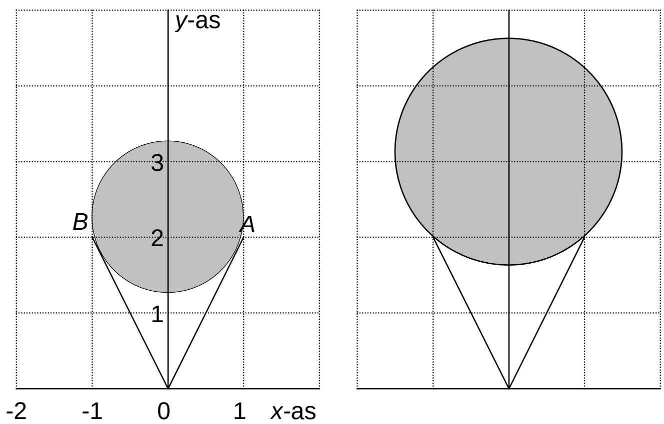
**14** Gegeven is het punt $A(5,12)$. Een cirkel met straal 5 raakt de $x$-as en lijn $OA$.
Geef een vergelijking van die cirkel, (vier mogelijkheden).



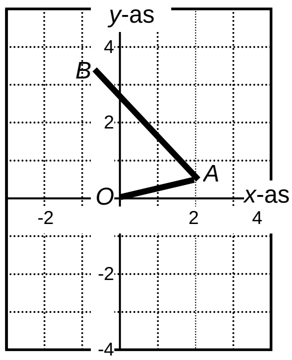

**15** We zoeken het middelpunt van een zo groot mogelijke cirkel die nog in driehoek *OAB* past, de zogenaamde ingeschreven cirkel van driehoek *OAB*. Hierbij is *O*(0,0), *A*(6,0) en *B*(0,8).
**a.** Geef pv's of vergelijkingen van de bissectrices van twee van de hoeken van driehoek *OAB*.
**b.** Bereken de coördinaten van het snijpunt van de twee bissectrices.
**c.** Geef een vergelijking van de ingeschreven cirkel van driehoek *OAB*.

**16** Gegeven het punt *P*(15,8).
De middelpunten van de cirkels die lijn *OP* in *P* raken, liggen op een lijn.
**a.** Geef een vergelijking van die lijn.
**b.** Bereken het middelpunt van de cirkel die de *y*-as raakt en de lijn *OP* in *P* raakt, twee mogelijkheden.

**17**



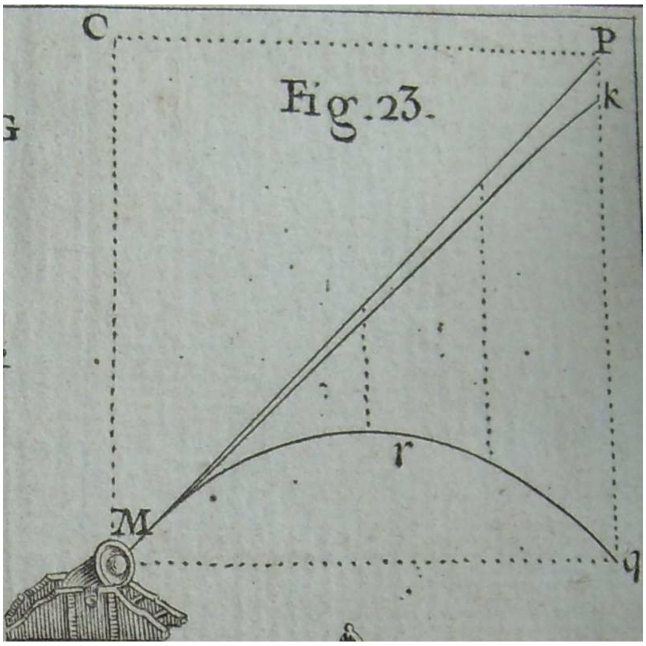

Een bal wordt in een kegel gelegd. We vragen ons af hoe diep de bal komt. Hierboven zie je een doorsnede door de as van de kegel van de situatie. De doorsnede van de kegel bestaat uit de lijnstukken *OA* en *OB* met *A* = (1,2) en *B* = (-1,2). De bal links heeft diameter 2 en de bal rechts diameter 3.
Bereken in beide gevallen de coördinaten van het middelpunt van de bal exact.




18 Twee staven $OA$ en $AB$ zijn in $A$ onder een hoek van 60° aan elkaar gelast. De lengte van $OA$ is 2 en die van $AB$ is 4. De constructie wordt om $O$ gedraaid.
We bekijken twee gebieden.
$G$ is het gebied dat door staaf $OA$ wordt bestreken.
$H$ is het gebied dat door staaf $AB$ wordt bestreken.
Beschrijf deze gebieden met ongelijkheden.

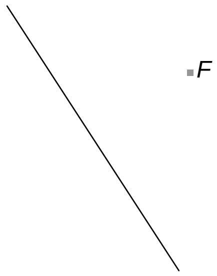
# 3 Parabolen

Hieronder zie je een detail van de voorplaat van dit hoofdstuk. Het komt uit: Nollet, Leçons de physique experimentale, tome second, Paris, MDCCLIII. Hierin worden onder andere kogelbanen bestudeerd.




**1** Een projectiel wordt in (0,0) afgevuurd met horizontale snelheid 20 m/s en verticale snelheid 30 m/s.
De zwaartekracht vermindert de verticale snelheid. Die is na $t$ seconden: $30-10t$ m/s. De afgelegde weg na $t$ seconden in verticale richting is: $y=30t-5t^2$ meter.
Voor het gemak is de valversnelling $g$ afgerond op 10 m/s$^2$.
Al we de luchtweerstand verwaarlozen, is de horizontale snelheid constant 20 m/s en de afgelegde weg in horizontale richting $x=20t$.
**a.** Maak een tabel voor $t$, $x$ en $y$, met $t$ tussen 0 en 6.
**b.** Schets de baan van het projectiel in een assenstelsel.

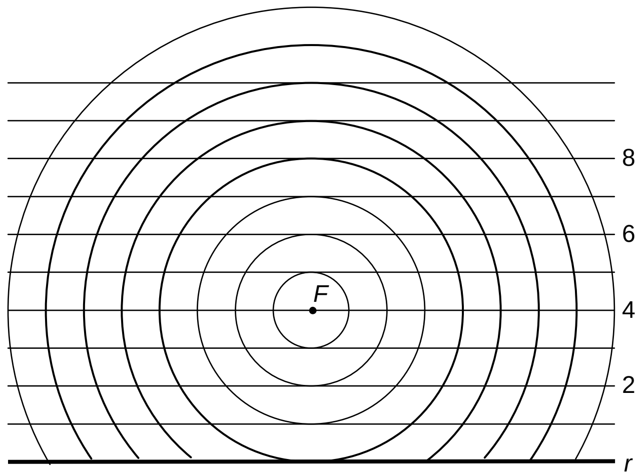
De baan is een parabool.
**c.** Stel een vergelijking (met de variabelen $x$ en $y$) op van die parabool.
**d.** Kun je die vergelijking ook vinden door $t$ te elimineren?




* **2** Jan woont even ver van zee als van de supermarkt *F* aan de rand van het nabijgelegen dorp. We veronderstellen dat de kustlijn perfect recht is.
Zoek op het werkblad waar de plekken ongeveer liggen waar Jan kan wonen.

We gaan het probleem van opgave **2** systematisch aanpakken in een assenstelsel. Omdat de afstanden tot een punt en tot een lijn een rol spelen, roepen we cirkels rond dat punt en lijnen evenwijdige aan die lijn te hulp.

* **3** *F* is een punt en *r* is een lijn. Hieronder zijn getekend de cirkels om *F* met straal 1, 2, 3, … en de lijnen boven *r* op afstand 1, 2, 3, … van *r*. De tekening staat ook op het werkblad.

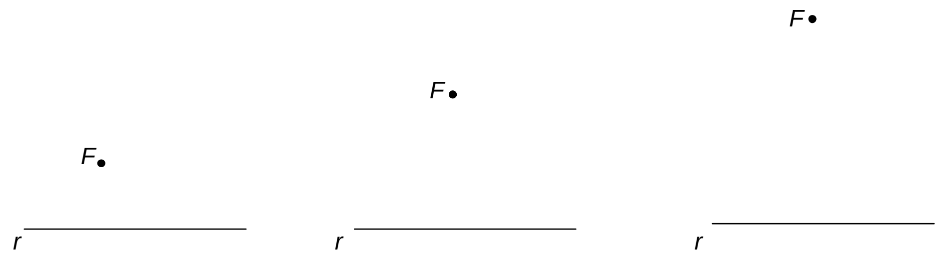



**a.** Kleur op het werkblad met behulp van de cirkels en lijnen punten die even ver van *r* als van *F* liggen.

De gekleurde figuur heeft een symmetrieas.
**b.** Geef die aan in de tekening.

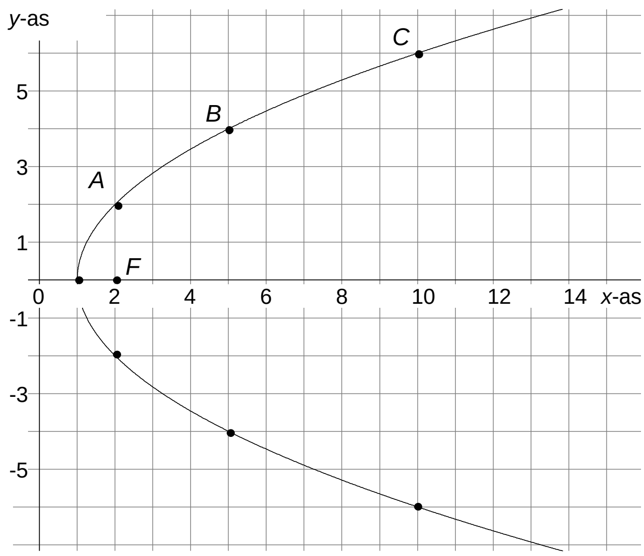
Je kunt de figuur ook in de GeoGebra applet opg5_3_3 zien.

* **4** Het plaatje hieronder staat ook op het werkblad. In elk van de drie gevallen zijn er oneindig veel punten die even ver van *F* als van *r* liggen.



