Meetkunde met algebra

Dit is een bewerking van
Meetkunde met coördinaten, Blok *Redeneren met vormen, getallen en formules*
van Aad Goddijn
ten behoeve van het nieuwe programma (2014) wiskunde B vwo.

⌘ Opgaven met dit merkteken kun je zonder de opbouw aan te tasten, overslaan.

* Bij opgaven met dit merkteken hoort een werkblad.

Inhoudsopgave

Eerste experimentele uitgave augustus 2009

Colofon

Auteurs: Aad Goddijn, Leon van den Broek, Dolf van den Hombergh

Met medewerking van: Josephine Buskes, Richard Berends, Sieb Kemme, Dick Klingens

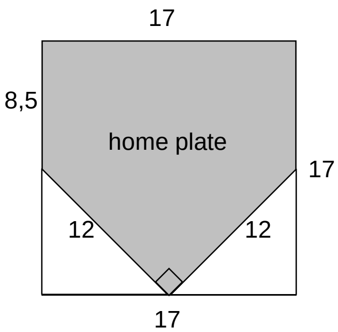
Illustraties: Wilson Design, Uden

1 Opnieuw de Stelling van Pythagoras

In dit hoofdstuk worden dezelfde problemen vaak meetkundig en algebraïsch aangepakt.

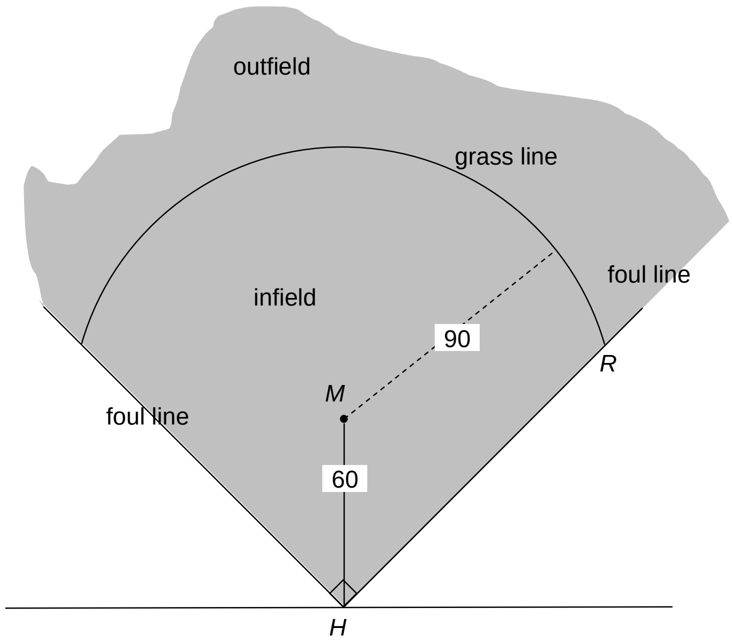
1 Het baseball veld

Baseball wordt gestart vanaf de zogenaamde *home plate*. Dat is een vierkant van 17 bij 17 inch (1 inch ≈ 2,54 cm) waar symmetrisch twee rechthoekige driehoeken uitgehaald zijn.



a. De lengte 12 inch in de tekening is niet exact. Bereken de exacte maat.

Hieronder is het speelveld getekend.



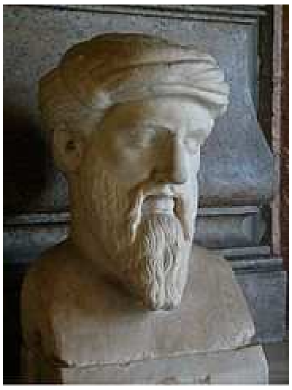
De bal moet binnen de *foul lines* blijven. De grens tussen *infield* en *outfield* is de *grass line*. Het is een deel van een cirkel met middelpunt *M*. Voor de afmetingen, zie het plaatje op de vorige bladzijde. (De maten zijn nu in feet, 1 foot ≈ 30 cm.)

b. Bereken de afstand van de homeplate *H* tot het eindpunt *R* van de grass line in een decimaal.

Tip. Teken een loodlijn vanuit *M* op een foul line. Als je de lengte hiervan niet kunt berekenen, bekijk dan de Rekentechniek over de 45-45-90-graden driehoek.

c. Bereken de oppervlakte van het infield in een decimaal.

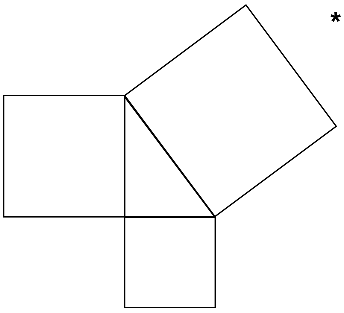
In de opgave hierboven heb je de stelling van Pythagoras gebruikt. In het volgende bewijzen we deze stelling opnieuw. En wel op verschillende manieren. We geven twee *algebraïsche* bewijzen; daarvoor moet je *rekenen*. We geven ook twee *meetkundige* bewijzen; daarvoor moet je *redeneren.*



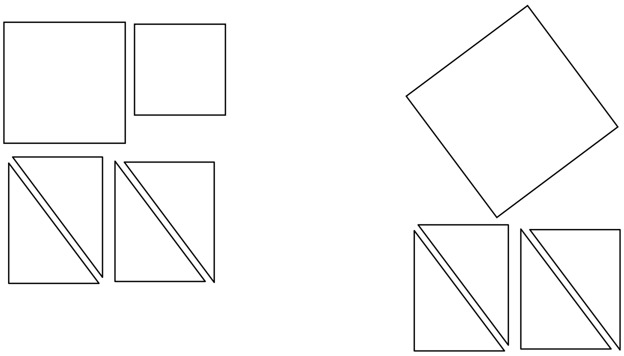
Pythagoras, geboren op het Griekse eiland Samos, leefde in de zesde eeuw voor Chr. Hij reisde naar Babylonië en Egypte en heeft daar waarschijnlijk zijn wiskundekennis opgedaan. Hij hield zich bezig met rekenkunde, meetkunde, muziek en astrologie. Pythagoras vestigde zich in Croton (een Griekse handelsstad in Zuid Italië), waar hij een filosofische school stichtte, een soort religieuze sekte met een heleboel regels (die op de moderne mens eigenaardig overkomen). Pythagoras' grote verdienste is dat hij de dingen met getallen uitdrukte. De stelling van Pythagoras is naar hem genoemd.

De stelling van Pythagoras is misschien wel de bekendste stelling uit de wiskunde. Elke middelbare scholier in Nederland leert hem.
De stelling is minstens 2500 jaar oud, en speciale gevallen van de stelling zijn nog ouder. Er zijn honderden bewijzen van de stelling.
De meest bekende vorm van de stelling luidt: $a^2 + b^2 = c^2$; dan moet je voor *a*, *b* en *c* wel de juiste zijden nemen, en weten dat hij voor rechthoekige driehoeken geldt.

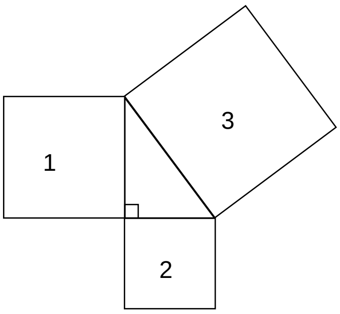
We gaan de stelling van Pythagoras eerst meetkundig bewijzen. Hierbij wordt niet gerekend; er wordt alleen met meetkundige figuren geschoven.



*** 2 De stelling van Pythagoras als legpuzzel**
Hiernaast zijn op de zijden van een rechthoekige driehoek vierkanten gezet. Hieronder zijn de drie vierkanten getekend en acht kopieën van de rechthoekige driehoek.



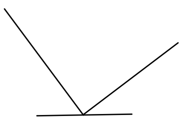
Links staan de twee kleinere vierkanten en vier driehoeken. Daarmee kun je een vierkant leggen.
Rechts staat het grote vierkant en vier driehoeken. Ook hiermee kun je een vierkant leggen.
a. Teken hoe je dat kunt doen. (Als je hulp nodig hebt: op het knipblad staan acht rechthoekige driehoeken met de drie vierkanten.)
b. Laat nu zien dat de oppervlakte van de twee kleinere vierkanten samen hetzelfde is als de oppervlakte van het grote vierkant.



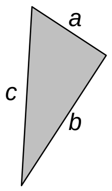
Uit bovenstaande volgt de **stelling van Pythagoras**:

> De oppervlakte van de vierkanten op de rechthoekszijden samen is hetzelfde als de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde.
> In het plaatje:
> oppervlakte 1 + oppervlakte 2 = oppervlakte 3

Nog even terug naar de puzzel rechts: van het grote vierkant en de vier driehoeken kan een vierkant worden gelegd.
c. Voor de preciezen (en dat zijn wij): hoe weet je zeker dat er geen 'knik' zit bij het punt waar het grote vierkant met twee driehoeken samenkomen?
Tip. Toon aan dat de drie hoeken in de punt samen 180° zijn.

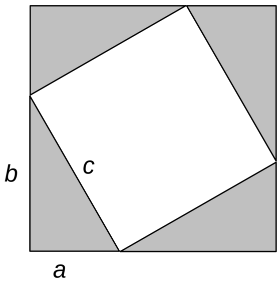


We gaan de stelling van Pythagoras nu algebraïsch bewijzen. Hierbij wordt wel gerekend; we hebben "merkwaardige producten" nodig.



De **stelling van Pythagoras** algebraïsch:

> De rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek noemen we *a* en *b*, de schuine zijde *c*.
> Dan is $a^2 + b^2 = c^2$.

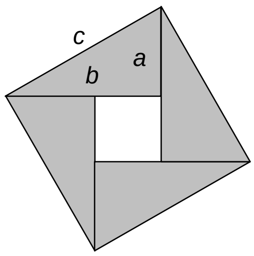


3 De stelling van Pythagoras algebraïsch (1)

Met een rechthoekige driehoek en drie kopieën wordt de nevenstaande figuur gelegd. Er ontstaan twee vierkanten. De zijden van de rechthoekige driehoeken zijn: *a*, *b* en *c*.

De oppervlakte van het grote vierkant is: $(a+b)^2$.

Je kunt de oppervlakte van dat vierkant ook in *a*, *b* en *c* uitdrukken door de oppervlakte van de vijf stukken bij elkaar te tellen. Dit leidt tot een vergelijking.
Laat door vereenvoudigen zien dat hieruit de stelling van Pythagoras volgt.



4 De stelling van Pythagoras algebraïsch (2)

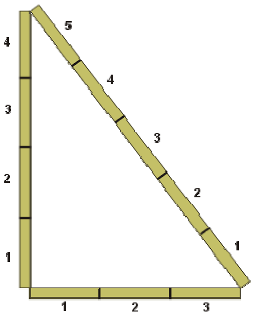
Met een rechthoekige driehoek en drie kopieën wordt de nevenstaande figuur gelegd. Er ontstaan twee vierkanten.
De zijden van de rechthoekige driehoeken zijn: *a*, *b* en *c*.
Door de oppervlakte van het grote vierkant op twee manieren te berekenen, kun je laten zien dat $a^2 + b^2 = c^2$.

a. Doe dat.
b. Waarom is de grote vierhoek een vierkant?

In opgave **3** en **4** gebruik je merkwaardige producten.

> **merkwaardige producten**
> $(z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$
> $(z-w)^2 = z^2 - 2zw + w^2$
> $(z+w)(z-w) = z^2 - w^2$

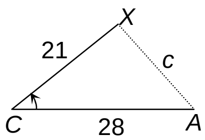
"Merkwaardig" moet hier in een oude betekenis gelezen worden: waard om te merken = onthouden.

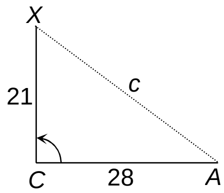


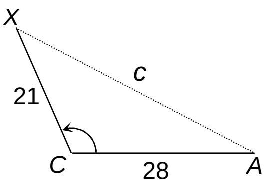
In *Bouwtechniek*, *Meten en Uitzetten* wordt uitgelegd hoe je een rechte hoek uit kunt zetten. Daarvoor gebruik je een zogenaamde bouwhaak.
De bouwhaak wordt ook wel de 3-4-5-steek genoemd.
Op de drie latten zet je hetzelfde veelvoud uit van 3, 4 en 5.
Bijvoorbeeld: 3×20 cm, 4×20 cm en 5×20 cm.
http://www.xs4all.nl/~desnor/bouwtechniek/pag.%20metselen/bb.meten_en_uitzetten.htm
Voor de zijden van een 3-4-5-steek geldt de stelling van Pythagoras.

Om een rechte hoek uit te zetten, wordt de *omkering* van de stelling van Pythagoras gebruikt: als voor de zijden a, b en c van een driehoek geldt: $a^2 + b^2 = c^2$, dan is de driehoek rechthoekig.

5 De omkering van de stelling van Pythagoras
Twee latjes CA en CX zitten scharnierend in C aan elkaar vast. Tussen A en X is een elastiekje gespannen.

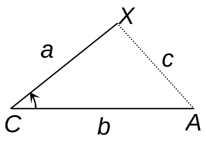


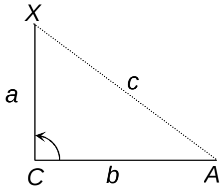


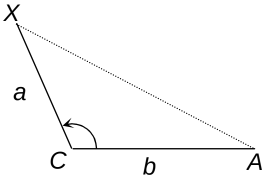


AC heeft lengte 28 en CX lengte 21. Hoe groter de hoek tussen de latjes is, hoe langer het elastiekje wordt. De lengte van het elastiekje noemen we c. In het middelste plaatje is de hoek tussen de latjes recht. In dit geval kun je c berekenen.
a. Doe dat.

