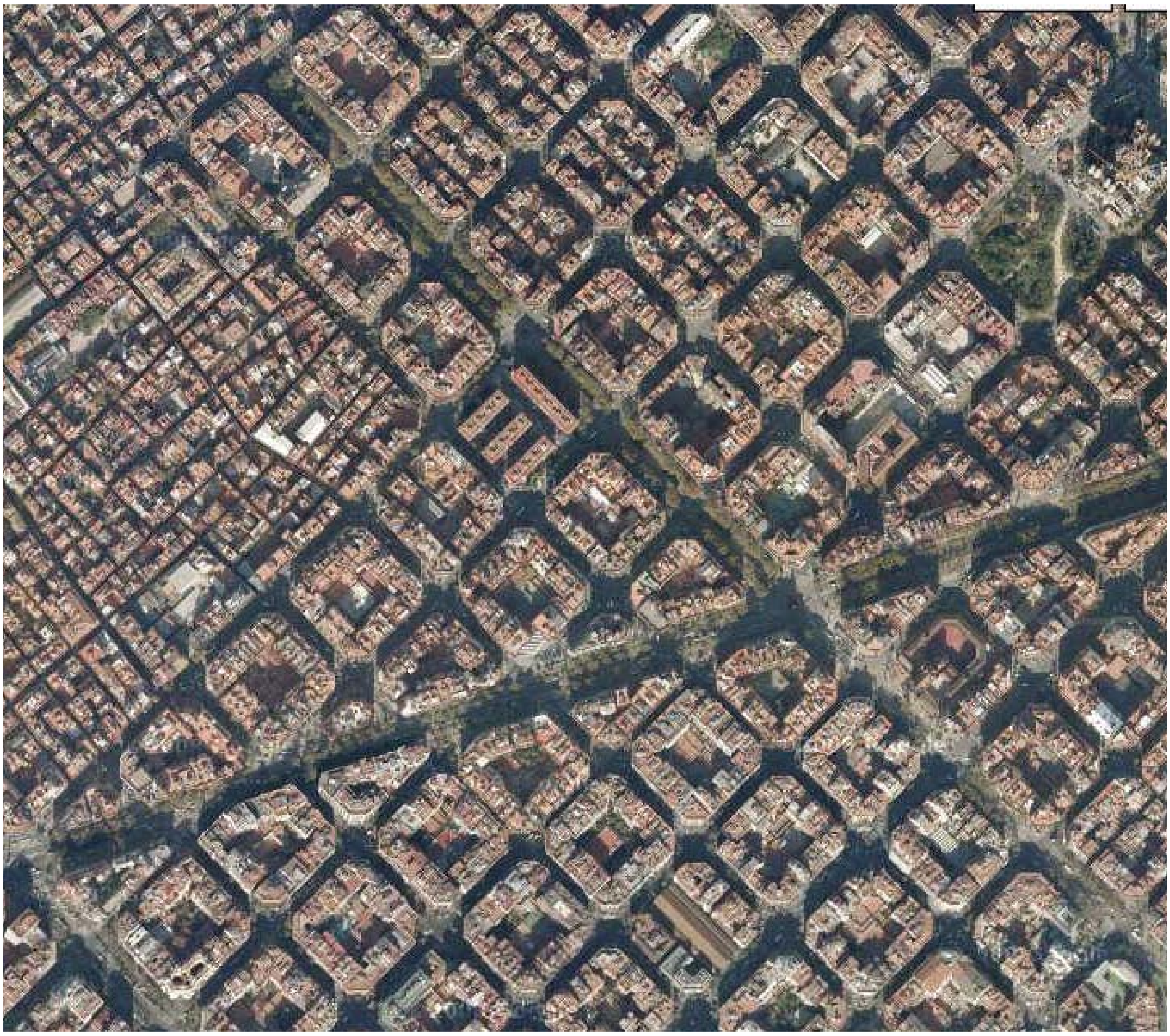
Meetkunde met coördinaten



Blok II
Punten met gewicht

Inleiding op dit blok

Het samenspel van meetkundig werken met figuren en algebraïsch werken met getallen en variabelen gaat verder, nu met gebruik van coördinaten erbij.

Een punt heeft in dit blok twee gezichten: het kan een ‘stip’ zijn in figuur, het kan een koppel van twee getallen zijn. Een punt is steeds beide tegelijk.

In dit blok gebruiken we coördinaten ook op een manier die met natuurkunde samenhangt: punten krijgen een gewicht bij zich en we rekenen met die gewichten. Wonderlijk genoeg komen er dan toch nieuwe *wiskundige* samenhangen naar boven.

Belangrijk zijn:

a. Vernieuwde en verdiepte kennis van het werken met coördinaten.
b. Het toepassen daarvan bij de werkwijze van het vorige blok: het vier stappenplan.
c. Maken van formules die punten bepalen ten opzichte van eerder gegeven punten.
Zo leer je figuren bouwen vanuit enkele gegevens en leer je problemen die daarbij voorkomen oplossen.

Je leert verder:

d. hoe je kunt rekenen met gewogen gemiddelden,
e. wat het gewogen gemiddelde van twee of meer punten met gewichten is: het zwaartepunt,
f. in veel opgaven je algebra-kennis inzetten, die je daarbij vanzelf uitbreidt.

Hoe gebruik je dit blok?

Je kunt in de figuren van dit blok tekenen, maar er is weinig ruimte om veel op te schrijven.
Maak daarom de opgaven in een schrift.
Je hebt dan zoveel ruimte als je zelf nodig hebt.

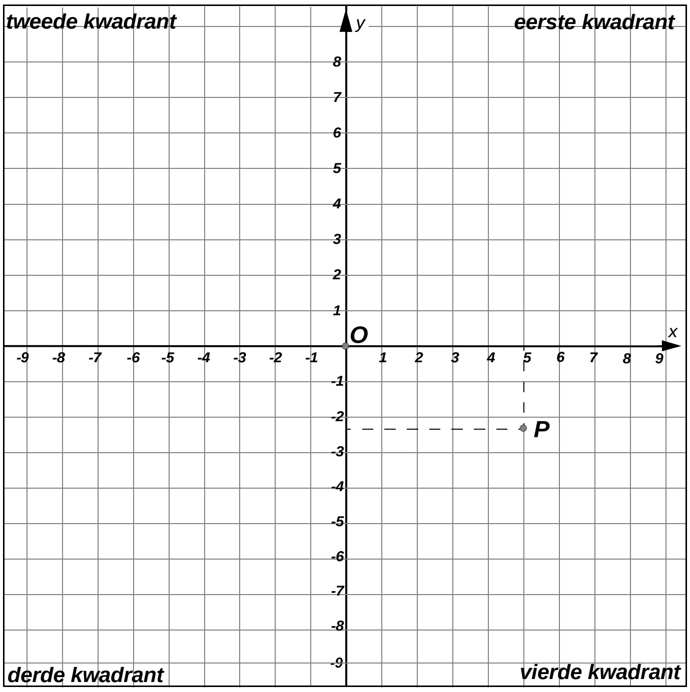
Achter in dit blok zijn veel van de figuren nogmaals opgenomen, soms ook vergroot. Die kun je bij het werk gebruiken en ook in je schrift plakken.
Figuren waarbij zo’n extra kopie achterin hoort, zijn te herkennen aan het tekentje .

Meetkunde met coördinaten
Blok II: Punten met gewicht

Experiment: Nieuwe Meetkunde VWO B, 2013
Op voorstel van de cTWO (Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs).
Pilotteam: Richard Berends (NSG Groenewoud, Nijmegen), Josephine Buskes (Kandinsky College, Nijmegen), Aad Goddijn (FIsme), Sieb Kemme (cTWO), Dick Klingens (Krimpenerwaard College, Krimpen a/d IJssel)
Ontwerp blok II: Aad Goddijn
Versie: Experimentele versie
Datum: 6 april 2009

1: Het Cartesisch coördinatenstelsel

Vooraf
In deze paragraaf zie je een oude bekende weer terug: het rechthoekig coördinatenstelsel. Deze keer ga je het coördinatenstelsel vooral gebruiken voor meetkunde met behulp van algebra. Ook leer je de methode van het vier stappenplan van het vorige blok gebruiken in combinatie met coördinaten.
Je hebt hier eerst alle terminologie bij elkaar en je oefent er daarna stevig mee.



In dit coördinatenstelsel zie je:

– Een ***x-as*** en een ***y-as***. De indeling van de twee assen is dezelfde. De assen zijn twee getallenlijnen waarmee we posities in het vlak gaan vastleggen. De assen lopen eigenlijk onbeperkt naar twee kanten door, maar in een figuur zie je natuurlijk slechts een klein stukje.
De *y*-as heet de ***verticale as*** en de *x*-as heet de ***horizontale as***.
– De ***vier kwadranten***. De delen waarin de assen het vlak indelen. In de figuur zie je de namen ervan.
– Een ***punt P***. De ***x-coördinaat*** van dit punt *P* is 5 en de ***y-coördinaat*** ervan is –2,3. De lichte stippellijnen in de figuur laten het verband met de getallen op de assen zien.
We schrijven het zó op: ***P* (*5; –2,3*).** Gebruik de puntkomma tussen de coördinaten; de komma hoort bij de decimale notatie van getallen.
Als we niet aan een speciaal punt denken, maar toch willen praten over 'de coördinaten van punt *P*', dan gebruiken we letters. Bijvoorbeeld *'het punt (a; b)'.* Als we het verband met *P* zichtbaar willen houden, gebruiken we bijvoorbeeld: $(x_P; y_P)$.
De ***oorsprong***. Het punt ***O*** in de figuur. Hier snijden de assen elkaar. *O* heeft coördinaten (0; 0).
– ***Roosterlijnen***. De lijnen die evenwijdig aan één van de assen lopen en bij een geheel getal horen op de andere as. Ze vormen de kleine vierkanten in de figuur.
Snijpunten van roosterlijnen heten ***roosterpunten***. Roosterpunten hebben gehele coördinaten.

De hoofdkenmerken van het Cartesisch coördinatenstelsel zijn:

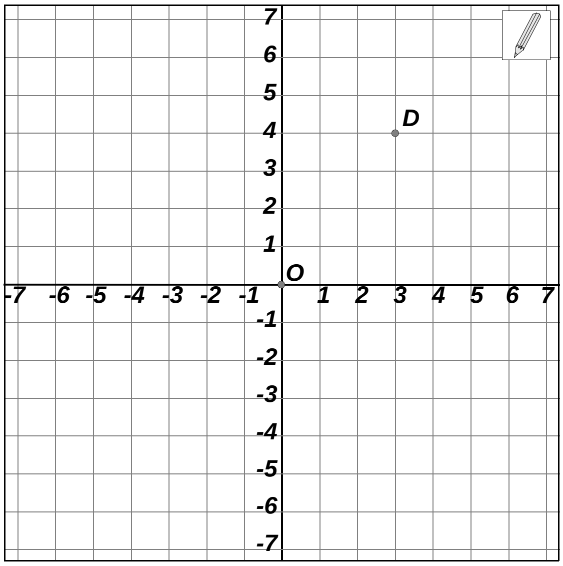
– de assen staan loodrecht op elkaar.
– de assen zijn beide met even grote stapjes ingedeeld.

De kern van de zaak

We kunnen in ‘getallentaal’ praten over punten, lijnen en andere figuren.

Een paar van twee getallen zoals (4; 3) is óók een punt in het vlak. En ieder punt is óók een paartje getallen. Alle punten met *x*-coördinaat 3 vormen *een lijn*; het is een van de roosterlijnen. Kort gezegd: *de lijn x = 3*.

1.1 Oefening: punten vinden



a. Teken deze zes punten:
A (2; 4) *B* (–6; 2) C (6; –2)
F (3; 2) G (–5; 2) *H* (–5; –4)

b. Wat zijn de *coördinaten* van het midden van *AB*?

c. Teken *de lijn y = 5.*

d. Zet stippen op de roosterpunten waarvan de *x*-coördinaat gelijk is aan de *y*-coördinaat.

e. De coördinaten van het punt *D* zijn samen 7. Teken met rood nog enkele punten waarvoor dat geldt.

De punten die je bij vraag **d** hebt getekend voldoen aan $x = y$ en die bij **e** aan $x + y = 7$.

f. Teken vier roosterpunten op de lijn $y = 7 - 3x$.

g. Gebruik de punten die bij vraag *f* hebt gevonden om snel vier roosterpunten te vinden die voldoen aan $x = 7 - 3y$.

Afstanden en lengtes

De afstand van de punten *F* en *G* is 8 en die tussen *G* en *H* is 6. Je meet hier langs roosterlijnen. *Schuine* afstanden bereken je met Pythagoras. De *afstand* van *G* en *H* is ook de *lengte* van het lijnstuk *GH*. Die lengte wordt vaak aangegeven met |*GH*|.

1.2 Oefening: afstanden met Pythagoras

a. Bereken de afstand van *F en H*. Teken daarvoor in de figuur eerst een rechthoekige driehoek waarvan *FH* de schuine zijde is en de andere twee zijden op roosterlijnen liggen.

b. Bereken de afstand van de punten *P* (1; 7) en *Q* (4; 3) *zonder de punten in een figuur te tekenen*. Schrijf wél je berekening op.

c. Bereken de afstand van de punten *S*(163, 217) en *T*(303, 388) door eerst dit invulschema in te vullen:

$$|ST| = \sqrt{(\mathbf{303} - ....)^2 + (....... - ....)^2} = ...$$

d. Vul ook het schema in voor de afstand van twee punten, waar de coördinaten met letters zijn aangegeven, de punten $P(x_P; y_P)$ en $Q(x_Q; y_Q)$:

$$|PQ| = \sqrt{(....... - ....)^2 + (....... - \boldsymbol{y_Q})^2}$$

1.3 De kwadranten-tabel

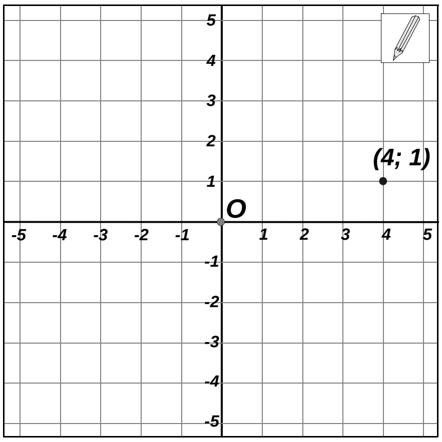
a. In deze tabel is met + of - aangegeven of de coördinaten van een punt binnen het kwadrant positief of negatief zijn. Vul de tabel verder in.

	x-coördinaat	*y*-coördinaat
eerste kwadrant	+	
tweede kwadrant		
derde kwadrant		–
vierde kwadrant		

b. Begin bij punt (3; 5). Spiegel het in de *y*-as. Spiegel dan verder in de *x*-as, weer in de *y*-as en weer in de *x*-as. In welke kwadranten komt het punt achtereenvolgens?

Achthoeken met vier stappenplan

1.4 Een ongelijkzijdige achthoek



a. (4; 1) ligt op afstand 4 van de y-as en afstand 1 van de x-as. Er zijn nóg ***7*** punten die op afstand 4 van de ene en afstand 1 van de andere as liggen! Teken ze in de figuur.

Deze punten zijn de hoekpunten van een achthoek om de *O*.
Je ziet dat in elk kwadrant twee punten liggen.

b. Een van de acht punten is het punt (-4, 1). Wat is het andere punt van de acht dat in het zelfde kwadrant ligt als (-4, 1)?

c. Wat is de afstand tussen de twee punten van de achthoek die in één kwadrant liggen?

De achthoek is niet regelmatig, want de zijden van de achthoek die een as oversteken hebben een andere lengte.

d. Welke zijde is de langste, een schuine in een kwadrant of een rechte die een as oversteekt?

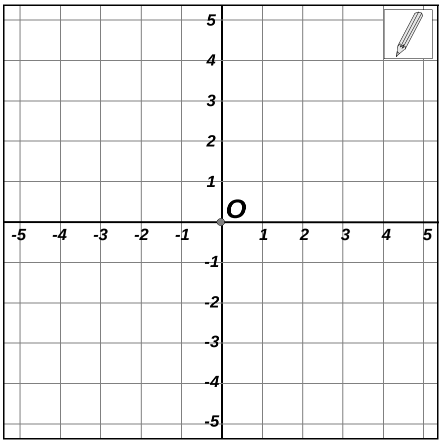
e. De hoeken van de achthoek zijn wél allemaal even groot. Hoe groot is die hoek?

Nu gaan we proberen op net zo'n manier een *regelmatige achthoek* te maken. Van zo'n achthoek zijn de acht *hoeken even groot* en de acht *zijden even lang*.

f. Je kunt proberen of het lukt als je met punt (4; 2) begint en dan de achthoek maakt.
Welke zijde is van deze achthoek de langste, een schuine in een kwadrant of een rechte die een as oversteekt?

Je kunt lang doorgaan met proberen. Maar het het vier stappenplan van Blok 1 helpt direct!

1.5 Naar de regelmatige achthoek.



In plaats van afstanden 4 en 1 of 4 en 2 nemen we nu 4 en *a.* We zoeken de waarde van *a,* waarvoor de achthoek (gemaakt zoals eerder) regelmatig is.

a. De gezochte waarde van *a* moet ergens tussen 1 en 2 liggen! Hoe blijkt dat uit de vorige opgave?

We gaan nu *a* exact bepalen via het vier stappenplan.
In plaats van beginpunt (4; 1) of (4; 2) nemen we nu dus (4; *a*).

b. *Eerst stap:* de schets maken. Leg beginpunt zo dat het op het oog goed klopt met de regelmaat van de achthoek.

c. *Tweede stap:* Geef bij drie van de punten de coördinaten aan. Twee in het eerste en één in het tweede kwadrant, zodat je van een schuine en van een rechte zijde de eindpunten hebt aangegeven.

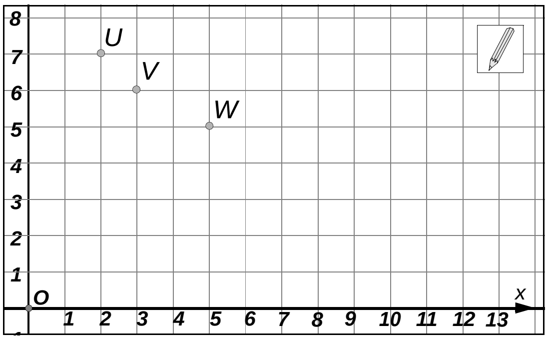
d. *Derde stap:* Opstellen van een vergelijking. Dat doe je door eerst formules te maken voor de lengtes van het schuine en van het rechte stuk. Daarna stel je de formules aan elkaar gelijk.
- Bereken de lengte van een schuine zijde met behulp van het schema van opgave 1.2. Laat zien dat die formule hier vereenvoudigd kan worden kan tot $\sqrt{\mathbf{2} \cdot (\mathbf{4} - \boldsymbol{a})^{\mathbf{2}}}$.
- Bereken de lengte van het rechte stuk ook.
- Schrijf de vergelijking op:

$$\sqrt{\mathbf{2} \cdot (\mathbf{4} - \boldsymbol{a})^{\mathbf{2}}} = \textbf{...........}$$

e. *Stap vier:* oplossen van de vergelijking. Doe dat zoals je dat gewend bent. Noteer je oplossing(en) exact én benaderd. Welke van de twee oplossingen is geschikt voor de figuur?

f. *Afronding:* Nu kun je in een nieuwe figuur de regelmatige achthoek nauwkeurig tekenen. Doen! Controleer of de lengtes inderdaad gelijk zijn.