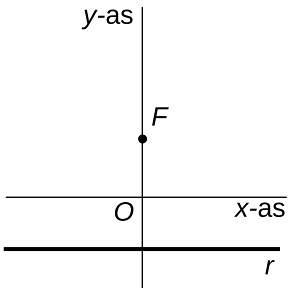

**a.** Bepaal op het werkblad in elk van de drie gevallen de volgende speciale punten die even ver van *F* als van *r* liggen: pal rechts van *F*, pal links van *F* en recht onder *F*.
**b.** Schets in elk van de drie gevallen de hele figuur van punten die even ver van *F* als van *r* liggen.

**5**




Hierboven staat de figuur van alle punten die even ver van de *y*-as als van het punt *F*(2,0) liggen.
**a.** Laat met een berekening zien dat de roosterpunten *A*, *B* en *C* precies op de figuur liggen.
**b.** Bereken exact de eerste coördinaat van het punt van de figuur met tweede coördinaat 5.

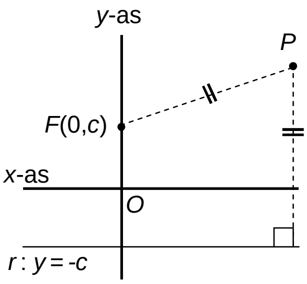
## Een vergelijking van zo'n figuur




**6** De figuur uit opgave **3** van alle punten die even ver van *r* als van *F* liggen noemen we gemakshalve *f*. We brengen een assenstelsel aan en zoeken een vergelijking van *f*. Als *y*-as kiezen we de lijn door *F* loodrecht op *r* en als *x*-as de lijn evenwijdig aan *r* die even ver van *F* als van *r* ligt. Als eenheid kiezen we een kwart van de afstand van *F* tot *r*.
Zodoende is de oorsprong $O(0,0)$ een punt van *f*, is $F=(0,2)$ en heeft *r* vergelijking $y = -2$.

De punten $P(x,y)$ van *f* hebben een positieve tweede coordinaat.
**a.** Druk de afstand van *P* tot *r* uit in *y*.

Er geldt: *P* ligt op $f \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2} = y+2$ .
**b.** Leg dat uit.
**c.** Schrijf bovenstaande vergelijking zonder haakjes, zonder wortel en zo eenvoudig mogelijk.




**7** We nemen een algemener geval: $F=(0,c)$ en $r$: $y=-c$, voor een of ander positief getal *c*. (In de vorige opgave is $c=2$.)
We zoeken weer een vergelijking van de figuur gevormd door de punten $P(x,y)$ die even ver van *r* als van *F* liggen.
**a.** Druk de afstand van *P* tot *r* uit in *y* en *c*.
**b.** Druk de afstand van *P* tot *F* uit in *x*, *y* en *c*.
**c.** Uit de gelijkheid van de uitdrukkingen in **a** en **b** volgt dat $x^2=4cy$. Reken dat na.

**definitie van een parabool**
Gegeven is een punt *F* en een lijn *r* waar *F* niet op ligt.
De punten die even ver van *r* als van *F* liggen vormen een figuur die we **parabool** noemen.

*r* heet **richtlijn** van de parabool en *F* **brandpunt**.
De lijn door *F* loodrecht op *r* is symmetrieas van de parabool. We noemen die lijn **as** van de parabool.

In de derde klas hebben we gezien dat de grafiek van elke kwadratische functie te krijgen is door die van $y=ax^2$, voor zekere waarde van *a*, te verschuiven.

Grafieken van kwadratische functies zijn dus voorbeelden van parabolen (volgens opgave **7c**); het bijzondere is dat de grafieken een verticale symmetrieas hebben.

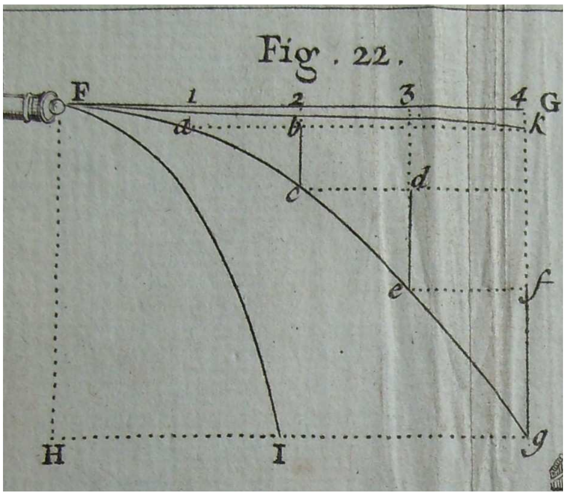
Op een parabolische spiegel worden stralen evenwijdig aan de as zó teruggekaatst dat ze allemaal door het brandpunt gaan en wel met dezelfde fase; vandaar de naam brandpunt.
Deze eigenschap maakt een parabolische spiegel geschikt om signalen uit de ruimte op te vangen.
Het Latijnse woord voor brandpunt is focus, vandaar de letter *F* voor het brandpunt.

Volgens een legende zou Archimedes (287-212 voor Chr.) in de strijd tegen Rome voor zijn vaderstad Syracuse parabolische spiegels hebben ontworpen. Door de spiegels zo te richten dat de zonnestralen werden gebundeld op de vijandelijke Romeinse houten schepen, zouden deze in brand zijn gestoken.

De radiotelescoop te Effelsberg (Duitsland), is met zijn diameter van 100 meter een van 's werelds grootste volledig stuurbare telescopen.

**8** Geef een vergelijking van de richtlijn en de coördinaten van het brandpunt van de parabool met
**a.** top $O(0,0)$ die gaat door het punt (2,6);
**b.** top $O(0,0)$ die gaat door het punt (2,-6).

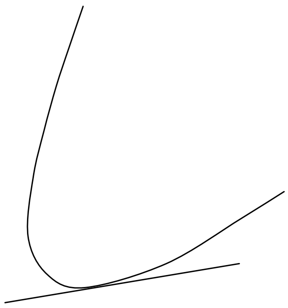
**9**




We bekijken een ander detail van de voorplaat. Een kogel wordt met horizontale snelheid *v* m/s weggeschoten. Hoeveel meter de kogel na 4 meter aan hoogte heeft verloren, hangt af van *v*. We ronden, net als in opgave **1**, de valversnelling af op 10 m/s$^2$. Dan is de verticale valweg is $-5t^2$.

Bereken *v* als de verloren hoogte 4 meter is.

# 4 Raaklijnen aan parabolen

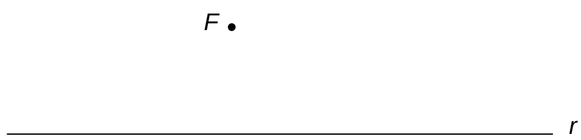


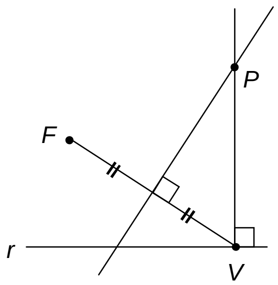
Een **raaklijn** aan een parabool heeft één punt met de parabool gemeen. De andere punten van de raaklijn liggen buiten de parabool.

NB. Een punt ligt *binnen* een parabool als het aan dezelfde kant ligt als het brandpunt, dus als het dichter bij *F* dan bij *r* ligt.

### Punten van een parabool construeren

Gegeven is een punt *F* en een lijn *r.*



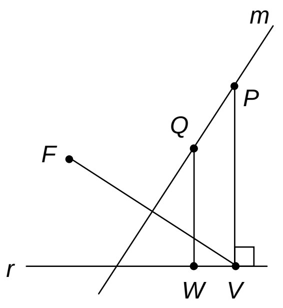

We vinden punten van de parabool met brandpunt *F* en richtlijn *r* als volgt.
- Kies een punt op *r*. We noemen dat *V*.
- Teken de lijn door *V* loodrecht op *r*.
- Teken de middelloodlijn van lijnstuk *FV*.

Het snijpunt *P* van de twee getekende lijnen ligt even ver van *r* als van *F*, dus op de parabool.

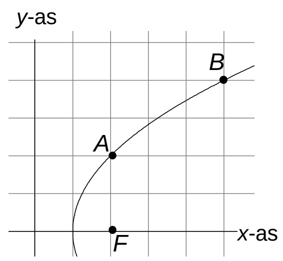
Met programma's als *Cabri*, *Geogebra*, *Cinderella* en *Passer en Liniaal* kun je op bovenstaande manier de constructie van een parabool uitvoeren. *Geogebra* en *Passer en Liniaal* zijn vrij te downloaden van internet.

Voor een punt *P* van een parabool, noemen we zijn (loodrechte) projectie op de richtlijn het **voetpunt** van *P*.

**stelling 3**
Gegeven is een parabool met brandpunt *F* en richtlijn *r.*
Voor een punt *P* van de parabool en zijn voetpunt *V* geldt: de middelloodlijn van *FV* is raaklijn in *P* aan de parabool.




**1 Bewijs stelling 3**
$Q$ is een punt van de middelloodlijn van $FV$ en $W$ is de loodrechte projectie van $Q$ op $r$.
**a.** Ga na dat $FQ = QV$ en $QW < QV$.
**b.** Hoe volgt uit **a** dat $Q$ buiten de parabool ligt?
**c.** In de tekening is $Q$ links van $P$ genomen. Toon aan dat ook een punt $Q$ op de middelloodlijn rechts van $P$ buiten de parabool ligt.




**2** We nemen de parabool uit opgave **5** van de vorige paragraaf. De richtlijn is de $y$-as en het brandpunt $F(2,0)$.
De punten $A(2,2)$ en $B(5,4)$ liggen op de parabool.
Geef een vergelijking van de raaklijn in $A$ en van de raaklijn in $B$ aan de parabool.

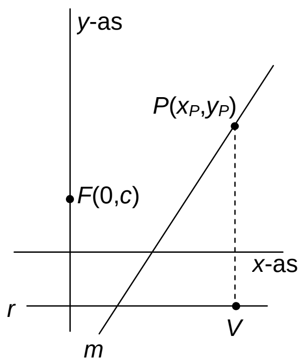
**3** Gegeven is de parabool met vergelijking $y^2 = 2x$.
**a.** Bepaal het brandpunt en de richtlijn van de parabool.
Tip. Zie opgave 7 van de vorige paragraaf.

Het punt $A(2,2)$ ligt op de parabool.
**b.** Geef een vergelijking van de raaklijn in dit punt aan de parabool.

$A$ ligt op de bovenkant van de parabool. Die bovenkant is de grafiek van een functie.
**c.** Geef een formule van die functie en bepaal de helling van de raaklijn in $A$ met behulp van de afgeleide van die functie. Vind je hetzelfde resultaat als in **b**?