Als de lengte van de latjes a en b zijn en de lengte van het elastiekje c, kun je voor het middelste plaatje de vergelijking $a^2 + b^2 = c^2$ opschrijven. In de andere twee gevallen kun je alleen maar een ongelijkheid opschrijven: $a^2 + b^2$ __ c^2.

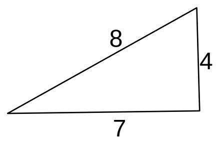




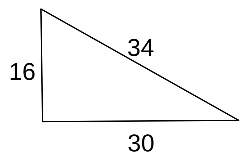


b. Vul voor het linker- en rechterplaatje het passende ongelijkteken in.

> **Stelling**
> De lengten van de zijden van een driehoek noemen we *a*, *b* en *c*.
> Als $a^2 + b^2 = c^2$, dan is de hoek tegenover de zijde van lengte *c* **recht**.
> Als $a^2 + b^2 < c^2$, dan is de hoek tegenover de zijde van lengte c **stomp**.
> Als $a^2 + b^2 > c^2$, dan is de hoek tegenover de zijde van lengte *c* **scherp**.

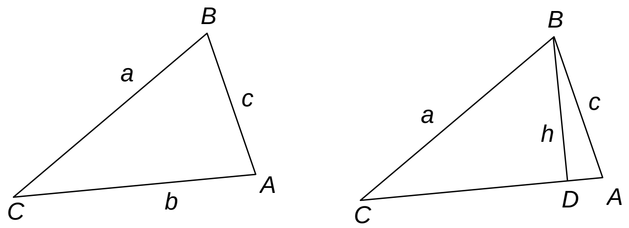


6 Scherphoekig, stomphoekig of rechthoekig?
Hiernaast is een driehoek getekend waarvan de zijden 4, 7 en 8 cm lang zijn.
a. Ga na of de driehoek scherphoekig, stomphoekig of rechthoekig is.

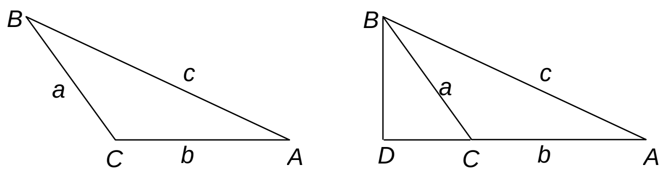


b. Doe dat ook voor de driehoek met zijden van 16, 30 en 34.

7



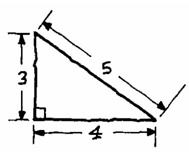
Misschien vind je het verhaal met de elastiekjes in opgave **5** niet overtuigend.
Hierboven is de hoek bij *C* scherp. De loodrechte projectie *D* van *B* op *AC* ligt dan tusen *A* en *C*.
Dan $a > BD$ *en* $b > AD$, dus $a^2 + b^2 > BD^2 + AD^2 = c^2$.
Hieronder is de hoek bij *C* stomp.



In dit geval ligt de loodrechte projectie *D* van *B* op lijn *AC* buiten lijnstuk *AC.*
Bewijs dat $a^2 + b^2 < c^2$.

8 In een assenstelsel zijn gegeven de punten $A(7,10)$, $B(11,12)$ en $C(6,12)$.
a. Is hoek BAC scherp, recht of stomp?

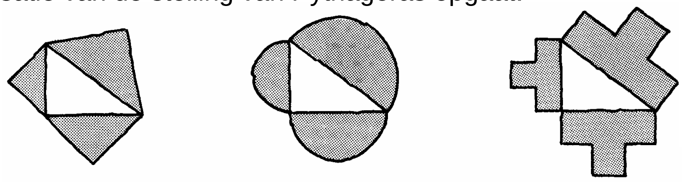
In een assenstelsel zijn gegeven de punten $O(0,0)$, $P(4,3)$ en $Q(a,0)$.
b**.** Voor welke waarden van a is driehoek POQ rechthoekig?
c. Voor welke waarden van a is $\angle OPQ$ stomp?

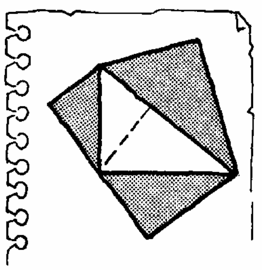


9 In de meetkundige formulering van de stelling van Pythagoras worden *vierkanten* gezet op de zijden van een rechthoekige driehoek. Je kunt ook andere figuren op de zijden zetten; die moeten wel *gelijkvormig* zijn**.** Altijd geldt dat de oppervlakte van de figuur op de schuine zijde gelijk is aan de som van de oppervlaktes van de twee figuren op de rechthoekszijden.
We bekijken drie voorbeelden bij de 3-4-5-driehoek:

- met op elke zijde een geodriehoek,
- met op elke zijde een halve cirkel,
- met op elke zijde een letter T (die bestaat uit vier vierkanten).

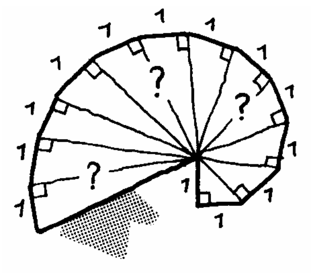
Ga na dat voor elk van deze voorbeelden de generalisatie van de stelling van Pythagoras opgaat.





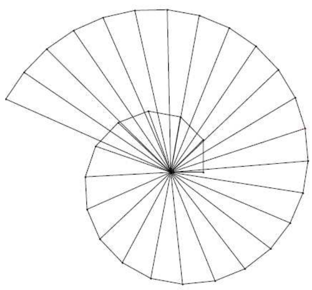
10 We plaatsen nu op de zijden van de rechthoekige driehoek bijzondere figuren, namelijk figuren die gelijkvormig zijn met de rechthoekige driehoek zelf! Zie plaatje.
Hoe kun je heel eenvoudig zien dat de generalisatie van de stelling van Pythagoras opgaat?
Deze laatste beschouwing van de stelling van Pythagoras is afkomstig van Albert Einstein.

2 De stelling van Pythagoras toepassen

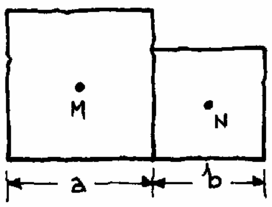


1 Slakkenhuis
Het "slakkenhuis" hiernaast bestaat uit op elkaar aansluitende rechthoekige driehoeken, waarvan een rechthoekszijde lengte 1 heeft. De kleinste driehoek heeft twee rechthoekszijden van lengte 1.
Bij de lijnstukken vanuit het centrum na 4, 7 en 11 stappen staat een vraagteken.

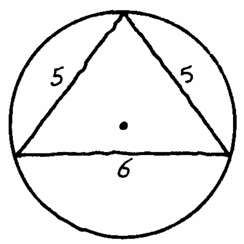
a. Hoe lang zijn de zijden waar een vraagteken bij staat? Geef exacte antwoorden; laat wortels die je niet kunt vereenvoudigen staan.



In de tweede figuur is het slakkenhuis voortgezet.
b. Zijn de hoeken om het centrum alle even groot? Licht je antwoord toe.
c. Na hoeveel stappen is het lijnstuk vanuit het centrum langer dan 1000?

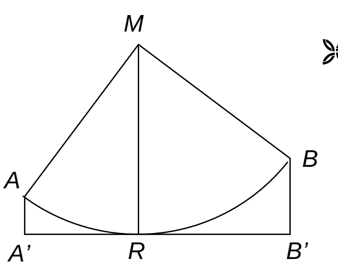


2 Twee vierkanten met middelpunten *M* en *N* en zijden *a* en *b* grenzen aan elkaar zoals hiernaast is getekend. De oppervlakte van de twee vierkanten samen is 18.
Hoe groot is de lengte van lijnstuk *MN*?
Tip: Teken een rechthoekige driehoek met *MN* als schuine zijde. Hoe lang zijn de rechthoekszijden (uitgedrukt in *a* en *b*)?



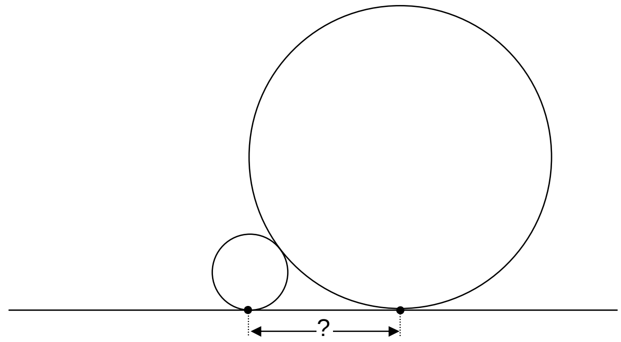
3 Van een driehoek zijn de zijden 5, 5, en 6. De straal van de omgeschreven cirkel noemen we *R*.
a. Bereken de oppervlakte van de driehoek.
b. Laat zien dat $R^2 = (4 - R)^2 + 9$.
c. Bereken *R*.

4 *ABCD* is een vierkant van 10 bij 10. Een punt binnen dat vierkant ligt even ver van de punten *A*, *B* als van de zijde *CD*.
Bereken exact hoe groot die afstand is.



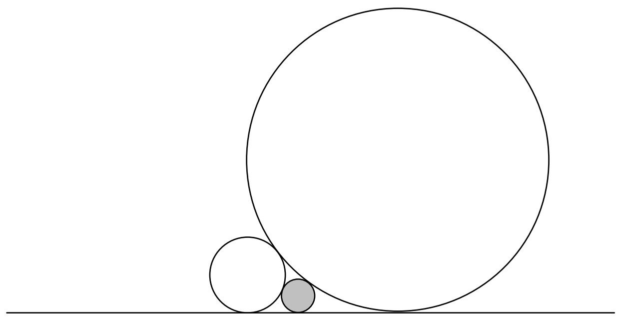
5 Gegeven is een kwartcirkel met middelpunt *M* en hoekpunten *A* en *B.* Aan deze cirkel wordt in *R* een raaklijn getrokken. De projecties van *A* en *B* op deze raaklijn noemen we *A*' en *B'*. Als gegeven is dat *AA'* $= 1$ en *BB'* $= 2$, hoe groot is dan de straal van de cirkel?
Tip. Laat vanuit *A* en *B* loodlijnen neer op lijn *MR*. Laat zien dat je dan twee congruente driehoeken krijgt.
Pythagoras, september 2004

6 Twee cirkels met straal 1 en 4 raken elkaar uitwendig en raken een rechte lijn.



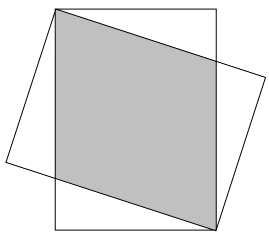
a. Bereken de afstand van de raakpunten op de rechte lijn.

We tekenen een zo groot mogelijk cirkeltje in het gebied dat wordt ingesloten door de twee cirkels en de rechte lijn.



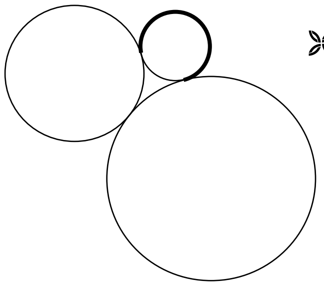
b. Bereken de straal van dat cirkeltje.

7 De zijden van een A4-tje verhouden zich als 1 : $\sqrt{2}$.

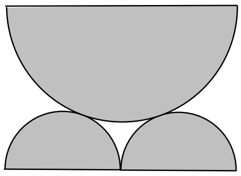


Twee rechthoeken met afmetingen 1 en $\sqrt{2}$ liggen over elkaar zoals in de figuur.
Wat is de oppervlakte van het deel waar ze elkaar overlappen?

Wiskundetoernooi RU Nijmegen, 2009

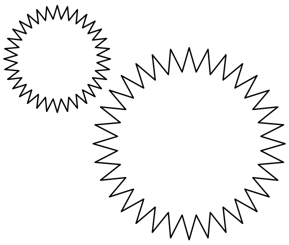


✠ **8** Drie cirkels met stralen van 1, 2 en 3 raken elkaar.
Hoe lang is de (dikgetekende) cirkelboog met het vraag-teken?
Kangoeroe wizPROF2007, vraag 24



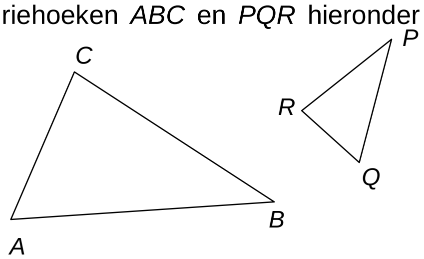
✠ **9** Sietse maakt van drie halve boomstammen een bankje als in de figuur. De diameter van de boomstammen aan de onderkant is 2 dm, de diameter van de bovenste stam 4 dm. Hoeveel dm is het bankje hoog?
Kangoeroe wizPROF2004, vraag 16

3 Opnieuw gelijkvormigheid



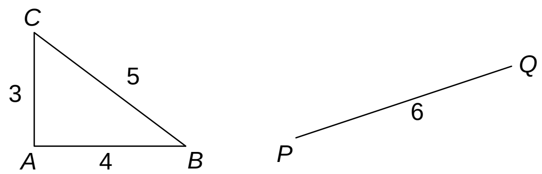
Twee figuren zijn gelijkvormig als de ene figuur een vergroting is van de andere. (Een verkleining is een vergroting met factor tussen 0 en 1.)

De twee driehoeken *ABC* en *PQR* hieronder zijn gelijkvormig.