1.6 Oefening: vergelijken van wortels



In deze figuur zie je de roosterpunten *U*, *V* en *W*.

a. Bereken de onderlinge afstanden van deze punten exact.

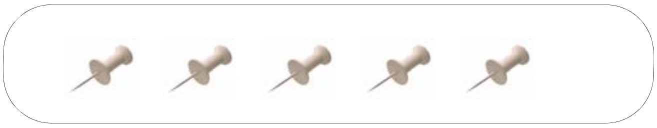
b. Leg uit hoe je uit de figuur kunt afleiden dat $\sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt{\mathbf{5}} > \sqrt{\mathbf{13}}$.

c. Toon door een handige keuze van drie andere punten aan dat $\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt{\mathbf{5}} > \mathbf{5}$.

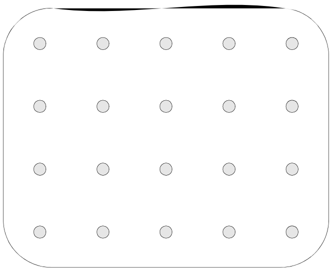
d. Toon door een andere handige keuze aan dat $\sqrt{\mathbf{73}} + \sqrt{\mathbf{29}} > \sqrt{\mathbf{194}}$.

(Tip: *Pythagoras*. 73 = $8^2 + 3^2$; 29 = $..^2 + ..^2$.)
Bereken met je rekenmachine ook hoeveel het scheelt.

1.7 Een puzzel over afstanden



Steek de vijf punaise zó in de gaten van het prikbord, dat er geen twee gelijke afstanden tussen punaises ontstaan.



Barcelona

1.8 Eixample

Op de voorpagina van dit meetkundeblok staat een luchtfoto van de wijk *Eixample* in Barcelona.
Dat lijkt wel een schuinliggend coördinatenstelsel!
Het modernistische plan van de wijk is rond 1860 bedacht door ingenieur Ildefonso Cerdá Suñer (1815 - 1876).
De straten zijn allemaal NW-ZO of NO-ZW gericht, zodat elk appartement dagelijks zon op de gevel krijgt (als de zon tenminste schijnt).
De blokken zijn allemaal 113 bij 113 meter en de straten zijn allemaal 20 meter breed.
Op elke kruispunt zijn in het ontwerp de hoeken van de blokken stomp gemaakt, zodat overal achthoekige pleinen pleinen ontstaan zijn. De afgeschuinde hoeken zijn nu zijden van ook 20 meter; dus die achthoeken zijn regelmatig.
Hiernaast zie je het plein op de kruising van de *Carrer del Conte Borrell* en de *Carrer de Floridablanca*.

a. Van de blokken links en rechts op deze foto liggen de korte zijden 20 meter tegenover elkaar.
Bereken de afstand tussen die blokken.

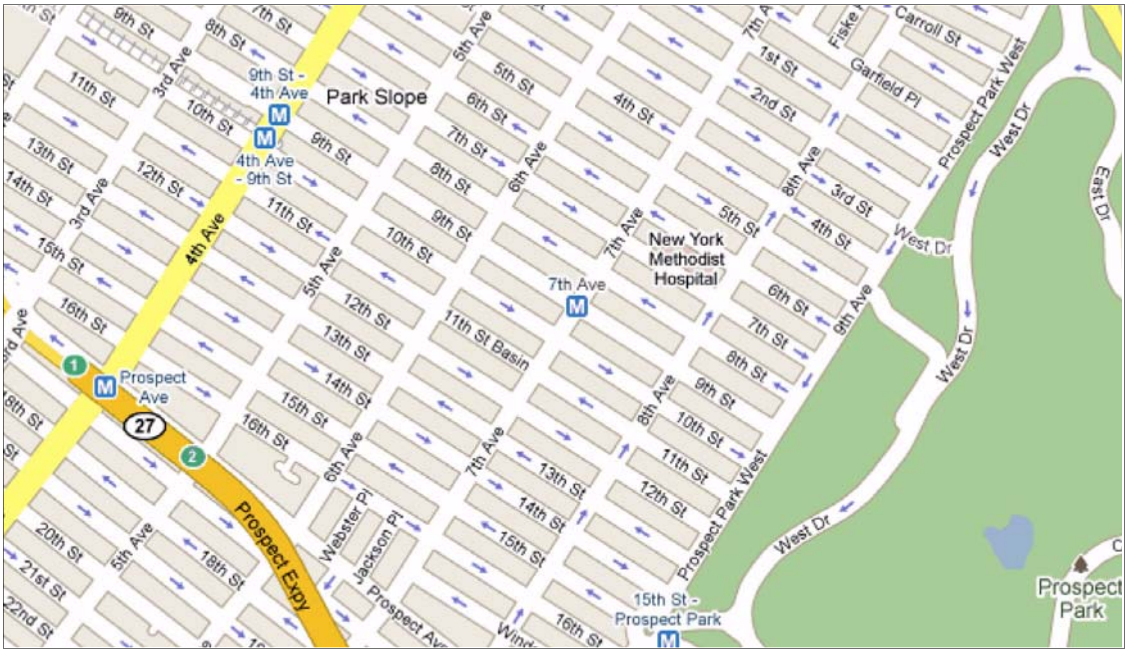
(Probeer het eerst zelf!
Bij de extra figuren achterin zitten twee figuren die misschien een mogelijk verband leggen met opgave 1.5.)

b. Op de foto op de voorpagina en op deze foto zie je de *Avinguda Diagonal*; die loopt schuin tenopzichte van het rechthoekige rooster van de straten.
De *Avinguda Diagonal* loopt als het ware langs de diagonaal van een rechthoek die uit twee van de vierkante blokken bestaat.

Teken op deze foto twee assen op twee straten, als was het een cöordinatenstelsel. (Dat ligt dan wel schuin ten opzichte van de bladzijde.)

Doe het zo, dat de pleinen op de *Avinguda Diagonal* ongeveer voldoen aan $y = 2x$.

c. Er zijn wel meer wijken in grote steden, die volgens zo'n rechthoekig rooster gemaakt zijn.
In New York zijn de straten wél genummerd, ongeveer zoals het bij een coördinatenstelsel hoort. Een stukje van de het stadsdeel Brooklyn.



Wat zijn de 'coördinaten' van het *New York Methodist Hospital* ?

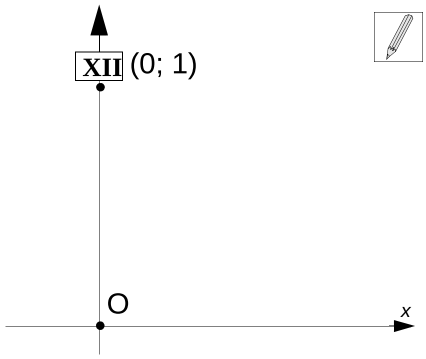
Little Big Time van Frank Clewits

Deze klok, genaamd *Little Big Time*, is een ontwerp van Frank Clewits, ontwerper van klokken en medeoprichter van *Present Time*. Mooi op een verder lege witte muur: alleen wijzers, geen cijfers. Hoe groot de klok is, hangt van de grootte van jóuw wand af.

In aanvulling hierop maken we, met behulp van coördinaten en algebra, onze eigen wijzerplaat.
Het gaat erom dat we een regelmatige twaalfhoek in een coördinatenstelsel vastleggen.

1.9 De regelmatige twaalfhoek

In de figuur hiernaast is een suggestie gedaan: leg het midden van de wijzerplaat op de oorsprong en het punt '12 uur' van de wijzerplaat op het punt met coördinaten (0; 1). '3 uur' komt dan automatisch op (1; 0).



Kennen we de coördinaten van punt '1 uur', dan zijn we bijna klaar. Dat punt heeft nog onbekende coördinaten; we noemen ze *(u; v).*

a. Teken de punten (1; 0) en (*u; v*) zo goed mogelijk in de schets.
b. Als '1 uur' op (*u; v*) ligt; weet je ook waar '2 uur' ligt. Teken ook punt '2 uur' en schrijf de coördinaten erbij; daarbij gebruik je weer *u* en *v*, maar op een andere manier!
c. Punt '1 uur' ligt net zo ver van de oorsprong als het punt '12 uur' van de oorsprong ligt, namelijk precies 1. Druk dat uit in een Pythagoras-vergelijking met *u* en *v* erin. Vul in:
d. De twee afstanden tussen '12 uur', '1 uur' en '2 uur' kun je ook met Pythagoras (of de wortelvorm van opgave 1.2) uitrekenen. Stel deze twee formules op.
e. De twee formules van vraag **d** stellen gelijke afstanden voor. Nu kun je weer een vergelijking opstellen, door de twee afstanden aan elkaar gelijk te stellen. Noteer die vergelijking.

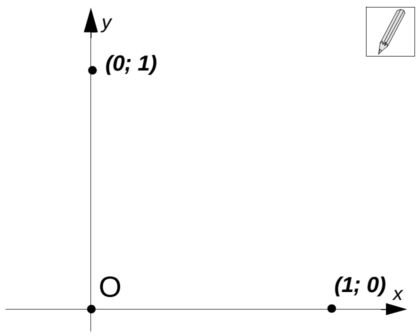
De eerste vergelijking (van **c**) is de simpelste; iets met $u^2 + v^2$ erin en weinig meer.
De tweede (die van **e**) lijkt wat ingewikkelder, maar die kan aanzienlijk vereenvoudigd worden.
Zeker als je de eerste vergelijking gebruikt om zoveel mogelijk kwadraten van *u* en *v* weg te werken.

f. Vereenvoudig de tweede vergelijking en leidt daaruit af wat *u* (of *v*) moet zijn.
g. Bepaal nu ook *v (of u),* exact en benaderd*,* met behulp van de eerste vergelijking.

1.10 De hoek van 60°

a. Geef in deze figuur de driehoek aan die uit het midden van de klok en de punten voor 1 en voor 3 uur bestaat. Noteer een redenering waaruit volgt dat die driehoek gelijkzijdig is.
b. Teken in deze figuur de vertikale lijn x = 0,5. Die gaat door het punt voor '1 uur' . Hoe volgt dit uit onderdeel **a**?

O is nu hoekpunt van en rechthoekige driehoek. Je weet uit onderdeel **a** de hoek bij O: *60°*.



c. Schrijf nu de exacte lengtes van de zijden van die rechthoekige driehoek bij de zijden.

d. Leg uit waarom geldt dat: $\mathbf{sin}(\mathbf{60^o}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en bepaal zelf $\mathbf{cos}(\mathbf{60^o})$.

René Descartes

1.11 Opzoeken op het web

Het Cartesisch coördinatenstelsel is genoemd naar René Descartes.
Descartes gebruikte intensief algebra bij meetkundig onderzoek; vermoedelijk vanaf 1628. Maar hij gebruikte geen coördinaten in de vorm $P(1; 3)$. Hij drukte alles in afstanden uit; afstanden tot twee vaste lijnen. Die afstanden noemde hij x en y, en net als wij stelde hij daar vergelijkingen mee op.
Met een beetje hulp van *Google* en *Wikipedia* vind je veel over deze belangrijke denker.

(Vraag even hoe je de naam 'René Descartes' goed op zijn Frans uitspreekt.)

- **a.** Welke Nederlandse schilder maakte dit portret van Descartes?
- **b.** Waar was Descartes in 1628?
- **c.** Hoe heet het boek waarin Descartes zijn ideeën over meetkunde uiteenzette?
- **d.** Wie was Monsieur Grat?
- **e.** Eigenlijk was wiskunde helemaal niet Descartes' hoofdonderwerp van onderzoek.
  Wat was dat wel?
- **f.** Descartes had een Nederlandse leermeester. Wie was dat? En waar kregen de heren later behoorlijk onenigheid over?
- **g.** Wie was rond 1640 Descartes' belangrijkste tegenstander in Nederland?
- **h.** Wat betekent '*Cogito, ergo sum*' en waarom was dit zinnetje zo belangrijk voor Descartes?
- **i.** Descartes wordt 'rationalist' genoemd. Wat betekent dat in dit geval?

2: Vierkanten met formules

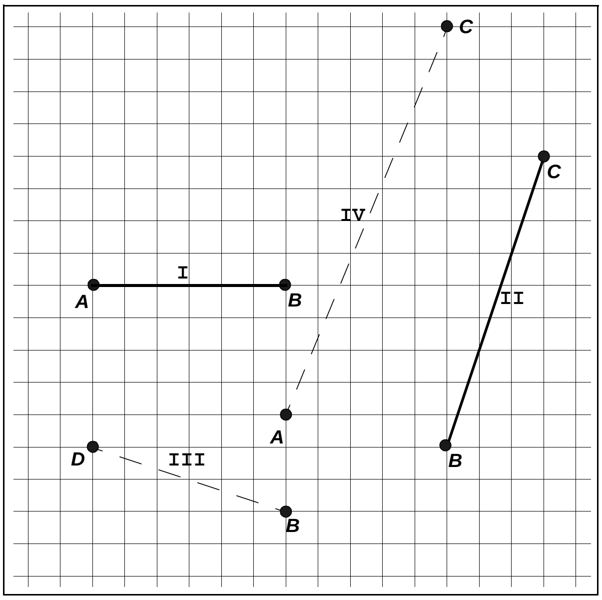
Vooraf
In deze paragraaf gebruik je de rechte hoeken tussen de assen en de gelijke verdelingen op de assen bij een meetkundige figuur die daar heel goed bij past: *het vierkant*. Je leert hoe je met behulp van coördinaten formules maakt en je past alles toe in een verrassend probleem.
Wat je hier leert is een belangrijke basis voor het volgende blok!

2.1 Vierkant aanvullen: in het rooster

In deze figuur is alleen het rooster aangegeven. Van vier vierkanten, elke keer met *ABCD* aangegeven, is een gedeelte getekend.
De letters *A*, *B*, *C* en *D* staan steeds in *tegenklokse volgorde* bij de hoekpunten.

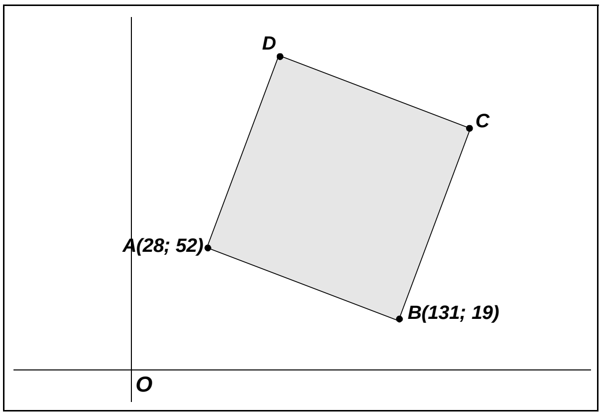
Maak de tekeningen van de vierkanten af!

(Met behulp van de roosterlijnen kun je dat heel nauwkeurig uittellen.)



2.2 Vierkant aanvullen: met coördinaten

In deze figuur is *ABCD* weer een vierkant.
De coördinaten van *A* en *B* zijn aangegeven.



a. Teken door *A*, *B*, *C* en *D* lijnen evenwijdig aan de assen. Acht lijnen in totaal!

b. Door deze lijnen zijn twee nieuwe vierkanten ontstaan: een bínnen en een óm *ABCD*. Bereken van beide vierkanten de zijden.

c. Er zijn ook acht gelijke rechthoekige driehoeken ontstaan.
Wat zijn de lengtes van de rechthoekszijden daarvan?

(Zo'n driehoek die tegen een schuin lijnstuk aan ligt en hulp geeft bij de berekening, noemen we soms een *steundriehoek*.)

d. Bereken nu de coördinaten van punt *C* en punt *D*.

e. Over punt *C* kun je nog dit bedenken:
C ligt precies zoveel rechts van B als B onder A ligt en precies zoveel boven B als B rechts van A ligt.

Schrijf net zo'n zin op over punt *D*; die begint dus zo:
D ligt precies zoveel rechts van ....
en in de rest mag je ook alléén de punten *A* en *B* gebruiken.

f. Van een vierkant *PQRS* zijn gegeven *P*(-13; 6) en *Q*(23;-5). Bereken de coördinaten van *R* en S.

2.3 Van getallen naar formules

a. Bij dit voorbeeld van vierkant *ABCD* is *C* al op grond van *A* en *B* uitgerekend. Opgeschreven zonder figuur en coördinatenstelsel:

Bij punten	***A*** ***en***	***B***	***is het volgende punt van het vierkant:***	***C***
	(6; 5)	**(19; 1)**	→	**(23; 14)**

Controleer of dit klopt; gebruik daar bij de tekst van opgave 2.2e.

b. In het grijze blok hierboven kun je *niet* zien hoe de berekening gedaan is. Hieronder kan dat *wel*, voor de *y*-coördinaat van punt *C*. Vul net zo iets in voor de x-coördinaat van *C.*

Bij punten	***A*** ***en***	***B***	***is het volgende punt van het vierkant:***	***C***
	(6; 5)	**(19; 1)**	→	**(................ ; 1+ (19 –6))**

c. Nu kun je de berekening goed zien, om hem later nogmaals te kunnen gebruiken. Dat gaan we nu even doen. Gebruik het patroon van de vorige opgave:

Bij punten	***K*** ***en***	***L***	***is het volgende punt van het vierkant:***	***M***
	(12; 3)	**(23; 2)**	→	**(................ ; ....)**

d. Maar het is nog beter dat met letters te doen. We geven de *x*- en de *y*- coördinaat van *A* nu aan met $(x_A; y_A)$, en zo verder:

Bij punten	***A*** ***en***	***B***	***is het volgende punt van het vierkant:***	***C***
	$(x_A; y_A)$	$(x_B; y_B)$	→	$(x_C; y_C) = (x_B + (y_A - y_B)$;...................)

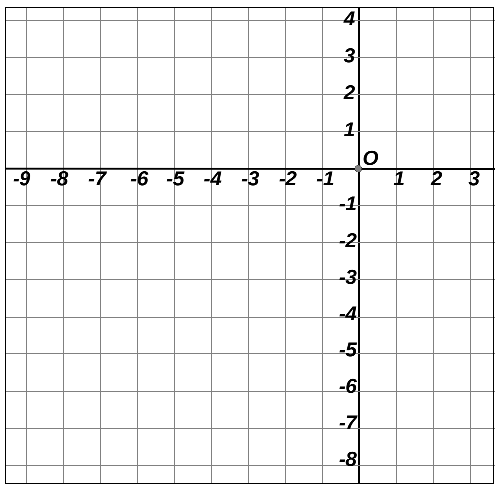
Vul de formule voor y_C nu ook in.

e. Laat zien dat deze formules voor x_C en y_C precies zeggen wat in opgave **2.2e** staat.

f. Gebruik het formule-schema nu in dit voorbeeld met andere coördinaten voor *A* en *B*:

Bij punten	***A*** ***en***	***B***	***is het volgende punt van het vierkant:***	***C***
	(2; -4)	**(–1; 3)**	→	**(......; ....)**

g. Controleer of het laatste klopt, door de *A, B* en *C* in de figuur hiernaast te tekenen.