We zullen de techniek van het differentiëren in dit hoofdstuk verder niet gebruiken om de raaklijn aan een parabool te bepalen.

## Een formule van de raaklijn aan een parabool




**4** De parabool $x^2 = 4cy$ heeft de richtlijn: $y = -c$ en brandpunt $(0,c)$; zie opgave **7** van de vorige paragraaf. We nemen $c > 0$.
$P(x_P,y_P)$ is een punt van de parabool en $V$ zijn voetpunt.
$m$ is de middelloodlijn van $FV$, dus de raaklijn in $P$ aan de parabool.
**a.** Er geldt $x_P{}^2 = 4cy_P$. Waarom?
**b.** Druk de coördinaten van $V$ en vervolgens $\overrightarrow{FV}$ uit in $x_P$ en $c$.

$\overrightarrow{FV}$ is normaalvector van $m$, dus een vergelijking van $m$ is: $x_P \cdot x - 2c \cdot y = a$ voor een of ander getal $a$, dat je vindt

door een punt van $m$, bijvoorbeeld $(x_P, y_P)$, of het midden van $FV$ in de vergelijking van $m$ in te vullen.
**c.** Ga na dat je dan krijgt: $a = 2cy_P$.

**Opmerking**
Als $c < 0$, moet de tekening bij opgave **4** in de $x$-as gespiegeld worden. Uiteindelijk kom je tot hetzelfde resultaat.


**stelling 4**
Een vergelijking van de raaklijn in $(x_P, y_P)$ aan de parabool met vergelijking $x^2 = 4cy$ is:

$$x_P \cdot x = 2cy + 2cy_P.$$

**5** **a.** Controleer of de formule werkt voor opgave **3b**.
**b.** Het punt (-2,12) ligt op de parabool met vergelijking $y = 3x^2$. Geef een vergelijking van de raaklijn in dit punt aan de parabool.

**6** Gegeven is de parabool met vergelijking $x^2 = 4cy$**,** waarbij $c > 0$. Voor elk punt $(x,y)$ in het vlak zijn er drie mogelijkheden:
(1) $x^2 - 4cy = 0$ , (2) $x^2 - 4cy > 0$ , (3) $x^2 - 4cy < 0$
De punten met eigenschap (1) liggen op de parabool.
Wat kun je zeggen over de ligging van de punten met eigenschap (2)? (Preciezer dan dat ze niet op de parabool liggen.)
En van de punten met eigenschap (3)?

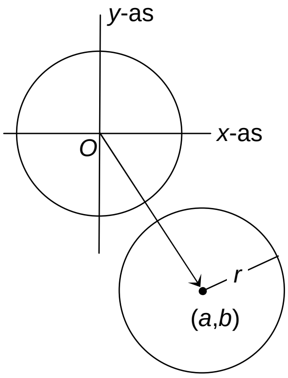
**7** **Een tweede bewijs van stelling 4**
Vergelijk de werkwijze in deze opgave met die in opgave **12** van paragraaf **2**.
Gegeven is de parabool met vergelijking $x^2 = 4cy$, waarbij $c > 0$, en een punt $P(x_P, y_P)$ op de parabool.
**a.** Laat zien dat uit
(1) $x_P^2 = 4cy_P$
(2) $x_P \cdot x = 2cy + 2cy_P$.
volgt dat: $x^2 - 4cy = (x - x_P)^2$.
Tip. Begin rechts en werk de haakjes weg.
**b.** Ga na dat uit **a** volgt: elk punt $(x,y)$ dat op de lijn met vergelijking $x_P \cdot x = 2cy + 2cy_P$ ligt, behalve $P$ zelf, ligt buiten de parabool. (Zie ook opgave **6**.)

**8** $P(4,4)$ ligt op de parabool met vergelijking $x^2 = 4y$.
**a.** Geef een vergelijking van de raaklijn in $P$ aan de parabool.
**b.** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de raaklijn met de $x$-as en de $y$-as.

$Q(6,9)$ ligt op de parabool.
**c.** Geef een vergelijking van de raaklijn in $Q$ aan de parabool.
**d.** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de raaklijn met de $x$-as en de $y$-as.

**9** Wat je in **8** gezien hebt, is een speciaal geval van het volgende.
De raaklijn in $P(x_P,y_P)$, met $x_P \neq 0$, aan de parabool met vergelijking $x^2 = 4cy$ snijdt de $x$-as in $(\frac{1}{2}x_P,0)$ en de $y$-as in $(0,-y_P)$.
Toon dat aan.
Tip. Gebruik de eigenschap $x_P^{\,2} = 4cy_P$.

# 5 Samenvatting



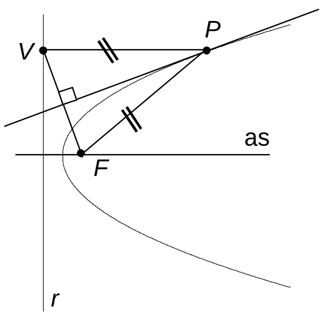

De cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal $r$ heeft vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$ (stelling van Pythagoras).

Verschuif je de cirkel over de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, dan krijg je de cirkel met middelpunt $(a,b)$ en straal $r$. Een vergelijking van deze cirkel is: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Het middelpunt van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 20$ vind je door kwadraatafsplitsen.

Een **raaklijn** aan een cirkel (parabool, ellips) heeft één punt met de cirkel (parabool, ellips) gemeen. De andere punten van de raaklijn liggen buiten de cirkel (parabool, ellips).

De raaklijn in een punt $P$ aan een cirkel met middelpunt $M$ staat loodrecht op de straal $PM$.
Een vergelijking van de raaklijn in een punt $(x_P, y_P)$ aan de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ is: $x_P x + y_P y = r^2$.

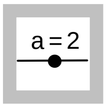



Gegeven is een punt $F$ en een lijn $r$ waar $F$ niet op ligt.
De punten die even ver van $r$ als $F$ liggen, vormen een **parabool**.
$r$ heet **richtlijn** van de parabool en $F$ **brandpunt**.
De lijn door $F$ loodrecht op $r$ is **as** van de parabool.
Als $P$ een punt van een parabool is en $V$ zijn voetpunt, dan is de middelloodlijn van $FV$ raaklijn in $P$ aan de parabool.
Een vergelijking van de raaklijn in $(x_P, y_P)$ aan de parabool met vergelijking $x^2 = 4cy$ is: $x_P \cdot x = 2cy + 2cy_P$.

## ✖ 6 Extra opgaven

**1** Gegeven is de cirkel met middelpunt $(a,a)$ die de $x$-as en de $y$-as raakt. Hierbij kan $a$ alle mogelijke waarden ongelijk 0 aannemen.
**a.** Geef een vergelijking van die cirkel.

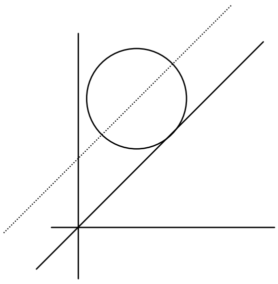
schuifknop



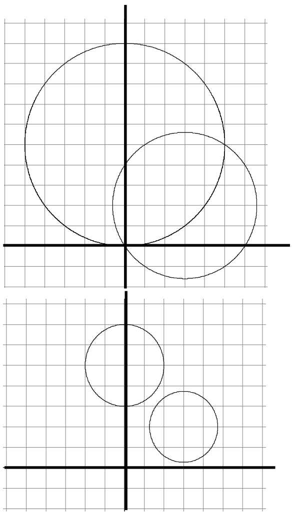


Met GeoGebra kun je een animatie maken.
- Maak een schuifknop voor $a$.
- Voer in het invoerveld de vergelijking uit **a** in.
- Klik met de rechter muisknop op de schuif; het venster dat dan verschijnt is hier links afgebeeld.

Vink aan: animatie aan.
**b.** Teken het punt (9,2) en bepaal met de schuif voor welke $a$ de cirkel door (9,2) gaat.
**c.** Bereken exact de twee waarden van $a$ waarvoor de cirkel door (9,2) gaat.



**2** In deze opgave laten we met GeoGebra een cirkel met straal 1 aan de bovenkant over de lijn $y = x$ lopen.
**a.** Geef een pv van de lijn waarover het middelpunt van de cirkel loopt.
**b.** Geef vergelijkingen van de cirkels met straal 1 die de lijn $y = x$ aan de bovenkant raken; gebruik voor het variabele middelpunt de pv van onderdeel **a**.
**c.** Welke middelpunten hebben de cirkels die de $y$-as raken? (Geef de exacte coördinaten, twee mogelijkheden.)



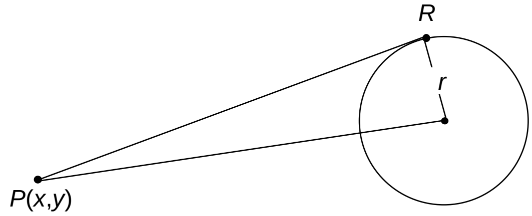
**3** In het plaatje hiernaast zijn getekend de cirkels met vergelijking $(x-3)^2+(y-2)^2=13$ en $x^2+(y-5)^2=25$.
We bekijken de vergelijking
$(x-3)^2+(y-2)^2-13=x^2+(y-5)^2-25$.
**a.** Schrijf die vergelijking zo eenvoudig mogelijk.

Je krijgt de vergelijking van een lijn.
**b.** Hoe ligt die lijn ten opzichte van de cirkels?
**c.** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de twee cirkels.

Als je de stralen van de cirkels kleiner maakt, je neemt bijvoorbeeld cirkels met vergelijking $(x-3)^2+(y-2)^2=3$ en $x^2+(y-5)^2=4$, dan stelt de vergelijking
$(x-3)^2+(y-2)^2-3=x^2+(y-5)^2-4$ nog steeds een lijn voor.

**d.** Ga na dat die lijn loodrecht staat op de verbindingslijn van de middelpunten van de cirkels.

Gegeven is een cirkel met middelpunt $M(a,b)$ en straal $r$. $P(x,y)$ is een punt buiten de cirkel en $R$ het raakpunt van een raaklijn door $P$ aan de cirkel.
**e.** Laat zien dat $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=PR^2$.




Als je vanuit een punt op de lijn met vergelijking $(x-3)^2+(y-2)^2-3=x^2+(y-5)^2-4$ raaklijnen aan de cirkels tekent, dan liggen de raakpunten even ver van dat punt.
**f.** Leg dat uit.