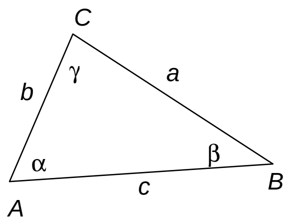


We noteren dat zó: $\Delta ABC \sim \Delta QPR$. We spreken af dat we de volgorde van de hoekpunten in deze notatie zó nemen dat corresponderende hoekpunten op corresponderende plaatsen staan.
Hier: *A* correspondeert met *Q*,
B correspondeert met *P*,
C correspondeert met *R*.

1



Gegeven driehoek *ABC* met zijden 3, 4 en 5, verder een lijnstuk *PQ* met lengte 6 cm.
a. Teken een driehoek *PQR* zó, dat $\Delta PQR \sim \Delta ABC$.
Bereken de lengte van de zijden *PR* en *QR*.
b. Teken een driehoek *PQR* zó, dat $\Delta PQR \sim \Delta ACB$.
Bereken de lengte van de zijden *PR* en *QR*.
c. Teken een driehoek *PQR* zó, dat $\Delta PQR \sim \Delta BCA$.
Bereken de lengte van de zijden *PR* en *QR*.



Notatie
In driehoek *ABC* noteren we:
de zijde tegenover hoek *A* met *a*,
de zijde tegenover hoek *B* met *b*,
de zijde tegenover hoek *C* met *c*,
de hoek met hoekpunt *A* met α,
de hoek met hoekpunt *B* met β en
de hoek met hoekpunt *C* met γ.

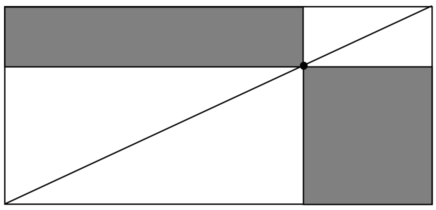
Als $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, dan is de vergrotingsfactor $\frac{p}{a}$. Maar ook $\frac{q}{b}$ en $\frac{c}{r}$, dus $\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{c}{r}$.

2 In de onderbouw heb je gezien dat twee driehoeken gelijkvormig zijn als de hoeken van de ene driehoek even groot zijn als de hoeken van de andere driehoek.
Dit geldt niet voor vierhoeken.
Laat dat met een voorbeeld zien.

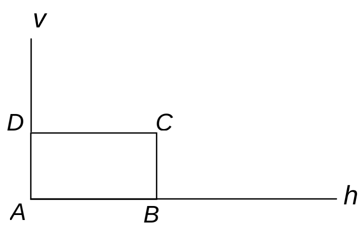
In het volgende laten we zien dat je verhoudingen anders kunt schrijven. We doen dit weer én algebraïsch én meetkundig.

3 Een rechthoek wordt door een diagonaal verdeeld in twee stukken met gelijke oppervlakte.

Gebruik dit om aan te tonen dat de twee grijze rechthoeken in de grote rechthoek gelijke oppervlakte hebben.

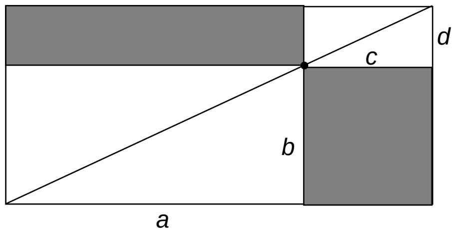


4 In het plaatje hieronder is een horizontale halve lijn h en een verticale halve lijn v getekend met gemeenschappelijk beginpunt A. $ABCD$ is een rechthoek met een zijde op h en een zijde op v.



a. Teken drie rechthoeken met een zijde op h en een zijde op v die gelijkvormig zijn met $ABCD$ en net als $ABCD$ de verticale zijde korter hebben dan de horizontale zijde.
b. Wat merk je op over de hoekpunten rechtsboven van de rechthoeken?

5 Bekijk nog eens het plaatje van opgave **3**. De zijden van de ene grijze rechthoek zijn *a* en *b*, die van de andere grijze rechthoek *c* en *d*.
a. Druk de oppervlakte van de grijze rechthoeken in *a*, *b*, *c* en *d* uit.



b. Er geldt ook: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Waarom?

Blijkbaar komt de gelijkheid $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ op hetzelfde neer als $ad = bc$.

Door beide leden van de gelijkheid $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ met hetzelfde getal te vermenigvuldigen kun je dat ook inzien.
c. Met welk getal (uitgedrukt in *a*, *b*, *c* en *d*)?

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ komt ook op hetzelfde neer als $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$
d. Hoe kun je dat laten zien? Algebraïsch en meetkundig?

6 Veronderstel het wel of niet-roken niet afhangt van het feit of iemand man of vrouw is.
In een enquête werd gevraagd of de persoon man of vrouw was en of hij/zij rookte. de resultaten staan in de de volgende tabel:

	man	vrouw
roker	120	90
niet roker	200	

Hierin lees je onder andere af dat er 120 mannen zijn die roken.
a. Welk getal verwacht je op lege plaats?
b. Geef twee manieren om dat getal te berekenen.

In opgave **7** kun je zeggen: de getallen in de kolommen hebben gelijke verhouding, je kunt ook zeggen: de getallen in de rijen hebben gelijke verhouding,

	man	vrouw
roker	*a*	*b*
niet roker	*c*	*d*

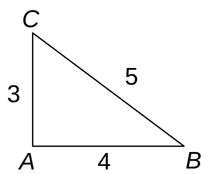
De getallen in de kolommen hebben dezelfde verhouding betekent: $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$.
De getallen in de rijen hebben dezelfde verhouding betekent: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow ad = bc$$

Hierbij zijn a, b, c en d getallen $\neq 0$.

$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ vervangen door $ad = bc$ noemt men wel:
kruislings vermenigvuldigen.

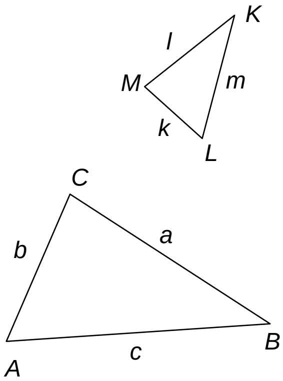
7 In driehoek ABC geldt: $\angle A = 45°$, $AB = 2$ en $AC = 3$.
Van driehoek KLM is gegeven: $\angle K = 45°$. Verder geldt: $KL : AB = KM : AC$.
a. Teken driehoek ABC. Neem de cm als eenheid.
b. Gegeven is: $KL = 3$.
Bereken KM teken driehoek KLM.
Geldt: $\Delta ABC \sim \Delta KLM$?
c. Gegeven is: $KL = 5$
Bereken KM teken driehoek KLM.
Geldt: $\Delta ABC \sim \Delta KLM$?



8 Driehoek ABC hiernaast heeft een rechte hoek in A. Voor de zijden: zie figuur.
Driehoek KLM heeft een rechte hoek in K en $KL = 6$.
Verder geldt: $KL : AC = LM : AB$.
a. Bereken de zijden KM en LM.
b. Zijn de driehoeken KLM en ABC gelijkvormig?

Twee driehoeken zijn gelijkvormig
- als ze twee hoeken even groot hebben;
- als ze één hoek even groot hebben en de zijden die die hoek vormen in de ene driehoek dezelfde verhouding hebben als die zijden in de andere driehoek.

Al eerder hebben we opgemerkt: als $\Delta ABC \sim \Delta KLM$, dan $\frac{k}{a} = \frac{l}{b} = \frac{m}{c}$. Dit komt op hetzelfde neer als:
$a : b : c = k : l : m$



Gelijkvormigheid

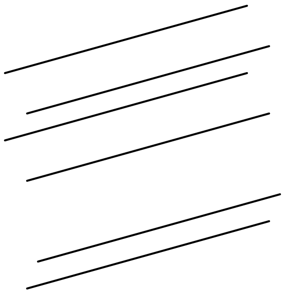
$\Delta ABC \sim \Delta KLM \Leftrightarrow \angle A = \angle K$ en $\angle B = \angle L$

$\Delta ABC \sim \Delta KLM \Leftrightarrow \angle A = \angle K$ en $b : c = l : m$

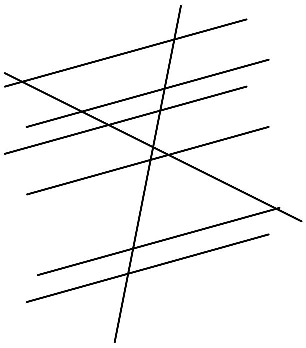
$\Delta ABC \sim \Delta KLM \Leftrightarrow \frac{k}{a} = \frac{l}{b} = \frac{m}{r} \Leftrightarrow a : b : c = k : l : m$

Hoe maak je gelijkvormige driehoeken?

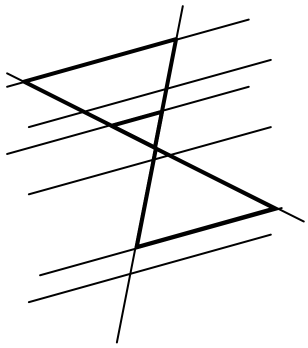
Teken een stel evenwijdige lijnen:



Teken daarover heen twee snijdende lijnen:

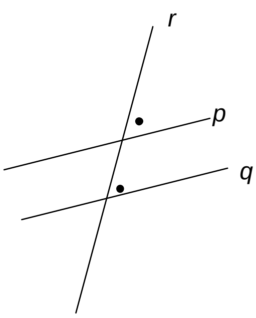


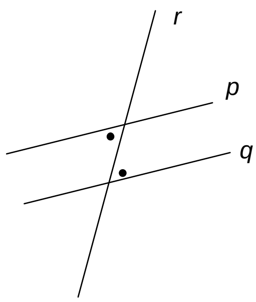
Je krijgt een patroon van gelijkvormige driehoeken



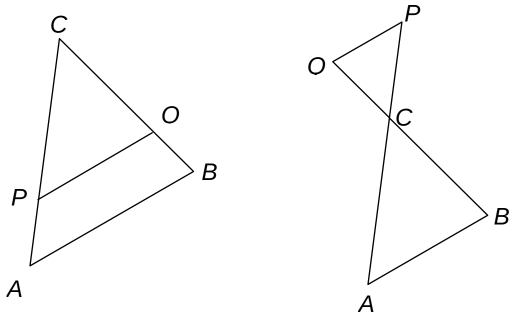
Dat je gelijkvormige driehoeken krijgt, zie je als volgt. (We herhalen dit uit de onderbouw.)

F- en Z-hoeken



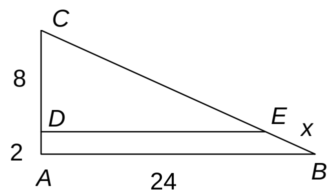


De lijnen p en q zijn evenwijdig. Dan zijn de hoeken met het puntje erin gelijk.

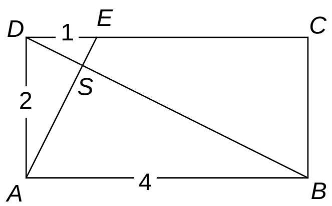


Speciale gevallen van gelijkvormigheid
Zie het plaatje hierboven.
De lijnen *PQ* en *AB* zijn evenwijdig, dan:
$\Delta ABC \sim \Delta PQC$

De figuur rechts noemen we wel *zandloper*.

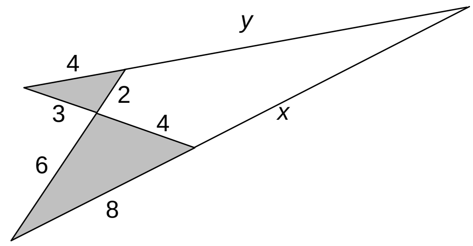


9 Zie plaatje. *ABC* is een rechthoekige driehoek. Hoek *CDE* is recht.
Bereken *EB*.

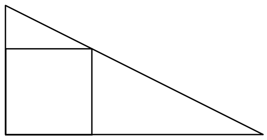


10 Zie plaatje. *ABCD* is een rechthoek van 2 bij 4. Op *CD* ligt *E* zó, dat $DE = 1$. Het snijpunt van *AE* en *DB* is *S*.
a. Bereken *AS* exact.
b. Ga met een berekening na of hoek *DSA* recht is.

11 Gegeven twee gelijkvormige driehoeken met zijden 2, 3 en 4 en 4, 6 en 8.

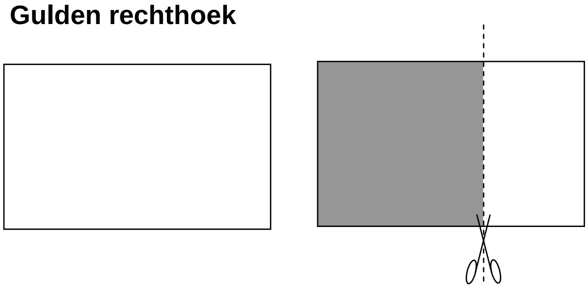


Bereken *x* en *y*.
Tip. Er zijn nog twee andere driehoeken gelijkvormig. Schrijf vervolgens een stelsel van twee vergelijkingen in *x* en *y* op, en los dat op.



12 In een rechthoekige driehoek is een vierkant getekend, zie plaatje hiernaast. De rechthoekszijden zijn 4 en 8. Bereken de zijde van het vierkant exact.

Gulden rechthoek

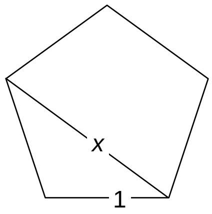


Een gulden rechthoek heeft de volgende eigenschap. Als je er een vierkant vanaf knipt, zie plaatje, houd je een rechthoek over die gelijkvormig is met de oorspronkelijke rechthoek.

