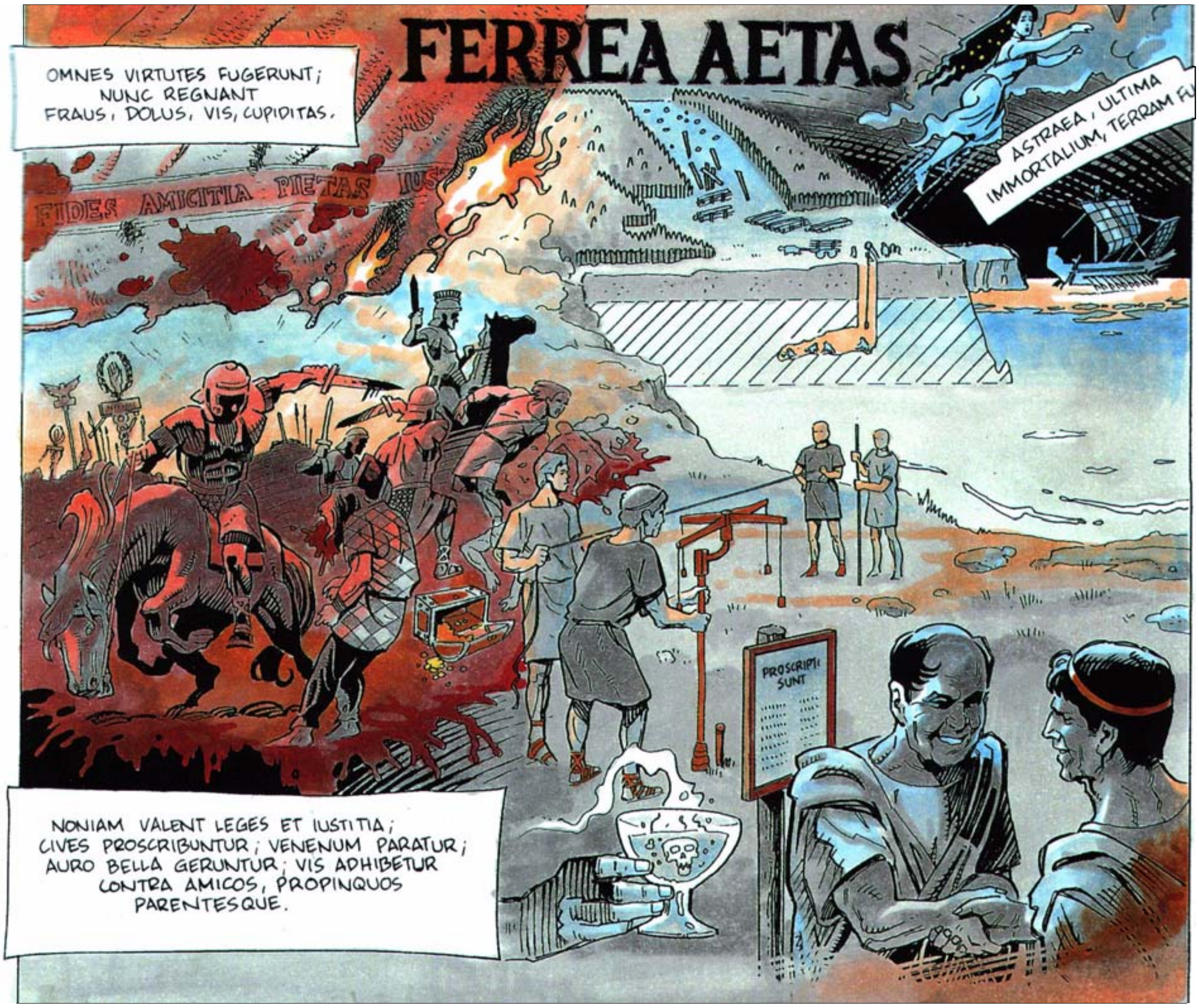
Meetkunde met coördinaten



Blok III
Lijnen, richtingen en waaiers

Inhoud blok III: Lijnen, richtingen en waaiers

Meetkunde met coördinaten
Blok III: Lijnen, richtingen en waaiers

Experiment: Nieuwe Meetkunde voor VWO B, 2014;
op voorstel van de cTWO (Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs).