**4** Gegeven zijn de cirkel $x^2+y^2=50$ en het punt $P(50,0)$ buiten de cirkel. Vanuit $P$ worden de raaklijnen aan de cirkel getekend. Eén van de raakpunten noemen we $R$.
**a.** Bereken $PR$ exact.

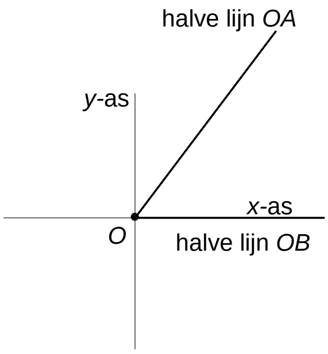
Met behulp van **a** kun je de coördinaten van $R$ berekenen door twee cirkels met elkaar te snijden.
**b.** Doe dat.

$R$ ligt ook op de cirkel met middellijn $OP$.
**c.** Leg dat uit en bereken de coördinaten van $R$ door de cirkel $x^2+y^2=50$ te snijden met de cirkel met middellijn *OP.*

**5** Gegeven zijn de cirkel $x^2+y^2=13$ en het punt $A(a, \sqrt{13-a^2}\,)$.
**a.** Voor welke waarden van $a$ is $A$ gedefinieerd?
**b.** Ga na dat $A$ op de cirkel ligt. Op welk deel van van cirkel ligt $A$?
**c.** Geef een vergelijking van de raaklijn in $A$ aan de cirkel.
**d.** Maak een animatie met GeoGebra. Teken daarvoor de cirkel en de raaklijn in $A$ en varieer $a$.

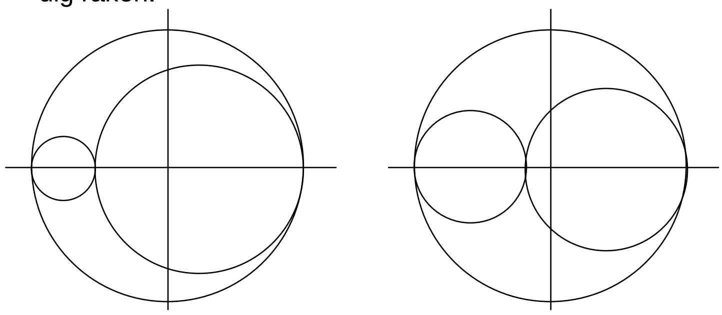
**6** Teken in GeoGebra met behulp van een schuifknop cirkels die de lijnen $y=x$ en $y=-x$ raken.

Je kunt cirkels tekenen die van boven naar beneden gaan, of van links naar rechts. Het kan ook tegelijkertijd.
Je kunt ook nog de cirkels in de ene richting van klein naar groot laten gaan en in de andere van groot naar klein.
Of nog iets anders verzinnen.
Schrijf op wat je gedaan hebt.



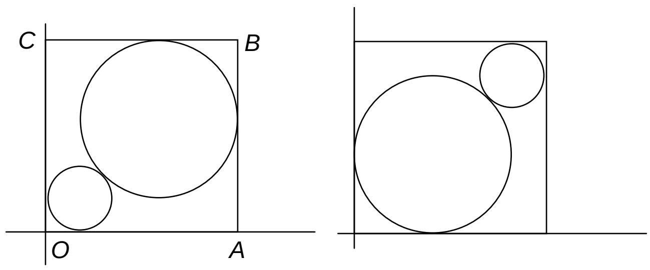

**7** Gegeven zijn $A(3,4)$ en $B(1,0)$.
**a.** Toon aan dat een cirkel die de halve lijn *OA* en de halve lijn *OB* raakt, als middelpunt $(2a,a)$ voor een zeker getal $a$ heeft.
**b.** Geef een vergelijking van zo'n cirkel met de parameter $a$ en controleer **a** met GeoGebra.
**c.** Bereken $a$ als de cirkel ook de lijn $3x+4y=60$ raakt.

**8** Binnen een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal 8 zijn **er** een heleboel tweetallen cirkels met middelpunt op de *x*-as die elkaar uitwendig raken en de grote cirkel inwendig raken.



Varieer de stralen van de twee cirkels in een animatie met GeoGebra.

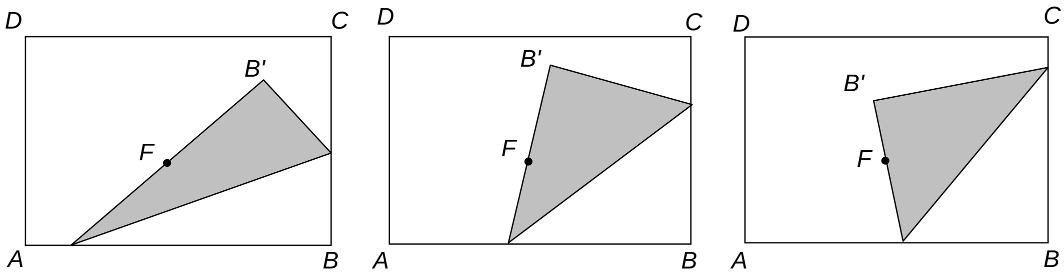
**9** $A=(4,0)$ en $C(0,4)$.
Twee variabele cirkels met middelpunt op de diagonaal *OB* binnen vierkant *ABCO*. De cirkels raken elkaar. De cirkels raken allebei twee zijden van het vierkant en ze raken elkaar.

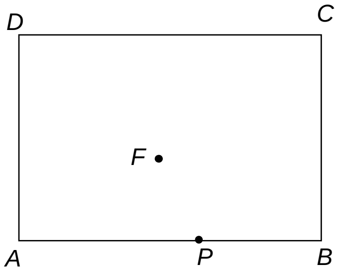



Maak een animatie met GeoGebra.

* **10 Een parabool vouwen**

*ABCD* is een rechthoekig vel papier met daarop een punt *F*. We vouwen de hoek bij *B* zo om dat de rand *AB* door *F* gaat. Dat kan op allerlei manieren. Hieronder staan drie voorbeelden.




De vouwlijn noemen we *PQ*, met *P* op *AB* en *Q* op *BC*. De plaats van *B* na het vouwen noemen we *B*'.
Hiernaast is op de rand *AB* een punt *P* gekozen.
**a.** Bepaal op het werkblad zonder te vouwen het bijbehorende punt *Q*. Licht je werkwijze toe.

**b.** Neem een vel papier en zet er een stip *F* op. Vouw een aantal lijnen.

De vouwlijnen die je krijgt door *P* te variëren vormen het buitengebied van de parabool *p* met als richtlijn de onderkant *r* van het vel papier en brandpunt *F*. Zo'n vouwlijn raakt de parabool.
Dat kun je als volgt inzien. In **a** heb je (waarschijnlijk) gebruikt dat de vouwlijn *PQ* bissectrice is van een hoek tussen de lijnen *FP* en *r*.
**c.** Zoek een punt *R* op lijn *PQ* dat even ver van *r* als van *F* ligt. Noem het bijbehorende voetpunt *V*.

Dus is lijn *PQ* middelloodlijn van *FV*, dus raaklijn in *R* aan de parabool.

Elke raaklijn aan de parabool kun je krijgen door als boven te vouwen (als het papier maar breed genoeg is).
Naar: Examen wiskunde B12, 2008, tijdvak I

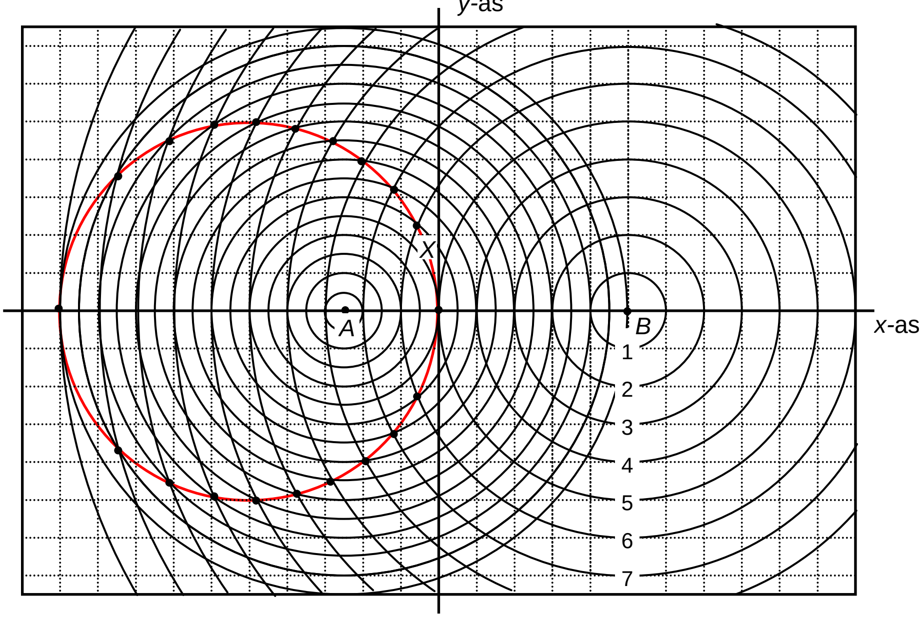
**11** We kiezen een assenstelsel zó, dat de parabool uit de vorige opgave vergelijking $4y = x^2$ krijgt.
**a.** Maak een animatie met GeoGebra waarbij raaklijnen langs de parabool 'glijden'. Teken er ook de richtlijn en het brandpunt bij.
Schrijf op wat je gedaan hebt.
**b.** Er zijn twee raaklijnen aan de parabool die door het punt $P(-1\frac{1}{2},-1)$ gaan. Wat zijn de bijbehorende raapunten?

**12** We bekijken de snijpunten van de cirkel met vergelijking $x^2 + (y - 2)^2 = a^2$ met de lijn met vergelijking $y = a + 3$ voor alle mogelijke waarden van $a$ ongelijk 0.
Je kunt dit bekijken met de GeoGebra applet opg5_6_11.
**a.** Voor welke waarden van $a$ zijn er geen snijpunten? Licht je antwoord toe.

De snijpunten die je voor de diverse waarden van $a$ krijgt vormen een parabool.
**b.** Waarom? Wat is de richtlijn en wat het brandpunt van de parabool?
Licht je antwoord toe.
Tip. Vat -*a* op als afstand tot een vast punt en vaste lijn.
**c.** Geef een vergelijking van de parabool door de parameter $a$ te elimineren. Schrijf je berekening op.