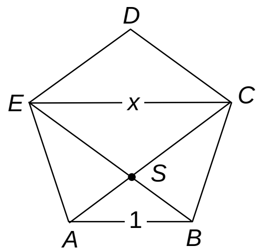
13 Verhouding van lengte en breedte in een gulden rechthoek
De korte zijde van de linker rechthoek nemen we 1 en de lange zijde x.
a. Druk de zijden van de rechthoek die je over houdt in x uit.
b. Toon aan: de rechthoek links is een gulden rechthoek $\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.
c. Los de vergelijking in x op. Merk op $x > 0$.

De lange zijde van de rechthoek is dus $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, dit noemen we het **gulden snede getal**.

De gulden rechthoek vind je terug in kunst, natuur en architectuur. Men beweert dat deze vorm van alle rechthoeken de mooiste is. Le Corbusier maakte bijvoorbeeld gebruik van de gulden snede bij het ontwerpen van gebouwen.

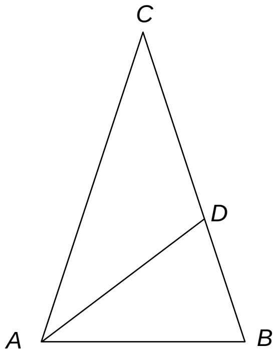


14 De verhouding tussen de zijde en de diagonaal in een regelmatige vijfhoek
Hiernaast is een regelmatige vijfhoek getekend met een diagonaal. De zijde heeft lengte 1 en de diagonaal lengte x.
We tekenen er nog twee diagonalen bij. Het snijpunt van de diagonalen EB en AC is S.

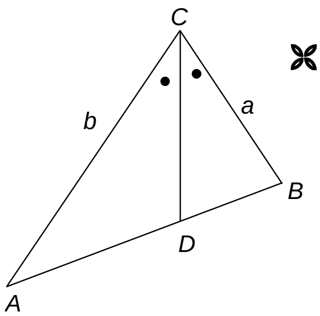


a. Druk de zijden van de driehoeken *ESC* en *ASB* in *x* uit.
Tip. *ESCD* is een ruit.
b. Gebruik gelijkvormigheid om een vergelijking voor *x* op te schrijven.
c. Bereken *x*.

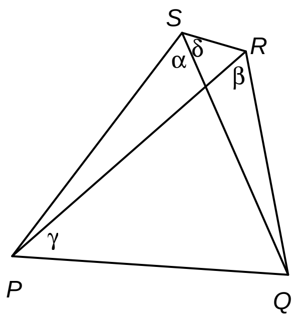
De verhouding tussen een diagonaal en de zijde van een regelmatige vijfhoek is het gulden snede getal.



15 Voor driehoek *ABC* geldt: $AC = BC$. Verder ligt er op zijde *BC* een punt *D* zó, dat $AB = AD = CD$.
a. Bereken de hoeken van driehoek *ABC*.
Tip. Noem $\angle DAC = \alpha$ en druk alle hoeken in de figuur uit in α.
b. Bereken de verhouding $AC : AB$.
Tip. Gebruik gelijkvormigheid.



16 In driehoek *ABC* snijdt de bissectrice van hoek *C* de zijde *AB* in *D*. Dan geldt: $AD : DB = b : a$.
Bewijs dit.
Tip. Verleng *CD*. Teken door *A* een lijn evenwijdig aan lijn *BC*.



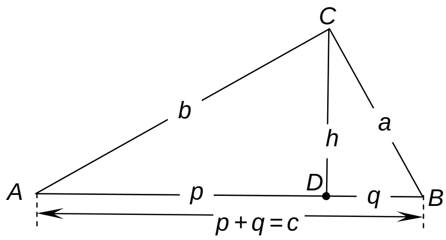
17 Hiernaast staat een vierhoek met zijn diagonalen.
a. Laat zien: als $\alpha = \beta$, dan $\gamma = \delta$.
b. Als $\alpha = \beta$, wat merk je dan op over de lijnen *PQ* en *SR*?

18 Vermenigvuldigen, delen en omgekeerde nemen.

Gegeven drie lijnstukken van lengte 1, *a* en *b*.
Hoe maak ik een lijnstuk van lengte ab?
Hoe maak ik een lijnstuk van lengte $\frac{a}{b}$?
Tip. Gebruik een zandloper.

4 De stelling van Thales

We bekijken de rechthoekige driehoek *ABC*. Vanuit de rechte hoek *C* is een loodlijn neergelaten op zijde *AB*. Het voetpunt van de loodlijn is *D*. Verder: zie figuur.



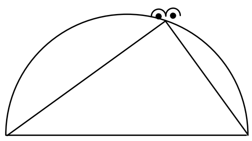
1 **a.** Toon aan dat de driehoeken *ABC*, *ACD* en *CBD* gelijkvormig zijn.
Tip. Laat bijvoorbeeld zien dat de hoeken *CAD* en *DCB* even groot zijn.

Met behulp van **a** kun je een aantal gelijkheden van verhoudingen opschrijven.
b. Toon aan dat daaruit volgt:
$h^2 = pq$, $b^2 = pc$ en $a^2 = qc$.
c. Laat zien hoe je met twee gelijkheden uit **b** de stelling van Pythagoras kunt bewijzen.

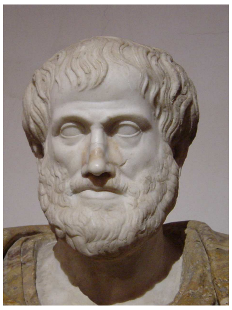
Een bekende stelling uit de meetkunde is de stelling van Thales en zijn omgekeerde.

Stelling van Thales
In een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel van die rechthoekige driehoek.

Omgekeerde stelling van Thales
Als het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek op een zijde ligt, dan is de hoek tegenover die zijde recht.



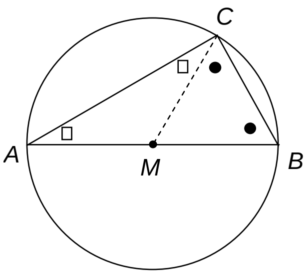
De omgekeerde stelling van Thales wordt ook wel als volgt geformuleerd.
Vanuit een punt van een cirkel "zie je" een middellijn onder een hoek van 90°.



Thales van Milete (ca. 624 v.Chr. - 545 v.Chr.) was een filosoof. Hij kwam uit Milete (in het huidige Turkije). De oude Grieken zagen hem als een van de Zeven Wijzen.
Hij schijnt de zonsverduistering van 585 v. Ch. voorspeld te hebben. Mogelijk heeft hij zijn kennis over sterrenkunde opgedaan tijdens een reis naar Babylon.

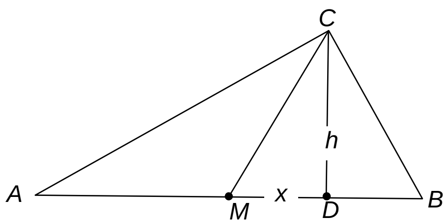
We gaan de stelling en zijn omgekeerde meetkundig en algebraïsch bewijzen.

2 De stelling van Thales meetkundig
Gegeven een rechthoekige driehoek. Je kunt die driehoek zien als een halve rechthoek. Hoe volgt hieruit dat het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel is?

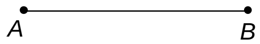


3 De omgekeerde stelling van Thales meetkundig
Zie plaatje. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* is *M*, een punt op zijde *AB*.
Je moet laten zien dat hoek *ACB* recht is. Zie plaatje.
a. Waarom zijn de hoeken waarin gelijke tekens gezet zijn even groot?
b. Wat kun je zeggen over de vier hoeken, waarin tekens gezet zijn, samen?
c. Hoe volgt nu dat hoek *ACB* recht is?

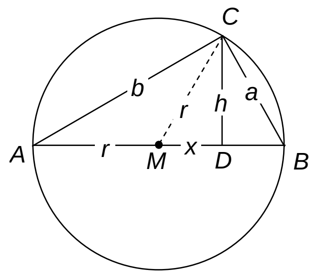
4 De stelling van Thales algebraïsch
We gebruiken dezelfde letters als in de driehoek aan het begin van paragraaf 4.



Verder is *M* het midden van *AB*. De lengte van lijnstuk *MD* noemen we *x.*
Je moet laten zien dat *M* het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* is, dus dat $MA = MC$.
a. Druk *AM, p* en *q* uit in *c* en *x* en vul het resultaat in in de formule $h^2 = pq$.
b. Laat nu zien hoe dat $MA = MC$ uit **a** volgt.

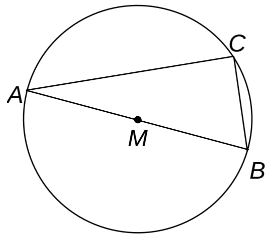


5 Gegeven een lijnstuk *AB.* Teken het gebied waar *C* kan liggen als driehoek *ABC* scherphoekig is.

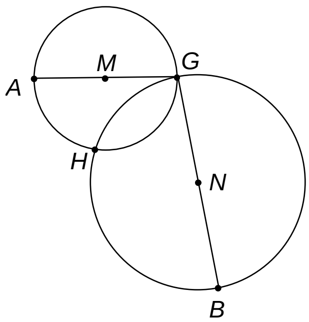


6 **De omgekeerde stelling van Thales algebraïsch**
Het middelpunt *M* van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* ligt op zijde *AB*. Je moet laten zien dat hoek *C* recht is oftewel dat $a^2 + b^2 = c^2$.
De straal van de cirkel noemen we *r*.
a. Druk *AD* en *BD* uit in *x* en *r*.
b. Druk $(r - x)^2$ en $(r + x)^2$ uit in *a*, *b* en *h*, met behulp van de stelling van Pythagoras.

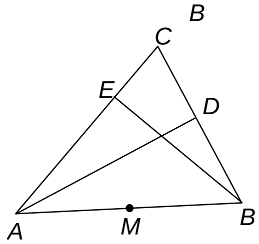
Uit **b** volgt: $(r - x)^2 + (r + x)^2 = a^2 + b^2 - 2h^2$.
c. Werk de haakjes weg in $(r - x)^2 + (r + x)^2 = a^2 + b^2 - 2h^2$.
d. Hoe volgt $a^2 + b^2 = c^2$ uit **c**?



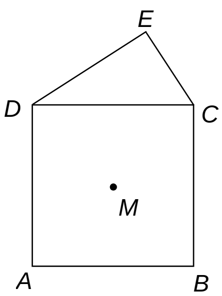
7 Lijnstuk *AB* is een middellijn van ΔABC. $AB = 6\frac{1}{2}$ en $BC = 2\frac{1}{2}$.
Bereken *AC* exact.



8 Gegevens zie plaatje.
Bewijs dat de punten *A*, *H* en *B* op één lijn liggen.
Tip. Laat zien dat hoek *AHB* 180 graden is.

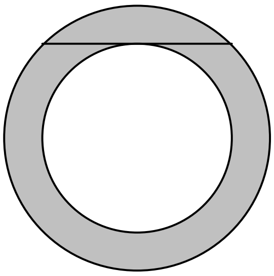


9 *AD* en *BE* zijn hoogtelijnen in driehoek *ABC*. *M* is het midden van zijde *AB*.
Bewijs dat *D* en *E* even ver van *M* afliggen.

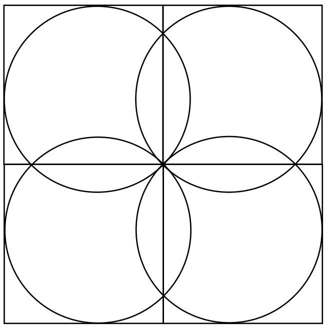


10 *ABCD* is een vierkant met middelpunt *M*. *DCE* is een rechthoekige driehoek (hoek *E* is recht).
Bewijs dat vierhoek *DMCE* een omgeschreven cirkel heeft.

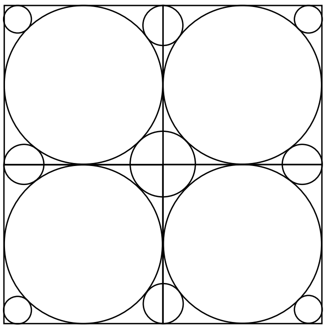
5 Gemengde opgaven



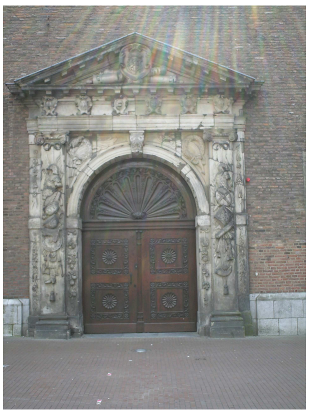
1 Hiernaast zie je twee concentrische (= met hetzelfde middelpunt) cirkels.
De koorde van de grote cirkel raakt de kleine cirkel en heeft lengte 20.
Bereken de oppervlakte van het grijze gebied (tussen de twee cirkels).



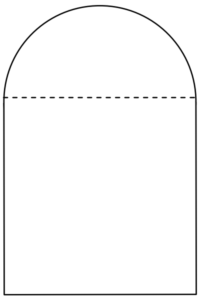
2 In het plaatje hiernaast staan vier vierkanten met zijde 2 en vier cirkels.
Bereken de straal van die cirkels exact.

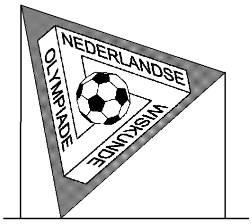


3 In het plaatje hiernaast staan vier vierkanten met zijde 2 en dertien cirkels, met vier verschillende stralen.
Bereken die stralen exact.

