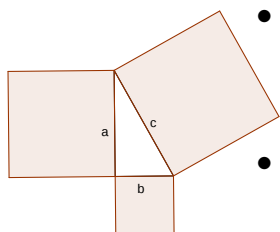


Overzicht meetkunde

Dit document geeft een korte samenvatting van de meetkundestof cTWO-vwo wiskunde B die onderdeel is van het centraal examen. De opgaven die in de kantlijn worden genoemd, staan achterin. (De genummerde opgaven komen uit de Syllabus, de geletterde opgave zijn nieuw.) Zie verder het oorspronkelijke lesmateriaal, de voorbeeldexamenopgaven en de oefenexamens.

Driehoeksmmeetkunde

► Stelling van Pythagoras.



- **Meetkundig.** Voor een rechthoekige driehoek geldt: de oppervlakte van de vierkanten op de rechthoekszijden samen is gelijk aan de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde.

- **Algebraïsch.** Voor een rechthoekige driehoek geldt:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

waarbij a en b de lengtes van de rechthoekszijden zijn en c de lengte van de schuine zijde.

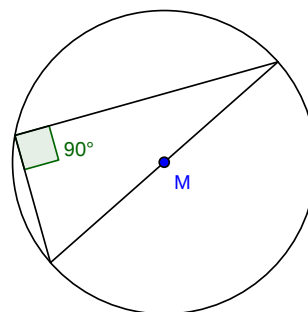
- Voor een willekeurige driehoek met zijden a , b en c geldt:

$$\begin{array}{ll} a^2 + b^2 < c^2 & \iff \text{de hoek tegenover } c \text{ is stomp;} \\ a^2 + b^2 = c^2 & \iff \text{de hoek tegenover } c \text{ is recht;} \\ a^2 + b^2 > c^2 & \iff \text{de hoek tegenover } c \text{ is scherp.} \end{array}$$

kenmerkende
opgaven:
4,5

► Driehoeken en cirkels.

- **Stelling van Thales.** In een rechthoekige driehoek geldt: het midden van de schuine zijde is het middelpunt van de omgeschreven cirkel.
- **Omgekeerde stelling van Thales.** Als het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek op een zijde ligt, dan is de hoek tegenover die zijde recht.

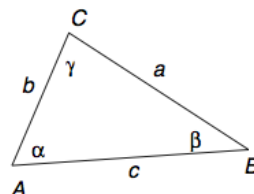


kenmerkende
opgaven:
6

► **Goniometrie.**

Sinusregel $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$

Cosinusregel $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$
(zie ook het *inproduct*)



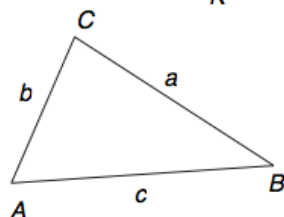
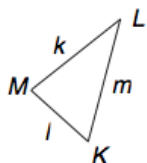
kenmerkende
opgaven:
7

In een **rechthoekige** driehoek geldt bovendien:

$$\sin \varphi = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}} \quad \cos \varphi = \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}} \quad \tan \varphi = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}}$$

► **Gelijkvormigheid.**

Twee figuren zijn *gelijkvormig* als de ene figuur een vergroting is van de andere, eventueel na spiegeling, draaiing en verschuiving. De notatie voor gelijkvormig is ' $\sim$ '.



$$\begin{aligned} \triangle ABC \sim \triangle KLM &\iff \angle A = \angle K \text{ en } \angle B = \angle L && \text{(gelijke hoeken)} \\ &\iff \angle A = \angle K \text{ en } b : c = l : m && \text{(zijde-hoek-zijde)} \\ &\iff \frac{k}{a} = \frac{l}{b} = \frac{m}{c} && \text{(gelijke verhouding zijden)} \end{aligned}$$

kenmerkende
opgaven:
1,2,3

Vectoren

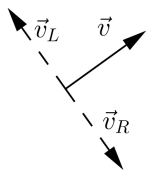
- Een *vector* $\vec{v}$ treedt vaak op als verschuiving, maar ook als snelheid, kracht, ...
Een vector heeft een lengte en een richting (uitgezonderd de *nulvector* $\vec{0}$).

- **Kentallen.** Als er een assenstelsel gegeven is, kun je vectoren uitdrukken als een getallenpaar: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. De getallen v_1 en v_2 heten *kentallen* van de vector.

Met $\overrightarrow{AB}$ noteer je de vector die correspondeert met de verschuiving van punt A naar punt B.

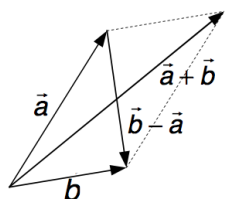
Als in het vlak een oorsprong O is gegeven, dan is $\overrightarrow{OA}$ de *plaatsvector* van punt A.

- **Lengte.** De *lengte* van vector $\vec{v}$ is $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.



- **Loodrecht.** Gegeven de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ met $\vec{v} \neq \vec{0}$. De vectoren $\vec{v}_L = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_R = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ staan loodrecht op $\vec{v}$ en zijn even lang.

► Algebra met vectoren.



- **Optellen.** $\vec{v} + \vec{w}$ is de gecombineerde verschuiving: eerst $\vec{v}$, dan $\vec{w}$.
In kentallen: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$.
- **Scalair vermenigvuldigen.** Voor een getal k en een vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ geldt:
 $k > 0 \Rightarrow k \cdot \vec{v}$ is k keer zo lang als $\vec{v}$ in dezelfde richting.
 $k < 0 \Rightarrow k \cdot \vec{v}$ is $-k$ keer zo lang als $\vec{v}$ in tegengestelde richting.
 Als $k = 0$ of $\vec{v} = \vec{0}$, dan is $k \cdot \vec{v}$ de nulvector.
 In kentallen: $k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix}$.
- Bijzonder geval: $-\vec{v}$ is ' $\vec{v}$ in omgekeerde richting'

kenmerkende
opgaven:
22

► Inproduct.

- Het *inproduct* (ook wel inwendig product) van twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ is een getal dat wordt genoteerd als $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
In kentallen: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2$.
- Er geldt $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \varphi$, waarbij φ de hoek is tussen de twee vectoren (mits $\vec{v} \neq \vec{0}$ en $\vec{w} \neq \vec{0}$). Gevolg:
 - Verband tussen inproduct en lengte van een vector: $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$
 - Voor twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ die beide niet de nulvector zijn, geldt:

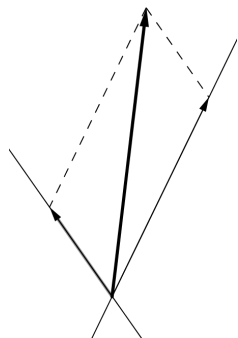
$$\vec{v} \text{ staat loodrecht op } \vec{w} \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

kenmerkende
opgaven:
26

► Ontbinden.

- Als je $\vec{v}$ moet ontbinden *ten opzichte van twee lijnen* ℓ en m , dan zoek je een vector $\vec{v}_\ell$ parallel aan ℓ en een vector $\vec{v}_m$ parallel aan m zodat $\vec{v} = \vec{v}_\ell + \vec{v}_m$.
 $\vec{v}_\ell$ en $\vec{v}_m$ heten de *componenten* van $\vec{v}$ ten opzichte van ℓ en m .
- Als je $\vec{v}$ moet ontbinden *ten opzichte van twee vectoren* $\vec{a}$ en $\vec{b}$, dan moet je getallen r en s vinden zodat $\vec{v} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$.

kenmerkende
opgaven:
27, 28, 29



- Om te ontbinden gebruik je een parallellogramconstructie als in de tekening hiernaast.
- Als je ontbindt ten opzichte van twee loodrechte lijnen of vectoren, dan spreek je van een *loodrechte ontbinding*. In de praktijk kun je deze vaak algebraïsch bepalen met behulp van de sinus en de cosinus. Bij loodrechte stand is ook het inproduct bruikbaar: is $\vec{v} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ en staan $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht op elkaar, dan volgt $\vec{v} \cdot \vec{a} = r \cdot |\vec{a}|^2$ (want $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$).

► Toepassing: zwaartepunten.