# 7 Antwoorden

**2** **a.**




**b.** Middelpunt (-5,0) en straal 5.
**c.** Kwadraat van de afstand tot (5,0) is
$(10-2\sqrt{3})^2+\sqrt{13}^{\,2}=125-40\sqrt{3}$ en
kwadraat van de afstand tot $(-2\frac{1}{2},0)$ is
$(-2\frac{1}{2}+2\sqrt{3})^2+\sqrt{13}^{\,2}=31\frac{1}{4}-10\sqrt{3}$, dus $XB=2\cdot XA$.
Kwadraat van de afstand tot (-5,0) is 25. Klopt.

**3** **a.** $\sqrt{(7-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{25}=5$
**b.** $x-3$, $5-y$
**c.** $(x-3)^2+(5-y)^2=25$
**d.** $b-y$ en $y-b$ zijn tegengesteld, dus ze hebben hetzelfde kwadraat.

**4** **a.** $(x-2)^2+(y+4)^2=13$
**b.** $(x+1)^2+(y-3)^2=10$
**c.** $(x+5)^2+(y-5)^2=25$, $(x-5)^2+(y-5)^2=25$,
$(x+5)^2+(y+5)^2=25$, $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

**5** (1,8), (4,7), (7,4), (8,1), (-1,8), (-4,7), (-7,4), (-1,-8), (-4,-7), (-7,-4), (-8,-1), (1,-8), (4,-7), (7,-4), (8,-1), (-8,1)

**6** **b.** $x^2+y^2+6x-4y=14 \Leftrightarrow$
$x^2+6x+9+y^2-4y+4=14+9+4 \Leftrightarrow$
$(x+3)^2+(y-2)^2=27$
middelpunt (-3,2), straal $3\sqrt{3}$

**c.** (-6,4), $4\sqrt{5}$ ; $(6\frac{1}{2},2\frac{1}{2})$, $\frac{1}{2}\sqrt{194}$ ;(0,0), $2\sqrt{2}$

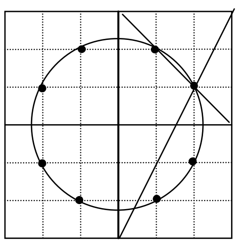
**7** **a.** middelpunt $(a,2a)$, straal $|a|\sqrt{5}$
**b.** Het middelpunt ligt op de lijn met pv $(t,2t)$. Een vergelijking is: $y=2x$.
**c.** Als $a=0$, voldoet alleen $O(0,0)$ aan de vergelijking, dan heb je geen cirkel.

**8** middelloodlijn $OA$: $x=2$; middelloodlijn $OB$: $2x+y=7\frac{1}{2}$, snijpunt $(2,3\frac{1}{2})$ is het middelpunt.
Vergelijking $(x-2)^2+(y-3\frac{1}{2})^2=16\frac{1}{4}$

**9** **a.** (5,5) in de vergelijking invullen geeft:
$25+25-10a-50=0$, dus $a=0$;
(2,10) invullen geeft: $a=1$; (0,5) invullen geeft geen oplossing voor $a$.
**b.** Kwadraatafsplitsen geeft: $(x-a)^2+(y-5)^2=a^2+25$, dus $a^2=20$, dus $a=\pm 2\sqrt{5}$ .
**c.** Teken maar enkele cirkels, dan zie je dat dit punt (0,10) is.
Het kan ook zo: aan de vorm van de vergelijking zie je dat $x=0$, want dan doet de waarde van $a$ er niet toe. Dus $y^2-10y=0$, dus $y=0$ of $y=10$, je krijgt dus (0,0) en (0,10).

**10** ligt aan $xy$ ;
het kwadraat bij $x$ ontbreekt
geen kwadraten, maar vierde machten ;
geen enkel punt
cirkel met middelpunt $O$, straal $\sqrt[4]{10}$ ;
$2\neq 3$
$-$ in plaats van $+$ ;
alleen $O$ voldoet ("cirkel" met straal 0)

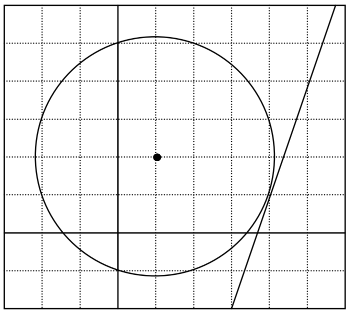
**11** **a.**



**b.** $(1+t)^2+(-1+2t)^2=5 \Leftrightarrow 5t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow t=1$ of $t=-\frac{3}{5}$
Dat geeft (2,1) en $(\frac{2}{5},-2\frac{1}{5})$ als snijpunten.
**c.** $y=3-x$ invullen geeft: $x^2+(3-x)^2=5 \Leftrightarrow x=1$ of $x=2$.
De snijpunten zijn (1,2) en (2,1).

**12 a.** $(x-3)^2+(y-1)^2=9$
**b.** Voor $x=1\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}y$ invullen geeft:
$(-1\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}y)^2+(y-1)^2=9 \Leftrightarrow y=1$ of $y=-\frac{23}{13}$.
De snijpunten zijn (0,1) en $(\frac{54}{13}, -\frac{23}{13})$.

**13 a.**

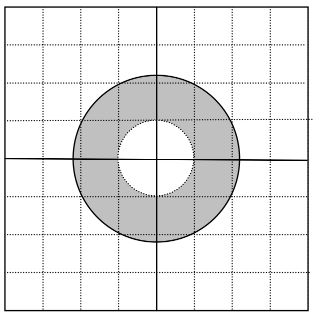


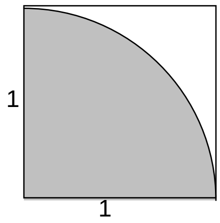
**b.** $y=3x-11$ invullen geeft: $(x-1)^2+(3x-13)^2=10 \Leftrightarrow$
$10x^2-80x+160=0 \Leftrightarrow (x-4)^2=0$
Deze vergelijking heeft maar één oplossing.

**14 a.** $3x+2y=10$
**b.** Voor een snijpunt geldt zowel $(x-2)^2+(y-2)^2-13=0$ als $(x+1)^2+y^2-26=0$, dus ook
$(x-2)^2+(y-2)^2-13 = (x+1)^2+y^2-26$.
**c.** $y=-1\frac{1}{2}x+5$ invullen in een van beide cirkel-vergelijkingen geeft: $(x-2)^2+(-1\frac{1}{2}x+3)^2-13=0$.
De oplossingen van deze vergelijking zijn: $x=0$ en $x=4$.
De snijpunten zijn (0,5) en (4,-1).

**15 a.** $x^2+y^2-16x-12y+35=0$.
**b.** De vergelijking kan worden geschreven als
$(x-8)^2+(y-6)^2=65$; het is dus een cirkel.
**c.** De punten (0,5) en (4,-1) voldoen aan deze vergelijking.
**d.** $7\cdot 0+5\cdot 0=0$ ; $1\cdot 1=1$ ; $2^0+3^0=2$

**16 a.** De binnenrand van het grijze gebied hoort er niet bij, de buitenrand wel.
**b.** $x^2+y^2\leq 1$ en $-y\leq x\leq y$.



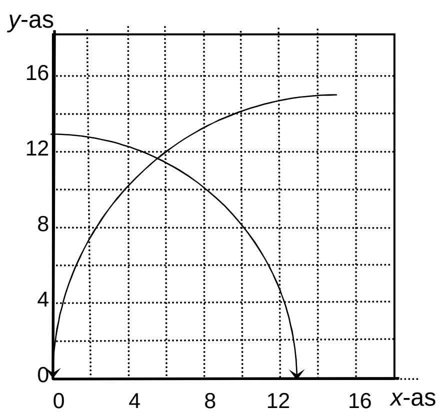



**17** Dat is $\frac{\text{oppervlakte kwartcirkel}}{\text{oppervlakte vierkant}} = \frac{1}{4}\pi$

**18** eerste deel: $(x-1)^2 + y^2 = 2$ en $0 \le x \le 2$
tweede deel: $(x-2)^2 + y^2 = 1$ en $2 \le x \le 3$
derde deel: $(x-4)^2 + y^2 = 1$ en $3 \le x \le 4$

**19** $4((x+2\frac{1}{2})^2 + y^2) = (x-5)^2 + y^2 \Leftrightarrow$
$4x^2 + 20x + 25 + 4y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 \Leftrightarrow$
$x^2 + 10x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 + y^2 = 25$
Het middelpunt is (-5,0) en de straal is 5.

**20 a.** $x^2 + y^2 = 169$ en $(x-14)^2 + y^2 = 225$

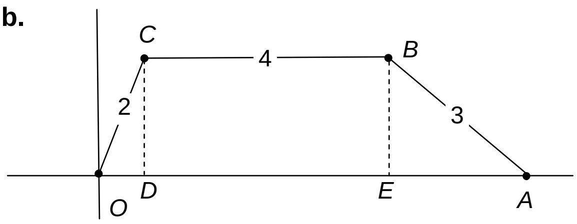



**b.** $x^2 + y^2 - 169 = (x-14)^2 + y^2 - 225 \Leftrightarrow x = 5$. De lijn door de snijpunten is de lijn $x = 5$. Deze lijn snijden met bijvoorbeeld de cirkel $x^2 + y^2 = 169$ geeft de snijpunten (5,12) en (5,-12).
**c.** $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 = 84$

**21 a.** $(2x,0)$ en $(0,2y)$.
**b.** $(2x)^2 + (2y)^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$. De middens liggen dus op de cirkel met middelpunt $O$ en straal 5.

**22 a.** $B$ ligt op de cirkel met middelpunt (7,0) en straal 3. Een vergelijking van deze cirkel is $(x-7)^2 + y^2 = 9$
In dit geval ligt $B$ ook op de cirkel met middelpunt $O$ en straal 6, een vergelijking van deze cirkel is $x^2 + y^2 = 36$.
$(x-7)^2 + y^2 - 9 = x^2 + y^2 - 36 \Leftrightarrow x = 5\frac{3}{7}$

**b.**



Zie plaatje. $D$ is de loodrechte projectie van $C$ op de $x$-as en $E$ die van $B$. Noem de eerste coördinaat van $C$ $x$, dan $EA = 3 - x$ en $CD^2 = 4 - x^2 = BE^2 = 9 - (3 - x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

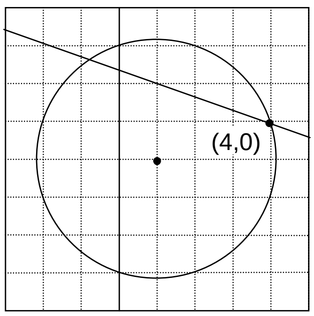
**Paragraaf 2 Raaklijnen aan de cirkel**

**1** **a.** Het kortste verbindingslijnstuk van een punt met een lijn staat loodrecht op die lijn; elk ander verbindingslijnstuk is langer.
Alternatief: Pythagoras: $MQ^2 = MP^2 + PQ^2 > MP^2$,
dus $MQ > MP$.
**b.** Dezelfde redenering als in **a**.