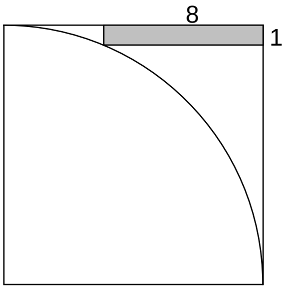


4 **De gedeputeerdenpoort in Nijmegen**
De gedeputeerdenpoort in Nijmegen bestaat uit een vierkant met zijde 2 met daarop een halve cirkel, zie figuur.
Bereken de straal van de ‘omgeschreven cirkel’ van de poort exact.



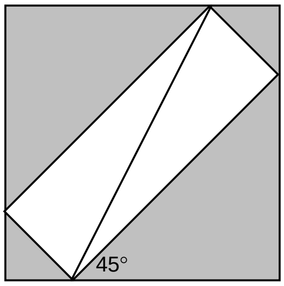


5 Uit de Nederlandse Wiskunde Olympiade, eerste ronde, 26 januari 2007
Een vlag in de vorm van een gelijkzijdige driehoek is aan twee hoekpunten opgehangen aan de toppen van twee verticale palen. De ene paal heeft een lengte 4 en de andere paal een lengte 3. Verder is gegeven dat het derde hoekpunt van de vlag precies de grond raakt.
Bepaal de lengte van de zijde van de vlag.
Tip. Noem de lengte van de zijde x en laat zien dat:
$x^2 = 1 + \left(\sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 9}\right)^2$.
Hoe je zo'n soort vergelijkingen op kunt lossen vind je in de Rekentehniek, zie het voorbeeld op blz 31.



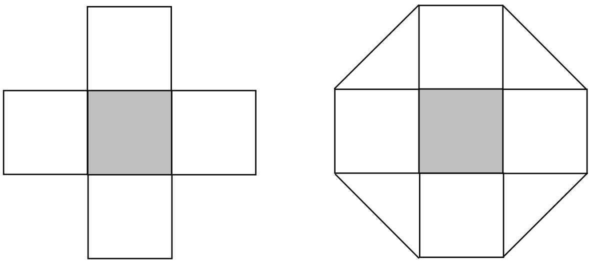
6 In een vierkant is een kwartcirkel getekend. Een rechthoek van 8 bij 1 ligt langs twee zijden van het vierkant en heeft precies één punt met de cirkel gemeenschappelijk.

Bereken de zijde van het vierkant.
Wiskunde Olympiade 1993

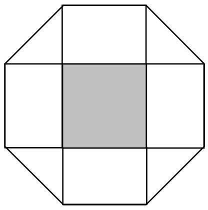


7 Zie plaatje. In een vierkant is een rechthoek getekend. De hoekpunten van de rechthoek liggen op de zijden van het vierkant.
De oppervlakte van het grijze deel is 8.
Bereken de lengte van de diagonaal van de rechthoek.
Dion Gijswijt in Pythagoras, oktober 2000

8



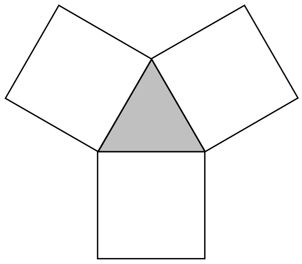
Op de zijden van een vierkant met zijde 1 worden vierkanten gezet. Teken er een achthoek omheen, zie boven.
Die achthoek is niet regelmatig. Vier zijden hebben lengte 1.
a. Bereken de lengte van de vier andere zijden exact.

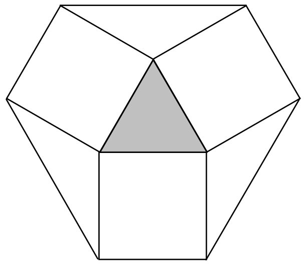


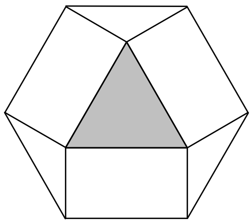
Je krijgt wel een regelmatige achthoek als je het juiste formaat rechthoeken op de zijden zet. De lange zijden van die rechthoeken zijn 1.

b. Hoe lang moet je de korte zijden (exact) maken?

9







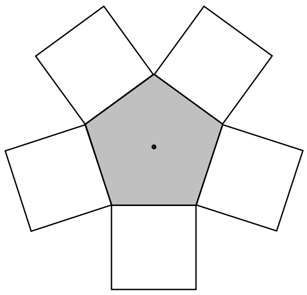
We proberen ook zoiets (als in **8**) bij een regelmatige driehoek.

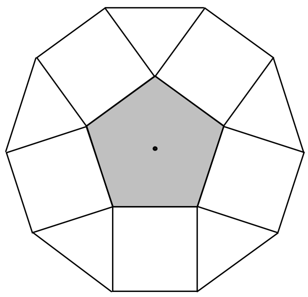
a. Bereken de zijden van de zeshoek die je krijgt exact als je vierkanten op de zijden van een regelmatige driehoek met zijde 1 zet. (Zeshoek rechtsboven)

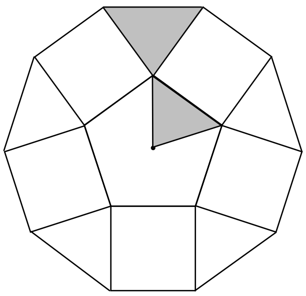
b. Bereken exact de afmetingen van de rechthoeken die je op de zijden van een regelmatige driehoek met zijde 1 moet zetten om een regelmatige zeshoek te krijgen.

Bekijk zo nodig opgave **3** van de Rekentechniek.

10 Als je vierkanten op de zijden van een regelmatige vijfhoek met zijde 1 zet vormen de buitenste hoekpunten de hoekpunten van een tienhoek. Vijf zijden van de tienhoek zijn 1.







Bekijk het plaatje links.

a. Bereken de hoeken van de grijze driehoeken.

Conclusie: de twee grijze driehoeken zijn gelijkvormig.

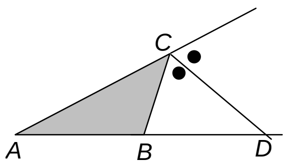
Noem de straal van de omgeschreven cirkel van de regelmatige vijfhoek *r*.

b. Druk de lengte van de vijf andere zijden van de vijfhoek uit in *r*.

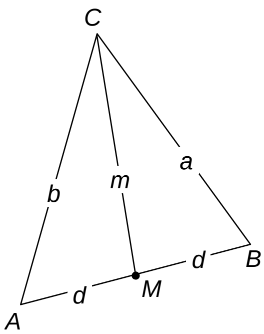
Als je rechthoeken van 1 bij *r* op zijden zet vormen de buitenste hoekpunten een regelmatige tienhoek.

> **Stelling**
> De straal van de omgeschreven cirkel van een regelmatige *n*-hoek met zijde 1 noemen we *r*.
> Als je op de zijden rechthoeken van 1 bij *r* zet, vormen de buitenste hoekpunten een regelmatige 2*n*-hoek.

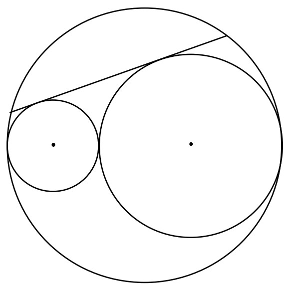
11 Bewijs de stelling.



12 Gegeven driehoek *ABC*. De buitenbissectrice van hoek *C* snijdt lijn *AB* in *D*.
Toon aan dat $AC : BC = AD : BD$.
Tip. Teken een lijn door *B* evenwijdig aan *CD*. Je krijgt weer een gelijkbenige driehoek.



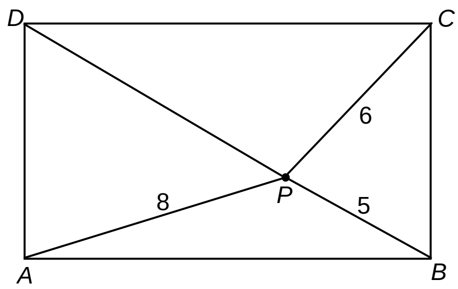
13 Zie plaatje.
Toon aan: $a^2 + b^2 = 2m^2 + 2d^2$.



14 Koorde
In de figuur hiernaast zijn drie cirkels getekend die elkaar twee aan twee raken. De stralen van de cirkels zijn 3, 6 en 9. De grootste cirkel heeft een koorde die de kleinere twee cirkels raakt.

Bereken de exacte lengte van de koorde.
Tip. Bereken de afstand van het middelpunt van de grote cirkel tot de koorde.
Dion Gijswijt in Pythagoras

15 *ABCD* is een rechthoek met daarbinnen het punt *P*.
De afstanden van *P* tot drie hoekpunten van de rechthoek zijn gegeven.

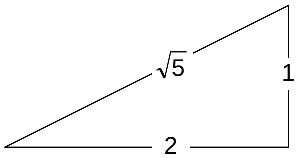


Bereken de vierde afstand.
Wiskunde toernooi Radboud Universiteit 1992

6 Rekentechniek

Wortels vereenvoudigen 1

Dit is een herhaling van derdeklasstof.



1 De driehoek hiernaast is rechthoekig.
a. Ga dat na.

Bekijk de vier driehoeken met zijden
$\sqrt{\frac{1}{5}}$, $2\sqrt{\frac{1}{5}}$ en 1;
$\frac{1}{2}$, 1, $\sqrt{1\frac{1}{4}}$;
6, 12, en $\sqrt{180}$;
$\sqrt{5}$,$2\sqrt{5}$ en 5.
Deze zijn rechthoekig.
b. Ga dat voor de eerste in de serie na.

Omdat de rechthoekszijden zich verhouden als $1:2$, is elke driehoek uit de serie gelijkvormig met de driehoek hiernaast.

Door de driehoek met zijden 1, 2 en $\sqrt{5}$ met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen, krijg je de driehoek met zijden $\frac{1}{2}$, 1, $\sqrt{1\frac{1}{4}}$ (Vergelijk de kortste rechthoekszijden.)
Dus $\sqrt{1\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

c. Hoe volgt met gelijkvormigheid dat $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$?

d. De driehoeken met zijden $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ en 5 en $\sqrt{\frac{1}{5}}$, $2\sqrt{\frac{1}{5}}$ en 1 zijn gelijkvormig.
Hoe volgt hieruit dat $\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$?

In opgave **1** hebben we met gelijkvormigheid gezien dat:
$\sqrt{1\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$, $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$.
We noemen dit *vereenvoudigen van wortels.*
Je kunt dat ook puur algebraïsch doen:
$$\sqrt{1\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

$\sqrt{180} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

Op de middelbare school is het gebruik om wortels zo eenvoudig mogelijk te schrijven, dat betekent:

- schrijf een zo klein mogelijk geheel getal achter het wortelteken:

$\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$,

- schrijf geen wortel in de noemer:

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$,

- laat geen breuken onder het wortelteken staan:

$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

2 Schrijf de volgende wortels zo eenvoudig mogelijk.

a. $\sqrt{72}$ $\quad\sqrt{172}$ $\quad\sqrt{162}$ $\quad\sqrt{1000}$

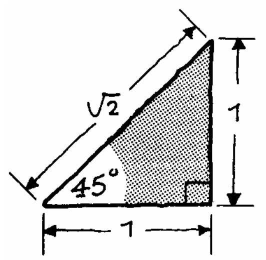
b. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ $\quad\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}$ $\quad\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ $\quad\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}}$

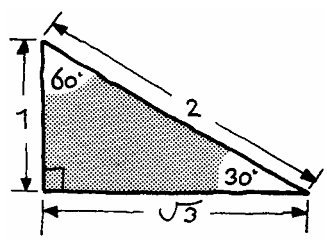
c. $\sqrt{\frac{1}{5}}$ $\quad\sqrt{\frac{3}{5}}$ $\quad\sqrt{3\frac{3}{7}}$ $\quad\sqrt{1\frac{11}{25}}$

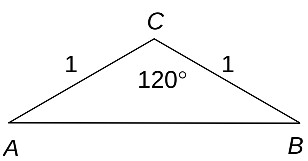
De 30-60-90- en de 45-45-90-graden driehoek

In de tweede klas heb je het volgende al gezien.

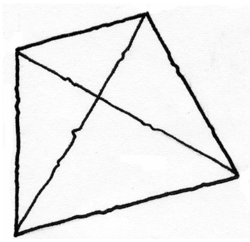
- In een 30-60-90-graden driehoek (halve regelmatige driehoek) verhouden de zijden zich als $1 : \sqrt{3} : 2$.
- In een 45-45-90-graden driehoek (half vierkant) verhouden de zijden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$







3 Van een gelijkbenige driehoek is de tophoek 120° en de gelijke benen zijn 1.
Bereken exact de basis.



4 Het trapezium hiernaast is opgebouwd uit twee 30-60-90- en twee 45-45-90-graden driehoeken. De kortste zijde is 6.
Bereken de lengte van de andere zijden en de diagonalen exact. Schrijf de wortels in je antwoord zo eenvoudig mogelijk.

Voorbeeld

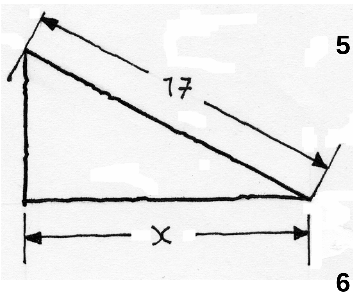
De vergelijking $3+\sqrt{3x+1}=\sqrt{10x-1}$ los je op door kwadrateren:

$$3+\sqrt{3x+1}=\sqrt{10x-1} \Rightarrow 9+6\sqrt{3x+1}+3x+1=10x-1 \Leftrightarrow$$

$$6\sqrt{3x+1}=7x-11 \Rightarrow 108x+36=49x^2-154x+121 \Leftrightarrow$$

$$49x^2-262x+85=0 \Leftrightarrow x=5 \text{ of } x=\tfrac{17}{49}.$$

Alleen $x=5$ voldoet aan de oorspronkelijke vergelijking.