Pilotteam: Richard Berends (NSG Groenewoud, Nijmegen), Josephine Buskes (Kandinsky College, Nijmegen), Aad Goddijn (FIsme), Sieb Kemme (cTWO), Dick Klingens (Krimpenerwaard College, Krimpen a/d IJssel).

Ontwerp blok III: Aad Goddijn

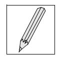
Versie: Experimentele versie

Datum: 15 juli 2009

Inleiding op dit blok over rechte lijnen

In het vorige blok werden punten door coördinaten vastgelegd. Met de coördinaten kon je rekenen; door rekenen vormde je nieuwe punten zoals het midden tussen twee punten, andere deelpunten tussen twee punten en het zwaartepunt van een groepje punten.
In dit blok gaat het vooral om lijnen. Die kun je opvatten als een heleboel - eigenlijk oneindig veel - punten tegelijk. Bij elke lijn hoort een vergelijking; in die vergelijking kun je de coördinaten van het punt in vullen. Aan het resultaat kun je dan zien of het punt bij de lijn hoort of niet.
Het bijzonder is dat je zo de samenhang tussen figuren in algebraformules kunt vertalen en door rekenen voorspellingen kunt doen over de verbanden tussen figuren.

Hoe gebruik je dit blok?
Je kunt in de figuren van dit blok tekenen, maar er is weinig ruimte om veel op te schrijven. Maak daarom de opgaven in een schrift. Je hebt dan zoveel ruimte als je zelf nodig hebt.
Achter in dit blok zijn veel van de figuren nogmaals opgenomen, soms ook vergroot. Die kun je bij het werk gebruiken en ook in je schrift plakken. Figuren waarbij zo’n extra kopie achterin hoort, herken je aan het tekentje met het potlood.



Toelichting bij de voorplaat van dit blok
De Romeinse dichter Ovidius (43 voor Chr. tot 17 na Chr.) plaatst de eerste toepassing van de rechte lijn in de IJzeren Eeuw, de tijd dat de mensen slecht werden en wapens gingen maken.
Aldus in boek I, 125-134 van zijn *Metamorfosen*. Ovidius beschrijft kort de laatste twee van de vier perioden waarin de geschiedenis verdeeld werd: de Gouden, de Zilveren, de Bronzen en de IJzeren Eeuw.

Daarna ontstond de derde eeuw, de bronzen generatie,
ruiger van aard en sneller klaarstaand voor een wild gevecht,
maar nog niet slecht, zoals de laatste: die van staalhard ijzer.
Want daarmee kwam terstond een eeuw van kwalijker metaal
met elk soort ondeugd; eergevoel en trouw en waarheid weken.
In plaats daarvan ontstonden listigheden en bedrog,
intriges en geweld en een vermaledijde hebzucht.
Men wilde varen op de winden, maar de schipper wist
daar nauwelijks iets van af. Scheepskielen, eens op hoge bergen
gegroeid als bomen, waagden zich op onbekende zee.
De grond, die eerst van iedereen was, net als lucht en zonlicht,
werd nu zorgvuldig door landmeters *lijnrecht* afgepast.

Vertaling uit het Latijn: M. d'Hane-Scheltema.
Tekstbewerking stripversie: Rubricastellanus (Karl-Heinz Graf von Rothenburg).
Beeld: Martin Frei (1996).