**2** $3x + 4y = 25$

**3** **a.** $\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ is normaalvector, dus een vergelijking is:
$x - 2y = a$. $P$ ligt op de lijn, dus $x - 2y = -1$.
**b.** $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$
**c.** $(y+1)^2 = 5 - (x-2)^2 = 1 + 4x - x^2$, dus
$y = -1 + \sqrt{1 + 4x - x^2}$ of $y = -1 - \sqrt{1 + 4x - x^2}$ .
$y = -1 + \sqrt{1 + 4x - x^2}$ hoort bij de bovenkant van de cirkel en $y = -1 - \sqrt{1 + 4x - x^2}$ bij de onderkant.
**d.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-1 + \sqrt{1 + 4x - x^2}\right) = \frac{2 - x}{\sqrt{1 + 4x - x^2}}$, de afgeleide in (1,1) is dus $\frac{1}{2}$, de raaklijn heeft richtingsvector $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Je krijgt dus met differentiëren dezelfde raaklijn.

**4** **a.** $a = 0$, $a = 7$ en $a = 8$
**b.** $x^2 + x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $x = -2\frac{1}{2}\sqrt{2}$ .
Snijpunten zijn $(2\frac{1}{2}\sqrt{2}, -2\frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(-2\frac{1}{2}\sqrt{2}, 2\frac{1}{2}\sqrt{2})$.
**c.** $x^2 + (7 - x)^2 = 25 \Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 24 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ of $x = 4$. De snijpunten zijn (3,4) en (4,3).
**d.** Zie **b**, $x = y = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$ , dus $a = 5\sqrt{2}$ .
**e.** $a = -5\sqrt{2}$




**5** **a.**
**b.** Als $R$ raakpunt is, dan is $\overrightarrow{MR} \perp k$, dus is $\overrightarrow{MR}$ een veelvoud van een normaalvector van $k$ dus van $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Omdat de lengte van deze vector gelijk is aan de straal van de cirkel, zijn de raakpunten:

$(1+1,-1+3)=(2,2)$ en $(1-1,-1-3)=(0,-4)$.

**6** We berekenen de afstand van $M(-2,2)$ tot $k$. De lijn door $M$ loodrecht op $k$ heeft pv $(x,y)=(-2+3t,2-4t)$. Voor het snijpunt van deze lijn met $k$ geldt: $3\cdot(-2+3t)-4\cdot(2-4t)$ $=10 \Leftrightarrow t=\frac{24}{25}$. De afstand van $M$ tot zijn projectie op $k$ is dus $\frac{24}{25}\cdot 5=4\frac{4}{5}$.

**7** De raakpunten liggen op de lijn door het middelpunt $(1,-3)$ van de cirkel met normaalvector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Een vergelijking van die lijn is $x+2y=-5$. Deze lijn snijden met de cirkel geeft:
$(-2y-5-1)^2+(y+3)^2=10 \Leftrightarrow y=-3+\sqrt{2}$ of $y=-3-\sqrt{2}$.
Als $y=-3+\sqrt{2}$, dan $x=1-2\sqrt{2}$ en als $y=-3-\sqrt{2}$, dan $x=1+2\sqrt{2}$.
Vergelijkingen van de raaklijnen zijn:
$2x-y=5-5\sqrt{2}$ en $2x-y=5+5\sqrt{2}$.

**8** Het middelpunt van de cirkel is $(1,-3)$, dus een normaalvector van de lijn is $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.
Een vergelijking is dus $x+2y=a$, voor zekere $a$. $(3,1)$ ligt op de lijn dus een vergelijking is: $x+2y=5$.

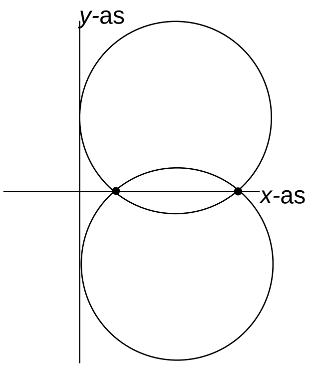
**9 a.** $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ is normaalvector van de lijn.
**b.** Omdat $P$ op de lijn ligt geldt: $x_0^2+y_0^2=a$.
Omdat $P$ op de cirkel ligt geldt. $x_0^2+y_0^2=r^2$.
Dus $r^2=a$.

**10 b.** $6x-y=37$

**11 a.** $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=x^2-2xx_0+x_0^2+y^2-2yy_0+y_0^2=$ $x^2+y^2+x_0^2+y_0^2-2xx_0-2yy_0=x^2+y^2+r^2-2r^2=x^2+y^2-r^2$
**b.** $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\geq 0$ en $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$ $\Leftrightarrow (x,y)=(x_0,y_0)$.
Dus $x^2+y^2>r^2$, tenzij $(x,y)=(x_0,y_0)$. Dus ligt $(x,y)$ buiten de cirkel, tenzij $(x,y)$ het raakpunt op de cirkel is.

**12 a.** $\begin{pmatrix}x_0-a\\y_0-b\end{pmatrix}$ is normaalvector van de raaklijn.
**b.** $(x_0,y_0)$ voldoet aan $(x_0-a)x+(y_0-b)y=c$, dus $c=(x_0-a)x_0+(y_0-b)y_0$. Dit geeft:

$(x_0 - a)x + (y_0 - b)y = (x_0 - a)x_0 + (y_0 - b)y_0$, dus
$(x_0 - a)x - (x_0 - a)x_0 + (y_0 - b)y - (y_0 - b)y_0 = 0$, dus
$(x_0 - a)(x_0 - x) + (y_0 - b)(y_0 - y) = 0$.
**c.** Er geldt: $(x_0 - a)(x_0 - a) + (y_0 - b)(y_0 - b) = r^2$, want $(x_0, y_0)$ ligt op de cirkel. Trek hiervan af de vergelijking uit **b**:
$(x_0 - a)(x_0 - x) + (y_0 - b)(y_0 - y) = 0$.
Dan krijg je
$(x_0 - a)(x_0 - a - x_0 + x) + (y_0 - b)(y_0 - b - y_0 + y) = r^2$.
Dus: $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$.




**13 a.** Zie het plaatje hiernaast.
**b.** Het middelpunt van de cirkel ligt op de middelloodlijn van $PQ$, dus op de lijn $x = 4$. Omdat de cirkel de $y$-as raakt is de straal 4. Het middelpunt is dus $M(4,a)$, waarbij de afstand van $M$ tot $P(2,0)$ gelijk aan 4 is, dus
$2^2 + a^2 = 4^2$, dus $a = 2\sqrt{3}$ of $a = -2\sqrt{3}$.
$(x - 4)^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 = 16$ en $(x - 4)^2 + (y + 2\sqrt{3})^2 = 16$

**14** De lengte van vector $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ is 13, dus $\begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$ is een vector die de hoek tussen lijn $OA$ en de $x$-as middendoor deelt. Het middelpunt van de cirkel ligt op de lijn met pv $(3t,2t)$ of op de lijn door $O$ daar loodrecht op, dus met pv $(-2t,3t)$. De straal is de afstand tot de $x$-as.
Als het middelpunt $(3t,2t)$ is, dan $t = 2\frac{1}{2}$ of $t = -2\frac{1}{2}$. Je krijgt de cirkels $(x - 7\frac{1}{2})^2 + (y - 5)^2 = 25$ en $(x + 7\frac{1}{2})^2 + (y + 5)^2 = 25$.
Als het middelpunt $(-2t,3t)$ is, dan $t = 1\frac{2}{3}$ of $t = -1\frac{2}{3}$. Je krijgt de cirkels $(x + 3\frac{1}{3})^2 + (y - 5)^2 = 25$ en $(x - 3\frac{1}{3})^2 + (y + 5)^2 = 25$.

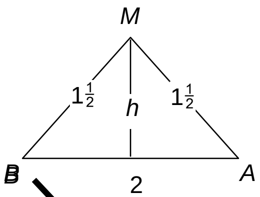
**15 a.** De bissectrice van hoek $AOB$ heeft pv $(t,t)$.
De vector $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ heeft lengte 10, dus een vector die hoek $OAB$ doormidden deelt is $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Een pv van de bissectrice van hoek $OAB$ is:
$(x,y) = (6,0) + s(-2,1) = (6 - 2s, s)$
**b.** Het snijpunt van de twee bissectrices uit **a** heeft gelijke $x$- en $y$-coördinaat , dus $6 - 2s = s$, dus $s = 2$.
**c.** $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

**16 a.** Dat is de lijn door $P$ loodrecht op $OP$, dus vergelijking $15x + 8y = 289$.
**b.** Het middelpunt ligt op een van de bissectrices van de $y$-as en lijn $OP$. De vector $\begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$ heeft lengte 17, dus rich-

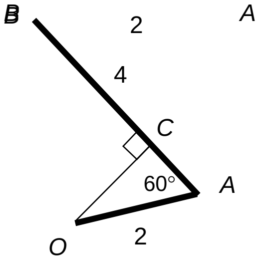
tingsvectoren van de bissectrices zijn $\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\17\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.

De middelpunten zijn de snijpunten van $5x-3y=0$ en $3x+5y=0$ met $15x+8y=289$,
dus: $(10\frac{1}{5}, 17)$ en $(28\frac{1}{3}, -17)$.

**17** Het middelpunt van de cirkel noemen we $M(0,m)$, $m>0$.
• Het linker geval. De grijze cirkel raakt de de lijn $OA$, zeg in $P(t,2t)$, dan $\vec{OA}\cdot\vec{MP}=0$ en $MP^2=1$, dus:
$1\cdot t+2\cdot(2t-m)=0$ en $t^2+(2t-m)^2=1$, dus $t=\frac{2}{5}m$ en
$\frac{4}{25}m^2+\frac{1}{25}m^2=1$, dus $m=\sqrt{5}$, het middelpunt is $(0, \sqrt{5})$




• Het rechter geval. Driehoek $AMB$ heeft zijden 2, $1\frac{1}{2}$ en $1\frac{1}{2}$, zie plaatje. De hoogte van de driehoek is $h=\frac{1}{2}\sqrt{5}$.
Dus het middelpunt is $(0{,}2+\frac{1}{2}\sqrt{5})$.