- Stel dat in de punten $A_1, A_2, \dots, A_n$ zich de massa's $a_1, a_2, \dots, a_n$ bevinden. Voor het *zwaartepunt* Z geldt dan:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{a_1}{a} \overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{a} \overrightarrow{OA_2} + \dots + \frac{a_n}{a} \overrightarrow{OA_n},$$

kenmerkende
opgaven:
23,24

waarbij $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ de totale massa is.

- Bevinden de punten zich allemaal op één lijn (bijvoorbeeld de x -as), dan kun je het zwaartepunt ook beschouwen als het *gewogen gemiddelde*.

Parametervoorstellingen

- Een beweging in de tijd kun je beschrijven met een parametervoorstelling. Voorbeeld:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$$

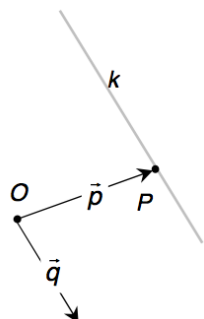
of in een andere notatie: $(\cos t, t^2 + 1)$. Hier is t de parameter (vaak: tijd).

- Een bewegend punt P bevindt zich op tijdstip t in $(f(t), g(t))$. Door differentiëren bereken je:

- **Snelheid.** De *snelheidsvector* op tijdstip t is $\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$. Deze snelheidsvector is een richtingsvector van de raaklijn aan de baan van P . De *snelheid* van P is de lengte van de snelheidsvector.
- **Versnelling.** De *versnellingsvector* is $\begin{pmatrix} f''(t) \\ g''(t) \end{pmatrix}$. De lengte van deze vector is de *versnelling* van punt P .

kenmerkende
opgaven:
25,31

► Vectorvoorstelling van een lijn.

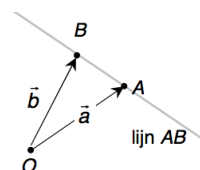


- Zie het linker plaatje. De punten X op lijn k voldoen aan de *vectorvoorstelling* $\overrightarrow{OX} = \vec{p} + t \cdot \vec{q}$, met t een getal. Hier heet $\vec{p}$ de *startvector* en $\vec{q}$ de *richtingsvector* bij de vectorvoorstelling van de lijn.

In toepassingen is t vaak de tijd en beschrijft de vectorvoorstelling een eenparige, rechte lijnige beweging. De vector $\vec{q}$ is dan de *snelheidsvector*.

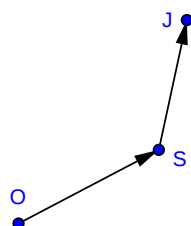
- Een vectorvoorstelling bij lijn AB in het rechter plaatje is $\overrightarrow{OX} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$.

kenmerkende
opgaven:
21



- Gegeven zijn twee bewegende punten U en S met plaatsvectoren $\vec{u}_t$ en $\vec{s}_t$. De *relatieve plaatsvector* van U ten opzichte van S is $\vec{r}_t = \vec{u}_t - \vec{s}_t$.

► Samengestelde bewegingen.



- Beweegt punt S ten opzichte van de oorsprong volgens $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ en beweegt punt J ten opzichte van S volgens $\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \end{cases}$, dan beweegt punt J ten opzichte van de oorsprong volgens $\begin{cases} x = f(t) + a(t) \\ y = g(t) + b(t) \end{cases}$.

kenmerkende
opgaven:
A,B

- Stel een punt neemt aan twee bewegingen tegelijk deel. De snelheidsvector waarmee het punt als gevolg daarvan op een bepaald moment beweegt, vind je door de snelheidsvectoren van die twee bewegingen afzonderlijk op te tellen.

Lijnen

- Een algemene vergelijking van een lijn ℓ is $ax + by + c = 0$, met a , b en c constanten. De vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ staat loodrecht op deze lijn; het is een *normaalvector* van de lijn. Een *loodlijn* is een lijn loodrecht op ℓ ; deze heeft dus richtingsvector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

kenmerkende
opgaven:
19

- Van vergelijking naar parametervoorstelling:

Voorbeeld: Gegeven de lijn met vergelijking $-3x + 4y = 12$. Een punt op de lijn is $(0, 3)$. Een normaalvector is $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en dus is $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ een richtingsvector. Een vectorvoorstelling is dus $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Een parametervoorstelling is dus

$$\begin{cases} x(t) = 4t, \\ y(t) = 3 + 3t. \end{cases}$$

kenmerkende
opgaven:
C

- Van parametervoorstelling naar vergelijking:

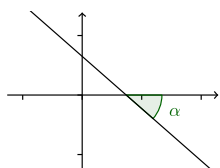
Voorbeeld: Gegeven is de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) = -1 - 4t, \\ y(t) = 3 + t. \end{cases}$$

Schrijf dit als vectorvoorstelling: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Een richtingsvector is $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus een normaalvector is $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Een vergelijking is dus $x + 4y = c$ voor een zeker getal c . Het punt $(-1, 3)$ ligt op de lijn, dus $c = -1 + 4 \cdot 3 = 11$. De gezochte vergelijking is $x + 4y = 11$.

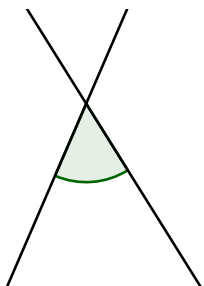
kenmerkende
opgaven:
14,D

- De vergelijking $ax + by + c = 0$ met $b \neq 0$ is om te schrijven tot $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. In het bijzonder is de *richtingscoëfficiënt* $-\frac{a}{b}$.



- De hellingshoek α van lijn ℓ is de niet-stompe hoek tussen de x -as en ℓ , waarbij $\alpha < 0$ precies dan als de lijn dalend is. (In de tekening links is α dus negatief.) Het verband met de richtingscoëfficiënt r wordt gegeven door $\tan \alpha = r$.
- De *hoek tussen twee snijdende lijnen* is de grootte van de twee niet-stompe hoeken in het snijpunt. Een manier om deze te bepalen is door de hoek tussen twee richtingsvectoren of twee normaalvectoren te bepalen.

kenmerkende
opgaven:
9



Voorbeeld: Bereken de hoek tussen de lijnen met vergelijking $2x + 3y = 5$ en $3x - 4y = 10$. Normaalvectoren zijn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. De hoek φ tussen deze vectoren kun je met het inproduct bepalen, aangezien $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \varphi$:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot -4 = \sqrt{2^2 + 3^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2} \cos \varphi$$

ofwel

$$-6 = 5\sqrt{13} \cos \varphi.$$

Een oplossing van deze vergelijking is $\varphi \approx 109,44^\circ$. Dit is groter dan 90° , dus de hoek tussen de twee lijnen is bij benadering $180^\circ - 109,44^\circ = 70,56^\circ$.

Transformaties

► **Verschuiven.** Verschuif je een figuur over de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, dan verplaatsen de punten (x, y) naar $(x + a, y + b)$.

- De parametervoorstelling $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ wordt $\begin{cases} x = f(t) + a \\ y = g(t) + b \end{cases}$
- Een vergelijking van de beeldfiguur krijg je door in de oorspronkelijke vergelijking x te vervangen door $x - a$ en y door $y - b$.

► **Vermenigvuldigen (uitrekken).** Je kunt *vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as* met p : $(x, y) \rightarrow (x, py)$; je kunt *vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as* met q : $(x, y) \rightarrow (qx, y)$; of gecombineerd: $(x, y) \rightarrow (qx, py)$. Het speciale geval $q = p$ is *vermenigvuldigen ten opzichte van de oorsprong*.

- De parametervoorstelling $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ wordt $\begin{cases} x = q \cdot f(t) \\ y = p \cdot g(t) \end{cases}$
- Een formule van de beeldfiguur krijg je door in de oorspronkelijke formule y te vervangen door $\frac{y}{p}$ en x door $\frac{x}{q}$ (mits $pq \neq 0$).

kenmerkende
opgaven:
E, F

► **Spiegelen.** Bijzonder geval van vermenigvuldigen:

- Spiegelen in de x -as: $(x, y) \rightarrow (x, -y)$.
- Spiegelen in de y -as: $(x, y) \rightarrow (-x, y)$.
- Puntspiegelen in de oorsprong: $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$.

Afstand

► Stel dat twee figuren gegeven zijn door twee vergelijkingen. De snijpunten van de twee figuren vind je door het stelsel op te lossen dat wordt gevormd door de twee vergelijkingen.