1: Van grafiek naar rechte lijn

Vooraf

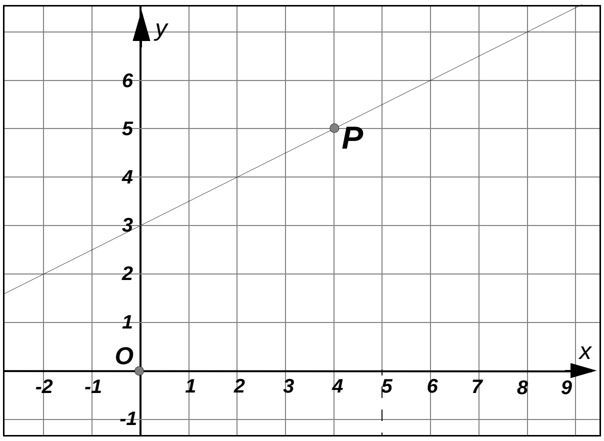
Je weet allang dat de grafiek van $y = 3x + 5$ een rechte lijn is. In deze paragraaf gaan we na welke vergelijkingen bij rechte lijnen horen. Je hebt in blok II al '*de lijn* $x = 3$' en '*de lijn* $y = 5$' ontmoet. En we gaan vergelijkingen van lijnen gebruiken bij meetkundig redeneren!
We beginnen met een voorbeeld ter herhaling en daarna verkennen we nieuwe vergelijkingen, die ook bij rechte lijnen horen.

Voorbeeld: $y = ½ \cdot x + 3$

Hier is een stuk van de grafiek van de vergelijking

$$y = ½ \cdot x + 3$$

getekend.



1.1 Berekeningen met de vergelijking en grafiek

a. Door welk van deze punten gaat de grafiek?
(6; 6), (11; 8), (–100; –47), (–300; –153)

b. Voor welke waarde van x geldt $y = 13$?

c. En voor welk waarde van x geldt $y = 0$?

1.2 Schuiven naar nieuwe punten

Op de grafiek van $y = ½ \cdot x + 3$ ligt het punt (4; 5), want $5 = ½ \cdot 4 + 3$.

Bijna zonder rekenen kun je nu *zeker weten* of de volgende punten óók op de grafiek liggen of niet:

A(4 + 2222 ; 5 +1111)
B(4 – 10 ; 5 –5)
C(4 – 1800 ; 5 –950)

Zo gaat dat:

(4; 5) ligt op de grafiek van $y = ½ \cdot x + 3$ want

$$5 = ½ \cdot 4 + 3$$

Dan klopt dit óók:

$$(5 + 1111) = ½ \cdot (4 + 2222) + 3$$

want ... ...

Dus (4 + 2222; 5 + 1111) ligt óók op de grafiek van $y = ½ \cdot x + 3$.

a. Vul op de stippellijn een verklaring in, *waarin je de getallen 5, 4 en 3 niet gebruikt en de andere wel*!

b. Leg heel kort uit waarom dit punt *niet* op de grafiek van $y = ½ \cdot x + 3$ kan liggen:
(4 + 4003; 5 + 2003)

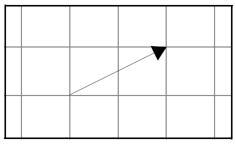
c. Liggen *A* en *B* (van hierboven) op de grafiek?

d. Op de grafiek ligt ook $Q(8; 7)$. Welk van de twee volgende punten ligt óók op de grafiek:
(8,2; 7,1) of (8,1; 7,2)

e. Van de volgende drie punten is bekend, dat er één niet op de grafiek van $y = ½ \cdot x + 3$ ligt.
(49,04; 27, 52) of (49,07; 27, 53) of (49,08; 27, 54)
Met heel weinig rekenwerk pak je die er zo tussenuit! Welke is het?

1.3 Werken met pijlen (1)

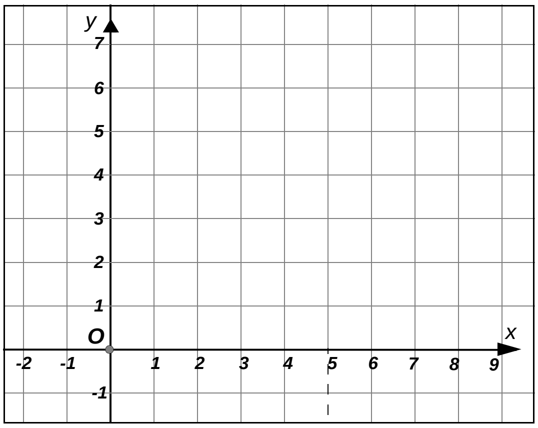
a. Als je *Q* (8; 7) opschuift volgens het pijltje hiernaast en dat precies 12 keer doet, krijg je punt *R.* Wat zijn de coördinaten van *R*?