2.4 De formule gebruiken

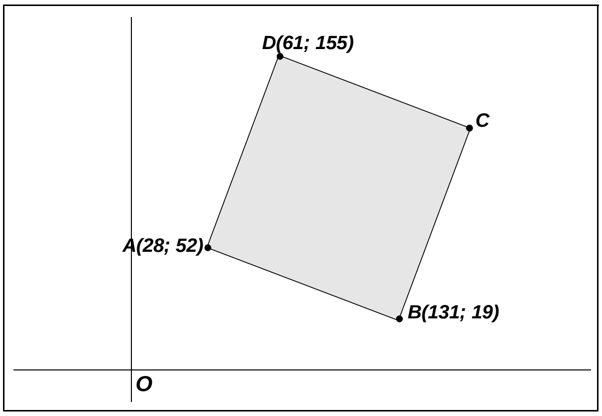
In deze tabel pas je de formules van **2.3d** een aantal keren toe. Houd je strikt aan het schema van **2.3.d**, ook als de coördinaten in variabelen zijn uitgedrukt. Dan is het antwoord ook iets met letters er in. Probeer wel dat antwoord eenvoudig op te schrijven. Je laat niet zoiets als **$a + (2 - a)$** staan. Dat staat wel in je kladwerk, maar er moet wel gewoon '**= *2***' achter staan!

punt A	***punt B***	***punt C***
(0; 0)	**(2; 2)**	
(3; 3)	**(3; -3)**	
(19; 1)	**(6; 5)**	
(0; *7*)	**(*7*; 0)**	
($-p$; 0)	**(q; 0)**	
(a – 5; 0)	**(a; 0)**	

2.5 Het vierde punt (eerste manier)

Natuurlijk is er ook een formule voor het vierde punt *D;* want als *A* en *B* aangegeven zijn, ligt ook het vierde punt van het vierkant vast.

We gaan (iets verkort) dezelfde werkwijze als eerder volgen.



a. Laat zien dat $x_D = 28 + (52 - 19) = 61$ klopt met wat in opgave **2.2e** is opgeschreven.

b. Stel nu met $x_D = 28 + (52 - 19)$ als lichtend voorbeeld de algemene formule op die x_D in de coördinaten van de punten *A* en *B* uit drukt als die $(x_A; y_A)$ en $(x_B; y_B)$ zijn**.**

c. Doe net zoiets om aan een formule voor y_D te komen.
Noteer alles hieronder. In de formules voor *D* moet je alleen $(x_A; y_A)$ en $(x_B; y_B)$ gebruiken!

Bij punten A en B is het vierde punt van het vierkant: D

$(x_A; y_A)$ $(x_B; y_B)$ → $(x_D; y_D)$ = (.................. ; ....)

Bij deze opgave vonden we de coördinaten van *D* volgens de *methode* die we eerder gebruikten.
In de volgende opgave gaan we op een handige manier het *resultaat* van de eerste aanpak gebruiken.

Deze opgave is lastig. Want j e steunt geheel op de formules en je gebruikt geen plaatje.
Je moet echt goed op je tellen (en je letters) passen bij wat je invult.....

2.6 Het vierde punt (tweede manier)

Het idee: We weten hoe we uit $A(x_A; y_A)$ en $B(x_B; y_B)$ punt C kunnen berekenen.

Punt D is in het vierkant echter óók het punt dat volgt ná B en C. Dus kun je met dezelfde berekening B en C om D te krijgen. Uiteindelijk moeten we zo de coördinaten van D in die van A en B kunnen uitdrukken.
Dat gaan we in 3 stappen doen.

Uiteindelijk bevatten de formules voor D ook alleen de coördinaten van de punten A en B

a. Stap 1: Druk de coördinaten van D uit in die van B en C. Volgt het schema dat je gemaakt heb bij opgave **2.3d:**

Bij punten B en C is het volgende punt van het vierkant: D

$(x_B; y_B) \quad (x_C; y_C) \quad \rightarrow \quad (x_D; y_D) = (\, x_C + (\ldots\ldots\ldots) \,;\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,)$

b. Stap 2: Druk de coördinaten van C uit in die van A en B. Dit is al gedaan in **2.3d**, dus overnemen maar:

Bij punten A en B is het volgende punt van het vierkant: C

$(x_A; y_A) \quad (x_B; y_B) \quad \rightarrow \quad (x_C; y_C) = (\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,)\,)$

c. Gebruik de stappen 1 en 2 om de coördinaten van D uit te drukken in die van A en B.
Schrijf eerst volledig uit door de A, B-formules voor de C-coordinaten over te nemen in stap 1 en vereenvoudig daarna:

Bij punten A en B is het vierde punt van het vierkant: D

$(x_A; y_A) \quad (x_B; y_B)$

$\rightarrow \quad (x_D; y_D) = (\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,)$

Bij punten A en B is het vierde punt van het vierkant: D

$(x_A; y_A) \quad (x_B; y_B) \quad \rightarrow \quad (x_D; y_D) = (\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,)$

d. Kwam er hetzelfde uit als wat je eerder hebt gevonden? (Dat zou wel zo moeten zijn ..)

3: Formules bouwen voor middens

Vooraf met een terugblik

In de vorige paragraaf leek het over vierkanten te gaan.
Een béétje waar is dat wel. Maar eigenlijk leerde je vooral hoe je bij twee punten (als je daarvan de coördinaten weet) andere punten kunt maken via een formule en hoe je zo'n formule in elkaar zet. Bijvoorbeeld voor de punten *C* en *D* samen met *A* en *B* een vierkant vormen.
Daar heb je formules gemaakt *die de coördinaten van C uitdrukken in de coördinaten van A en B.*

In deze paragraaf oefen je het maken van zulke formules bij andere meetkundige samenhangen.
Je kunt vooral je voordeel doen met opgave 2.3, waarin je zag hoe je van een getallenvoorbeeld dat je goed begrijpt, over kunt gaan naar een formule.

Midden tussen twee getallen

3.1 Twee soorten mensen

Als je aan mensen vraagt *hoe* ze het getal bepalen, dat exact midden tussen 52 en 74 ligt, krijg je twee verschillende antwoorden, maar ze komen (meestal) wel op hetzelfde antwoord uit.

– Methode 1: Trek 52 van 74 af. Het verschil is 22. Tel de helft daarvan (11) bij 52 op. Uitkomst : 63.
– Methode 2: Tel 52 bij 74 op. Dat is samen 126. Deel door 2. Weer 63!

Welke van deze twee methoden gebruik jij als je het getal midden tussen 535 en 935 moet bepalen?

3.2 Met algebra

Nu het gemiddelde van twee getallen in een formule. Omdat we dat vaak gaan gebruiken, op beide manieren, willen we ook dat de algebraïsche samenhang klopt.

a. Noem het ene getal nu *s* en het andere getal *t*.
Druk de uitkomsten van methode 1 en methode 2 allebei in *s* en *t* uit.

b. Laat algebraïsch zien dat de twee uitkomsten aan elkaar gelijk zijn. Dat betekent dat je het antwoord van methode 1 algebraïsch om moet vormen, zodat het antwoord van methode 2 er uit komt:

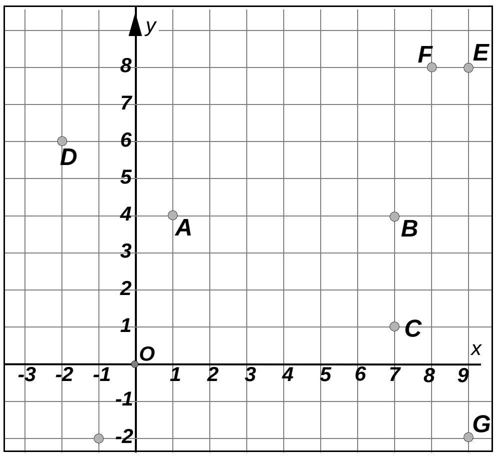
antwoord van methode 1 | antwoord van methode 2

.... = ... = ... = ...

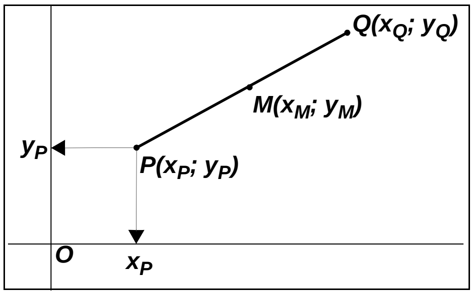
3.3 Het midden tussen twee punten bepalen

Teken de middens van de volgende lijnstukken, zet er de aangegeven namen bij en bereken de coördinaten van die middens. (Gebruik breuken, geen kommagetallen)

a. *AB*, midden: *M*
b. *EG*, midden: *N*
c. *FG*, midden: *P*
d. *DM*, midden: *Q*
e. *QM*, midden: *R*
f. *RQ*, midden: *S*.
g. Heb je dit gebruikt:
"de coördinaten van het midden van twee punten zijn de middens van de coördinaten van de punten."?



Het midden tussen twee punten bepalen
In een tekening zal dat wel lukken.
Maar dit is de eigenlijke opgave: druk de coordinaten van M algebraïsch uit in die van P en Q.



3.4 Middendeling van een lijnstuk, met algebra

Gegeven zijn twee punten $P(x_P; y_P)$ en $Q(x_Q;y_Q)$. M is het midden van P en Q.

a. Teken (net als bij P) de coördinaten van Q en M op de assen.

b. Druk de coördinaten van het midden $M(x_M; y_M)$ van PQ in de coördinaten van P en Q uit.
Geef een korte toelichting op je formules.

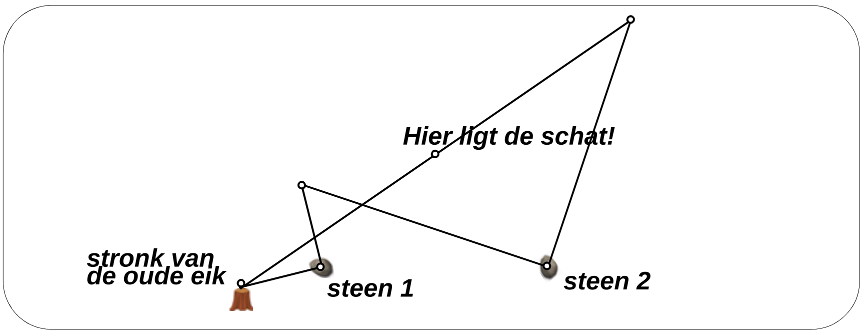
4: Schatgraven voor optimisten

In deze paragraaf gaan we de technieken van het vierkant en het midden gebruiken in een mooi probleem met onverwachte oplossing.

De schat op Teleurstellingseiland
Op een onooglijk stukje vergeeld papier dat je in een oude kist vindt, staat dit:

Trek je niets aan van de gruwelverhalen op *http://en.wikipedia.org/wiki/Disappointment_Island* vindt. Ga! (*)

4.1 Je hebt een plan gemaakt, voor als je de stenen en de stronk eenmaal hebt gevonden:



Maar het kan er ter plekke natuurlijk anders uit zien.

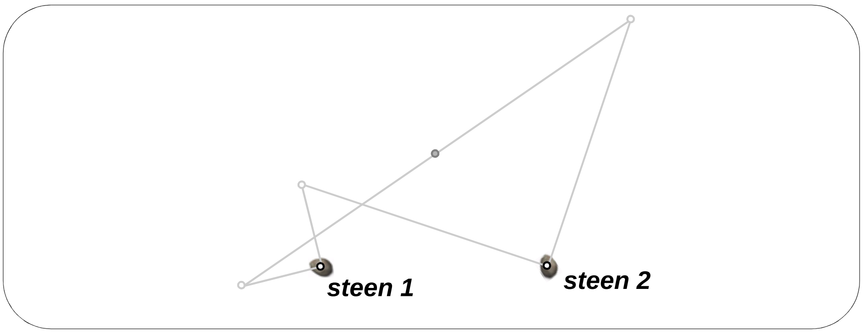
a. Kies zelf twee keer mogelijke coördinaten voor de stenen en de stronk. (Denk er aan dat je dit onder alle mogelijke omstandigheden in de Stille Zuidzee moet kunnen.)
Bereken voor beide mogelijkheden de positie van de schat met de middelen van de vorige paragraaf.

* 50° 36’ ZB, 165° 58’ OL.: *Disappointment Island;* een van de onbewoonde Auckland Islands ten zuiden van Nieuw Zeeland. Onbewoond? Op 65.000 visverwerkende witkopalbatrossen na!

Op *Teleurstellingseiland* aangekomen, vind je wel de twee stenen, ... maar geen spoor van de oude eik. Helaas?

4.2 De optimist in jou probeert het natuurlijk toch

a. Kies *zomaar* een nieuw punt op deze kaart en markeer het met *Z*. Voer op de kaart met geodriehoek en liniaal de zoekactieuit, *alsof* de oude eik bij *Z* stond.



Het resultaat roept om een verklaring. Het lijkt wel of je overal had kunnen beginnen en steeds op hetzelfde punt naar de schat zou zijn gaan graven.

4.3 Verklaring met coördinaten en algebra

Daartoe werk je met coördinaten.
Ga er voor het gemak vanuit dat de afstand tussen de stenen 8 is. (Dat is een willekeurige keuze; de afstand tussen de stenen ligt niet vast, als je de eenheid niet vastlegt.)

a. Kies nu zelf handige coördinaten voor de stenen.

Voor Z kun je geen coördinaten kiezen, dat blijven *variabelen*: Z = $Z\ (x_Z;\ y_Z)$.
Maar nu kun je tóch rekenen.
Je vindt op zijn minst hoe de positie van *S* (de schat?) van Z afhangt.

b. Druk de coördinaten van *S* uit in die van *Z*.

c. Als je *Z* verandert, verandert *S nie*t.
Klopt dat met hoe de formule voor *S* er uit ziet?

d. Ben je helemaal overtuigd, dat de plaats van de oude eik er niet toe doet, of zou je het nog met andere coördinaten voor de plaatsen van de stenen moeten proberen om het zeker te weten?

5: Formules voor andere verdelingen

Vooraf

De formules voor het midden tussen twee punten worden uitgebreid en algemener gemaakt. In die nieuwe vorm gaan we ze later zeker gebruiken.

Voor de coördinaten van het midden M van P en Q hebben we nu deze formules:

$$\begin{cases} x_M = \frac{1}{2}x_P + \frac{1}{2}x_Q \\ y_M = \frac{1}{2}y_P + \frac{1}{2}y_Q \end{cases}$$

5.1 Verdeling in vieren

Laat nu K het midden zijn tussen P en M en laat L het midden zijn tussen M en Q.

a. Druk net als hierboven de coördinaten $(x_K; y_K)$ van K eerst uit in die van P en M.

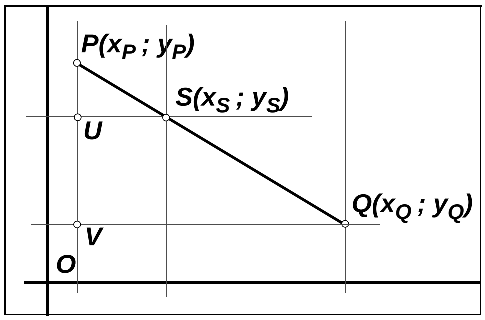
b. De coördinaten van M, uitgedrukt in die van P en Q, heb je al. Gebruik ze en leid af:

$$\begin{cases} x_K = \frac{3}{4}x_P + \frac{1}{4}x_Q \\ y_K = \frac{3}{4}y_P + \frac{1}{4}y_Q \end{cases}$$

c. Schrijf de formules op voor de coördinaten van punt L.

d. Vanuit de vierdeling kun je wéér onderverdelen, maar zo kom je nooit op een driedeling! Waarom eigenlijk niet? (Kijk terug naar opgave 3.3; naar de breuken bij onderdeel d, e en f.)

5.2 Verdeling in drieën



S is hier het punt dat PQ zó verdeelt, dat $PS = \frac{1}{3} \cdot PQ$.

We willen weer de coördinaten van punt S in die van P en Q uitdrukken.

In de figuur zie je weer lijnen evenwijdig aan de assen, net als eerder bij de vierkanten.
Nu zijn de lijnstukken PS en PQ '*ondersteund*' door driehoeken PSU en PQV.

a. Die driehoeken zijn gelijkvormig. Waarom is dat zo?

b. Je weet dat $PS = \frac{1}{3} \cdot PQ$, want zo is S bepaald.

Waarom geldt nu óók ook $US = \frac{1}{3} \cdot VQ$?

c. De lengtes van US en VQ kun je makkelijk in de coördinaten van P, S en Q uitdrukken. Zo vind je deze formule waarin je het rechterlid zelf verder invult:

$$x_S - x_P = \frac{1}{3}(\dots\dots\dots\dots)$$

d. Leid hieruit een formule af voor x_S zelf, waarin x_P en x_Q maar één keer voorkomen, net als bij de halvering en de vierendeling. Dus:

$$x_S = \dots\dots\dots\dots$$

e. Doe net zo iets voor y_S. Die wordt natuurlijk in de y-coördinaten van P en Q uitgedrukt.

$$y_S = \dots\dots\dots\dots$$

5.3 Rekenen!

Neem in deze opgave steeds P(5; 3) en Q(35; 63).
Bereken in de volgende voorbeelden de coördinaten voor de nieuwe punten:

a. Punt ***S*** met $\boldsymbol{PS} = \frac{1}{3} \cdot \boldsymbol{PQ}$.

b. Punt ***R*** met $\boldsymbol{PR} = \frac{1}{5} \cdot \boldsymbol{PQ}$.

c. Punt ***U*** met $\boldsymbol{PU} = \frac{2}{3} \cdot \boldsymbol{PQ}$.

d. Punt ***V*** met $\boldsymbol{PV} = \frac{3}{10} \cdot \boldsymbol{PQ}$.

5.4 Algemeen

a. Laat nu *T* het punt zijn dat zó op lijnstuk *PQ* ligt, dat $PT_a = a \cdot PQ$ is; *a* is een of ander getal.
Toon nu aan dat:

$$\begin{cases} x_T = (1-a)\cdot x_P + a\cdot x_Q \\ y_T = (1-a)\cdot y_P + a\cdot y_Q \end{cases}$$

Als je niet goed weet hoe je moet beginnen, kijk dan nog eens naar 5.2. Vervang daar 1/3 door *a*.

b. Datzelfde punt *T* ligt zó, dat *QT* = (1 – *a*) · *QP.* Op deze manier kunnen natuurlijk óók de coördinaten van *T* berekend worden vanuit *Q* en *P*, in plaats van uit *P* en *Q*. Je gebruikt (1 – *a*) in plaats van *a.* Doe dat ter controle; als het goed is komen er dezelfde formules te voorschijn.