5 De rechthoekige driehoek hiernaast heeft schuine zijde 17 en omtrek 40. Een van de rechthoekszijden noemen we x.

a. Laat zien dat $x+\sqrt{289-x^2}=23$.

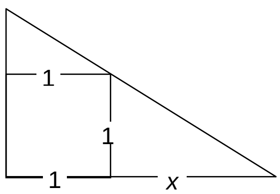
b. Los de vergelijking in **a** exact op.

6 Los op:

a. $x=\sqrt{x+2}$

b. $-x=\sqrt{x+2}$

c. $x=\sqrt{x}+2$



7 Hiernaast is een vierkant in een rechthoekige driehoek getekend. Verder zie plaatje.

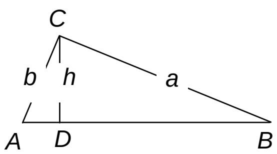
a. Druk alle lijnstukken in het plaatje uit in x.

Blijkbaar geldt:

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{(x+1)^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}$$

b. Leg dit uit met het plaatje.

c. Bewijs de gelijkheid puur algebraïsch.



Wortels vereenvoudigen 2

8 In driehoek ABC is CD een hoogtelijn. Verder is gegeven:

$CD=1,\ AD=\sqrt{2}-1,\ BD=\sqrt{2}+1.$

a. Bereken a^2 en b^2 en toon aan dat driehoek ABC rechthoekig is.

Omdat $h^2 = AD \cdot BD$ geldt dat $AD = \sqrt{2} - 1$ en $BD = \sqrt{2} + 1$ elkaars omgekeerde zijn, dus:
$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$.

b. Controleer dat algebraïsch.

Voorbeeld

Ook (bijvoorbeeld) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$, kun je zonder wortel in de noemer schrijven.
$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}+2}{3-1} = \sqrt{3} + 1$.

9 Schrijf de volgende vormen zonder wortel in de noemer.

$\frac{2}{\sqrt{3}+2}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2}$ $\qquad$ $\frac{3}{2\sqrt{5}+\sqrt{17}}$

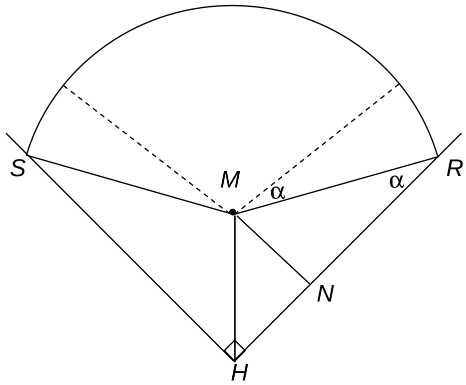
7 Antwoorden

Paragraaf 1 Opnieuw de stelling van Pythagoras

1 **a.** $8\frac{1}{2}\sqrt{2}$

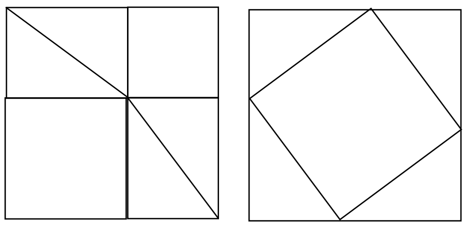
b. Noem de projectie van *M* op de foul line *N*, dan $MN = 30\sqrt{2}$ en $HN = \sqrt{90^2 - \left(30\sqrt{2}\right)^2} = 30\sqrt{7}$,
dus $HR \approx 121{,}8$ ft.

c. Zie plaatje: $\sin\alpha = \frac{30\sqrt{2}}{90} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$, dus $\alpha \approx 28{,}13°$

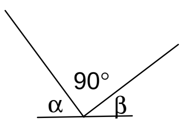


De oppervlakte van de cirkelsector $SMR = \frac{90+2\alpha}{360} \cdot \pi \cdot 90^2$
$\approx 10337{,}87$. De oppervlakte van driehoek $HMR =$
$\frac{1}{2} \cdot HR \cdot MN = 2583{,}75$.
De gevraagde oppervlakte $\approx 10337{,}87 + 22583{,}75 \approx$
$15505{,}4$ ft^2.

2 **a.**



b. De twee gelegde vierkanten hierboven hebben dezelfde oppervlakte, als je van beide vier dezelfde rechthoekige driehoeken afhaalt, houd je bij de linker figuur de twee kleine vierkanten over en bij de rechter figuur het grote vierkant.



c. Noem de niet rechte hoeken van de rechthoekige driehoek α en β, dan zijn de drie hoeken die in de punt samenkomen bij elkaar: $\alpha + \beta + 90 = 180°$, dus ze vormen een gestrekte hoek.

3 **a.** Oppervlakte van de vier driehoeken is: $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab = 2ab$

Oppervlakte kleine vierkant = c^2.

Dus: $c^2 + 2ab = (a+b)^2$. Haakjes wegwerken geeft het gewenste resultaat.

b. Er zit geen knik in het punt waar de twee driehoeken en het vierkant aan elkaar gelegd zijn, zie **2c**, en de zijden zijn alle $a+b$.

4 **a.** Oppervlakte van de vier driehoeken is: $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab = 2ab$

Oppervlakte kleine vierkant = $(a-b)^2$.

Dus: $c^2 = (a-b)^2 + 2ab$. Haakjes wegwerken geeft het gewenste resultaat.

b. Een hoek is de som van de twee scherpe hoeken van de een rechthoekige driehoek, dus 90°.

5 **a.** $c = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35$

b. Links: $a^2 + b^2 > c^2$ en rechts: $a^2 + b^2 < c^2$

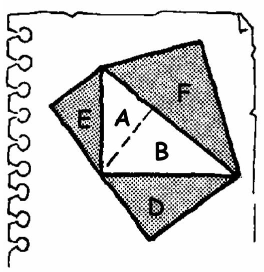
6 **a.** $4^2 + 7^2 > 8^2$, dus de hoek tegenover de zijde van 8 is scherp, dus een scherphoekige driehoek.

b. $16^2 + 30^2 = 34^2$, dus de driehoek is rechthoekig.

7 Noem $CD = x$ en $BD = y$, dan $c^2 = (x+b)^2 + y^2 > x^2 + b^2 + y^2 = a^2 + b^2$

8 $a = 5$, $b = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ en $c = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$, dus: $b^2 + c^2 = a^2$, dus hoek BAC is recht.

9 Noem de rechthoekszijden a en b en de schuine zijde c dan hebben de geodriehoeken oppervlakte $\frac{1}{2}a^2$, $\frac{1}{2}b^2$ en $\frac{1}{2}c^2$. Uit $a^2 + b^2 = c^2$, volgt: $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}c^2$, dus voor het eerste voorbeeld klopt de stelling.
De halve cirkels hebben oppervlakte $\frac{1}{2}\pi a^2$, $\frac{1}{2}\pi b^2$ en $\frac{1}{2}\pi c^2$.
De 'T'-s hebben oppervlakte $\frac{3}{4}a^2$, $\frac{3}{4}b^2$ en $\frac{3}{4}c^2$.
Dus ook voor de andere voorbeelden klopt de stelling.



10 De oppervlakte van de hele witte driehoek noemen we C. $A = E$, $B = D$ en $C = F$. Verder $A + B = C$, dus $D + E = F$.

Paragraaf 2 De stelling van Pythagoras toepassen

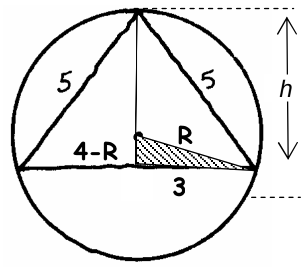
1 **a.** $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$

b. De hoeken worden kleiner, want de overstaande rechthoekszijde blijft 1 en de aanliggende rechthoekszijde wordt groter.

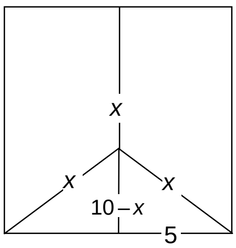
c. Na n stappen is de lengte $\sqrt{n+1}$, dus $n+1>1000^2$, dus na 1 miljoen stappen.

2 Bekijk de rechthoekige driehoek met MN als schuine zijde. De rechthoekszijden zijn: $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ en $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$.
$MN^2 = (\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)^2 + (\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b)^2 = ... = \frac{1}{2}(a^2+b^2) \rightarrow$

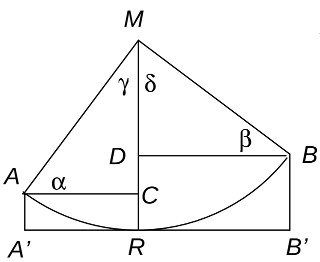
$MN = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 18} = 3$.



3 **a.** De hoogte h van de driehoek is $\sqrt{5^2-3^2}=4$. De oppervlakte is dus 12.
b. Maak een rechthoekige driehoek met schuine zijde R en rechthoekszijden 3 en $4-R$ (gearceerd, zie plaatje).
c. $R^2 = 3^2 + (4-R)^2 \rightarrow R^2 = 25 - 8R + R^2 \rightarrow R = 3\frac{1}{8}$.



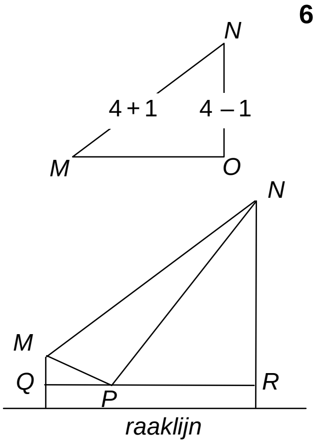
4 Noem die afstand x, dan $(10-x)^2+5^2=x^2$, dus $x=6\frac{1}{4}$.



5 Zie plaatje: C en D zijn de loodrechte projecties van A en B op lijn MR. $MD=r-2$ en $MC=r-1$, dus
$AC=\sqrt{r^2-(r-1)^2}$ en $BD=\sqrt{r^2-(r-2)^2}$
Verder $\alpha+\gamma=90°$ want hoek ACM is recht, $\beta+\delta=90°$, want hoek BDM is recht en $\gamma+\delta=90°$ want hoek AMB is recht. Dus $\alpha=\delta$ en $\beta=\gamma$. Verder $AM=BM=r$, de straal van de cirkel. Dus zijn de driehoeken AMC en MBD congruent. Dus $AC=MD$. Dit geeft:

$\sqrt{r^2-(r-1)^2}=r-2 \Leftrightarrow \sqrt{2r-1}=r-2 \Rightarrow$

$r^2-4r+4=2r-1 \Leftrightarrow r^2-6r+5=0 \Leftrightarrow r=1$of $r=5$
Alleen $r=5$ voldoet aan de oorspronkelijke vergelijking.



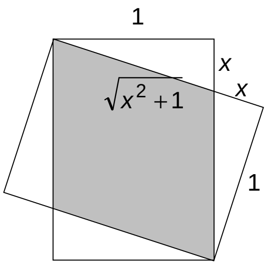
6 **a.** Noem het middelpunt van de kleine cirkel M en van de grote cirkel N. Het punt O ligt op dezelfdehoogte als M, recht onder N. De afstand van de raakpunten is gelijk aan $MO = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

b. Zie plaatje. P is het middelpunt van het kleine cirkeltje. $QR = MO = 4$. Noem de straal van het kleine cirkeltje x. Dan $MQ = 1 - x$, $PM = 1 + x$, $NR = 4 - x$ en $PN = 4 + x$.

Dus $QR = \sqrt{(1+x)^2 - (1-x)^2} = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$ en

$PR = \sqrt{(4+x)^2 - (4-x)^2} = \sqrt{16x} = 4\sqrt{x}$, dus $6\sqrt{x} = 4$

dus $x = \frac{4}{9}$.



7 Zie plaatje. De zijden van de grijze ruit zijn $\sqrt{x^2+1}$. Dus:

$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{2} - x$.

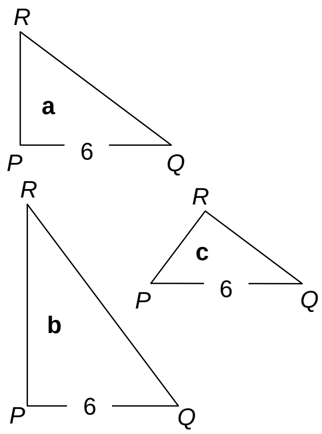
Kwadrateren geeft: $x^2 + 1 = 2 - 2x\sqrt{2} + x^2$, dus $x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Dus oppervlakte ruit $= \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

8 Noem het middelpunt van de kleinste cirkel P, van de middelste cirkel Q en van de grootste cirkel R. Dan: $PQ = 3$, $PR = 4$ en $QR = 5$. Dus driehoek PQR is rechthoekig in P, dus de cirkelboog is $\frac{3}{4}$ van de cirkelomtrek, dus $1\frac{1}{2}\pi$.