Voorbeeld: Bepaal het snijpunt van de lijn en de cirkel met bijbehorende vergelijkingen

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 2; \\ x^2 + (y - 2)^2 &= 4.\end{aligned}$$

Substitutie van $y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x$ in de vergelijking van de cirkel geeft:

$$4 = x^2 + (-1\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x)^2 = 1\frac{4}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{16}{9}.$$

De abc -formule geeft als oplossing: $x = -2$ of $x = \frac{10}{13}$. De snijpunten zijn $(-2, 2)$ en $(\frac{10}{13}, \frac{2}{13})$.

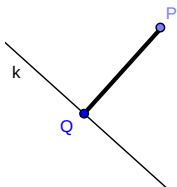
- Soms heeft het stelsel geen oplossing. Dat heet een *strijdig stelsel*. Er zijn dan geen snijpunten. Voorbeeld: twee parallelle lijnen.
 - Soms vormen de snijpunten een lijn of een kromme. Je hebt dan te maken met een *afhankelijk stelsel*. Voorbeeld: twee vergelijkingen van dezelfde lijn, zoals $x + y = 1$ en $2x + 2y = 2$.
- De *afstand* tussen twee figuren is de kleinste lengte van een lijnstuk dat een punt van de ene figuur verbindt met een punt van de andere.

- **Punt–punt.** De afstand tussen (a, b) en (c, d) is $\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$ (Pythagoras).

kenmerkende
opgaven:
10

kenmerkende
opgaven:
16,17,18,G

- **Punt–lijn.** De afstand van een punt P tot een lijn k kun je op drie manieren berekenen:



- snijd de lijn door P loodrecht op k met k en het punt Q dat dit oplevert is het punt dat het dichtst bij P ligt;
- neem een variabel punt Q op k en bereken met behulp van differentiëren de minimale afstand tussen Q en P ;
- neem een variabel punt Q op k en eis dat $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{r} = 0$, waarbij $\vec{r}$ een richtingsvector van k is.

Voorbeeld: Bereken de afstand tussen punt $P = (1, 2)$ en lijn m gegeven door $x + 3y = 5$. We gebruiken de eerste methode. Een normaalvector is $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Een vergelijking van een loodlijn is dus $3x - y = c$, met c een constante. Invullen van de coördinaten van P geeft $c = 1$. Door het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ 3x - y &= 1 \end{aligned}$$

op te lossen, vind je het snijpunt $(0,8; 1,4)$. De afstand tussen dit punt en punt P is $\sqrt{0,4}$.

Voorbeeld: Bereken de afstand tussen punt $P = (3, 4)$ en de lijn gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 6 + 2t. \end{cases}$$

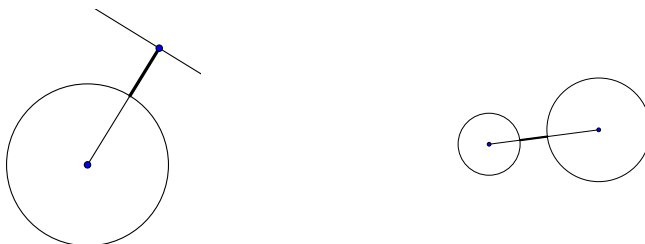
We gebruiken de derde methode. Een variabel punt Q op deze lijn is $(t, 6 + 2t)$. Dus $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} t-3 \\ 2+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t - 3 + 2(2 + 2t) = 5t + 1$. Dit inproduct is nul als $t = -\frac{1}{5}$.

Dit geeft afstand $\sqrt{(\frac{1}{5} - 3)^2 + (2 + 2 \cdot \frac{1}{5})^2} = \sqrt{\frac{68}{5}}$.

- **Lijn–lijn.** De afstand is alleen $\neq 0$ als de lijnen parallel lopen. Kies in dat geval een willekeurig punt op de ene lijn en bepaald de afstand van dit punt tot de andere lijn.
- **Punt–cirkel.** Het kortste verbindingslijnstuk tussen een punt P en de cirkel ligt op de lijn bepaald door P en het middelpunt.

kenmerkende
opgaven:
8

- **Lijn–cirkel.** Het kortste verbindingslijnstuk ligt op de loodlijn op de lijn door het middelpunt van de cirkel. (Zie het linker plaatje hieronder.)
- **Cirkel–cirkel.** Het kortste verbindingslijnstuk ligt op de lijn die de twee middelpunten verbindt. (Zie het rechter plaatje.)



Cirkels

- Een cirkel met straal r en middelpunt (m, n) wordt beschreven door de vergelijking

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

kenmerkende
opgaven:
H,20

Voorbeeld: Bepaal straal en middelpunt van de cirkel met vergelijking

$$x^2 - 4x + y^2 + 8y = 0.$$

Gebruik hiervoor kwadraatafsplitsen: $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$ en $y^2 + 8y = (y + 4)^2 - 16$. Dat resulteert in de vergelijking

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 20.$$

De cirkel heeft dus middelpunt $(2, -4)$ en straal $\sqrt{20}$.

- Een *raaklijn* aan een cirkel is een lijn die de cirkel maar in één punt snijdt. Een raaklijn in een punt P staat loodrecht op de verbindingslijn tussen P en het middelpunt.
- Stel $P = (a, b)$ is een punt op de cirkel met straal r en middelpunt $(0, 0)$. De raaklijn aan de cirkel in P heeft vergelijking

$$ax + by = r^2.$$

kenmerkende
opgaven:
11,12,15

- Algemener kun je een vergelijking opstellen van de raaklijn(en) aan een cirkel door een gegeven punt dat op of buiten de cirkel ligt.

kenmerkende
opgaven:
I,J

Voorbeeld: Gegeven zijn de cirkel $(x - 1)^2 + (x + 3)^2 = 29$ en punt $P = (3, 2)$. We gaan de raaklijn ℓ beschrijven aan de cirkel door punt P . Dat kan als volgt. Punt P ligt op de cirkel. Het middelpunt van de cirkel is $M = (1, -3)$. Lijn ℓ heeft dus normaalvector $\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Een vergelijking voor lijn ℓ is daarom $-2x - 5y = c$. Om c te bepalen vullen we de coördinaten van punt P in; dat geeft $-2c - 5y = -16$.

Voorbeeld: Gegeven zijn de cirkel $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$ en punt $P = (8, 2)$ buiten de cirkel. We gaan de raaklijnen beschrijven aan de cirkel door punt P . Dat kan als volgt. Een richtingsvector van een raaklijn is óf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, óf van de vorm $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ (alleen de richting en niet de lengte is immers belangrijk, dus kun je iedere vector in deze vormen krijgen door scalaire vermenigvuldiging). De lijn door P met richtingsvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ heeft geen punt gemeenschappelijk met de cirkel (ga dat na), dus we hoeven alleen maar te kijken naar lijnen met vectorvoorstelling $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$. We bepalen nu de snijpunten van deze lijn met de cirkel. Dat doe je door $(8 + at, 2 + t)$ in te vullen in de vergelijking van de cirkel:

$$\begin{aligned} & (7 + at)^2 + (-1 + t)^2 = 25 \\ \iff & 49 + 14at + a^2t^2 + 1 - 2t + t^2 = 25 \\ \iff & (a^2 + 1)t^2 + (14a - 2)t + 25 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Nu heeft een raaklijn precies één punt gemeenschappelijk met de cirkel, dus we zijn op zoek naar die waarden van a waarvoor de kwadratische vergelijking $(*)$ precies één oplossing heeft. Maar dat betekent dat de discriminant nul moet zijn:

$$D = (14a - 2)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 25 = 0$$

Dit is weer een kwadratische vergelijking en die kunnen we oplossen: $a = \frac{4}{3}$ of $a = -\frac{3}{4}$. Dat betekent dat de raaklijnen worden gegeven door de vectorvoorstellingen

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- De standaardcirkelbeweging is

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

kenmerkende
opgaven:
30

Door transformatie zijn hier andere cirkelbewegingen uit af te leiden. Wat algemener geldt dat de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = m + R \cos at, \\ y = n + R \sin at \end{cases} \quad (R, a \neq 0)$$

de beweging over een cirkel met straal R en middelpunt (m, n) beschrijft. De snelheid en richting waarmee dat gebeurt, is afhankelijk van a (en R). De snelheid is constant. Dit heet een *eenparige cirkelbeweging*.