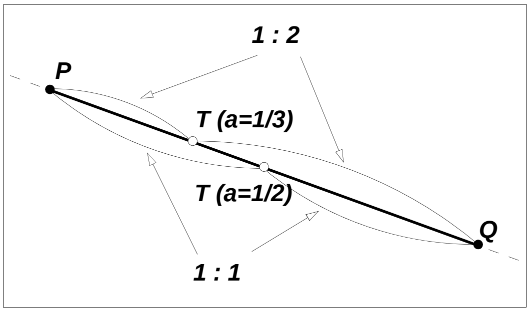
Let op:

De lengte van lijnstuk PT heeft de factor a, die van TQ de factor (1 – a).
In de formules voor x_T en y_T staan die factoren echter juist andersom,
namelijk de a bij x_Q en (1 – a) bij x_P.

Voorbeelden en figuur

Als $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}$*, dan ligt T midden tussen P en Q.*
T verdeelt dan lijnstuk PQ in gelijke delen.
De delen PT en TQ verhouden zich als 1 : 1.
Want $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}$ *en* $\boldsymbol{1-a} = \frac{1}{2}$ *verhouden zich als 1 : 1.*

Als $\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}$*, dan ligt T dichter bij P dan bij Q.*
De delen PT en TQ verhouden zich nu als 1 : 2.
Want $\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}$ *en* $\boldsymbol{1-a} = \frac{2}{3}$ *verhouden zich als 1 : 2.*

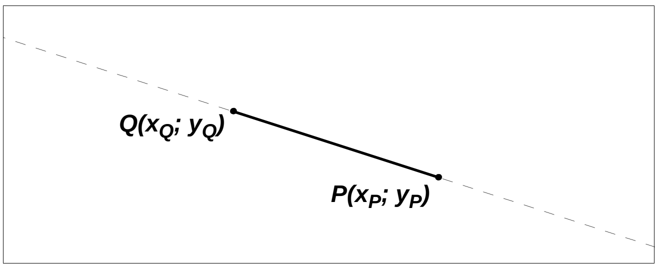


5.5 Markeer punten in de figuur

a. Geef het punt *T* voor *a* = 3/4 in de figuur hiernaast aan. Zet de waarde van *a* bij *T* in de figuur (zoals hierboven).

b. Geef ook *T* in de figuur aan, zodat *T* lijnstuk *PQ* in de verhouding 3 : 5 verdeelt en noteer weer de waarde van *a* erbij.

c. Wat zijn de punten *T* voor *a* = 0 en *a* = 1?



5.6 *T mag ook buiten PQ liggen! Voorbeeld: a = 2*

T kan ook op het verlengde van *PQ* liggen; bijvoorbeeld zo dat *PT* = 2 · *PQ*. Dan moeten we *a* = 2 nemen in de formules van opgave 5.4.

a. Vul *a* = 2 in de formules van opgave 5.4 in; en werk de formules uit naar een korte eenvoudige vorm "x_T = ... ". Idem voor y_p.

b. Teken dat punt ***T*** in de figuur. (Schrijf de juiste waarde van *a* erbij).

c. Laat zien dat *Q* inderdaad het midden van *PT* is door de middenformules van het begin van deze paragraaf toe te passen op de punten *P* en *T* .

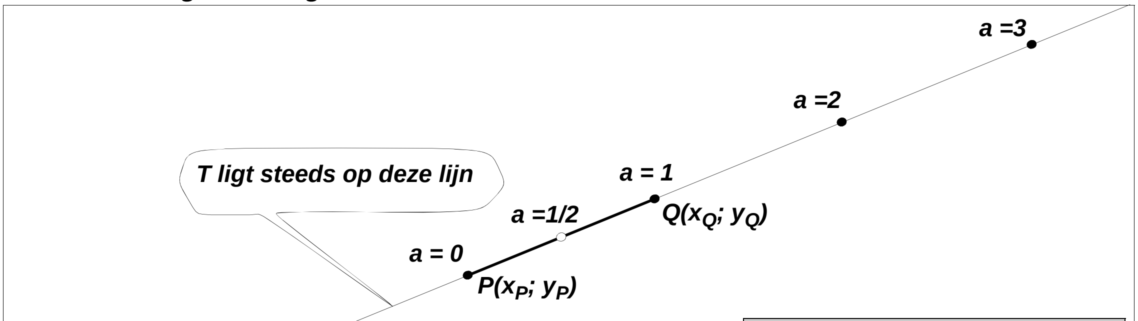
5.7 *P kan óók midden tussen T en Q liggen.*

We zoeken de *a*-waarde waarvoor dat zo is.

a. Pas de middenformules toe op ***T*** en **Q** en bepaal de waarde van *a* zodat *P* het midden is van *QT*.

b. Teken dat punt ***T*** (met de juiste waarde van *a*) in de figuur.

5.8 *Samenvatting in een figuur*



$$\begin{cases} x_T = (1-a)\cdot x_P + a\cdot x_Q \\ y_T = (1-a)\cdot y_P + a\cdot y_Q \end{cases}$$

In deze figuur zie je de ideeën van de laatste opgaven van de vorige paragraaf samengevat, zij het met een andere ligging van de punten *P* en *Q*. *T* ligt op de lijn; bij de posities zijn de verschillende waarden van *a* aangegeven.

a. Geef in de figuur ook de punten *T* met *a* = 2.6, *a* = – 1.5 en *a* = 3/5.

b. Wat is de waarde van *a* als *T* = *X* in deze figuur?

5.9 *Ligt het punt op de lijn of niet?*

In de tabel hieronder zijn in elke regel coördinaten van *P* en *Q* en *T* gegeven. De vraag is of er een *a* te vinden is, waarbij punt *T* volgens de formules gemaakt is. Anders gezegd: dat op de lijn door *P* en *Q* ligt.

a. Met behulp van de formule voor x_T kun je die *a* (bijna) altijd uitrekenen. Doe dat in deze tabel en zet het resultaat in kolom 4.

P	Q	T	??? a ???	T ligt op lijn PQ?
(1; 1)	(4; 2)	(10; 4)		
(3; 1)	(6; 0)	(24; -7)		
(-1; -1)	(-5; -4)	(103; 78)		
(2; 6)	(2; 9)	(2;21)		

In regel 4 van de tabel lukte het niet! Daar komen we dadelijk even op terug.

b. Je zou de *a*-waarde ook via de *y*-coördinaten kunnen uitrekenen. Als je niet dezelfde waarde krijgt,

ligt T niet op de lijn PQ.
Een makkelijker manier om daar achter te komen is: de via de x-coördinaten gevonden a-waarde invullen in de fomule voor y_T en kijken of het klopt met in de tabel in kolom 3 staat. Zo nee, dan kan dat punt T níet op lijn PQ liggen*.*

Doe dit voor de eerste drie regels en vul kolom 5 in.

c. In regel 4 stoorden de gelijke x-coördinaten. Je kon daarom a niet uitrekenen. In dit geval reken je a (desnoods) uit via de y-coordinaten en reken je dan x_T uit met de formules om te testen of T op PQ ligt.

Maar er is een veel snellere manier om dat te weten .... Hoe zit dat?

6: Gewogen gemiddelden en zwaartepunten

Vooraf
De formules voor de coördinaten van *T* hebben nog andere toepassingen.
Voor de twee coördinaten werkten de formules steeds op dezelfde manier; in de *x*–coördinaten hetzelfde als in de *y*–coördinaten. In deze paragraaf kijken we iets meer naar één van de twee formules tegelijk; of, anders gezegd: we bekijken het een beetje 1-dimensionaal.

Gewogen gemiddelde
Nemen we in de formule

$$x_T = (1 - a) \cdot x_P + a \cdot x_Q$$

eens $a = \frac{2}{5}$, dan ontstaat:

$$x_T = \tfrac{3}{5} \cdot x_P + \tfrac{2}{5} \cdot x_Q$$

Ook te schrijven in deze vorm:

$$x_T = \frac{3 \cdot x_P + 2 \cdot x_Q}{5}$$

Dat is de formule voor een *gewogen gemiddelde*: x_P telt mee met gewicht 3 en x_Q telt met gewicht 2; er moet door 5 gedeeld worden want er zijn als het ware 2 + 3 = 5 getallen waar je het gemiddelde van neemt.

6.1 Cijfers wegen, gewogen gemiddelden

Je kent dit *gewogen gemiddelde* vast wel van bijvoorbeeld het totaal cijfer over één werkstuk en één schriftelijke toets, waarbij het werkstuk 3 keer zo zwaar telt als de toets.

a. Geef het cijfer voor het werkstuk aan met *W*, dat voor de toets met *S* en het eindresultaat met *E*.

Maak deze formule af: $E = \dfrac{\text{........} + \text{........}}{\text{....} + \text{....}}$

b. Stel je voor, dat je je *eindcijfer* via een herkansing van de toets 0.2 punt moet verhogen. Hoeveel punten beter dan eerst moet je de toets doen?

De formule die je bij *a* hebt opgesteld is de formule voor :
het gewogen gemiddelde E van W en S bij gewichten 1 en 3.

c. Stel nu ook de algemene formule op voor
het gewogen gemiddelde GG van K en L bij gewichten m en n.

$$GG = \frac{\quad + \quad}{\quad + \quad}$$

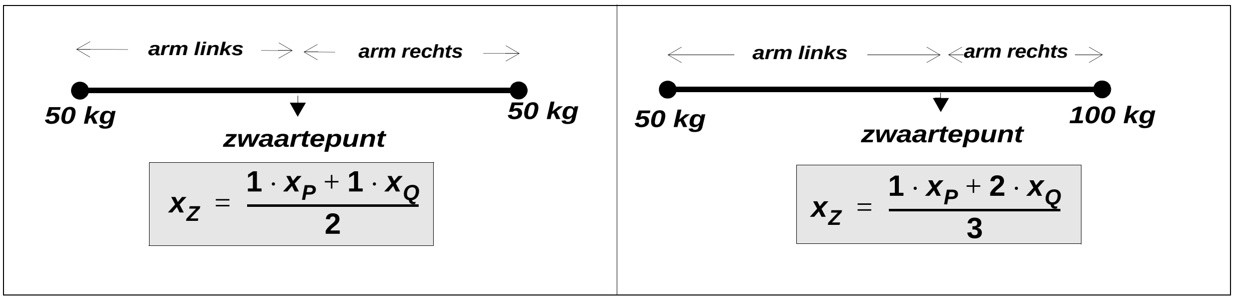
d. Bereken met deze formule enkele gewogen gemiddelden.

K en L	*gewichten m en n*	*GG*
50 60	*1 9*	
-4 12	*2 1*	
0 1	*0,99 0,01*	
19 13	*2 4*	

Zwaartepunten en evenwicht

Gewogen gemiddelden hebben verband met *zwaartepunten*.

Bij een halter met twee even grote gewichten aan de uiteinden (zeg van 50 kg), ligt het zwaartepunt netjes in het midden. Als nu het gewicht van 50 kg aan één kant wordt vervangen door een gewicht van 100 kg, dan verschuift het zwaartepunt in de richting van het zwaarste gewicht.



De *momentenstelling* uit de natuurkunde zegt dat de halter in evenwicht is als geldt:

kracht keer arm links = kracht keer arm rechts

Dus moet het zwaartepunt de halter zó verdelen, dat het lange stuk (bij het lichtste gewicht) twee keer zo lang is als het korte.

6.2 Zwaartepunt enberekenen

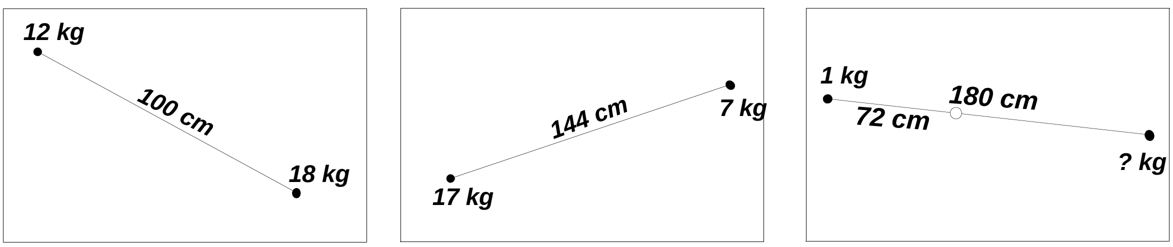
a. De halter ligt langs de x-as; noem de uiteinden *P* en Q en het zwaartepunt *Z*. Veronderstel dat de gewichten in *P* en *Q* zich verhouden als 1 : 2.
Verklaar de aangegeven formule voor de *x*-coördinaat van het zwaartepunt.

b. De getallen 1, 2 en 3 in de formule komen in verhouding overeen met de gewichten 50, 100 en 50+100. We kunnen de formules (ook maar even die voor de y-coördinaten) ook op schrijven met die gewichten zichtbaar erin. Vul verder in:

$$x_Z = \frac{50 \cdot x_P + \,.....\, \cdot x_Q}{.....\, + \,.....} \qquad\qquad y_Z = \frac{..........\, + \,..........}{.....\, + \,.....}$$

6.3 Even oefenen

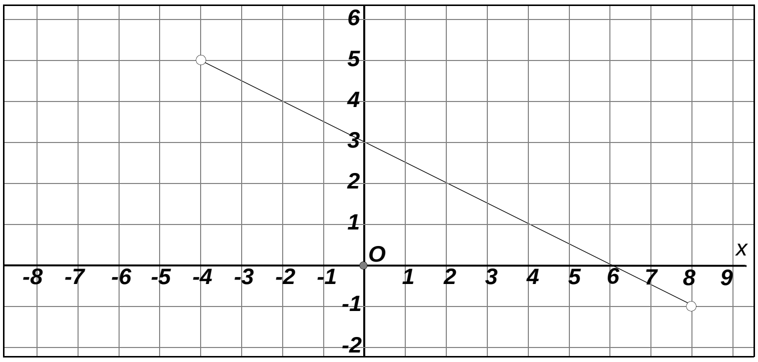
a. b. In de eerste twee figuren staan gewichten aangegeven aan beide uiteinden van een gewichtloze staaf. De lengte van de staaf is ook aangegeven. Geef de zwaartepunten precies aan, door ook de afstanden van zwaartepunt tot uiteinde aan te geven.



c. Bij de derde figuur is één gewicht en de positie van het zwaartepunt al gegeven. Bepaal het tweede gewicht.

d. In de punten (–4; 5) en (8; –1) bevinden zich gewichten van 2 en 4 kg. Bepaal de coördinaten van het zwaartepunt en geeft het in de figuur aan.

e. Zelfde posities als de vorige vraag, maar nu met gewichten 0 en 6, 1 en 5, 2, en 4, 3 en 3, 4 en 2, 5 en 1. 6 en 0.



6.4 Toepassing op aarde en maan

Je weet dat de maan in ongeveer één maand om de aarde draait. Eigenlijk is het zo dat aarde en maan beide in een maand om hun gemeenschappelijke zwaartepunt draaien. En dat zwaartepunt van het aarde-maanstelsel draait weer om de zon. Eigenlijk is het zo, dat de zon en het aarde-maan stelsel,... Enzovoort!

De afstand aarde-maan schommelt licht om de 384 450 kilometer. De rest van de maten:

	Aarde	*Maan*
diameter:	12 756,274 km	3475,9 km
massa:	$5{,}9742\times10^{24}$kg	$7{,}35\times10^{22}$

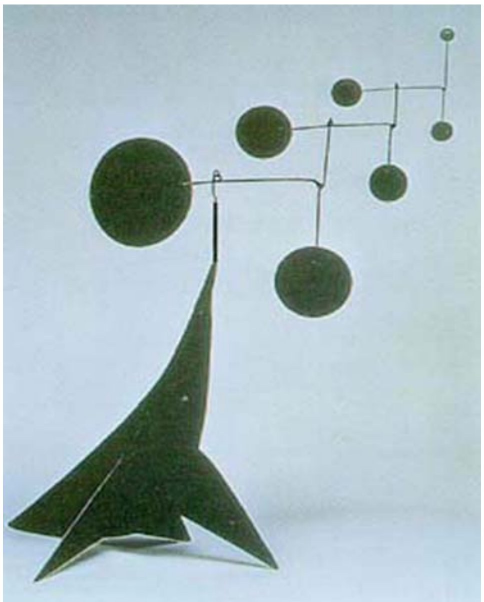
Ligt het zwaartepunt van het stelsel aarde/maan *binnen* of *buiten* de aarde?
Leg uit hoe je je antwoord bereikt hebt.

Extra toelichting: Voor de zwaartepuntberekeing doe je alsof de hele gewichten van aarde en maan in hun middelpunt zitten. De afstand aarde-maan is ook die tussen de middelpunten.

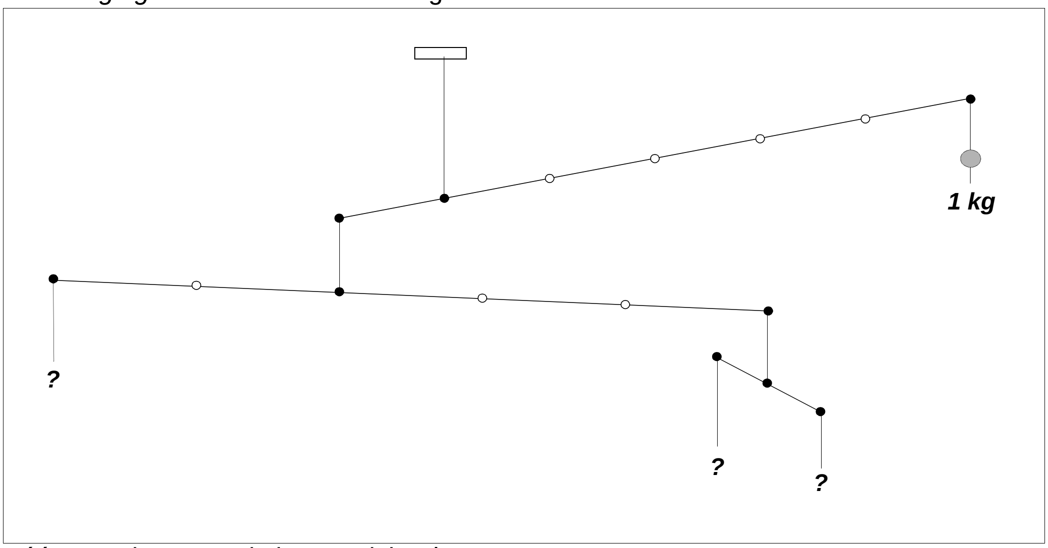
De *Mobiles* van Antonio Calder

6.5 Antonio Calder (1898-1976)

Calder maakte talloze fijnzinnige ‘standing mobiles’ en ‘hanging mobiles’. Hier zie je zijn *Performing Seal* uit 1950 en de *S-shaped Vine* uit 1947. Meer vind je op *http://calder.org/work/.*



a. Deze *hanging mobile* is in ontwikkeling.



Op één van de punten is het gewicht al aangegeven.
De verhoudingen van de indeling van de dunne staven is zichtbaar.
Geef ook de andere gewichten aan.
(Beschouw de dunne staven en draden als gewichtloos)

b. Teken zelf een hanging mobile waarin de gewichten 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1 gebruikt worden.