9 Noem het middelpunt van de kleine cirkels P en Q en van de grote cirkel R. Dan $RP = RQ = 3$ en $PQ = 2$. Het midden van PQ noemen we M, dan is de hoogte van het bankje:

$RM = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$



Paragraaf 3 Opnieuw gelijkvormigheid

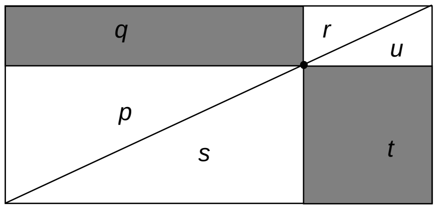
1 **a.** $PR = \frac{6}{4} \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$, $QR = \frac{6}{4} \cdot 5 = 7\frac{1}{2}$

b. $PR = \frac{6}{3} \cdot 4 = 8$, $QR = \frac{6}{3} \cdot 5 = 10$

c. $PR = \frac{6}{4} \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$, $QR = \frac{6}{4} \cdot 5 = 7\frac{1}{2}$

2 Dat zou bijvoorbeeld betekenen dat alle rechthoeken gelijkvormig zijn.

3



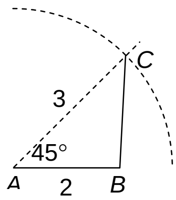
Noem die oppervlaktes a, b, c, d, e en f.
Dan: $p+q+r=s+t+u$, $p=s$ en $r=u$, dus $q=t$.

4 **b.** Die liggen op lijn AC.

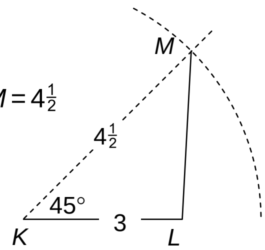
5 **a.** Linksboven: ad en rechtsonder bc.
b. Dat is de helling van de rechthoek linksonder respectievelijk rechtsboven.
c. ac
d. Algebraïsch: als je beide leden van de eerste gelijkheid met ac vermenigvuldigt en de beide leden van de tweede vergelijking met ab dan krijg je in beide gevallen $ad=bc$.
Meetkundig volgt het uit de gelijkvormigheid van de twee witte rechthoeken.

6 **a.** 150
b. $\frac{200}{120}\cdot 90$ en $\frac{90}{120}\cdot 200$

7 **a.**

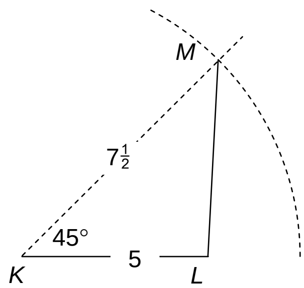


b. $3:2=KM:3$, dus $KM=4\frac{1}{2}$



Ja

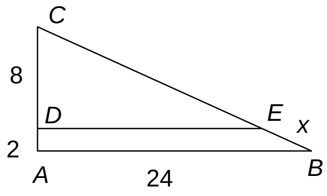
c. $KM=7\frac{1}{2}$



Ja

8 **a.** $KL : AC = LM : AB$, dus $6:3 = LM:4$, dus $LM = 8$ en $KM = 2\sqrt{7}$

b. Nee



9 $BC = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$ en $CE = \frac{CD}{CA} \cdot CB = 20\frac{4}{5}$

Dus $EB = 5\frac{1}{5}$.

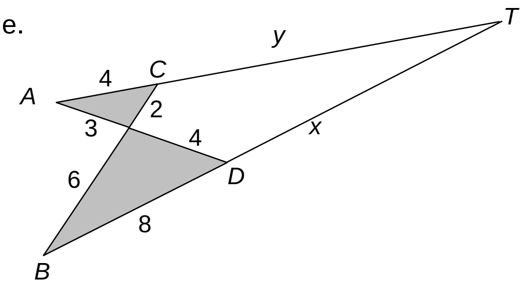
10 **a.** $AE = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Driehoek DSE is gelijkvormig met BSA. Dus $AS : ES = AB : DE = 4:1$, dus $AS = \frac{4}{5}\sqrt{5}$.

b. $DB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ en $DS = \frac{1}{5} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

$AD^2 = 4$ en $DS^2 + AS^2 = \frac{4}{5} + \frac{16}{5} = 4$, dus ja.

Of (bijvoorbeeld): de driehoeken ADE en ASD hebben hoek A hetzelfde en $AS : AD = AD : AE$,
dus $\Delta ADE \sim \Delta ASD$, dus $\angle ASD = \angle ADE = 90°$.

11 Zie plaatje.

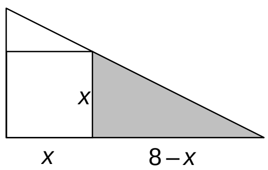


De grijze driehoeken zijn gelijkvormig, dus $\angle A = \angle B$.
Maar dan $\Delta ADT \sim \Delta BCT$ (twee hoeken gelijk).

Dus: $\frac{AT}{BT} = \frac{AD}{BC} \Leftrightarrow \frac{y+4}{x+8} = \frac{7}{8}$ en $\frac{DT}{CT} = \frac{AD}{BC} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{7}{8}$,

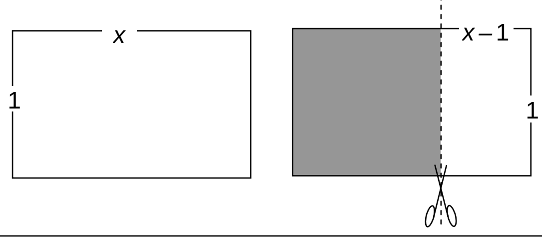
dus: $8y + 32 = 7x + 56$ en $x = \frac{7}{8}y$.

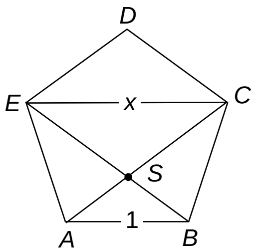
Dus: $8y + 32 = 7 \cdot \frac{7}{8}y + 56$, dus $y = 21\frac{1}{3}$ en $x = 18\frac{2}{3}$.



12 De grijze driehoek is gelijkvormig met de hele driehoek, dus: $\frac{x}{8-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = 8 - x \Leftrightarrow x = 2\frac{2}{3}$

13 **b.** De witte rechthoek links is gelijkvormig met de witte rechthoek rechts, dus: $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x = 1$





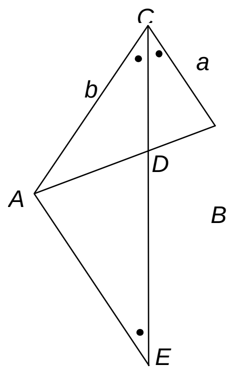
c. $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$

14 a. $DC \,//\, EB$ en $ED \,//\, AC$ vanwege symmetrie, dus $ESCD$ is een parallellogram, zelfs een ruit. Dus $ES=CS=1$ en $AS=BS=x-1$.

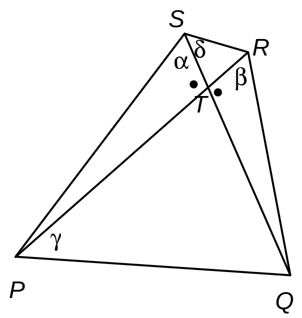
b. $\dfrac{EC}{AB}=\dfrac{ES}{BS} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow x^2-x-1=0$

c. Zie de vorige opgave: $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$

15 a. $\angle CAD=\alpha$, dan $\angle ACD=\alpha$ en $\angle ADB=2\alpha$ (buitenhoek van driehoek CDA.
Dus $\angle DBA=2\alpha$, dan ook $\angle CAB=2\alpha$.
Hoekensom in driehoek ABC geeft: $5\alpha=180°$, dus $\alpha=36°$. De hoeken zijn dus 72, 72 en 36 graden.
b. Stel $AB=1$, en $AC=x$, dan $AD=CD=AB=1$, dus $BD=x-1$. De gelijkvormigheid van de driehoeken ADB en CAB geeft: $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AB}{DB}$, dus we krijgen weer: $x=\dfrac{1}{x-1}$, zie vorige opgave dus de verhouding is:
$x:1=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right):1$.
Je zou ook kunnen vinden (dat is hetzelfde): $1:\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)$, zie opgave **9** van Rekentechniek.

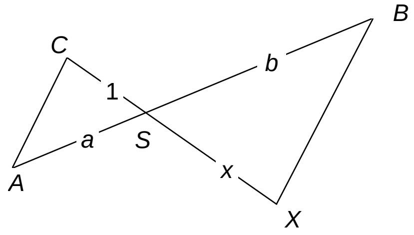


16 Noem E het snijpunt van de lijnen CD en de lijn door A evenwijdig met BC. Dan zijn de hoeken ECB en AEC even groot (Z-hoeken), dus $AE=b$. De gelijkvormigheid van de driehoeken DCB en DEA geeft:
$\dfrac{BC}{AE}=\dfrac{BD}{AD}$

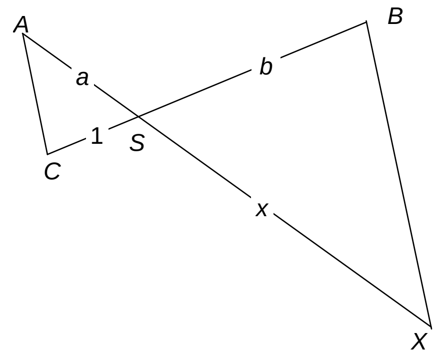


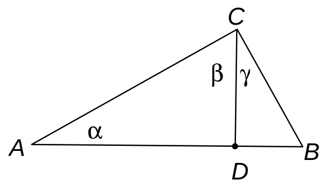
17 a. Zie plaatje: $\Delta STP \sim \Delta RTP$ (twee gelijke hoeken), dus $PT:TQ=ST:TR$. Omdat ook de hoeken STR en PTQ even groot zijn, zijn dan ook de driehoeken STR en PTQ
b. Evenwijdig (Z-hoeken)

18 a. Teken een willekeurige driehoek *ACS* met $CS = 1$ en $AS = a$. Teken *B* op het verlengde van *AS* bij *S* zó, dat $BS = b$. De lijn door *B* evenwijdig aan *AC* snijdt lijn *CS* in *X*. Dan heeft *SX* lengte *ab*, ga dat na.



b. *AC* en *BX* zijn evenwijdig, dan heeft *x* lengte $\frac{a}{b}$.





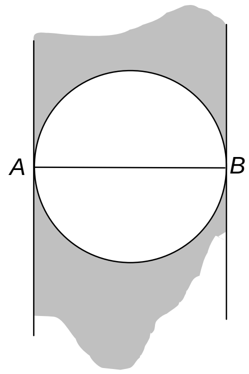
Paragraaf 4 De stelling van Thales

1 **a.** Zie plaatje: $\alpha + \beta = 90°$ (hoekensom in driehoek *ACD*) en $\beta + \gamma = 90°$, dus $\alpha = \gamma$. Dus de drie driehoeken hebben twee hoeken hetzelfde.
b. Uit de gelijkvormigheid van de twee kleinste diehoeken volgt: $\frac{h}{p} = \frac{q}{h} \Leftrightarrow h^2 = pq$.
Uit de gelijkvormigheid van driehoek *ADC* en driehoek *ACB* volgt: $\frac{p}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b^2 = pc$.
Uit de gelijkvormigheid van driehoek *CDB* en driehoek *ACB* volgt: $\frac{q}{a} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a^2 = qc$.
c. $a^2 + b^2 = qc + pc = c(p+q) = c^2$

2 De rechthoek heeft een omgeschreven cirkel, het middelpunt is het snijpunt van de diagonalen.

3 **a.** De driehoeken *AMC* en *BMC* zijn gelijkbenig, want: $AM = BM = CM$.
b. 180°
c. $\bullet + \square + \bullet + \square = 180°$, dus $\bullet + \square = \frac{1}{2} \cdot 180 = 90°$.

4 **a.** $AM = \frac{1}{2}c$, $p = \frac{1}{2}c + x$, $q = \frac{1}{2}c - x$, dus
$\left(\frac{1}{2}c - x\right)\left(\frac{1}{2}c + x\right) = h^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}c^2 - x^2 = h^2$.
Nu geldt in driehoek *CDM* de stelling van Pythagoras, dus: $CM^2 - x^2 = h^2$.
Uit $CM^2 - x^2 = h^2$ en $\frac{1}{4}c^2 - x^2 = h^2$, volgt: $CM = \frac{1}{2}c$.
Dus $CM = AM$.



5 We nemen de cirkel met middellijn *AB*. Vanuit een punt van die cirkel zie je *AB* onder een rechte hoek. Vanuit een punt binnen de cirkel zie je *AB* onder een stompe hoek en vanuit een punt buiten de cirkel zie je *AB* onder een scherpe hoek. Je moet dus punten buiten de cirkel hebben. Om hoek *A* en *B* ook scherp te hebben moet je tussen de lijnen door *A* en *B* loodrecht op *AB* blijven. Je krijgt dus het grijze gebied in de tekening hiernaast.

6 **a.** $AD = r + x$ **,** $BD = r - x$
b. $(r + x)^2 = b^2 - h^2$ en $(r - x)^2 = a^2 - h^2$
c. $r^2 + 2xr + x^2 + r^2 - 2xr + x^2 = a^2 + b^2 - 2h^2 \Leftrightarrow$
$2r^2 + 2x^2 = a^2 + b^2 - 2h^2$
d. Uit **c** volgt :
$2r^2 + 2\left(x^2 + h^2\right) = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4r^2 = c^2$.

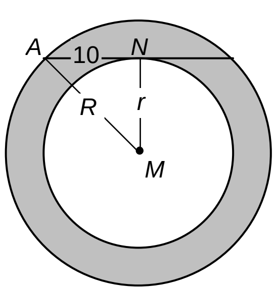
7 $AB^2 = AC^2 + BC^2$, dus $AC = \sqrt{\left(6\frac{1}{2}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^2} = 6$

8 $\angle AHG = 90°$ en $\angle GHB = 90°$, dus hoek *AHB* is gestrekt.

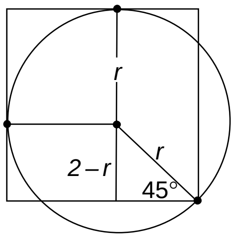
9 *D* en *E* liggen beide op de cirkel met middellijn *AB*.