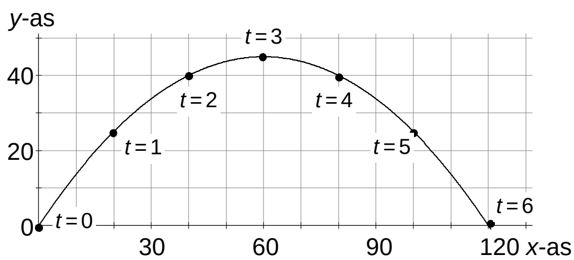

**18** $G$: $x^2+y^2\le 4$
Er geldt: $OC=\sqrt{3}$ en $OB=2\sqrt{3}$, dus:
$H$: $3\le x^2+y^2\le 12$

**Paragraaf 3 Parabolen**

**1** **a.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $x$ | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
| $y$ | 0 | 25 | 40 | 45 | 40 | 25 | 0 |

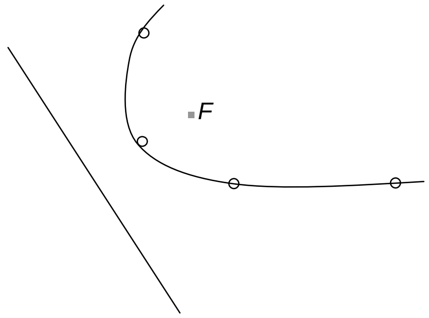
**b.**



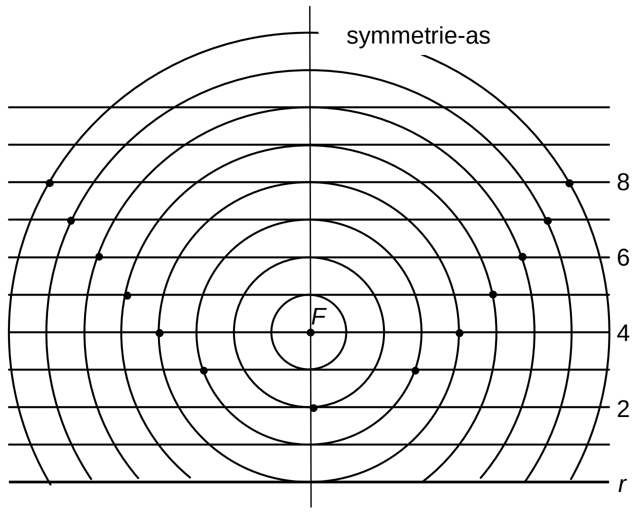

**c.** $y=p(x-60)^2+45$, gaat door (0,0), dus $3600p=45$, dus $p=-\frac{1}{80}$. Dus vergelijking $y=-\frac{1}{80}(x-60)^2+45$

**d.** $t=\frac{1}{20}x$ invullen in $y=30t-5t^2$ geeft: $y=1\frac{1}{2}x-\frac{1}{80}x^2$.

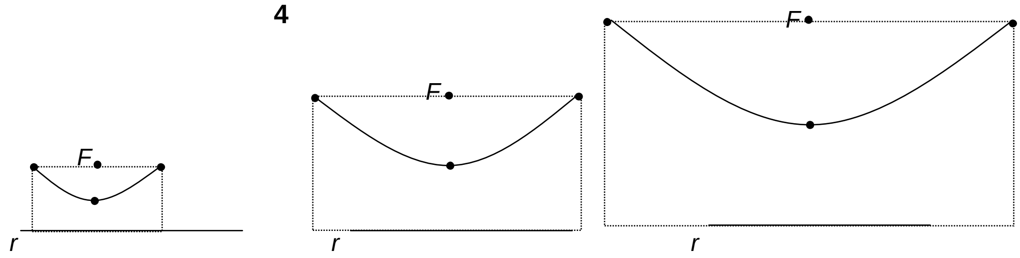
**2**




**3**




**4**




**5** **a.** $AF = 2$ en de afstand van $A$ tot $r$ is 2;
$BF = 5$ en de afstand van $B$ tot $r$ is 5;
$CF = 10$ en de afstand van $C$ tot $r$ is 10.

**b.** Noem dat punt $(a,5)$, met $a > 0$, dan is de afstand tot de $y$-as $a$ en de afstand tot $F$ is $\sqrt{(a-2)^2 + 25}$.
$(a-2)^2 + 25 = a^2 \Leftrightarrow -4a + 29 = 0 \Leftrightarrow a = 7\frac{1}{4}$.
Dus het punt is $(7\frac{1}{4},5)$.

6 **a.** $y+2$

**b.** De afstand van $P(x,y)$ tot $F(0,2)$ is: $\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ .

**c.** Kwadrateren geeft: $x^2+(y-2)^2=(y+2)^2$; haakjes wegwerken geeft: $x^2=4y$.

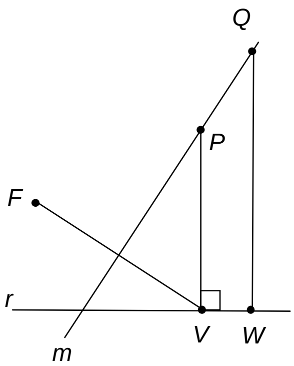
7 **a.** $y+c$

**b.** $\sqrt{x^2+(y-c)^2}$

**c.** Kwadrateren: $x^2+(y-c)^2=(y+c)^2 \Leftrightarrow x^2=4cy$ .

8 **a.** Vergelijking $x^2=4cy$. Het punt (2,6) voldoet aan de vergelijking, dus $c=\frac{1}{6}$. Dus $F=(0,\frac{1}{6})$ en $r$ is de lijn $y=-\frac{1}{6}$.
**b.** Deze parabool is het spiegelbeeld van die uit **a** in de $x$-as, dus: $F=(0,-\frac{1}{6})$ en $r$ heeft vergelijking $y=\frac{1}{6}$.

9 We nemen de $x$-as horizontaal en de $y$-as verticaal door $F$. Er geldt: $x=vt$ en $y=-5t^2$.
Er geldt: $4=vt$ en $4=5t^2$, dus $t=\frac{2}{5}\sqrt{5}$ en r = $1\frac{3}{5}\sqrt{5}$ m/s




**Paragraaf 4 Raaklijnen aan parabolen**

1 $m$ is de middelloodlijn van $FV$. $Q$ ligt op $m$ en $W$ is de loodrechte projectie van $Q$ op $m$.
**a.** $FQ=QV$, want $m$ is de middelloodlijn van $FV$.
$QW<QV$, want het kortste verbindingslijnstuk van $Q$ met $r$ staat loodrecht op $r$.
**b.** Uit **a** volgt dat $Q$ dichter bij $r$ dan bij $F$ ligt, dus volgens de definitie ligt $Q$ buiten de parabool.
**c.** Zie de tekening hiernaast. Het verhaal blijft precies hetzelfde.

2 Het voetpunt van $A$ op de $y$-as noemen we $V$, dan $V=(0,2)$. De raaklijn is de middelloodlijn van de punten (2,0) en (0,2), dat is de lijn $y=x$.
Het voetpunt van $B$ op de $y$-as noemen we $W$, dan $W=(0,4)$, dus $\overrightarrow{WF}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ is normaalvector van de middelloodlijn van $WF$. Het midden van $WF$ is: (1,2), dus middelloodlijn $WF$ - dat is de raaklijn in $B$ - heeft vergelijking $x-2y=-3$.

3 **a.** De bijbehorende waarde van $c=\frac{1}{2}$. (Hier zijn wel de rollen van de assen verwisseld.) Het brandpunt is $F=(\frac{1}{2},0)$ en de richtlijn $r$ heeft vergelijking $x=-\frac{1}{2}$.

**b.** Het voetpunt $V$ van $A(2,2)$ is $(-\frac{1}{2},2)$. $\overrightarrow{VF}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Het midden van $VF$ is (0,1). Dus middelloodlijn $VF$ - dat is de raaklijn in $P$ - heeft vergelijking $x-2y=-2$.

**c.** $y=\sqrt{2x}$ en $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2x}}$, met differentiëren vind je dus in $A$ als helling van de raaklijn $\frac{1}{2}$. Je vindt dus hetzelfde resultaat als in **b**.

**4** **a.** $P$ ligt op de parabool.
**b.** $V=(x_P,-c)$ en $\overrightarrow{FV}=\begin{pmatrix} x_P \\ -2c \end{pmatrix}$.
**c.** Het midden $M$ van $FV$ is $(\frac{1}{2}x_P,0)$. De coördinaten van $M$ in $x_P x-2cy=a$ invullen geeft: $\frac{1}{2}x_P{}^2-0=\frac{1}{2}\cdot 4cy_P=2cy_P$.

**5** **a.** In opgave **3** is $c=\frac{1}{2}$. Volgens stelling 4 heeft de raaklijn in $(x_P,y_P)$ vergelijking: $y_P\cdot y=2cx+2cx_P$.
Als je voor $(x_P,y_P)=(2,2)$ en voor $c=\frac{1}{2}$ invult, vind je:
$2y=x+2$ en dat heb je in **3b** ook gevonden.
**b.** In $x_P x=2cy+2cy_P$ moet je voor $c=\frac{1}{12}$, $x_P=-2$ en $y_P=12$ invullen; dit geeft: $-2x=\frac{1}{6}y+2$.

**6** De punten met eigenschap (2) liggen buiten de parabool en met eigenschap (3) erbinnen.

**7** **a.** $x^2-4cy=(x-x_P)^2 \Leftrightarrow x^2-4cy=x^2-2x_P\cdot x+x_P{}^2 \Leftrightarrow$ $x^2-4cy=x^2-2(2cy+2cy_P)+x_P{}^2$ (links en rechts gelijke termen weglatend vind je: $-4cy_P+x_P{}^2=0$. En dat laatste klopt.
**b.** Voor een punt $(x,y)$ op de lijn $x_P\cdot x=2cy+2cy_P$ geldt dus: $x^2-4cy=(x-x_P)^2$, dus voor elk punt (behalve $P$ zelf) op die lijn geldt: $x^2-4cy>0$, dus elk punt van die lijn buiten $P$ ligt buiten de parabool (zie ook opgave **6**).