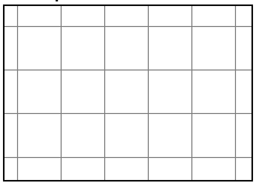
b. *Q* ligt op de grafiek van $y = \frac{1}{2} \cdot x + 3$ **.** Leg kort uit waarom *R* daar óók op ligt.

1.4 Oefenen met $y = 7 - \frac{3}{4} \cdot x$

a. Het punt waar de grafiek door de y-as gaat, is makkelijk te vinden! Vind nóg een roosterpunt waar de grafiek doorgaat en teken dan de grafiek.



b. Teken hieronder het opschuifpijltje dat bij deze vergelijking en grafiek past.



c. De volgende drie punten liggen op de grafiek. Vul de juiste getallen in op de stippen.
(8; 1)   (8 – 0,4 ; 1 – ... ...)   (8 + ... ; 1 – 12)

1.5 Een algemene vorm van de lijnvergelijking

De grafiek van $y = \frac{1}{2} \cdot x + 3$ is een rechte lijn. Die van $y = 7 - \frac{3}{4} \cdot x$ ook.
In het algemeen is de grafiek van *elke* vergelijking van de vorm $y = m \cdot x + q$ een rechte lijn.
De getallen *m* en *q* heetten vroeger altijd: *startgetal* en *hellingsgetal* of *richtingscoëfficiënt*.
richtingscoëfficiënt.
Het startgetal geeft aan waar de lijn 'start' op de y-as; de *richtingscoëfficiënt* hoe steil de grafiek omhoog of omlaag gaat. Bij elk stapje van grootte 1 van *x* stijgt de aarde van *y* precies met *m*.

Door een vergelijking in de $y = m \cdot x + q$ te brengen, vind je startgetal en richtingscoëfficiënt.

a. Schrijf de vergelijking $y = 7 - \frac{3}{4} \cdot x$ in de vorm $y = m \cdot x + q$**.**
Dat wil zeggen: vind de waarden van *m* en *q* waarbij $y = m \cdot x + q$ gelijkwaardig is met $y = 7 - \frac{3}{4} \cdot x$**.**

b. Doe het ook met de volgende vergelijkingen:

$y = -4 + 2\frac{1}{2} \cdot x$ $y = x / 1000 - 6$ $y = 3(x - 2)$ $y = 0{,}03\,(100 - x)$

Van grafieken naar lijnen en punten op lijnen

Voortaan gebruiken we de uitdrukkingen

'**de lijn** $y = mx + q$'   en   '*de vergelijking* $y = mx + q$'

gewoon door elkaar. Ze betekenen namelijk hetzelfde! En 'lijn' betekent nu steevast 'rechte lijn'.

Bij *meetkunde met coördinaten* gebruiken we zulke (en andere) vergelijkingen om figuren te beschrijven. Lijnen bijvoorbeeld.
Het gaat er dan niet om dat de grafiek gaat over temperatuurverloop op een dag of hoort bij een verhaal over afstand en tijd. Het gaat om de figuur zelf.
Daarom: vergeet het woord 'grafiek' tijdens dit meetkundeblok maar even!

Een punt *P* was in blok 2 al een *paar van twee getallen*, geschreven in de vorm $P(x_P; y_P)$.
Nu betekent

punt $P(x_P; y_P)$ ***ligt op 'de lijn*** $y = mx + q$***'***

precies hetzelfde als:

de coördinaten van P voldoen aan $y_P = mx_P + q$

Niets bijzonders; je hebt het de hele tijd al gebruikt ...