7: Drie gewichten, vier zwaartepunten

Meer punten, meer gewichten

In het begin van deze paragraaf gebruikten we de formule voor het gewogen gemiddelde van x_P en x_Q bij gewichten 3 en 2:

$$x_T = \frac{3 \cdot x_P + 2 \cdot x_Q}{5}$$

7.1 Stel je voor:

We nemen er nog een getal bij, x_R, met gewicht 4. x_T telt nu uiteraard mee met gewicht *5.*

Omdat 5 + 4 = 9 is het gewogen gemiddeld x_S:

$$x_S = \frac{5 \cdot x_T + 4 \cdot x_R}{9}$$

a. Toon aan, door de eerste formule voor x_T te gebruiken, dat geldt:

$$x_S = \frac{3 \cdot x_P + 2 \cdot x_Q + 4 \cdot x_R}{9}$$

b. Leg uit waarom er geen ander resultaat komt, als we éérst het gewogen gemiddelde van *Q* en *R* berekenen, dat *U* noemen en dan het gewogen gemiddelde van *U* en *P* bepalen.

Belangrijke conclusie

Bij bepalen van het gewogen gemiddelde van getallen (of zwaartepunt van gewichten) maakt het niet uit in welke volgorde je de getallen (of gewichten) neemt.

7.2 In deze figuur staan drie punten aangegeven.

Geef de zwaartepunten aan bij de volgende gewichtsverdelingen voor de posities A, B, C. Schrijf de verdeling bij de gevonden punten. Kijk eerst of je het in een slimme volgorde kunt doen; maar met rekenen kan het allemaal. Schrijf de coördinaten ook op.

a. 1 : 1 : 1

b. 1 : 0 : 0

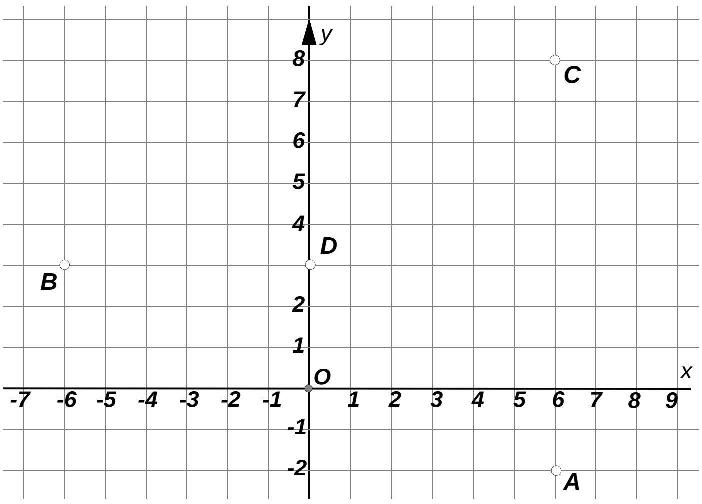
c. 0 : 1 : 0

d. 1 : 7 : 4

e. 2 : 0 : 3

f. 1 : 2 : 99999997

g. Bedenk een passende gewichtsverhouding voor punt *D*.



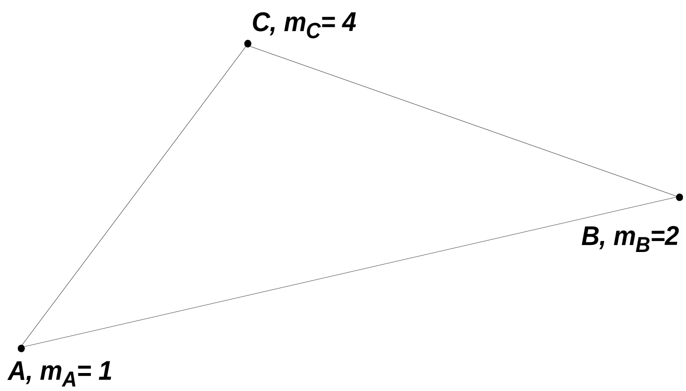
7.3 Derde punt gezocht

a. *A*(-3; 0 en *B*(0; 6) zijn twee punten van een driehoek waarvan ‘het zwaartepunt bij gewichtsverdeling 1 : 1 : 1’ het punt *Z*(4;2) is.
Wat is het derde punt van de driehoek?

b. Twee gewichten van 100 kg bevinden zich op (–1; 0 en (1; 0). Waar moet een gewicht van 1 kg geplaatst worden zodat het zwaartepunt van de drie gewichten juist in het punt (0; 2) komt?

7.4 *Tekenen in een figuur van drie gewichten*

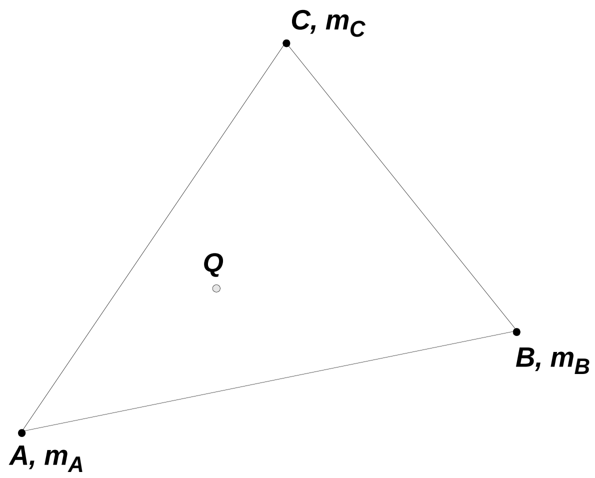
De *'belangrijke conclusie'* van de vorige bladzijde is de basis van deze opgave.



- **a.** Teken in deze figuur nauwkeurig de positie *F* van het zwaartepunt van de massa's in *A* en *B*.
- **b.** Ook de positie *D* van het zwaartepunt van de massa's in *B* en *C*.
- **c.** Het zwaartepunt van de drie gewichten ligt op de lijn *CF*. Waarom?
- **d.** Door nog een lijn te trekken (op de manier van zo even) kun je nu het zwaartepunt Q nauwkeurig *door tekenen* vinden.
- **e.** Er is nóg een zwaartepunt, *E* van *C* en *A*. Vind dat door een handige derde lijn door Q te tekenen.
- **f.** *Controle*! Wordt *AC* in de juiste verhouding door *E* in twee stukken verdeeld?

7.5 *Drie gewichten en een bijzondere formule*

In deze figuur zijn de drie gewichten met letters aangegeven: m_A, m_B, m_C.
De ware gewichtverhoudingen weten we nog niet, maar het zwaartepunt is al wél aangegeven, in Q.



Het zwaartepunt *D* van de gewichten in *B* en *C* ligt op lijn *BC*. Om het zwaartepunt van *A* en *D* te bepalen, vat je *D* op als gezamenlijk gewicht van *B* en C.

- **a.** *Q* moet op *AD* liggen. Waarom is dat zo?
- **b.** Uit *a* volgt ook: *D* ligt op *AQ*. Bepaal nu *D* op *BC* met behulp van je liniaal.
- **c.** Maak de figuur af door de lijnen *BQ*, *CQ* respectievelijk te snijden met de zijden *CA* en *AB*. Noem de punten *E* en *F*.
- **d.** Leg uit waarom $\frac{BD}{DC} = \frac{m_C}{m_B}$.

Ook *E* en *F* zijn de zwaartepunten van de gewichten op uiteinden van de zijden waarop ze liggen.

- **e.** Stel voor *E* en *F* soortgelijke formules op als voor *D.*
- **f.** Toon tenslotte aan dat geldt:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

8: De Stelling van Giovanni Ceva (1647-1734)

Vooraf

Met die laatste formule van de vorige bladzijde hebben we iets bijzonders te pakken. We zijn uitgegaan van een driehoek *ABC*, met een punt *Q* er binnen. *Q* ís bij een of andere gewichtsverdeling het zwaartepunt. Maar ook zonder die gewichten te weten, konden we *D*, *E* en *F* door lijnen trekken vinden en weten we dat de formule van zo even geldt. Interessant is: als de formule geldt, gaan de drie lijnen *AD*, *BE* en *CF* dan inderdaad door één punt? Het antwoord is te verwachten: ja.
Na een bewijs hiervan gaan we deze bewering toepassen.

Werkplan

We proberen voor het bewijs gewichten te vinden die bij de juiste verhoudingen op de zijden passen. Dat blijkt te lukken als de relatie $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ geldt. Omdat de gewichten er zijn, kunnen we de zwaartepunt regels toepassen. Zo vinden we dat er één snijpunt is voor de lijnen *AF*, *BE* en *CD*.

8.1 De gewichten terugzoeken

We kiezen voor *B* en C gewichten zó, dat *D* het zwaartepunt van *B* en *C* is. m_B en m_C zijn geschikt als :

$$\frac{BD}{DC} = \frac{m_C}{m_B}$$

Je kiest bijvoorbeeld m_B willekeurig (maar niet 0!) en kiest dan m_C bijpassend.
Daarna is een massa m_A te vinden zo, dat

$$\frac{CE}{EA} = \frac{m_A}{m_C}$$

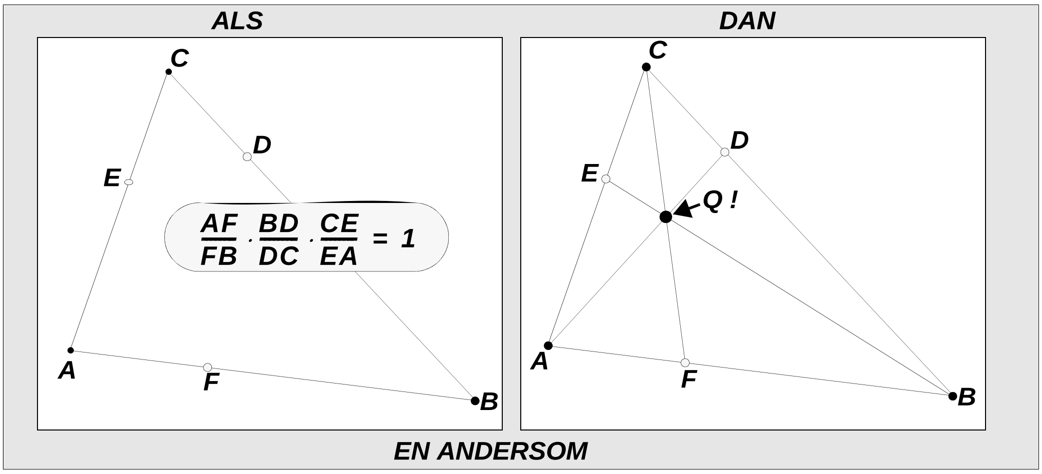
We hopen nu maar dat *F* inderdaad het zwaartepunt van de gewichten in *A* en *B* is.

a. Daarom: leid met behulp van $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ af, dat dan inderdaad ook geldt:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{m_B}{m_A}$$

b. *F* ís daarom het zwaartepunt van *A* en *B* bij de gewichten m_A en m_B.
Waarom mag je nu conclusie trekken dat de drie lijnen *AD*, *BE* en *CF* elkaar in één punt snijden?

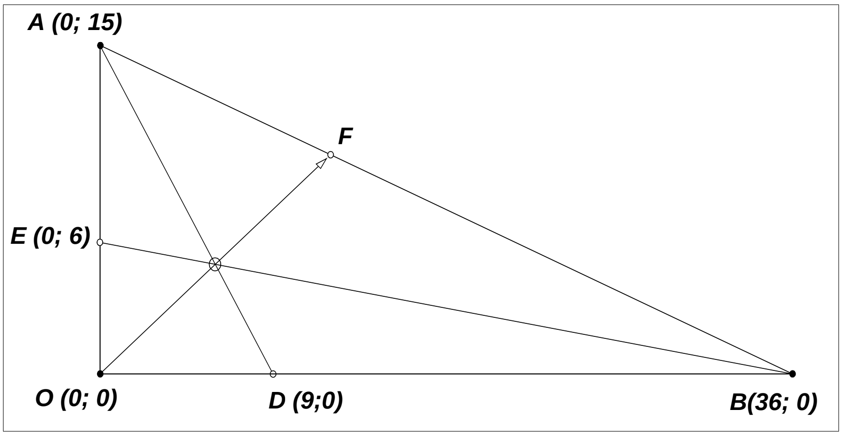
De stelling van Ceva in beeldtaal



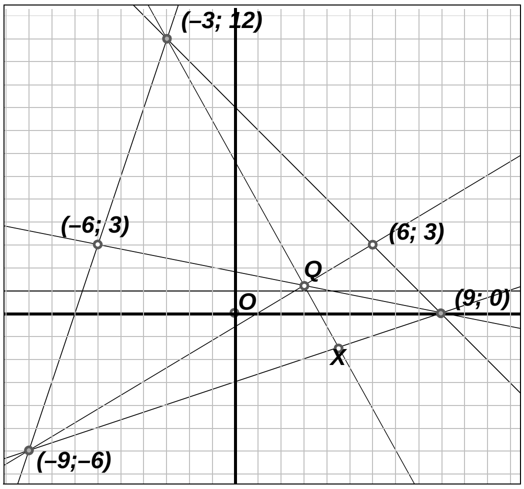
8.2 Berekening derde punt

a. Bereken in onderstaande figuur in welke verhouding punt *F* de zijde AB van deze driehoek verdeelt en bereken de lengte van *AF*.

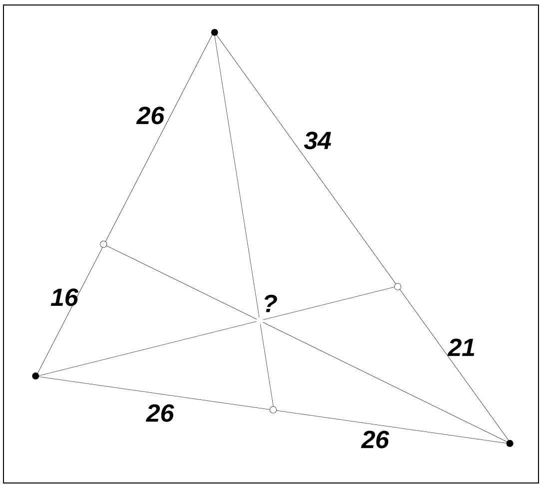
.



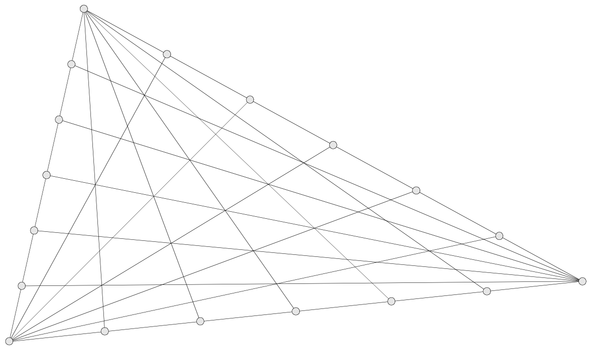
b. Bereken de coördinaten van punt *X* en *Q*.

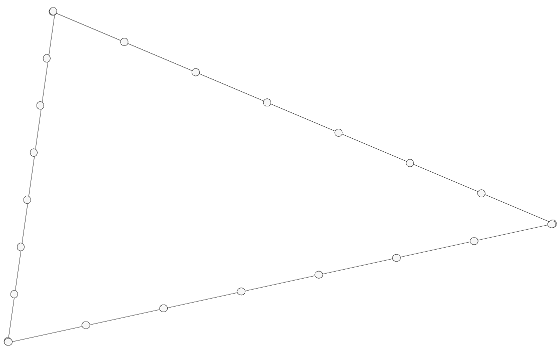


c. Gaan de lijnen bij het vraagteken door één punt?



8.3 Zes- en zevendeling: keuzes maken





In de linker driehoek zijn de zijden in zes gelijke delen verdeeld en zijn drie *waaiers* gemaakt.
Dat levert een menigte snijpunten van telkens twee lijnen, maar ook van drie lijnen!

a. Laat van een paar van die drietallige snijpunten met behulp van Ceva zien dat het snijden *exact* klopt.

b. In de rechter figuur is een indeling in zeven delen op de zijden gemaakt. Zouden daar ook echte snijpunten van drie lijnen gevonden gaan worden?
Zoek het uit door rekenen, niet door tekenen!

9: Werken met méér gewichten

Vooraf
In paragraaf 7 stond deze

Belangrijke conclusie
Bij bepalen van het gewogen gemiddelde van getallen (of zwaartepunt van gewichten) maakt het niet uit in welke volgorde je de getallen (of gewichten) neemt.

Daar ging het om drie gewichten. Maar het geldt ook voor méér gewichten.

9.1 Vijf punten, vijf gewichten.
De formule voor het gewogen gemiddelde van drie getallen laat zich uitbreiden voor meer dan drie punten en voor meer gewichten (in de zwaartepunt-interpretatie). We doen het voor vijf punten.
Geef de vijf punten aan met $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, enzovoort en de gewichten met m_1, m_2, enzovoort.
Noteer de formules voor de coordinaten van het zwaartepunt Z $(x_Z; y_Z)$:

$$x_Z = \frac{\text{.....................................}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} \qquad y_Z = \frac{\text{.....................................}}{\text{.....................................}}$$

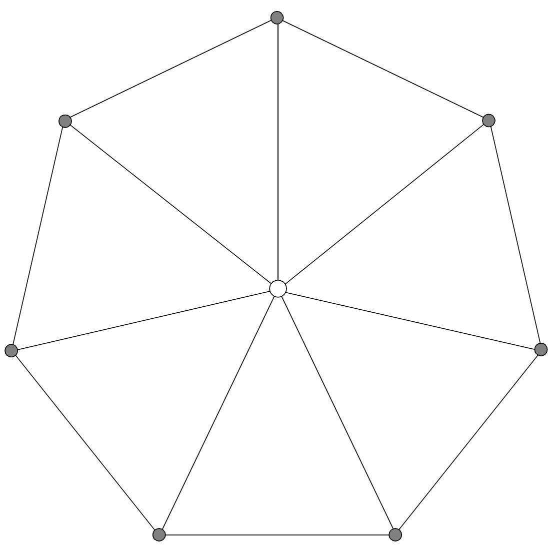
Het is duidelijk hoe de formule voor veel meer punten eruit ziet!

Voor grote objecten als gebouwen, vliegtuigen, schepen, auto's enzovoort is uiteraard het kennen van de positie van het zwaartepunt belangrijk!
Omdat je in zulke gevallen je gehele object in delen zult opdelen met voor elk deel een eigen zwaartepunt, is het handig de *belangrijke conclusie* in deze algemene vorm te gieten:

Het gewogen zwaartepunt van de zwaartepunten van de delen is het zwaartepunt van het geheel.

9.2 Terugblik Mobiles
Eigenlijk heb je die regel al gebruikt bij het werken aan de onvoltooide *Hanging Mobile* op bladzijde 24. Hoe zit dat?

9.3 Een kring van zeven
Zeven gewichten van 1 kg zijn gemonteerd op een lichte constructie in de vorm van een regelmatig zevenhoek. Deze constructie maakt evenwicht rond het middelpunt van de cirkel.



a. Is het mogelijk een van de gewichten door een gewicht van 2 kg (op een andere plek) te vervangen, zodat het midden van de cirkel het evenwichtspunt blijft?

b. Vervang vijf andere gewichten door gewichten van 3, 4, 5, 6, en 7 kg. Geef de nieuwe posities aan. Zorg dat het zwaartepunt in het midden blijft.

