Antwoord opgaven A–J uit Overzicht meetkunde

A. a) De zwemmer nadert de overkant met 0,3 m/s, dus na $\frac{6}{0{,}3} = 20$ seconde bereikt hij de andere oever. Hij is dan $1 \cdot 20 = 20$ m afgedreven.

b) $\sqrt{1^2 + 0{,}3^2} \approx 1{,}04$ m/s

B. a) Er geldt:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2\cos 6\pi t \\ -2\sin 6\pi t \end{pmatrix}$$

(een minteken vanwege de draairichting). De samengestelde beweging wordt nu gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = 6\cos 10\pi t + 2\cos 6\pi t, \\ y(t) = 6\sin 10\pi t - 2\sin 6\pi t; \end{cases}$$

b) De snelheidsvector vind je door differentiëren:

$$\begin{pmatrix} -60\pi \sin 10\pi t - 12\pi \sin 6\pi t \\ 60\pi \cos 10\pi t - 12\pi \cos 6\pi t \end{pmatrix}.$$

Invullen van $t = \frac{1}{6}$ geeft als snelheidsvector bij benadering $\binom{163{,}2419}{131{,}9469}$. De lengte van deze vector is de snelheid: 210 m/min.

C. a) Een normaalvector is $\binom{2}{-3}$, dus een richtingsvector is $\binom{3}{2}$. Kies een punt op de lijn, bijvoorbeeld $(1, -1)$; dat geeft als een mogelijke parametervoorstelling:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -1 + 2t. \end{cases}$$

b) Een richtingsvector van ℓ is een normaalvector van de loodlijn. Gebruiken we de richtingsvector $\binom{3}{2}$ uit het vorige onderdeel, dan krijgen we als vergelijking voor de loodlijn $3x + 2y = c$. Het getal c wordt bepaald door $(1, 3)$ in te vullen. Conclusie: $3x + 2y = 9$.

D. a) Een richtingsvector is $\binom{4}{5}$, dus een normaalvector is $\binom{5}{-4}$. Dat leidt tot de vergelijking $5x - 4y = c$. Invullen van het punt $(3, -1)$ geeft $c = 19$; dus de gevraagde vergelijking is (bijvoorbeeld) $5x - 4y = 19$.

b) Een normaalvector van ℓ is een richtingsvector van de loodlijn. Gebruiken we $\binom{5}{-4}$ uit het vorige onderdeel, dan krijgen we bijvoorbeeld:

$$\begin{cases} x = 3 + 5t, \\ y = -4t. \end{cases}$$

E. a) Begin met de vergelijking van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. De vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as geeft $(\frac{x}{a})^2 + y^2 = 1$ en vervolgens geeft de andere transformatie het eindantwoord: $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$.

b) De standaardparametervoorstelling van de eenheidscirkel is

$$\begin{cases} x(t) = \cos t, \\ y(t) = \sin t. \end{cases}$$

De transformaties geven vervolgens:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t, \\ y(t) = b\sin t. \end{cases}$$

c) Deze vergelijking is te herleiden tot

$$\left(\frac{x-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{2}\right)^2 = 1.$$

Er geldt dus $a = 4$, $b = 2$ en $\vec{v} = \binom{1}{-2}$.

d) Over $\binom{1/4}{-1}$. Immers $\frac{x}{4} - \frac{1}{4} = \frac{x-1}{4}$ en $\frac{y}{2} + 1 = \frac{y+2}{2}$.

F. Voor een horizontale raaklijn moet gelden $y'(t) = 0$, oftewel $2\cos 2t = 0$. Dit is het geval voor $t = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$. Punt P wordt bereikt in $t = \frac{1}{4}\pi$ en heeft coördinaten $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 1)$. Om S_2 te krijgen, moet S_1 twee maal over de vector $\overrightarrow{OP}$ worden verschoven. Dat geeft als parametervoorstelling voor S_2:

$$\begin{cases} x = \sin t + \sqrt{2}, \\ y = \sin 2t + 2. \end{cases}$$

G. a) Vul de coördinaten van P in in de vergelijking van ℓ: $3 - 2 \cdot 2 = -1 \neq 5$.

b) Een normaalvector van ℓ is $\binom{1}{-2}$. Een vectorvoorstelling van de loodlijn door P is dus