Pas op je woorden!
Richtingscoëfficiënt: dat is een mooi meetkundewoord. Het vertelt iets over hoe de lijn in het vlak ligt. Dat gebruiken we voortaan liever dan *hellingsgetal.*
Straks gaan we diepgaand onderzoeken hoe de richting van de lijn met de *richtingscoëfficiënt* samenhangt*.*

Startgetal: dat doet nog teveel denken aan een verloop in de tijd dat gaat volgen of zoiets.
Maar een lijn *start* niet. Die ligt in zijn geheel als lijn in het vlak.
We kijken wél naar de ligging van de lijn en hoe die de coördinaatassen snijdt.
Dus gebruiken we in plaats van *startgetal*: *de doorgang door de y-as*
en we kijken dan vanzelf ook naar de*l*: *de doorgang door de x-as*
Want we gaan dus ook *x* en *y* langzaamaan een beetje op gelijke voet behandelen.
Daarom ook de voorkeur voor *richtingscoëfficiënt* boven *hellingsgetal.* Want het gaat niet om de helling ten opzichte van de *x*-as, maar om de richting van de lijn op zichzelf.

1.6 Terugkijken naar de lijnen $y = ½ \cdot x + 3$ en $y = 7 – ¾ \cdot x$

De doorgang door de *y*-as van $y = ½ \cdot x + 3$ is hier het getal = 3.

a. Wat is de *doorgang door de x-as* van de lijn $y = ½ \cdot x + 3$? [Tip: kijk terug naar opgave 1.1c]

b. Bereken beide doorgangen voor de lijn $y = 7 – ¾ \cdot x$.

Invullen en oplossen
De doorgangen door de assen van de lijn $y = 15 – 3 \cdot x$ vind je zo:

doorgang door de x -as: Dat is het punt op de lijn met *y*-coördinaat 0.
Vul dus $y = 0$ in: $0 = 15 – 3 \cdot x$
Los op naar x en vind $x = 5$.

doorgang door de y -as: Dat is het punt op de lijn met *x*-coördinaat 0..
Vul dus $x = 0$ in: $y = 15 – 3 \cdot 0$
Los op naar y en vind $y = 15$.

Dat laatste klinkt nog wat vreemd.
Binnenkort komen er gevallen waar je na het invullen nog écht wel wat op te lossen hebt naar ***y***!

1.7 Doorgangen door de x-as en de y-as bepalen , vergelijkingen amken, tekenen

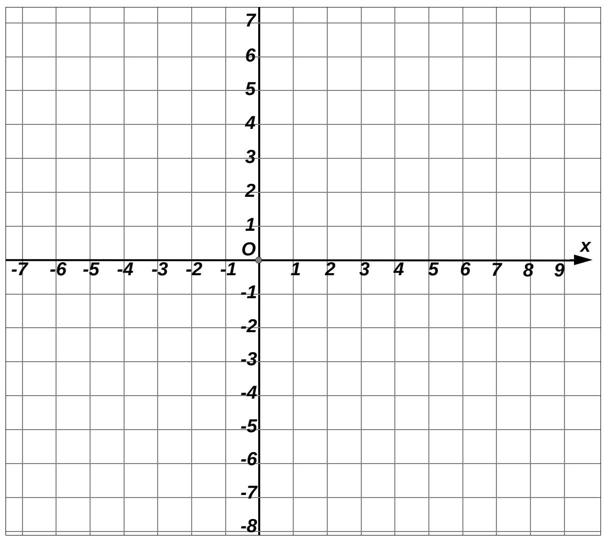
a. Bepaal van deze drie lijnen de beide doorgangen door de assen

$y = 2½\,(x + 4)$ $y = 6 – x / 600$ $y = (6 – x) / 600$

b. Bepaal van deze zes lijnen de beide *doorgangen door de assen*

$y = x – 1$ $y = x$ $y = x + 1$
$y = 1 – x$ $y = –x$ $y = – x – 1$

Teken deze zes lijnen in één figuur.

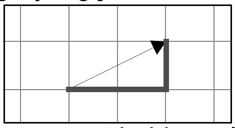


c. Vind de vergelijkingen van de volgende lijnen in de vorm $y = mx + q$ en teken de lijnen zo goed mogelijk in de figuur.