- Bij een eenparige cirkelbeweging wijst de versnellingsvector in punt P van punt P richting het middelpunt.

Opgave A

Het water in een snelstromende rivier beweegt met 1 m/s . Een zwemmer steekt de rivier over. Hij zwemt met $0,3 \text{ m/s}$ recht richting de overkant. De rivier is 6 m breed.

- a) Hoe ver is de zwemmer afgedreven als hij de overkant heeft bereikt?
- b) Wat is de snelheid van de zwemmer ten opzichte van de oever?

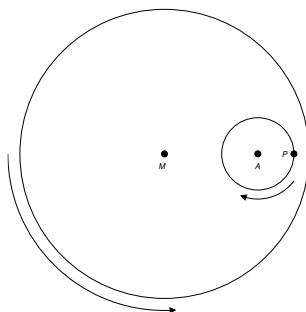
Als de zwemmer begint te zwemmen, gaat er 10 meter stroomafwaarts een krokodil te water. De krokodil zwemt met $1,5 \text{ m/s}$ ten opzichte van het water.

- c) Onder welke (constante) hoek t.o.v. de oever moet de krokodil zwemmen opdat hij de zwemmer onderschept?

Opgave B



Monsieur Cannibale is een attractie in de Efteling waarbij je in een pannetje zit. Dat pannetje voert tegelijkertijd twee cirkelbewegingen uit: het pannetje draait om zijn as heen, en het pannetje is bevestigd op een grote ronddraaiende schijf. In de tekening is een (vereenvoudigd) bovenaanzicht getekend met slechts één pannetje op de grote schijf.



Het midden van de schijf is M , het midden van een pannetje is A . Er geldt $|AM| = 6 \text{ (meter)}$. De grote schijf draait in 1 minuut vijf keer om

zijn as, tegen de klok in. We kiezen in deze opgave een assenstelsel met M als oorsprong, zodat de coördinaten van punt A wordt gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = 6 \cos 10\pi t, \\ y(t) = 6 \sin 10\pi t; \end{cases}$$

hierbij is t de tijd in minuten.

Het pannetje draait in een minuut drie keer om zijn as, met de klok mee. De straal van het pannetje is 2. Punt P is een bewegend punt op de rand van het pannetje; op $t = 0$ bevindt punt P zich op maximale afstand van punt M . (Deze beginsituatie is in de tekening verbeeld.)

- a) Geef een parametervoorstelling voor het bewegende punt P (in het assenstelsel met M als oorsprong).
- b) Bereken de snelheid van punt P ten opzichte van de (stilstaande) ondergrond in $t = \frac{1}{6}$. Geef je antwoord in m/s en rond af op een geheel getal.

Opgave C

Een lijn wordt gegeven door de vergelijking $2x - 3y = 5$. Geef een parametervoorstelling voor deze lijn.

Opgave D

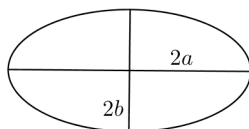
Lijn ℓ wordt gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = -1 + 5t \end{cases}$$

Geef een vergelijking voor lijn ℓ .

Opgave E

Start met de eenheidscirkel, dat wil zeggen de cirkel met straal 1 om de oorsprong. Neem getallen a en b waarvoor $0 < b < a$. Als je de cirkel met a vermenigvuldigt ten opzichte van de y -as en daarna met b ten opzichte van de x -as, krijg je een ellips met lange as $2a$ en korte as $2b$:

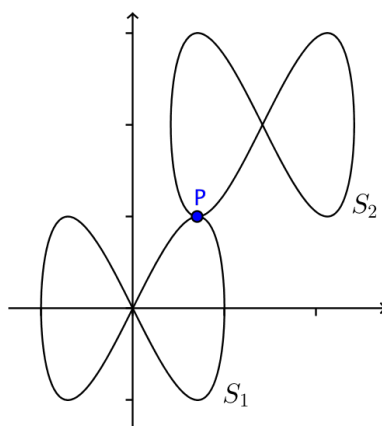


- a) Geef een vergelijking voor de ellips.

- b) Geef een parametervoorstelling.

Opgave F

In het volgende plaatje staan twee ‘achtjes’ S_1 en S_2 .



Het tweede achtje S_2 is ontstaan uit S_1 door deze te transleren. Ze raken elkaar in punt P , alwaar de raaklijn horizontaal loopt.

Een parametervoorstelling voor S_1 is

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

Geef een parametervoorstelling voor S_2 .

Opgave G

Gegeven is punt $P = (3, 2)$ en lijn ℓ : $x - 2y = 5$.

- Toon aan dat P niet op ℓ ligt.
- Geef een vectorvoorstelling van de loodlijn op ℓ door P .
- Bereken de afstand van P tot ℓ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave H

Een cirkel in het vlak voldoet aan de vergelijking $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 13 = 0$. Bepaal het middelpunt en de straal van deze cirkel.

Opgave I

Cirkel c wordt gegeven door de vergelijking $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

- Stel een vergelijking op voor de raaklijn(en) aan de cirkel door punt $(3, 5)$.

- b) Stel een vergelijking op voor de raaklijn(en) aan de cirkel door punt $(6, 0)$.
- c) Leg uit: 'Als voor punt $P = (a, b)$ geldt $(a - 2)^2 + (b - 3)^2 < 5$, dan is er geen raaklijn aan cirkel c die door P gaat.

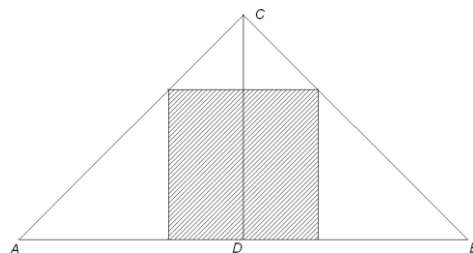
Opgave J

Cirkel d wordt gegeven door de vergelijking $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$. Stel een vergelijking op voor de raaklijn(en) aan de cirkel door punt $(-3, 7)$.

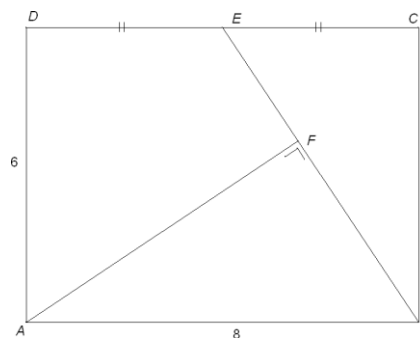
Voorbeeldopgaven bij domein E

Subdomein E1

- Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC .
De lengte van basis AB is 8 en de hoogte is 4.
In deze driehoek is een vierkant getekend waarvan de hoekpunten op de zijden van de driehoek liggen.
Zie figuur.
Bereken de lengte van de zijden van dit vierkant.



- Gegeven is een rechthoek $ABCD$. Zie de figuur.
De lengte van zijde AB is 8 en zijde AD heeft lengte 6.
 E is het midden van zijde CD .
 F is een punt op lijnstuk BE zó dat lijnstuk AF loodrecht staat op lijnstuk BE .
a) Bereken de lengte van lijnstuk AF .



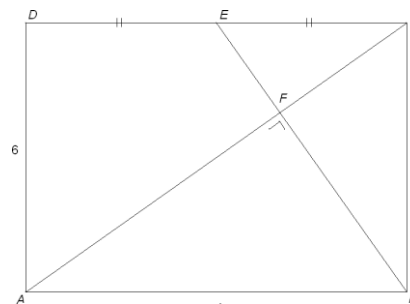
Lijnstuk AF wordt aan de kant van F verlengd tot zijde BC wordt gesneden in punt G .

- Bepaal de verhouding waarin zijde BC door punt G wordt verdeeld.

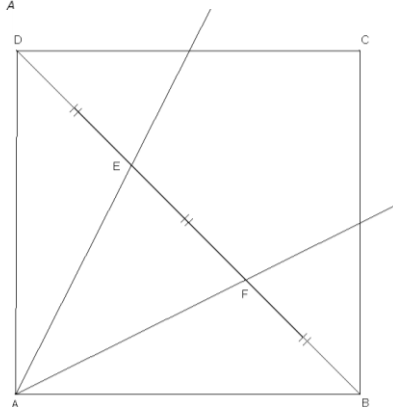
Door voor zijde AB een grotere lengte te kiezen, kan de situatie van de tweede figuur ontstaan: lijn AF gaat door C .