**8** **a.** $4x=2y+8$ is een vergelijking van de raaklijn.
**b.** Snijpunt met de $x$-as is (2,0) en met de $y$-as: (0,-4).
**c.** $6x=2y+18$
**d.** Met de $x$-as: (3,0) en met de $y$-as: (0,-9)

**9** Vergelijking raaklijn in $P(x_P,y_P)$ is $x_P\cdot x=2cy+2cy_P$.
Snijpunt met de $y$-as: $0=2cy+2cy_P \Leftrightarrow y=-y_P$, dus het snijpunt met de $y$-as is $(0,-y_P)$.
Snijpunt met de $x$-as: $x_P\cdot x=2cy_P \Leftrightarrow x_P\cdot x=\frac{1}{2}x_P{}^2 \Leftrightarrow$ $x=\frac{1}{2}x_P$, dus snijpunt met de $x$-as is $(\frac{1}{2}x_P,0)$.

### Paragraaf 6 Extra opgaven

**1** **a.** $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$
**c.** $(9-a)^2+(2-a)^2=a^2 \Leftrightarrow 81-18a+a^2+4-4a+a^2=a^2$ $\Leftrightarrow a^2-22a+85=0 \Leftrightarrow a=5$ of $a=17$.

**2** **a.** $(x,y)=(t,\sqrt{2}+t)$

**b.** $(x-t)^2+(y-t-\sqrt{2})^2=1$

**c.** Dan $t=1$ of $t=-1$, dus middelpunt $(1,1+\sqrt{2})$ of $(-1,\sqrt{2}-1)$

**3** **a.** $y=x$
**b.** De lijn gaat door de snijpunten van de cirkels.
**c.** $y=x$ in de vergelijking van een van de cirkels invullen geeft: $x^2+(x-5)^2=25 \Leftrightarrow 2x^2-10x=0 \Leftrightarrow x=0$ of $x=5$.
De snijpunten zijn (0,0) en (5,5).
**d.** Je krijgt de lijn met vergelijking $-6x+6y=11$.
De verbindingslijn van de middelpunten heeft vergelijking $y=-x+5$. Deze lijnen staan loodrecht op elkaar.
**e.** Pythagoras: $MP^2 - MR^2 = PR^2$, omdat hoek $PRM$ recht is. Dus $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=PR^2$.
**f.** Noem een punt van die lijn $P$ en het raakpunt op de ene cirkel $R$ en op de andere cirkel $S$. Volgens **e** krijg je $PR^2$ als je de coördinaten van $P$ in het linkerlid van de vergelijking invult en $PS^2$ als je de coördinaten van $P$ in het rechterlid van de vergelijking invult. Dus $PR^2=PS^2$, dus $PR=PS$.

**4** **a.** Driehoek $OPR$ is rechthoekig in $R$, de stelling van Pythagoras geeft: $PR^2=2500-50=2450$, dus $PR=35\sqrt{2}$
**b.** $(x-50)^2+y^2=2450$ (1) snijden met $x^2+y^2=50$ (2). Voor $y^2=50-x^2$ (uit 2) invullen in (1) geeft:
$(x-50)^2+50-x^2=2450 \Leftrightarrow x=1$. Dus de snijpunten zijn (1,7) en (1,-7).
**c.** Dat zegt de stelling van Thales.
$(x-25)^2+y^2=625$ snijden met $x^2+y^2=50$ geeft:
$(x-25)^2+50-x^2=625 \Leftrightarrow x=1$ en je vindt dezelfde snijpunten als in **b**.

**5** **a.** $-\sqrt{13} \le a \le \sqrt{13}$
**b.** $a^2+(\sqrt{13-a^2})^2=13$; $A$ ligt op het deel boven of op de $x$-as.
**c.** $ax+\sqrt{13-a^2}\,y=13$

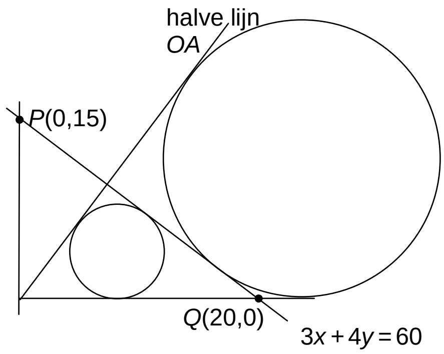
**6** Maak een schuifknop met $a$ en varieer $a$ van 0 tot 10 bijvoorbeeld. Voer in het invoerveld in:
(x – a)^2 + y^2 = .5a^2
x ^2 + (y – a)^2 = .5a^2

Of: de laatste regel vervangen door:
x^2 + (y – 1/a)^2 = .5(1/a)^2

**7** **a.** De vector $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ heeft lengte 5. Dus is de vector $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ een richtingsvector van de bissectrice van hoek $AOB$.

**b.** $(x-2a)^2+(y-a)^2=a^2$, (de straal van de cirkel is $a$, omdat de afstand van het middelpunt tot de $x$-as $a$ is).

**c.**

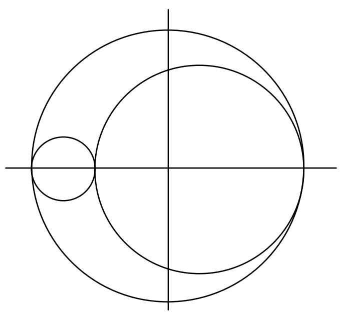



Er zijn twee mogelijkheden, zie plaatje.

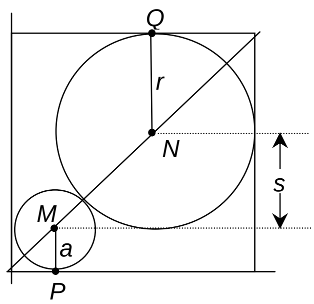
Een richtingsvector van de lijn $3x+4y=60$ is $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$. Deze heeft lengte 5. Dus richtingsvectoren van de twee bissectricen van de $x$-as en de lijn $3x+4y=60$ zijn:

$\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Vergelijkingen van de bissectricen zijn dus: $x+3y=20$ en $3x-y=60$.

$(2a,a)$ is een gevraagd middelpunt als het op een van die lijnen ligt, dit is zo als $2a+3a=20 \Leftrightarrow a=4$ of $6a-a=60 \Leftrightarrow a=12$.



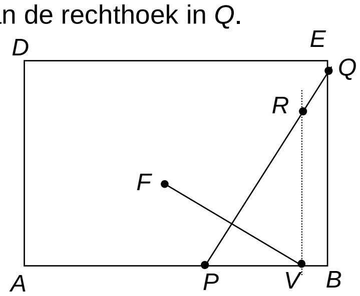
**8** Zeg dat het middelpunt van de rechter cirkel $(a,0)$ is, dan is de straal van die cirkel $8-a$, dus een vergelijking van de rechter cirkel is: $(x-a)^2+y^2=(8-a)^2$.
Noem de straal van de linker cirkel $r$, dan
$2r+2(8-a)=16$, dus $r=a$. De eerste coördinaat van het middelpunt van de linker cirkel is $a-(8-a)-a=a-8$.
Vergelijking van de linker cirkel is: $(x-a+8)^2+y^2=a^2$.
Maak een schuifknop met $a$ variërend van 0 tot 8.
Voer de volgende vergelijkingen in:
$x^2+y^2=64$ ; $(x-a)^2+y^2=(8-a)^2$ ; $(x-a+8)^2+y^2=a^2$.




**9** Neem als middelpunt van de linker cirkel $(a,a)$, dan is de straal van die cirkel $a$ en een vergelijking van de cirkel:
$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$.
Zie plaatje.
$MN=a+r$ en ook $MN=\sqrt{2}\,(4-a-r)$.
Dus $r=8-4\sqrt{2}-a$.

Het middelpunt van de rechter cirkel is
$(4\sqrt{2}-4+a, 4\sqrt{2}-4+a)$
Een vergelijking van de rechter cirkel is:
$(x-4\sqrt{2}+4-a)^2+(y-4\sqrt{2}+4-a)^2=(8-4\sqrt{2}-a)^2$.
Invoeren:
$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ ;
$(x-4\sqrt{2}+4-a)^2+(y-4\sqrt{2}+4-a)^2=(8-4\sqrt{2}-a)^2$.
Vergeet niet de vier zijden van het vierkant als vier lijnstukken in te voeren.

**10 a.** De bissectrice van hoek *FPB* snijdt de verticale zijde van de rechthoek in *Q*.
**c.**




Teken de bissectrice *PQ* van hoek *FPB*. Spiegel *F* in *PQ*. Het spiegelbeeld noemen we *V*. Dit is het voetpunt van het gezochte punt *R*, dus teken in *V* een loodlijn op zijde *AB*. Die snijdt *PQ* in *R*.

**11 a.** Maak een schuif met variabele *a*. Voer in: $4y=x^2$ en $ax=2y+\frac{1}{2}a^2$, dat is een vergelijking van de raaklijn aan de parabool in $(a,\frac{1}{4}a^2)$. Verder de richtlijn: $y=-1$ en het brandpunt $F(0,1)$.
**b.** *P* ligt op de raaklijn als $-1\frac{1}{2}\cdot a=-2+\frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow$
$a^2+3a-4=0 \Leftrightarrow a=-4$ of $a=1$.
Als $a=-4$, dan is het raakpunt $(-4,4)$.
Als $a=1$, dan is het raakpunt $(1,\frac{1}{4})$.

**12 a.** $y=a+3$ invullen in $x^2+(y-2)^2=a^2$ geeft:
$x^2+(a+1)^2=a^2 \Leftrightarrow x^2=-(2a+1)$. Deze vergelijking in $x$ heeft geen oplossingen als $-(2a+1)<0 \Leftrightarrow a>-\frac{1}{2}$.
**b.** In onderdeel **a** kun je zien dat je voor $a=-\frac{1}{2}$ de top van de parabool krijgt. De top is $(0,2\frac{1}{2})$, het brandpunt $(0,2)$ is, de richtlijn is de lijn $y=3$.
Inderdaad: de punten op de lijn $y=a+3$ hebben afstand $|a|$ tot de lijn $y=3$ en de punten $x^2+(y-2)^2=a^2$ hebben afstand $|a|$ tot $(0,2)$.
**c.** Voor $a=y-3$ invullen in $x^2+(y-2)^2=a^2$ geeft:
$x^2+(y-2)^2=(y-3)^2 \Leftrightarrow x^2-4y+4=-6y+9 \Leftrightarrow -(2y+5)=x^2$.