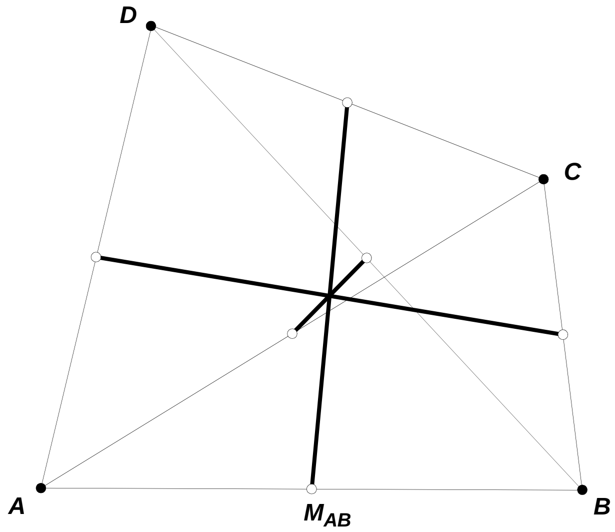
9.4 Middens van middens

Gegeven een vierhoek *ABCD*.

In de figuur lijkt te gelden dat:

De twee lijnen die de middens van overstaande zijden verbinden en de lijn die de middens van de diagonalen verbindt, gaan door één punt.

Dat moet bewezen worden!



a. Label de zes middens van zijden en diagonalen op de manier zoals in de figuur aangegeven bij M_{AB}.

b. Druk de middens van de drie middenverbindende lijnstukken uit in de coördinaten van de punten *A*, *B*, *C* en *D*.

c. De drie resultaten zijn, als de berekeningen goed zijn uitgevoerd, gelijk. Waarom geldt nu de bewering?

Noem het bijzondere punt het ***zwaartepunt van ABCD****,* Z_{ABCD}*.*

d. Toegift:
Eigenlijk is er nog wat méér bewezen dan het door één punt Z_{ABCD} gaan van de drie lijnen. Welk punt van de drie lijnstukken is het?

9.5 (Lastige!) slotoefeningen: midden van het vierkant: bekend en ook eenvoudig

Gegeven twee tegenover elkaar liggende punten van een vierkant $A(x_A; y_A)$ en $C(x_C; y_C)$.

a. Druk de coördinaten van het midden *M* van het vierkant uit in de coördinaten van *A* en *C*.

b. Druk de coördinaten van *D* in die van *A* en C uit. [Tip: AMD is een stuk van een (kleiner) vierkant].

c. Druk de coördinaten van *B* in die van *D* en *M* uit. [Tip: Kies de juiste aan de hand van opgave 5.8]

d. Druk nu ook de coördinaten van *B* in die van *A* en *C*.

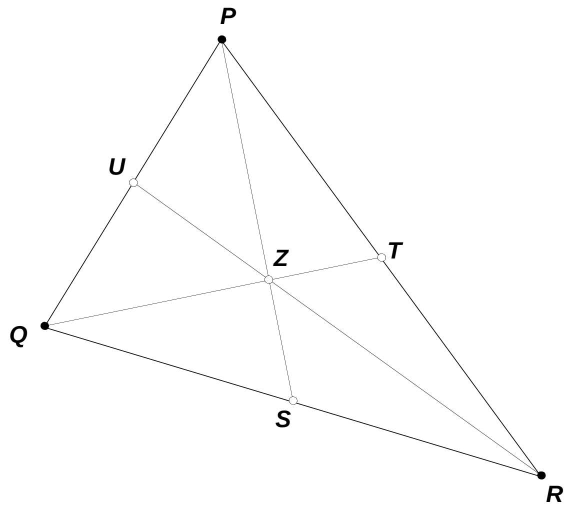
e. Neem in de vier punten gelijke gewichten.
Laat *algebraïsch* zien dat (precies wat je verwacht) dat het zwaartepunt van *B* en *D* gelijk is aan het zwaartepunt van *A* en *C*.

Als het niet klopt, moet je a t/m d nog eens controleren ....

10: Het gewone (?) zwaartepunt

Vooraf
Het *meetkundige zwaartepunt* van driehoek *PQR* heeft alles te maken met het *natuurkundig* zwaartepunt van *PQR* als zich in *P*, *Q* en *R* drie gelijke gewichten bevinden. Op die meetkundige kant van de zaken gaan we nu kort in.

De 'meetkundige' zwaartelijnen van een driehoek *PQR* zijn de drie lijnen die de hoekpunten verbinden met de middens van de zijden ertegenover.
In de figuur de lijnen *PS*, *QT* en *RU*.



10.1 'De' stelling van 'het' zwaartepunt

In elke driehoek gaan de drie zwaartelijnen door één punt, 'het zwaartepunt' van de driehoek.

a. Leg uit dat de stelling een bijzonder geval is van wat in de vorige paragraaf is aangetoond.
b. Licht toe dat de coördinaten van het zwaartepunt berekend kunnen worden met:

$$(x_Z, y_z) = \left(\frac{x_P + x_Q + x_R}{3}, \frac{y_P + y_Q + y_R}{3}\right)$$

10.2 Het zwaartepunt van de middens van de zijden
Voer de volgende opdrachten uit met behulp van rekenen met coördinaten.
a. Druk de coördinaten van *S*, *T* en *U* in die van *P*, *Q* en *R* uit.
b. Laat zien dat 'het zwaartepunt' van driehoek *UST* juist het zwaartepunt van *PQR* is.

Punt-, lijn- en oppervlakte-zwaartepunt

Je kunt op drie manieren aan een driehoek denken:
- als de figuur van drie even zware hoekpunten
- de draadfiguur van drie lijnstukken
- de volle figuur van de hele driehoek; daarin doen ook alle inwendige punten mee.

Bij die drie manieren horen verschillende zwaartepunten. We gaan uitzoeken of ze écht verschillend zijn.

Denk eraan: we nemen drie gelijke gewichten, of drie evendikke draden, of een overal even 'dik' oppervlak.

het hoekpunten-zwaartepunt
Dat is het zwaartepunt *Z*, waarvan we de coördinaten hierboven hebben bepaald.

Het draadfiguur-zwaartepunt
In de figuur hierboven is *U* het zwaartepunt van de *zijde* PQ. Het gewicht van die zijde is nu evenredig met de lengte van de zijde. We houden het op de lengte *zelf*, we kiezen als het ware een draaddikte van 1 kg per meter.
Denk nu dat het gewicht van zijde *PQ* in het punt *U* geconcentreerd is. Net zo de andere zijden in hun middens.

10.3 Het draadfiguur-zwaartepunt bepaald

Uit opgave 10.2a blijkt dat het werkelijk draadfiguur-zwaartepunt meestal niet hetzelfde is als het hoekpunten- zwaartepunt.

a. Waarom is dat zo?

b. Je kunt ook zeker weten

dat alléén bij de gelijkzijdige driehoek het hoekpunten-zwaartepunt
en het draadfiguur-zwaartepunt hetzelfde punt zijn

Geef een redenering die dat aantoont.

c. Licht toe dat hieronder een begin staat van de formule voor de *x*-coordinaat van positie ***D*** van het draadfiguur-zwaartepunt en maak de formule een stuk verder af

$$x_D = \frac{\left(\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}\right) \cdot \left(\frac{x_P + x_Q}{2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\ldots}{\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

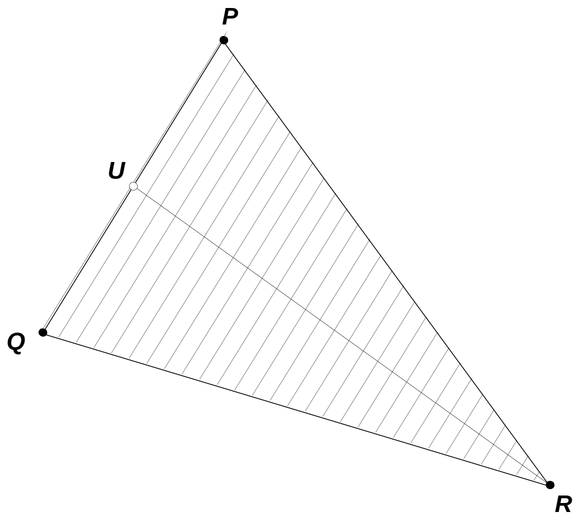
Het oppervlaktezwaartepunt

10.4 In strookjes indelen

Deel je de driehoek in dunne strookjes in, die evenwijdig zijn aan de zijde *PQ*, dan liggen de zwaartepunten van de strookjes allemaal op de zwaartelijn *RU*. Zie de figuur.

a. Wat kun je hieruit concluderen over de ligging van het oppervlaktezwaartepunt met betrekking tot de lijn UR?

b. Waar zal het oppervlaktezwaartepunt van de driehoek dus liggen?



11: Samenvatting en vooruitblik

Coördinaten

- In dit blok leerde je opnieuw het Cartesisch Coördinatenstelsel kennen.
- Daarin worden punten voorgesteld door getallenparen.
- Afstanden berekende je met Pythagoras.
- Redeneren over meetkunde en rekenen aan getallen en variabelen vallen samen.
- Je leerde het vierstappenplan van het vorige blok toepassen bij coördinaten.

- Belangrijke problemen: Aanvullen van vierkanten, maken van achthoek en twaalfhoek

Formules

- Je hebt gewerkt aan het maken van formules waarin coördinaten werden gebruikt.
- Je leerde hoe je via een getallenvoorbeeld een formule opbouwde.
- De loodrechte stand en gelijke indeling van de assen waren belangrijk bij het maken van vierkanten.
- Je leerde formules maken voor middens tussen twee punten en voor andere deelpunten bij twee gegeven punten.

- Belangrijke problemen: aanvullen van twee punten tot een vierkant, de schat op Teleurstellingseiland.

Gewogen gemiddelden en zwaartepunten

- De punten die gemaakt werden als tussenpunten op een lijn konden ook beschouwd worden als gewogen gemiddelden en zwaartepunten.
- De samenhang tussen de natuurkundige en meetkundige kanten van zwaartepunten is onderzocht.
- Voorbeelden: zwaartepunt van aarde en maan samen, Mobiles van Calder
- Aan het eind werd een bijzondere meetkunde stelling (van Ceva) bewezen met behulp van zwaartepunten. Ook de gewone zwaartelijnen kwamen even langs.

- Belangrijke problemen: berekenen van zwaartepunten, berekenen van gewogen gemiddelden bij meerdere punten.

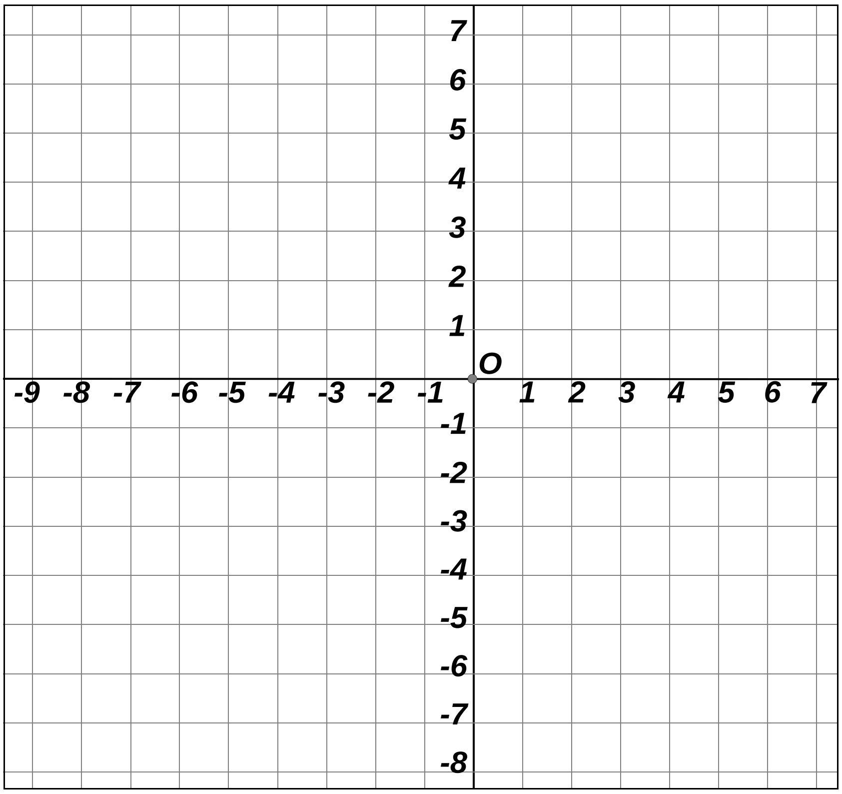
Rekenen en Redeneren

- Je hebt gezien dat algebra in redeneringen kan worden gebruikt.
- Voorbeeld: het bewijs dat de plek van de schat niet van het startpunt afhing.

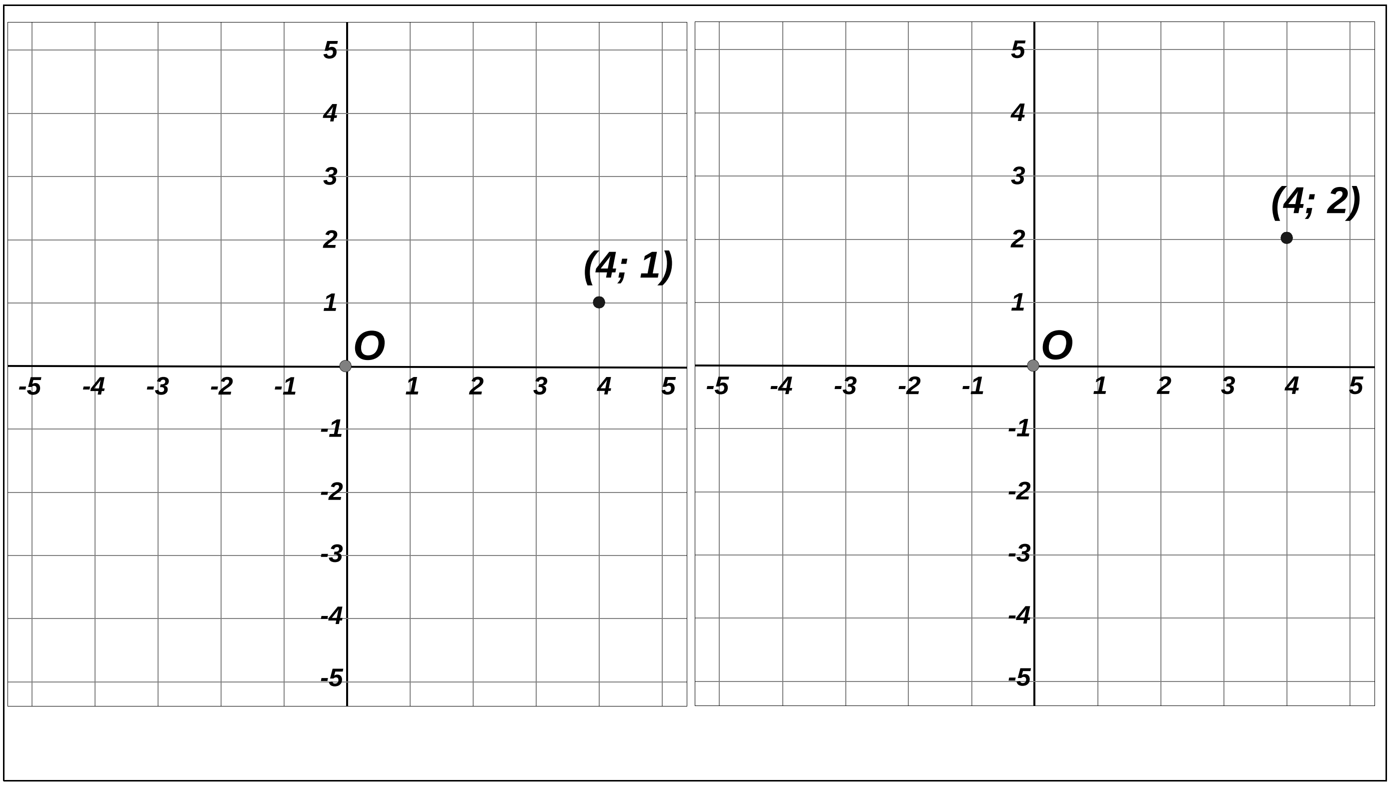
Vooruitblik

- In dit blok heb je vooral te maken gehad met formules voor punten: bij het vierkant en bij de verdeelpunten van een lijnstuk *PQ*.
- In het volgende blok kijken we hoe formules passen bij figuren: lijnen en cirkels. We kijken dan ook hoe figuren veranderen als je ‘hun’ formules of vergelijkingen verandert.