10 Omdat de hoeken *DEC* en *DMC* beide recht zijn, liggen *M* en *E* op de cirkel met middellijn *CD*.

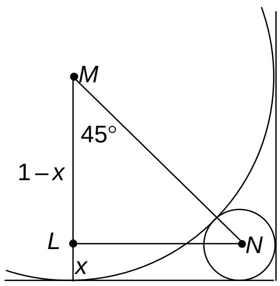
Paragraaf 5 Gemengde opgaven



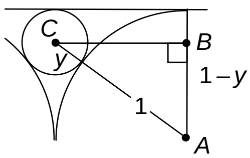
1 Noem de straal van de kleine cirkel *r* en straal van de grote cirkel *R*. Dan is de oppervlakte van het grijze gebied: $\pi(R^2 - r^2) = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$



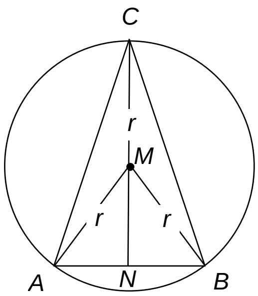
2 Noem de straal van zo'n cirkel r, dan (zie plaatje):
$\frac{2-r}{r}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $2-r=\frac{1}{2}r\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)r=2$, dus
$r=\frac{2}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\frac{4}{2+\sqrt{2}}$.
Hetzelfde is: $4\sqrt{2}-4$, zie opgave **9** van Rekentechniek.



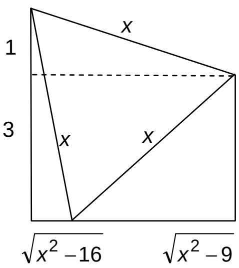
3 De vier grootste cirkels hebben straal 1.
De cirkel in het midden heeft straal $\sqrt{2}-1$.
De straal van de vier cirkels in de hoeken noemen we x. Om x te berekenen bekijken we de figuur links. Daar is een grote cirkel en een cirkel in de hoek getekend.
Er geldt:
$\frac{1+x}{1-x}=\sqrt{2} \Leftrightarrow 1+x=\sqrt{2}-x\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{2}\right)x=\sqrt{2}-1$, dus
$x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$. Hetzelfde is: $3-2\sqrt{2}$, zie opgave **9** van Rekentechniek.



Om de straal van de vier cirkels te berekenen die de zijden van grote vierkant in het midden raken, bekijken we het plaatje hiernaast. C is het middelpunt van zo'n cirkel en A het middelpunt van een van de grote cirkels. De straal van de groet cirkel is 1 en die van de andere cirkel noemen we y. De stelling van Pythagoras in driehoek ABC geeft: $(y+1)^2=1^2+(1-y)^2$, dus $y=\frac{1}{4}$.



4 Noem de het hoogste punt van de deur C en de twee hoekpunten onder A en B. Noem het middelpunt van de cirkel M en de straal r. N is het midden van AB. Dan is $AB=2$ en $NC=3$.. De stelling van Pythagoras in driehoek NMA geeft: $r^2=(3-r)^2+1^2$, dus $r=1\frac{2}{3}$.



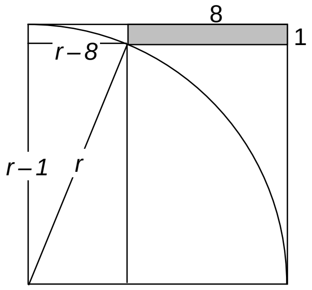
5 De stelling van Pythagoras in de driehoek met het stippellijntje geeft: $x^2=1+\left(\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-9}\right)^2$. Dus:

$x^2=1+x^2-16+2\sqrt{x^2-16}\cdot\sqrt{x^2-9}+x^2-9 \Leftrightarrow$

$24-x^2=2\sqrt{x^2-16}\cdot\sqrt{x^2-9}$. Kwadrateren geeft:

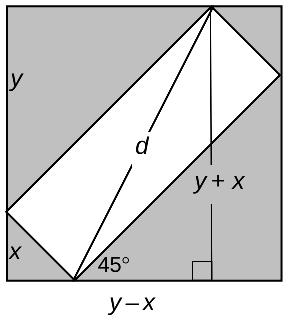
$576-48x^2+x^4=4\left(x^2-9\right)\cdot\left(x^2-16\right) \Leftrightarrow$

$576-48x^2+x^4=4\left(x^2-9\right)\left(x^2-16\right)$



Dit geeft: $x = \frac{2}{3}\sqrt{39}$.

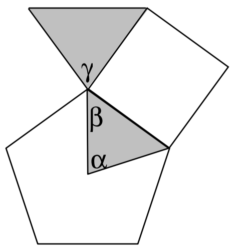
6 Noem de zijde van het vierkant *r*, dan (zie plaatje):
$r^2 = (r-1)^2 + (r-8)^2 \Leftrightarrow (r-5)(r-13) = 0$, dus $r = 13$.



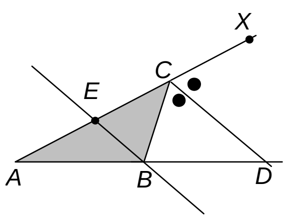
7 Zie plaatje: $d^2 = (y-x)^2 + (y+x)^2 = 2x^2 + 2y^2 = 8$.
De lengte van de diagonaal is dus $2\sqrt{2}$

8 **a.** $\sqrt{2}$
b. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

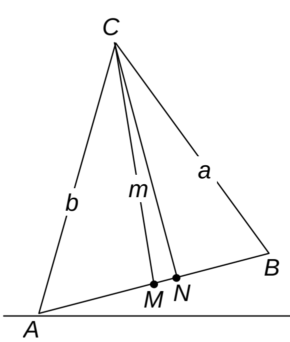
9 **a.** $\sqrt{3}$
b. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$



10 **a.** De grijze driehoeken zijn gelijkbenig. De tophoek van de kleine driehoek noemen we α en de tophoek van de grote γ.
$\alpha = \frac{1}{5} \cdot 360 = 72°$ en $\beta = \frac{1}{2} \cdot (180 - \alpha) = 54°$.
$\beta + \gamma + 2 \cdot 90 = 360°$, dus $\gamma = 72°$. Dus de grijze driehoeken hebben een even grote tophoek, dus hebben ze dezelfde hoeken.
b. De basis van de kleine driehoek is 1 en de benen zijn *r*. De benen van de grote driehoek zijn 1, dus de basis is $\frac{1}{r}$.



11 Als je rechthoeken zet op de zijden van een regelmatige *n*-hoek, moet je de ‘tussenruimtes’ ‘opvullen’ met gelijkbenige driehoeken om tot de 2*n*-hoek te komen. Die gelijkbenige driehoeken hebben dezelfde tophoek als de gelijkbenige driehoek met als top het middelpunt van de *n*-hoek en een zijde van de *n*-hoek als basis. Deze laatste driehoek heeft basis 1 en zijden *r*. De tussenruimte heeft basis 1, dus benen *r*.



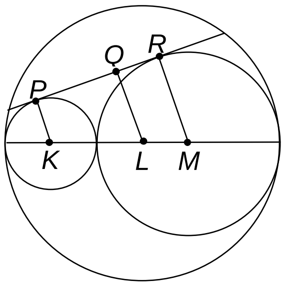
12 De lijn door *B* evenwijdig met *CD* snijdt *AC* in *E*. *X* ligt op lijn *AC*, zie plaatje.
$\angle CEB = \angle XCD$ (F-hoeken) en $\angle CBE = \angle BCD$, dus $\angle CEB = \angle CBE$, dus $CE = CB$.
EB en *CD* zijn evenwijdig, dus: $AC : EC = AD : BD$,
$EC = BC$, dus ook $AC : BC = AD : BD$.

13 N ligt op AB zó, dat CN en AB loodrecht op elkaar staan. Noem $MN = x$, dan $AN = d + x$ en $BN = d - x$.

$b^2 = (d+x)^2 + h^2 = d^2 + 2dx + x^2 + h^2$ en

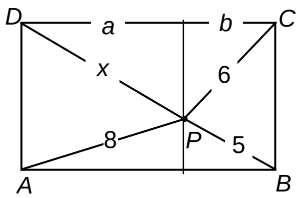
$a^2 = (d-x)^2 + h^2 = d^2 - 2dx + x^2 + h^2$, hierbij is $h = CN$.

Dus: $a^2 + b^2 = 2d^2 + 2x^2 + 2h^2 = 2d^2 + 2m^2$



14 K, L en M zijn de middelpunten van de cirkels. P en R zijn de raakpunten en Q het midden van de koorde. Dan zijn PK, QL en RM evenwijdig.
$KL = 9 - 3 = 6$ en $LM = 9 - 6 = 3$, dus $QL = 5$.

De lengte van de koorde $= 2 \cdot \sqrt{9^2 - 5^2} = 2\sqrt{56} = 4\sqrt{14}$.



15 Zie plaatje: $x^2 - a^2 = 6^2 - b^2$ en $8^2 - a^2 = 5^2 - b^2$
Dus: $x^2 - a^2 - (8^2 - a^2) = 6^2 - b^2 - (5^2 - b^2)$
Dus: $x^2 - 8^2 = 6^2 - 5^2$, dus $x = 5\sqrt{3}$.

Paragraaf 6 Rekentechniek

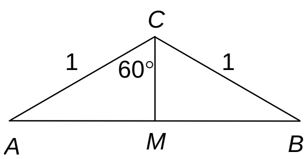
1 **a.** $1^2 + 2^2 = \sqrt{5}^2$

b. $\sqrt{\tfrac{1}{5}}^2 + \left(2\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right)^2 = 1^2$

c. De driehoek met zijden 6, 12, en $\sqrt{180}$ ontstaat uit die met zijden 1, 2 en $\sqrt{5}$ door met 6 te vermenigvuldigen.

d. Als je de driehoek met zijden $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ en 5 met $\tfrac{1}{5}$ vermenigvuldigt, krijg je de driehoek met zijden $\sqrt{\tfrac{1}{5}}$, $2\sqrt{\tfrac{1}{5}}$ en 1. (Let op de derde zijde.)

Dus $\sqrt{\tfrac{1}{5}} = \tfrac{1}{5}\sqrt{5}$. (Let op de eerste zijde.)



2 **a.** $6\sqrt{2}$ $2\sqrt{43}$ $9\sqrt{2}$ $10\sqrt{10}$

b. $\tfrac{1}{5}\sqrt{30}$ $\tfrac{1}{2}\sqrt{6}$ $\sqrt{2}$ 10

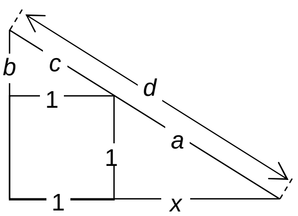
c. $\tfrac{1}{5}\sqrt{5}$ $\tfrac{1}{5}\sqrt{15}$ $\tfrac{2}{7}\sqrt{42}$ $1\tfrac{1}{5}$

3 Het midden van AB noemen we M, dan is ACM een 30-60-90-graden-driehoek. Dus $CM = \frac{1}{2}$ en $AM = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $AB = \sqrt{3}$.

4 Twee zijden zijn: $6\sqrt{2}$, een zijde is $6\sqrt{3}$ en de diagonalen zijn: $3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$.

5 **a.** De andere rechthoekszijde is $\sqrt{289 - x^2}$ De twee rechthoekszijden samen zijn $40 - 17 = 23$.
b. 8, 15

6 **a.** Kwadrateren geeft: $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$ $(x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -1$.
Aan de oorspronkelijke vergelijking voldoet alleen $x = 2$.
b. Kwadrateren geeft: $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$ $(x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -1$.
Aan de oorspronkelijke vergelijking voldoet alleen $x = -1$.
c. $x = \sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{x}$
Kwadrateren geeft: $x^2 - 4x + 4 = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$ $(x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = 4$.
Aan de oorspronkelijke vergelijking voldoet alleen $x = 4$.



7 **a.** $a = \sqrt{x^2 + 1}$; $\frac{b}{1} = \frac{1}{x}$, dus $b = \frac{1}{x}$ (gelijkvormigheid van de twee kleinere driehoeken). Verder $c = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$.
De rechthoekszijden van de grote driehoek zijn: $x + 1$ en $1 + \frac{1}{x}$, dus $d = \sqrt{(x+1)^2 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2}$.
Anderzijds $d = a + c = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{x^2 + 1}$.
b. $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{(x+1)^2 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2}$. Kwadrateren geeft: $1 + \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1 = (x+1)^2 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$
We bekijken eerst de linkerkant. Het deel
$\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} \cdot \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2}} = \frac{x^2+1}{x}$,
dus de linkerkant is:
$1 + \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 2 \cdot \frac{x^2+1}{x}$
$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 2x + \frac{2}{x}$.

en de rechterkant is:

$(x+1)^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2x+1+1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$.

Klopt!

8 **a.** $a^2=\left(\sqrt{2}+1\right)^2+1^2=4+2\sqrt{2}$,

$b^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+1^2=4-2\sqrt{2}$ en $c^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$, dus $a^2+b^2=c^2$

b. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$? Kruislings vermenigvuldigen geeft:

$\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=1$ en dat klopt.

9 Schrijf de volgende vormen zonder wortel in de noemer.

$\frac{2}{\sqrt{3}+2}\cdot\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2}=\frac{2\sqrt{3}-4}{3-4}=4-2\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{5-4}=\sqrt{15}-2\sqrt{3}$

$\frac{3}{2\sqrt{5}+\sqrt{17}}\cdot\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{17}}{2\sqrt{5}-\sqrt{17}}=\frac{3\left(2\sqrt{5}-\sqrt{17}\right)}{20-17}=2\sqrt{5}-\sqrt{17}$