Nog steeds is punt E het midden van zijde CD en staat lijnstuk AF loodrecht op lijnstuk BE .

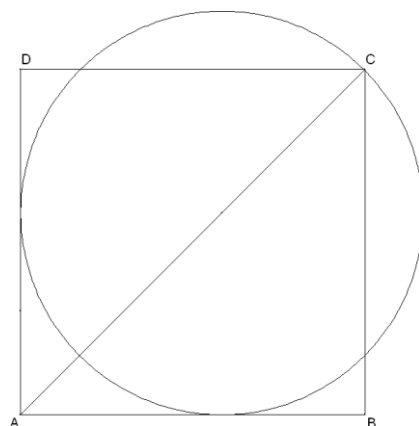
- Onderzoek hoeveel driehoeken in deze figuur gelijkvormig zijn.
- Bereken de lengte van zijde AB .



- Gegeven is vierkant $ABCD$. Zie de figuur.
De lengte van de zijden van dit vierkant is 10.
De punten E en F liggen op diagonaal BD , zó dat deze diagonaal door E en F in drie even lange lijnstukken wordt verdeeld.
a) Toon aan dat lijn AE door het midden van zijde CD gaat.
b) Onderzoek of hoek BAD door de lijnen AE en AF in drie even grote hoeken wordt verdeeld.



- Gegeven is vierkant $ABCD$.
De lengte van de zijden van dit vierkant is 10.
Door C gaat een cirkel die de zijden AB en AD raakt. Zie de figuur.
Bereken de lengte van de straal van deze cirkel.



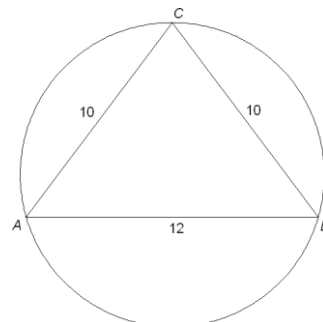
5. Gegeven is de regelmatige achthoek $ABCDEFGH$ met zijde 8.
Bereken de exacte lengtes van de diagonalen AC , AD en AE van deze achthoek.

6. In de figuur hiernaast is driehoek ABC getekend met de cirkel die door de hoekpunten gaat.

a) Bereken de lengte van de straal van de cirkel.

Op de cirkel ligt het punt D niet aan dezelfde kant van lijnstuk AB als punt C zó dat D even ver van A als van B af ligt.

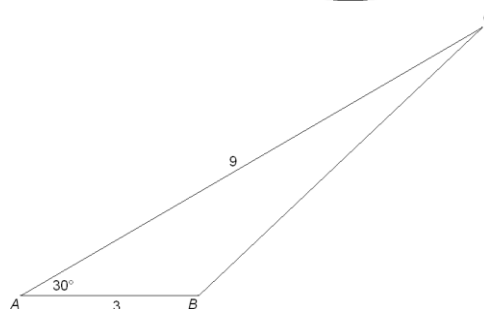
b) Bereken $\angle ADB$ in hele graden nauwkeurig.



7. Gegeven is driehoek ABC . Zie de figuur hiernaast.

a) Bereken $\angle B$ in hele graden nauwkeurig.

b) Bereken in één decimaal nauwkeurig de lengte van zijde BC .



Subdomein E2

8. Gegeven zijn de punten $A(4, 0)$ en $B(0, 3)$.
a) Bereken de exacte afstand van punt $O(0, 0)$ tot lijn AB .
b) Punt O wordt gespiegeld in lijn AB . Bepaal de exacte coördinaten van het spiegelbeeld.

9. Gegeven zijn de lijnen $l: x + 2y = 1$ en $m: y = 3x - 2$.

- a) Bereken de hoek tussen de lijnen l en m in hele graden nauwkeurig.
b) Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen l en m .
c) Stel een vergelijking op van de lijn k die lijn l loodrecht snijdt in het punt $(1, 0)$.

10. Gegeven zijn de lijn $l: x + 2y = 1$ en de lijn m met vergelijking $ax + by = 10$.

Wat weet je van a en b , als

- a) de lijn l geen snijpunt heeft met lijn m ?
b) het snijpunt van de lijnen l en m het punt $(1, 0)$ is?

11. Gegeven is de cirkel $C: x^2 + y^2 = 10x$.

- a) Bepaal de coördinaten van het middelpunt M en de straal r van C .
b) Bepaal vergelijkingen van de raaklijnen door punt $(-5, 0)$ aan cirkel C .

12. Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$.

- a) Stel een vergelijking op van de raaklijn in $P(3, 4)$ aan de cirkel.
b) Stel vergelijkingen op van de lijnen die evenwijdig zijn aan deze raaklijn en afstand 1 tot de cirkel hebben.

13. Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 8$ en de lijn $y = x$.

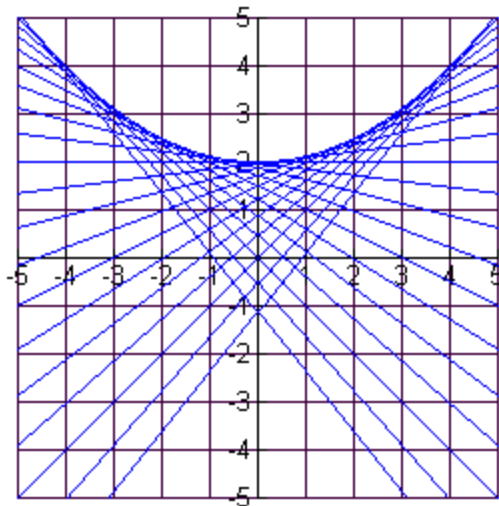
De cirkel schuift omlaag zo, dat de lijn $y = x$ een raaklijn aan de verschoven cirkel wordt.
Stel een vergelijking op van de verschoven cirkel.

14. Gegeven het punt $A(5, 4)$ en de lijn m met parametervoorstelling $\begin{cases} x = 8 + t \\ y = 8 - 2t \end{cases}$.

- a) Stel een vergelijking op van de lijn m .
 b) Bereken de afstand van A tot de lijn m .
15. Gegeven is de cirkel $C_1: x^2 + y^2 = 1$. Een cirkel C_2 raakt de beide coördinaatassen en raakt ook cirkel C_1 aan de buitenkant.
 Bereken de straal van C_2 .
16. De verzameling van de punten die even ver van de lijn $y = 4$ als van $O(0, 0)$ liggen, is een parabool.
 Stel een vergelijking op van deze parabool.
17. Gegeven zijn de punten $O(0, 0)$ en $A(8, 4)$.
 a) Bereken de coördinaten van het punt P op de x -as waarvoor geldt: $OP = AP$.
 b) Stel een vergelijking op van de cirkel door de punten O , A en P .
18. Gegeven is de baan van punt P door de parametervoorstelling: $x = 3t$ en $y = t + p$, waarbij p een constante is. Cirkel C wordt gegeven door $x^2 + y^2 = 10$.
 a) Neem $p = 10$ en bereken de kortste afstand van punt P tot de cirkel.
 b) Voor welke waarden van p heeft de baan van P één of twee snijpunten met cirkel C ?
19. Gegeven is punt $P(0, 4)$.
 Kies een willekeurig punt A op de x -as met coördinaten $(a, 0)$.
 a) Toon aan dat de middelloodlijn m_a van lijnstuk PA gegeven wordt door de vergelijking

$$y = \frac{1}{4}ax - \frac{1}{8}a^2 + 2.$$

 In onderstaande figuur zie je een aantal van deze lijnen m_a getekend.



- b) Toon aan dat de twee lijnen m_a die door het punt $(4, 0)$ gaan, loodrecht op elkaar staan.

Je krijgt uit de figuur de indruk dat er punten (x, y) zijn waar geen lijn m_a doorheen gaat. Dat zijn dus punten (x, y) waarvoor geen passende waarde van a te berekenen is zo dat (x, y) voldoet aan de vergelijking van m_a .

- c) Toon aan dat de coördinaten van deze punten voldoen aan: $y > \frac{1}{8}x^2 + 2$.