1.1

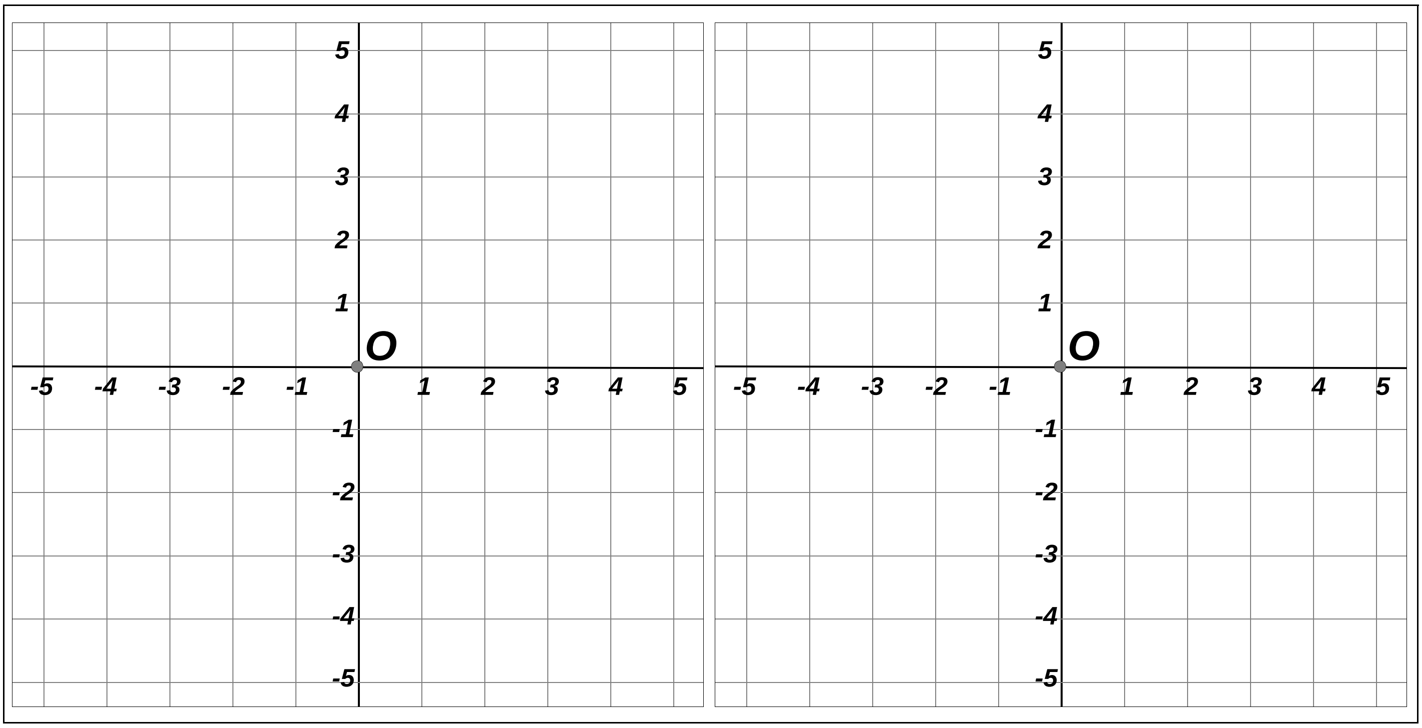

7
6
5
4
3
2
1
O
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1
1 2 3 4 5 6 7
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8

1.4,

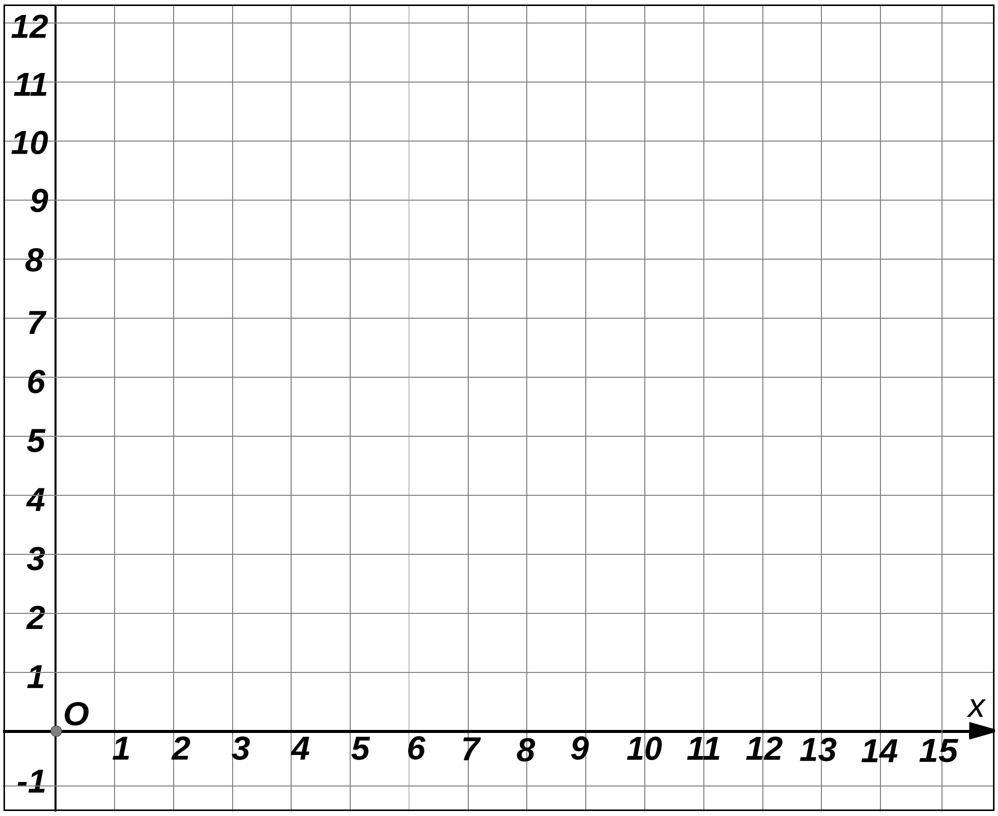

5
4
3
2
1
(4; 1)
O
-5 -4 -3 -2 -1
1 2 3 4 5
-1
-2
-3
-4
-5
5
4
3
(4; 2)
2
1
O
-5 -4 -3 -2 -1
1 2 3 4 5
-1
-2
-3
-4
-5

extra figuren

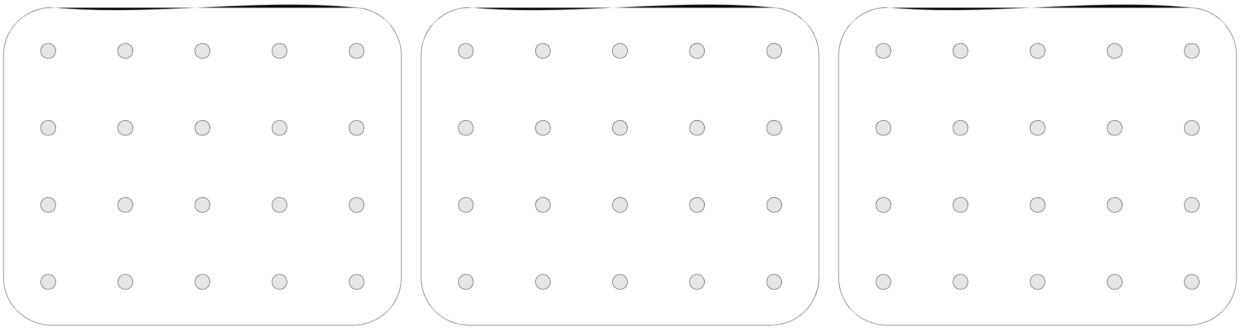
1.5



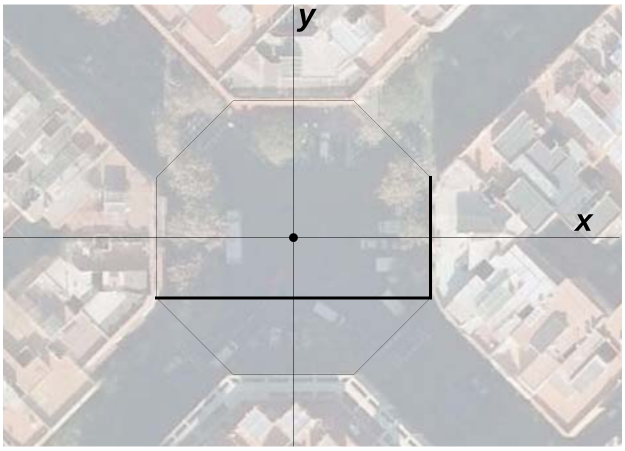
1.6

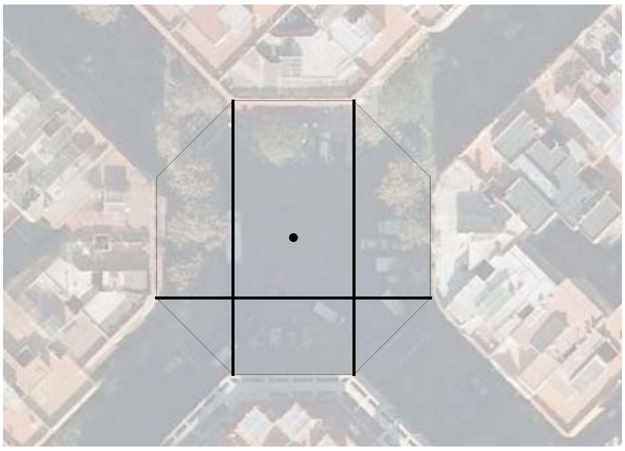


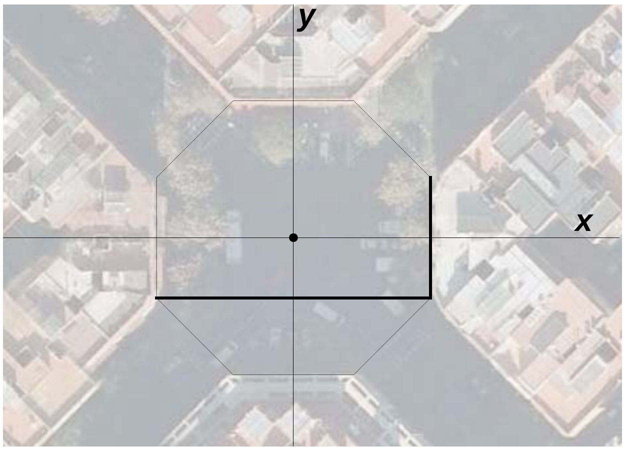
1.7



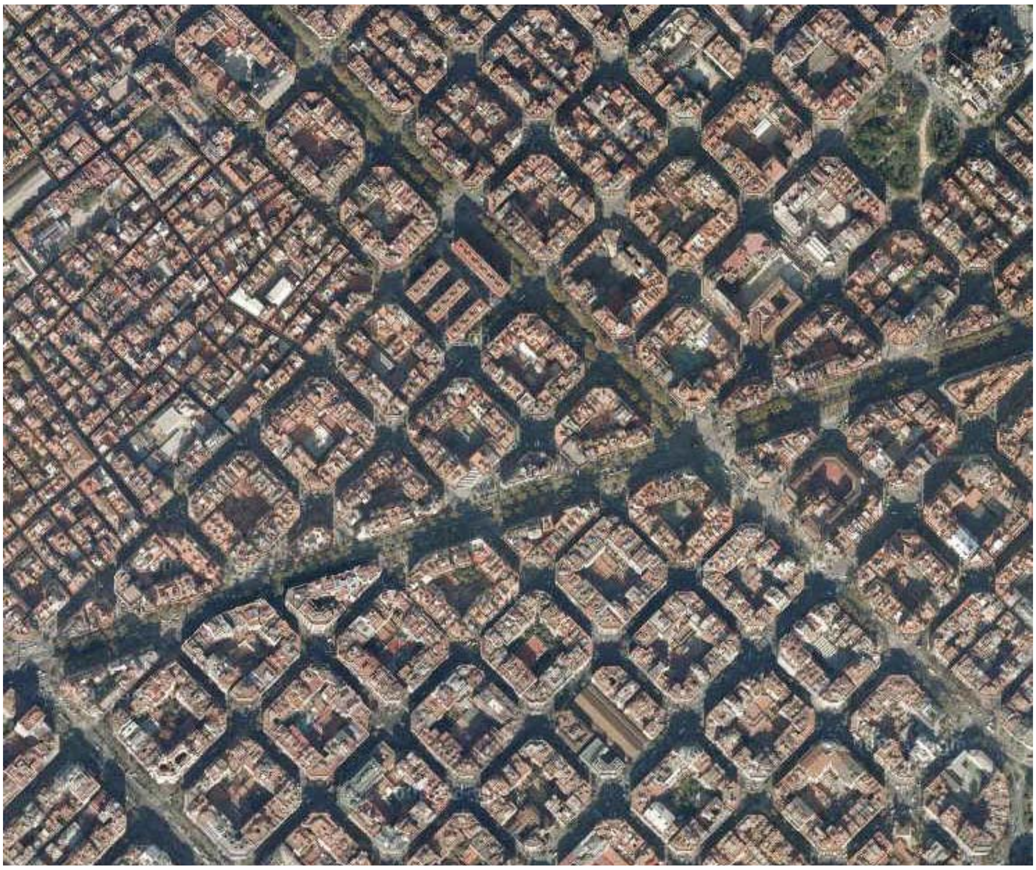
1.8



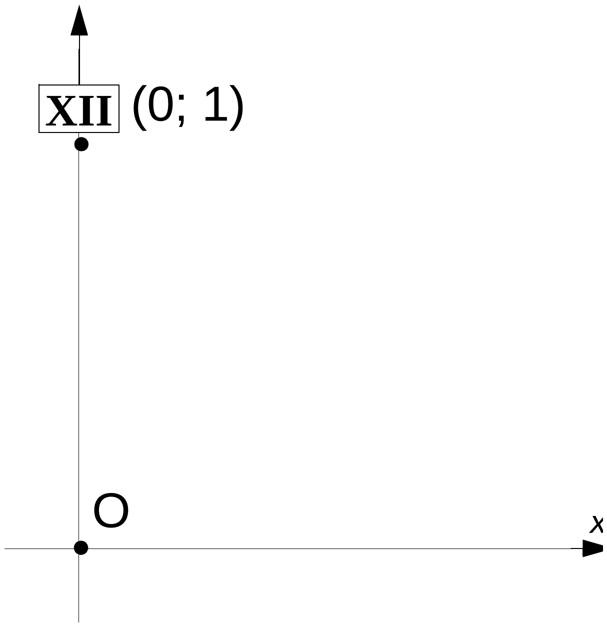


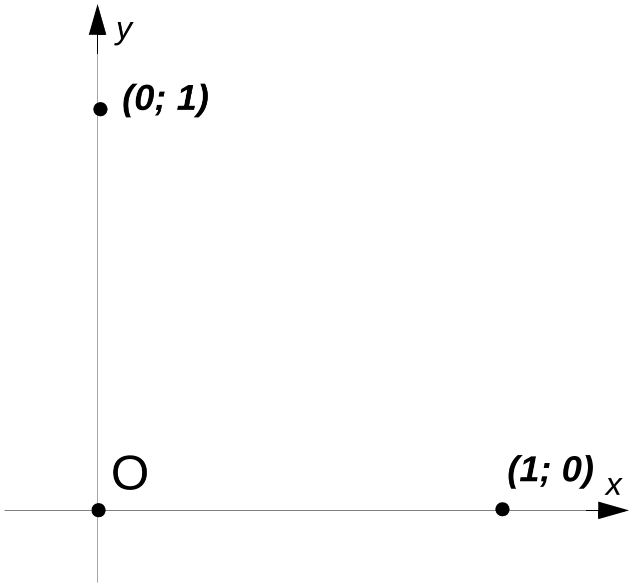


1.8

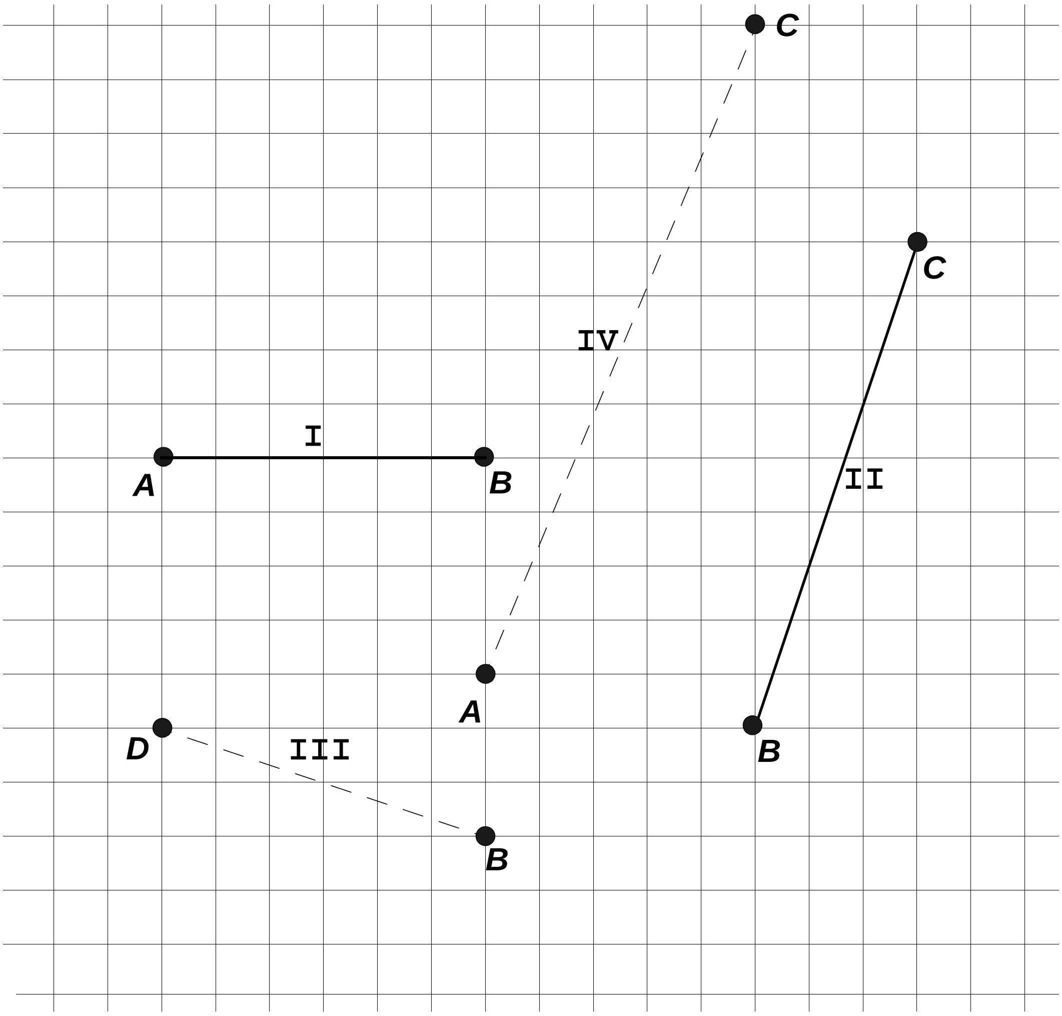


1.9 1.10

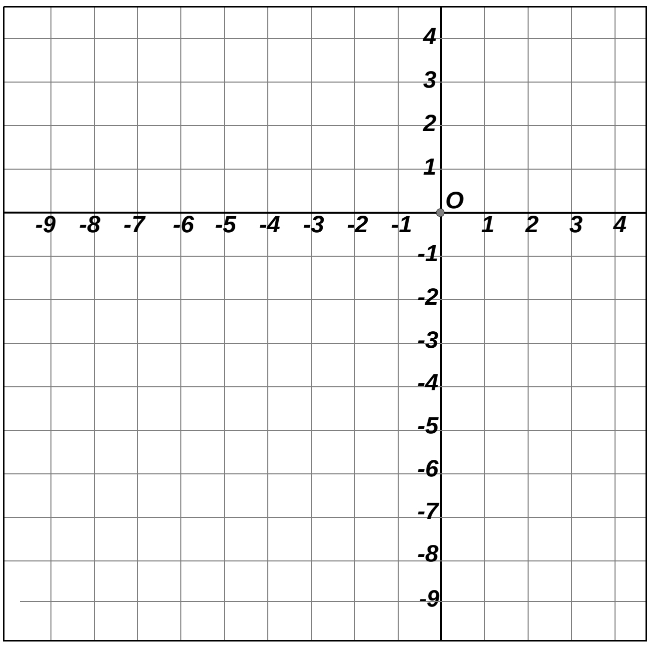




2.1



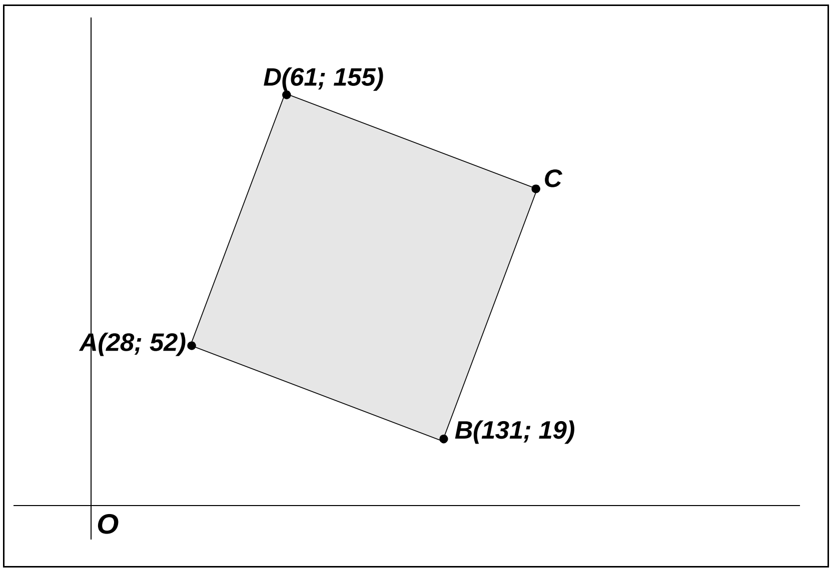
2.3



2.4

punt A	*punt B*	*punt C*
(0; 0)	**(2; 2)**	
(3; 3)(	**(3; -3)**	
(19; 1)	**(6; 5)**	
(0; 7)	**(7; 0)**	
(–*p*; 0)	**(*q*; 0)**	
(a – 5; 0)	**(a; 0)**	

2.5



Bij punten A en B is het vierde punt van het vierkant: D

$(x_A; y_A)$ $(x_B; y_B)$ $\rightarrow$ $(x_D; y_D)$ = (.................. ; ....)