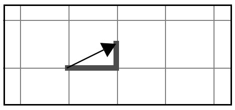
doorgang *y*-as 5, richtingscoëfficiënt –1/3
doorgang y-as –5, doorgang x-as +5.
doorgang y-as 1, doorgang x-as –100.
doorgang y-as –5, doorgang x-as 100.

1.8 Werken met pijlen (2)

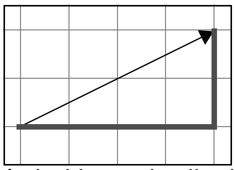
Deze richtingspijl hoorde bij de lijn met vergelijking $y = ½ \cdot x + 3$.



De lijnen $y = ½ \cdot x + 7$, $y = ½ \cdot x - 4$ en $y = ½ \cdot x + 3$ hebben allemaal dezelfde richtingspijl. Het zijn evenwijdige lijnen.
Die ½ in de vergelijking is verantwoordelijk voor de mate waarin de grafiek stijgt of daalt.
Je komt telkens één stapje ter groote ½ hoger als *x* één eenheid groter wordt.
Het pijltje hadden we daarom ook zo kunnen tekenen:

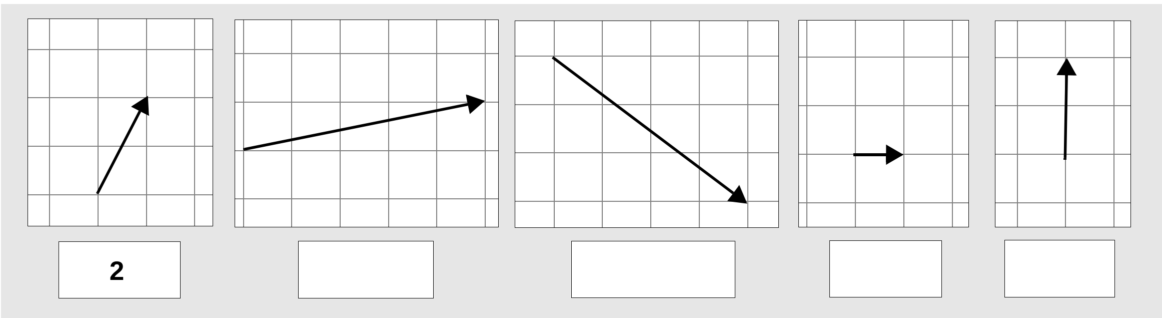


Maar dit is ook goed:

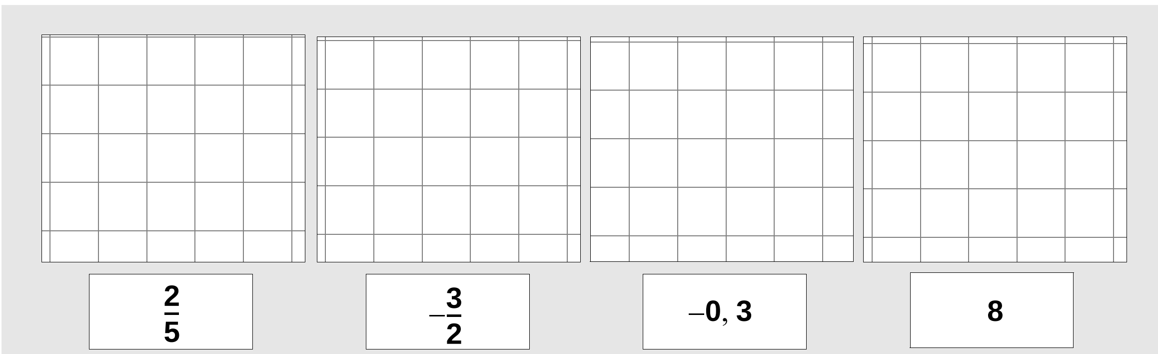


Maar de eerste pijl van deze drie, die de hele hokjes gebruikt, is misschien wat duidelijker.

a. Waar kun je in die figuur de teller en de noemer van de richtingscoëfficiënt aanwijzen?
b. Hieronder zie je enkele richtingspijlen. Noteer de richtingscoëfficiënten.



c. teken hier pijlen bij de aangegeven richtingscoëfficiënten.