20. De figuren C en L zijn gegeven door de parametervoorstellingen :

$$C: \begin{cases} x = 9 + 5 \cdot \cos(\varphi) \\ y = 6 + 5 \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \text{ en } L: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$$

- Bereken de exacte coördinaten van de snijpunten van C en L .
- Een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ raakt aan L . Bereken de exacte lengte van de straal van die cirkel.
- Er zijn twee cirkels met middelpunt $O(0,0)$ die raken aan C . Bereken de exacte lengtes van de stralen van die cirkels.

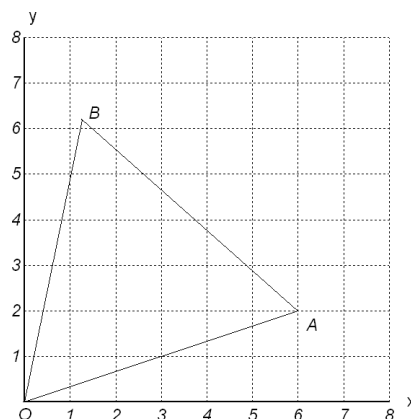
Subdomein E3

- Gegeven is de lijn l met vergelijking $2x + y = 10$ (x en y in meter). Over deze lijn beweegt een punt P met snelheid 1 m/s. Op $t = 0$ sec bevindt P zich in het punt met coördinaten $(0, 10)$. P beweegt in de richting van de positieve x -as.
 - Beschrijf de baan van P met een vectorvoorstelling.
 - Op welk tijdstip passeert P de x -as?
 - Op welk tijdstip bevindt P zich het dichtst bij de oorsprong?

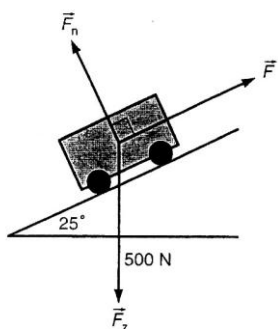
We kunnen punt P de lijn l versneld laten doorlopen door de vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 10 - 2t^2 \end{pmatrix} \text{ te kiezen. Hierin is } t \text{ de tijd in seconde.}$$

- Bereken de snelheid van P op het moment dat de x -as wordt gepasseerd.
 - Bereken de versnelling van P in m/s^2 .
- Gegeven zijn de punten $O(0, 0)$ en $A(6, 2)$. Lijnstuk OA is zijde van de gelijkzijdige driehoek OAB . Hoekpunt B heeft een positieve y -coördinaat. Zie de figuur. Bereken de exacte coördinaten van het punt B .
 - Zwaartepunten. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van het volgende systeem:
 - Drie puntmassa's met gelijk gewicht, elk in een van de punten $(0, 0)$, $(4, 4)$ en $(2, 8)$.
 - Zie a), maar nu is het gewicht in $(0, 0)$ twee keer zo groot.
 - Drie ijzeren staven vormen een rechthoekige gelijkbenige driehoek met rechthoekszijden van 10 meter lengte. De staven zijn even dik en ze zijn alle van hetzelfde homogene metaal gemaakt. Bereken de afstand van het zwaartepunt van de driehoek tot de langste zijde.
 - Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen van een punt P :
 $x = 2 + 2\sin \pi t$ en $y = 3 - 2\cos \pi t$ (x en y in meter, t in seconde).
 - Bepaal het eerste tijdstip na $t = 1000$, waarop P het hoogste punt van de baan bereikt.
 - Druk de snelheid en de versnelling van punt P uit in t .
 - Gegeven is driehoek ABC met $A(1, 1)$, $B(6, 6)$ en $C(0, -6)$. Bereken $\angle CAB$ in hele graden nauwkeurig.

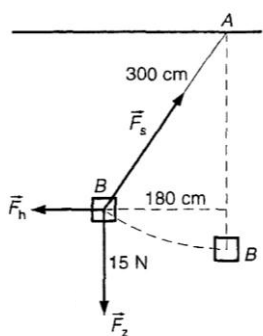


- Hieronder zie je een karretje op een hellend vlak. Op het karretje werkt de zwaartekracht $\vec{F}_z$, met $F_z = 500 \text{ N}$.

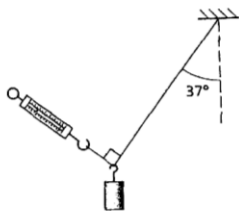


Bereken hoe groot de kracht $\vec{F}$ moet zijn om het karretje op zijn plaats te houden.

28. Een voorwerp B hangt aan een touw van 300 cm. Het wordt door een horizontale kracht 180 cm opzij getrokken. Zie de figuur. Van de drie getekende krachten is de resulterende kracht nul.



- Bereken hoeveel cm het voorwerp B omhoog is gegaan.
 - Bereken de kracht $\vec{F}_h$ waarmee het voorwerp B opzij wordt getrokken.
 - Bereken de spankracht $\vec{F}_s$.
29. Een voorwerp dat aan een touw hangt, is over een hoek van 37° opzij getrokken. Zie de figuur. De krachtmeter wijst 15 N aan.



- Teken in de figuur de vectoren die horen bij de kracht die door de krachtmeter wordt uitgeoefend, de spankracht in het touw en de zwaartekracht die op het voorwerp werkt.
 - Bereken de grootte van deze krachten.
30. Een cirkel wordt doorlopen volgens de parametervoorstelling:
$$\begin{cases} x = 3\cos(bt) \\ y = 3\sin(bt) \end{cases}$$
- Hierin zijn x en y in meter en t in seconde.
- De snelheid waarmee de cirkel wordt doorlopen is 2 m/s. Bereken b .
 - De versnelling waarmee de cirkel wordt doorlopen is $0,12 \text{ m/s}^2$. Bereken b .

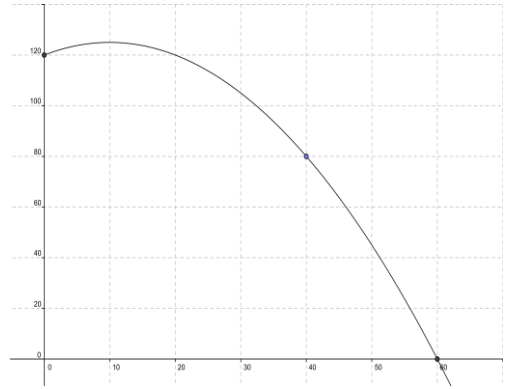
31. Een puntmassa wordt afgeschoten vanaf een punt dat op 120 meter hoogte ligt. Hij beschrijft een parabolische baan.

Zie de tekening.

De beweging van de puntmassa wordt beschreven door de vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t \\ 120 + 10t - 5t^2 \end{pmatrix}$$

(x en y in meter, t in seconde).

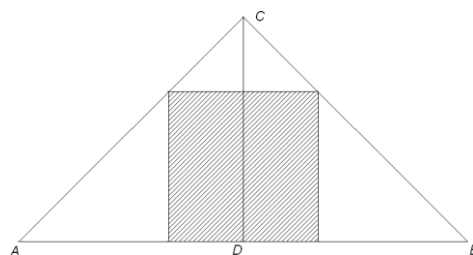


- Bereken de coördinaten van het punt van deze baan waarin de snelheidsvector horizontaal is.
- Bereken de hoek waaronder de puntmassa wordt afgeschoten.
- Stel een vectorvoorstelling op van de raaklijn aan deze baan op het tijdstip $t = 4$.
- Bereken de exacte snelheid van de puntmassa op het moment dat hij de grond raakt.
- Toon aan dat de puntmassa een constante versnelling heeft.

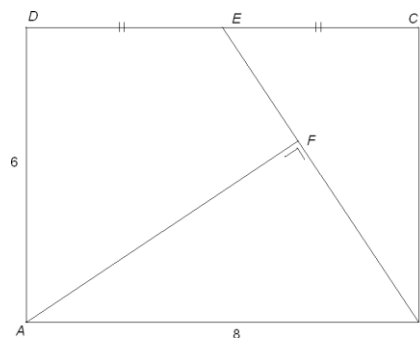
Voorbeeldopgaven bij domein E

Subdomein E1

- Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC .
De lengte van basis AB is 8 en de hoogte is 4.
In deze driehoek is een vierkant getekend waarvan de hoekpunten op de zijden van de driehoek liggen.
Zie figuur.
Bereken de lengte van de zijden van dit vierkant.