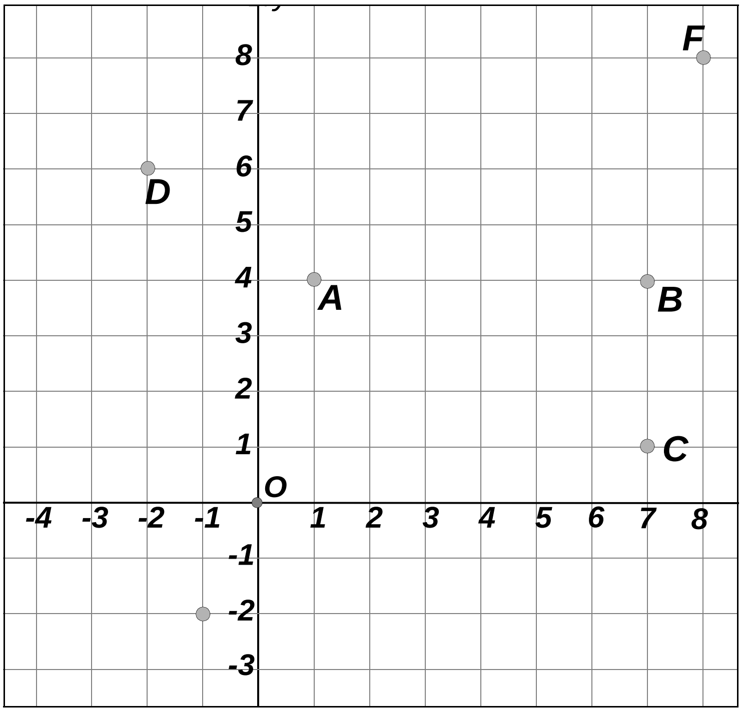
3.2

antwoord van methode 1

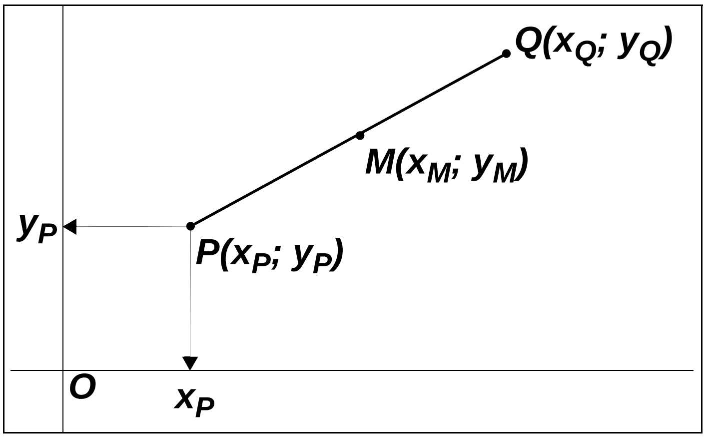
antwoord van methode 2

.... = ... = ... = ...

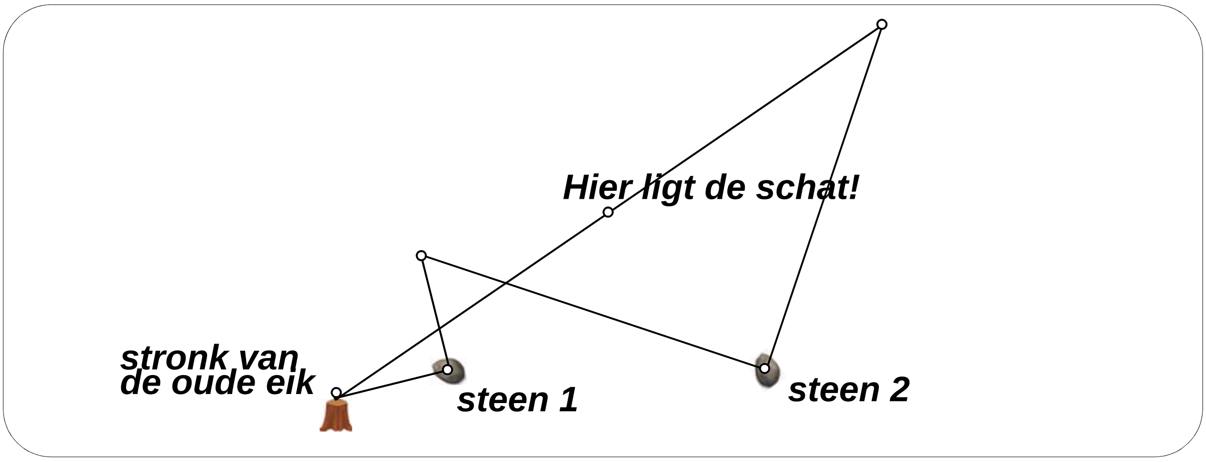
3.3


F
8
7
6
D
5
4
A
B
3
2
1
C
O
-4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8
-1
-2
-3

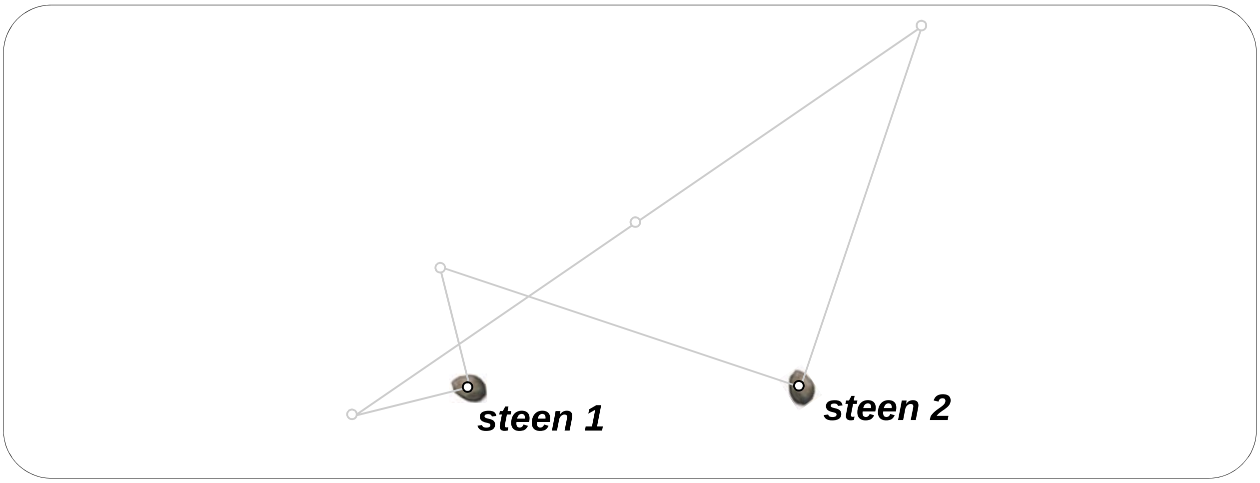
3.4


$Q(x_Q; y_Q)$
$M(x_M; y_M)$
y_P
$P(x_P; y_P)$
O
x_P

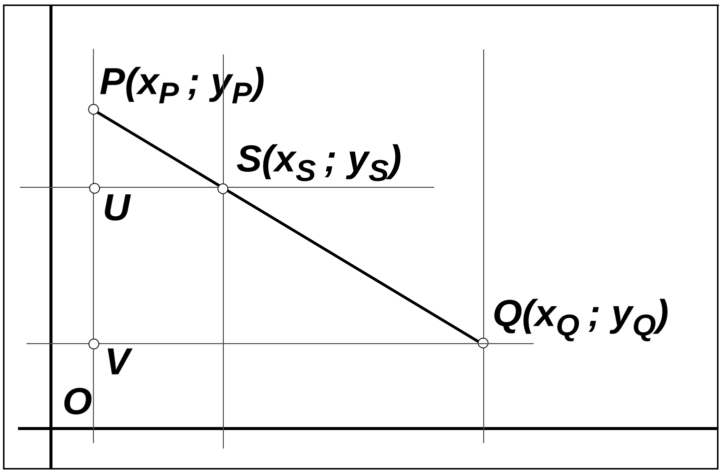
4.1


Hier ligt de schat!
stronk van
de oude eik
steen 1
steen 2

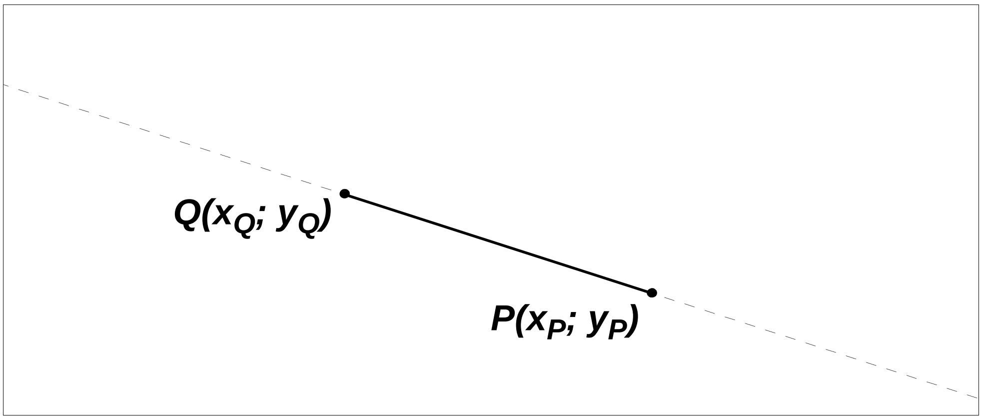
4.2



5.2

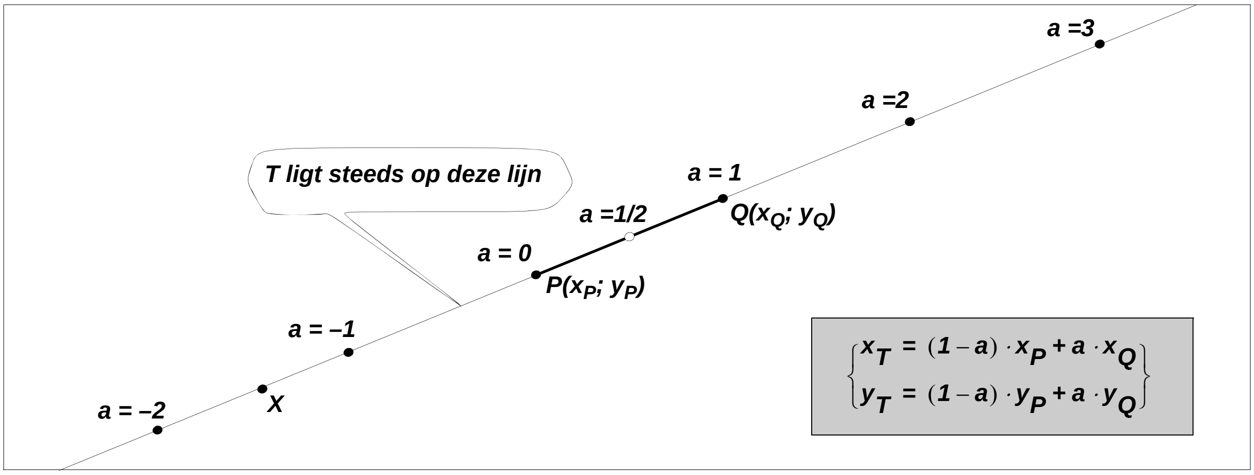


5.5, 5.6



extra figuren

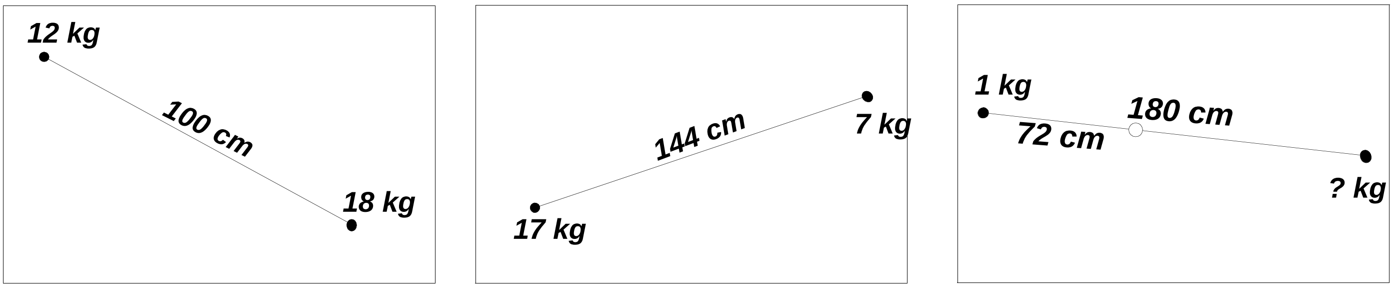
5.8

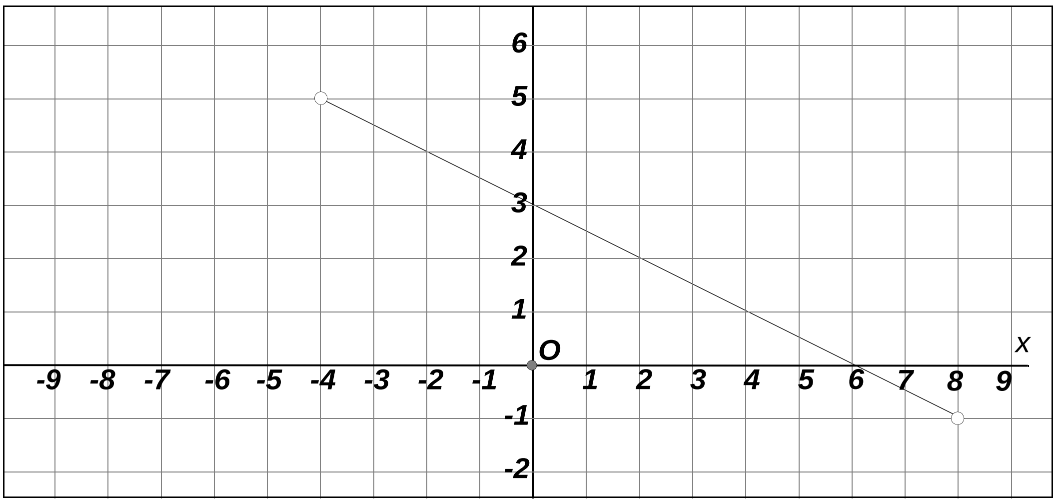


5.9

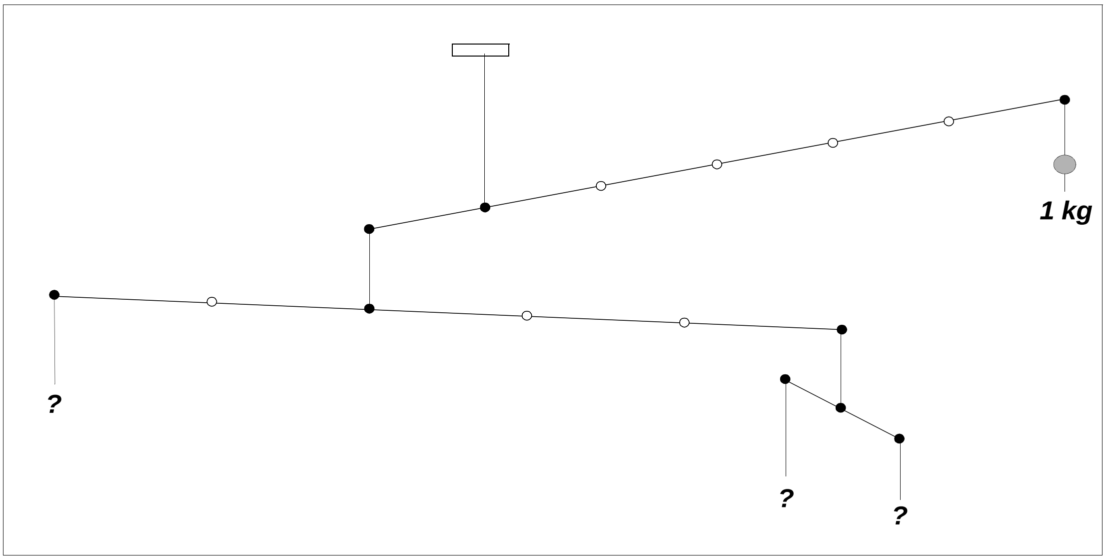
P	*Q*	*T*	*??? a ???*	*T ligt op lijn PQ?*
(1; 1)	*(4; 2)*	*(10; 4)*		
(3; 1)	*(6; 0)*	*(24; -7)*		
(-1; -1)	*(-5; -4)*	*(103; 78)*		
(2; 6)	*(2; 9)*	*(2;100)*		

6.3

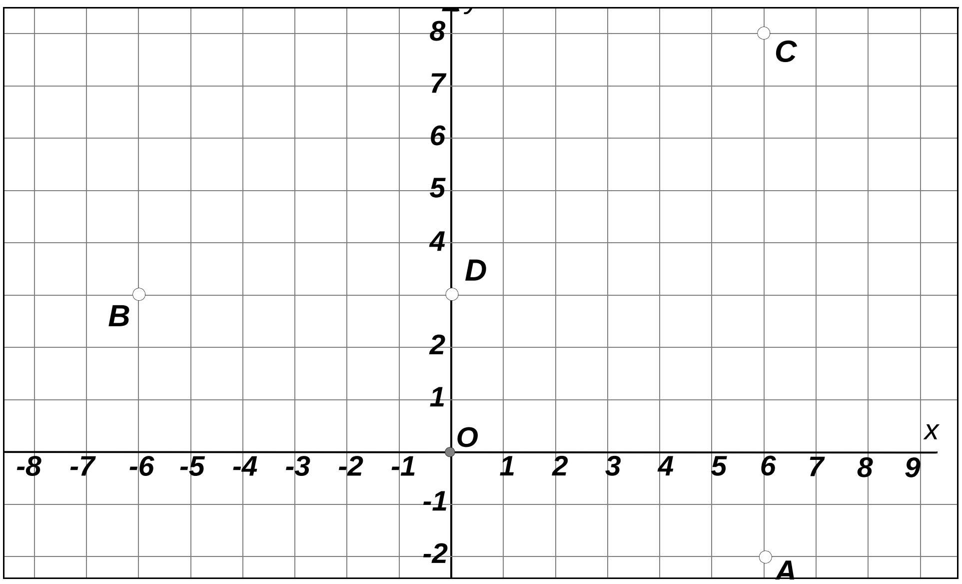




6.5



7.2



7.4, 7.5