$$\binom{x}{y} = \binom{3}{2} + t \cdot \binom{1}{-2}.$$

Vervolgens bepalen we het snijpunt van de loodlijn met ℓ:

$$5 = 3 + t - 2(2 - 2t) = -1 + 5t \quad \iff \quad t = \tfrac{6}{5}.$$

Dit geeft als snijpunt $(4\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$. De gevraagde afstand is dus

$$\sqrt{(4\tfrac{1}{5} - 3)^2 + (-\tfrac{2}{5} - 2)^2} = \tfrac{6}{5}\sqrt{5}.$$

H. Kwadraatafsplitsen geeft

$$x^2 + y^2 - 2x + 5y - 13 = (x-1)^2 - 1 + (y + \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{25}{4} - 13,$$

dus de cirkelvergelijking kan ook worden geschreven als

$$(x-1)^2 + (y + \tfrac{5}{2})^2 = 20\tfrac{1}{4}.$$

Uit deze standaardvorm lezen we af dat het middelpunt $(1, -\frac{5}{2})$ is en de straal $\sqrt{20\frac{1}{4}} = \frac{9}{2}$.

I. a) Het middelpunt van de cirkel is $(2,3)$. Het punt $(3,5)$ ligt op de cirkel (vul het maar in in de vergelijking). Een normaal van de raaklijn is dus $\binom{2-3}{3-5} = \binom{-1}{-2}$. Dit geeft als vergelijking $-x - 2y = c$, waarbij $c = -13$ gevonden wordt door $(3,5)$ in te vullen.

b) Een richtingsvector van een raaklijn is óf $\binom{1}{0}$, óf van de vorm $\binom{a}{1}$ (alleen de richting en niet de lengte is immers belangrijk, dus kun je iedere vector in deze vormen krijgen door scalaire vermenigvuldiging). De lijn door $(6,0)$ met richtingsvector $\binom{1}{0}$ heeft geen punt gemeenschappelijk met de cirkel (want de x-as snijdt de cirkel niet), dus we hoeven alleen maar te kijken naar lijnen met vectorvoorstelling $\overrightarrow{OX} = \binom{6}{0} + t \cdot \binom{a}{1}$. We bepalen nu de snijpunten van deze lijn met de cirkel. Dat doe je door $(6 + at, t)$ in te vullen in de vergelijking van de cirkel:

$$\begin{aligned} & (4 + at)^2 + (t-3)^2 = 5 \\ \iff \quad & 16 + 8at + a^2t^2 + t^2 - 6t + 9 = 5 \\ \iff \quad & (a^2+1)t^2 + (8a - 6)t + 20 = 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

Nu heeft een raaklijn precies één punt gemeenschappelijk met de cirkel, dus we zijn op zoek naar die waarden van a waarvoor de kwadratische vergelijking $(*)$ precies één oplossing heeft. Maar dat betekent dat de discriminant nul moet zijn:

$$D = (8a-6)^2 - 80 \cdot (a^2+1) = 0.$$

Dit is weer een kwadratische vergelijking en die kunnen we oplossen: $a = -\frac{1}{2}$ of $a = -5\frac{1}{2}$. Dat betekent dat de raaklijnen worden gegeven door de vectorvoorstellingen

$$\overrightarrow{OX} = \binom{6}{0} + t \cdot \binom{1}{2} \quad \text{en} \quad \overrightarrow{OX} = \binom{6}{0} + t \cdot \binom{-11}{2}.$$

c) Een richtingsvector van een raaklijn is óf $\binom{1}{0}$, óf van de vorm $\binom{a}{1}$ (alleen de richting en niet de lengte is immers belangrijk, dus kun je iedere vector in deze vormen krijgen door scalaire vermenigvuldiging). De lijn door $(0,6)$ met richtingsvector $\binom{1}{0}$ heeft geen punt gemeenschappelijk met de cirkel, dus we hoeven alleen maar te kijken naar lijnen met vectorvoorstelling $\overrightarrow{OX} = \binom{0}{6} + t \cdot \binom{a}{1}$. We bepalen nu de snijpunten van deze lijn met de cirkel. Dat doe je door $(at, 6+t)$ in te vullen in de vergelijking van de cirkel:

$$\begin{aligned} & (at-2)^2 + (3+t)^2 = 5 \\ \Longleftrightarrow \quad & a^2t^2 - 4at + 4 + t^2 + 6t + 9 = 5 \\ \Longleftrightarrow \quad & (a^2+1)t^2 + (6-4a)t + 8 = 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