- Gegeven is een rechthoek $ABCD$. Zie de figuur.
De lengte van zijde AB is 8 en zijde AD heeft lengte 6.
 E is het midden van zijde CD .
 F is een punt op lijnstuk BE zó dat lijnstuk AF loodrecht staat op lijnstuk BE .
a) Bereken de lengte van lijnstuk AF .



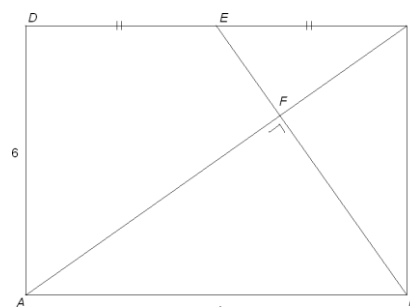
Lijnstuk AF wordt aan de kant van F verlengd tot zijde BC wordt gesneden in punt G .

- Bepaal de verhouding waarin zijde BC door punt G wordt verdeeld.

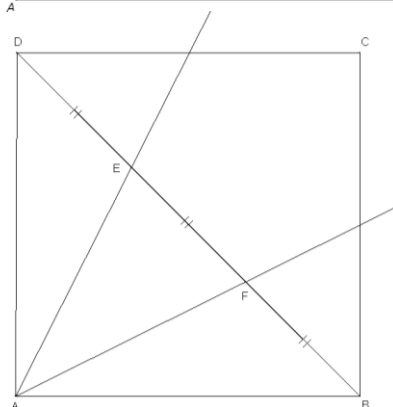
Door voor zijde AB een grotere lengte te kiezen, kan de situatie van de tweede figuur ontstaan: lijn AF gaat door C .

Nog steeds is punt E het midden van zijde CD en staat lijnstuk AF loodrecht op lijnstuk BE .

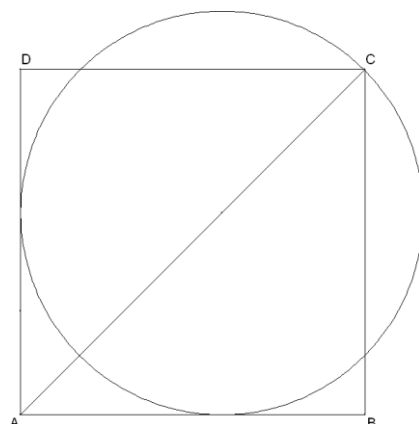
- Onderzoek hoeveel driehoeken in deze figuur gelijkvormig zijn.
- Bereken de lengte van zijde AB .



- Gegeven is vierkant $ABCD$. Zie de figuur.
De lengte van de zijden van dit vierkant is 10.
De punten E en F liggen op diagonaal BD , zó dat deze diagonaal door E en F in drie even lange lijnstukken wordt verdeeld.
a) Toon aan dat lijn AE door het midden van zijde CD gaat.
b) Onderzoek of hoek BAD door de lijnen AE en AF in drie even grote hoeken wordt verdeeld.



- Gegeven is vierkant $ABCD$.
De lengte van de zijden van dit vierkant is 10.
Door C gaat een cirkel die de zijden AB en AD raakt. Zie de figuur.
Bereken de lengte van de straal van deze cirkel.



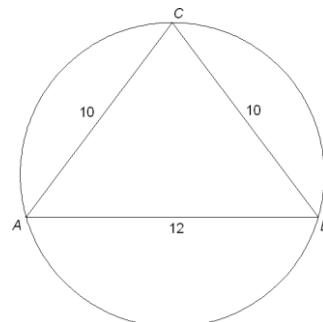
5. Gegeven is de regelmatige achthoek $ABCDEFGH$ met zijde 8.
Bereken de exacte lengtes van de diagonalen AC , AD en AE van deze achthoek.

6. In de figuur hiernaast is driehoek ABC getekend met de cirkel die door de hoekpunten gaat.

a) Bereken de lengte van de straal van de cirkel.

Op de cirkel ligt het punt D niet aan dezelfde kant van lijnstuk AB als punt C zó dat D even ver van A als van B af ligt.

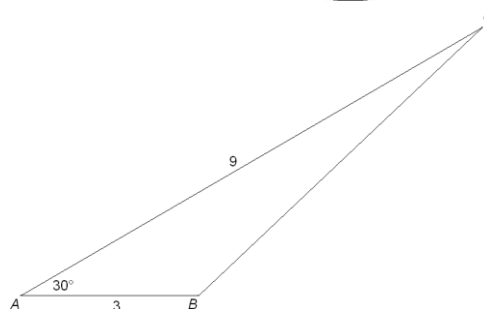
b) Bereken $\angle ADB$ in hele graden nauwkeurig.



7. Gegeven is driehoek ABC . Zie de figuur hiernaast.

a) Bereken $\angle B$ in hele graden nauwkeurig.

b) Bereken in één decimaal nauwkeurig de lengte van zijde BC .



Subdomein E2

8. Gegeven zijn de punten $A(4, 0)$ en $B(0, 3)$.
a) Bereken de exacte afstand van punt $O(0, 0)$ tot lijn AB .
b) Punt O wordt gespiegeld in lijn AB . Bepaal de exacte coördinaten van het spiegelbeeld.

9. Gegeven zijn de lijnen $l: x + 2y = 1$ en $m: y = 3x - 2$.

- a) Bereken de hoek tussen de lijnen l en m in hele graden nauwkeurig.
b) Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen l en m .
c) Stel een vergelijking op van de lijn k die lijn l loodrecht snijdt in het punt $(1, 0)$.

10. Gegeven zijn de lijn $l: x + 2y = 1$ en de lijn m met vergelijking $ax + by = 10$.

Wat weet je van a en b , als

- a) de lijn l geen snijpunt heeft met lijn m ?
b) het snijpunt van de lijnen l en m het punt $(1, 0)$ is?

11. Gegeven is de cirkel $C: x^2 + y^2 = 10x$.

- a) Bepaal de coördinaten van het middelpunt M en de straal r van C .
b) Bepaal vergelijkingen van de raaklijnen door punt $(-5, 0)$ aan cirkel C .

12. Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$.

- a) Stel een vergelijking op van de raaklijn in $P(3, 4)$ aan de cirkel.
b) Stel vergelijkingen op van de lijnen die evenwijdig zijn aan deze raaklijn en afstand 1 tot de cirkel hebben.

13. Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 8$ en de lijn $y = x$.

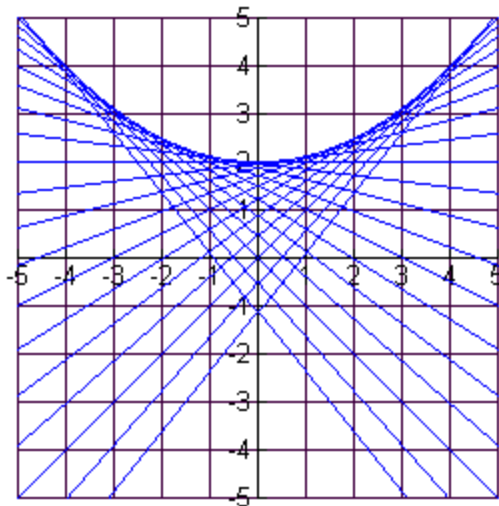
De cirkel schuift omlaag zo, dat de lijn $y = x$ een raaklijn aan de verschoven cirkel wordt.
Stel een vergelijking op van de verschoven cirkel.

14. Gegeven het punt $A(5, 4)$ en de lijn m met parametervoorstelling $\begin{cases} x = 8 + t \\ y = 8 - 2t \end{cases}$.

- a) Stel een vergelijking op van de lijn m .
 b) Bereken de afstand van A tot de lijn m .
15. Gegeven is de cirkel $C_1: x^2 + y^2 = 1$. Een cirkel C_2 raakt de beide coördinaatassen en raakt ook cirkel C_1 aan de buitenkant.
 Bereken de straal van C_2 .
16. De verzameling van de punten die even ver van de lijn $y = 4$ als van $O(0, 0)$ liggen, is een parabool.
 Stel een vergelijking op van deze parabool.
17. Gegeven zijn de punten $O(0, 0)$ en $A(8, 4)$.
 a) Bereken de coördinaten van het punt P op de x -as waarvoor geldt: $OP = AP$.
 b) Stel een vergelijking op van de cirkel door de punten O , A en P .
18. Gegeven is de baan van punt P door de parametervoorstelling: $x = 3t$ en $y = t + p$, waarbij p een constante is. Cirkel C wordt gegeven door $x^2 + y^2 = 10$.
 a) Neem $p = 10$ en bereken de kortste afstand van punt P tot de cirkel.
 b) Voor welke waarden van p heeft de baan van P één of twee snijpunten met cirkel C ?
19. Gegeven is punt $P(0, 4)$.
 Kies een willekeurig punt A op de x -as met coördinaten $(a, 0)$.
 a) Toon aan dat de middelloodlijn m_a van lijnstuk PA gegeven wordt door de vergelijking

$$y = \frac{1}{4}ax - \frac{1}{8}a^2 + 2.$$

 In onderstaande figuur zie je een aantal van deze lijnen m_a getekend.