Nu heeft een raaklijn precies één punt gemeenschappelijk met de cirkel, dus we zijn op zoek naar die waarden van a waarvoor de kwadratische vergelijking $(*)$ precies één oplossing heeft. Maar dat betekent dat de discriminant nul moet zijn:

$$D = (6-4a)^2 - 32 \cdot (a^2+1) = 0.$$

Dit is weer een kwadratische vergelijking en die kunnen we oplossen: $a = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{10}$. Dat betekent dat de raaklijnen worden gegeven door de vectorvoorstellingen

$$\overrightarrow{OX} = \binom{0}{6} + t \cdot \binom{-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{10}}{1}.$$

d) In dit geval is de afstand tussen P en het middelpunt van de cirkel $(2,3)$ kleiner dan de straal $\sqrt{5}$. Dus ligt P ín de cirkel; maar alle raaklijnen liggen buiten de cirkel.

J. De vergelijking valt met kwadraatafsplitsen te herleiden tot $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$; het gaat dus om een cirkel met middelpunt $(3,-1)$ en straal 4. Een richtingsvector van een raaklijn is óf $\binom{1}{0}$, óf van de vorm $\binom{a}{1}$ (alleen de richting en niet de lengte is immers belangrijk, dus kun je iedere vector in deze vormen krijgen door scalaire vermenigvuldiging). De lijn door $(0,3)$ met richtingsvector $\binom{1}{0}$ heeft een punt gemeenschappelijk met de cirkel! (Het is de horizontale raaklijn door het punt $(3,3)$ op de cirkel.) Eén van de raaklijnen aan de cirkel is dus

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 3. \end{cases}$$

Nu moeten we nog op zoek naar de andere raaklijn. De bijbehorende vectorvoorstelling heeft de vorm $\overrightarrow{OX} = \binom{0}{3} + t \cdot \binom{a}{1}$. We bepalen nu de snijpunten van deze lijn met de cirkel. Dat doe je door $(at, 3+t)$ in te vullen in de vergelijking van de cirkel:

$$\begin{aligned} & a^2t^2 - 6at + 9 + 6t + t^2 + 6 + 2t - 6 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (a^2+1)t^2 + (8-6a)t + 9 = 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

Nu heeft een raaklijn precies één punt gemeenschappelijk met de cirkel, dus we zijn op zoek naar die waarden van a waarvoor de kwadratische vergelijking $(*)$ precies één oplossing heeft. Maar dat betekent dat de discriminant nul moet zijn:

$$0 = D = (8-6a)^2 - 36 \cdot (a^2+1) = 28 - 96a$$

Deze vergelijking heeft één oplossing: $a = -\frac{24}{7}$. Dat betekent dat de raaklijnen worden gegeven door de vectorvoorstelling

$$\overrightarrow{OX} = \binom{0}{3} + t \cdot \binom{-24}{7}.$$

K. In beide vectorvoorstelling komt een t voor, dus we vervangen de onderste door u. Dat geeft het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 3 + 2t = 8 - 13u \\ 2 + 5t = 1 + 2u \end{cases}$$

hetgeen equivalent is met

$$\begin{cases} 2t + 13u = 5 \\ 5t - 2u = -1. \end{cases}$$

Om een oplossing te vinden, kun je bijvoorbeeld de bovenste vergelijking vermenigvuldigen met 5 en de onderste met 2; dat geeft:

$$\begin{cases} 10t + 65u = 25 \\ 10t - 4u = -2. \end{cases}$$

Trek nu de onderste van de bovenste vergelijking af:

$$69u = 27 \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = \tfrac{27}{69}.$$

De onderste vectorvoorstelling geeft nu het snijpunt: $(\frac{67}{23}, \frac{41}{23})$.