- b) Toon aan dat de twee lijnen m_a die door het punt $(4, 0)$ gaan, loodrecht op elkaar staan.

Je krijgt uit de figuur de indruk dat er punten (x, y) zijn waar geen lijn m_a doorheen gaat. Dat zijn dus punten (x, y) waarvoor geen passende waarde van a te berekenen is zo dat (x, y) voldoet aan de vergelijking van m_a .

- c) Toon aan dat de coördinaten van deze punten voldoen aan: $y > \frac{1}{8}x^2 + 2$.

20. De figuren C en L zijn gegeven door de parametervoorstellingen :

$$C: \begin{cases} x = 9 + 5 \cdot \cos(\varphi) \\ y = 6 + 5 \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \text{ en } L: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$$

- Bereken de exacte coördinaten van de snijpunten van C en L .
- Een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ raakt aan L . Bereken de exacte lengte van de straal van die cirkel.
- Er zijn twee cirkels met middelpunt $O(0,0)$ die raken aan C . Bereken de exacte lengtes van de stralen van die cirkels.

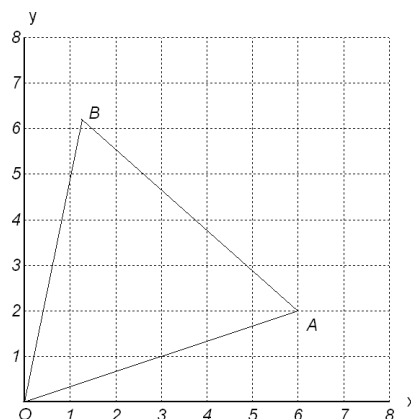
Subdomein E3

- Gegeven is de lijn l met vergelijking $2x + y = 10$ (x en y in meter). Over deze lijn beweegt een punt P met snelheid 1 m/s. Op $t = 0$ sec bevindt P zich in het punt met coördinaten $(0, 10)$. P beweegt in de richting van de positieve x -as.
 - Beschrijf de baan van P met een vectorvoorstelling.
 - Op welk tijdstip passeert P de x -as?
 - Op welk tijdstip bevindt P zich het dichtst bij de oorsprong?

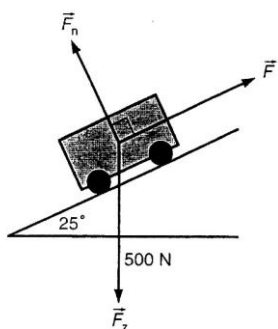
We kunnen punt P de lijn l versneld laten doorlopen door de vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 10 - 2t^2 \end{pmatrix} \text{ te kiezen. Hierin is } t \text{ de tijd in seconde.}$$

- Bereken de snelheid van P op het moment dat de x -as wordt gepasseerd.
 - Bereken de versnelling van P in m/s^2 .
- Gegeven zijn de punten $O(0, 0)$ en $A(6, 2)$. Lijnstuk OA is zijde van de gelijkzijdige driehoek OAB . Hoekpunt B heeft een positieve y -coördinaat. Zie de figuur. Bereken de exacte coördinaten van het punt B .
 - Zwaartepunten. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van het volgende systeem:
 - Drie puntmassa's met gelijk gewicht, elk in een van de punten $(0, 0)$, $(4, 4)$ en $(2, 8)$.
 - Zie a), maar nu is het gewicht in $(0, 0)$ twee keer zo groot.
 - Drie ijzeren staven vormen een rechthoekige gelijkbenige driehoek met rechthoekszijden van 10 meter lengte. De staven zijn even dik en ze zijn alle van hetzelfde homogene metaal gemaakt. Bereken de afstand van het zwaartepunt van de driehoek tot de langste zijde.
 - Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen van een punt P :
 $x = 2 + 2\sin \pi t$ en $y = 3 - 2\cos \pi t$ (x en y in meter, t in seconde).
 - Bepaal het eerste tijdstip na $t = 1000$, waarop P het hoogste punt van de baan bereikt.
 - Druk de snelheid en de versnelling van punt P uit in t .
 - Gegeven is driehoek ABC met $A(1, 1)$, $B(6, 6)$ en $C(0, -6)$. Bereken $\angle CAB$ in hele graden nauwkeurig.

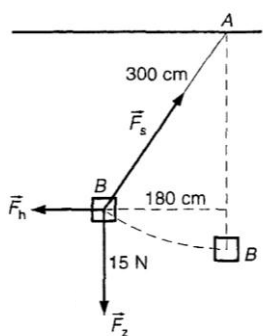


- Hieronder zie je een karretje op een hellend vlak. Op het karretje werkt de zwaartekracht $\vec{F}_z$, met $F_z = 500 \text{ N}$.

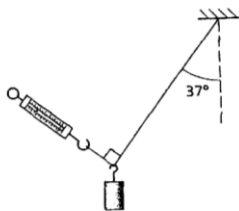


Bereken hoe groot de kracht $\vec{F}$ moet zijn om het karretje op zijn plaats te houden.

28. Een voorwerp B hangt aan een touw van 300 cm. Het wordt door een horizontale kracht 180 cm opzij getrokken. Zie de figuur. Van de drie getekende krachten is de resulterende kracht nul.



- Bereken hoeveel cm het voorwerp B omhoog is gegaan.
 - Bereken de kracht $\vec{F}_h$ waarmee het voorwerp B opzij wordt getrokken.
 - Bereken de spankracht $\vec{F}_s$.
29. Een voorwerp dat aan een touw hangt, is over een hoek van 37° opzij getrokken. Zie de figuur. De krachtmeter wijst 15 N aan.



- Teken in de figuur de vectoren die horen bij de kracht die door de krachtmeter wordt uitgeoefend, de spankracht in het touw en de zwaartekracht die op het voorwerp werkt.
 - Bereken de grootte van deze krachten.
30. Een cirkel wordt doorlopen volgens de parametervoorstelling:
$$\begin{cases} x = 3\cos(bt) \\ y = 3\sin(bt) \end{cases}$$
- Hierin zijn x en y in meter en t in seconde.
- De snelheid waarmee de cirkel wordt doorlopen is 2 m/s. Bereken b .
 - De versnelling waarmee de cirkel wordt doorlopen is $0,12 \text{ m/s}^2$. Bereken b .

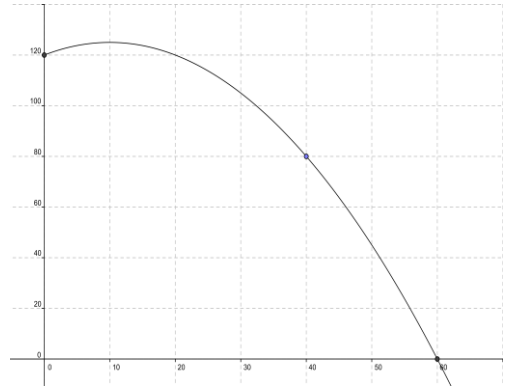
31. Een puntmassa wordt afgeschoten vanaf een punt dat op 120 meter hoogte ligt. Hij beschrijft een parabolische baan.

Zie de tekening.

De beweging van de puntmassa wordt beschreven door de vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t \\ 120 + 10t - 5t^2 \end{pmatrix}$$

(x en y in meter, t in seconde).



- Bereken de coördinaten van het punt van deze baan waarin de snelheidsvector horizontaal is.
- Bereken de hoek waaronder de puntmassa wordt afgeschoten.
- Stel een vectorvoorstelling op van de raaklijn aan deze baan op het tijdstip $t = 4$.
- Bereken de exacte snelheid van de puntmassa op het moment dat hij de grond raakt.
- Toon aan dat de puntmassa een constante versnelling heeft.