1.9 Doorgangen en richtingen om over na te denken

a. Van een lijn is de doorgang door de *x*-as positief en de doorgang door de *y*-as negatief. Is de richtingscoëfficiënt positief of negatief?
b. Van een lijn is de doorgang door de *x*-as twee keer zo groot als de doorgang door de *y*-as. Wat is de richtingscoëfficiënt? (Maak een schetsje!)
c. Teken twee verschillende lijnen waarbij bij allebei de lijnen de doorgang door de *x*-as 2 groter is dan de doorgang door de *y*-as. Zijn de richtingscoëfficiënten gelijk?

Samenvatting

grafiek

In een grafiek zet je de waarden van een functie of formule of verschijnsel uit. Bij elke x hoort een waarde van de functie. Uit de grafiek lees je bijvoorbeeld af ‘de verkoop stijgt’ of ‘de koersdaling vermindert’. Anders gezegd: vorm en ligging van de grafiek vertellen iets over het verschijnsel.

rechte lijn

De grafiek van een eerstegraads functie is een rechte lijn. In dit blok gaat het om de meetkunde van de rechte lijnen. Dus anders dan bij de grafiek: formules vertellen nu over vorm en ligging van figuren. Formules zijn het gereedschap, niet het doel.

startgetal, hellingsgetal

Deze woorden gebruikte je vroeger bij eerstegraads formules en hun grafieken.

richtingscoëfficiënt (en richtingspijl)

Deze bevatten de informatie over de richting van de lijn. Later brengen zoeken we uit wat het verband precies is. Op dit moment is de richtingscoëfficiënt het getal 5 in de vergelijking ***y = 5x – 13.***
Maar eigenlijk is het een eigenschap van een lijn, en straks komen er vergelijkingen waar de richtingscoëfficiënt niet als getal zichtbaar is in de vergelijking!

doorgangen door de assen

De plekken waar een lijn de *x*-as en de *y*-as snijdt. je vindt ze door y = 0 of x = 0 in te vullen en op te lossen naar x of y.

richtingspijl (en richtingscoëfficiënt)

Een pijl die de richting van een lijn aan geeft. Als de richtingscoëfficiënt 1/3 is, dan is het de pijl die over 3 hokjes naar rechts juist 1 hokje omhoog gaat.

algemene vergelijking y = mx + q

Het patroon van een bepaald type vergelijking, de eerstegraads vergelijking. In deze vorm is *m* de richtingscoëfficiënt en q de doorgang door de y-as.

wat je kunt en hoe

Lijnen in een coördinatenstelsel beschrijven met richtingscoëfficiënt en doorgang door een van de assen.
Bij gegeven vergelijking de doorgangen door de assen berekenen.

vooruitblik

We gaan:

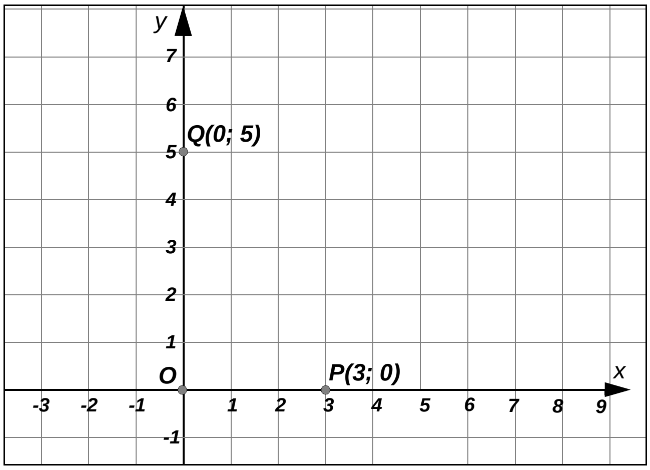
Andere vergelijkingen dan ***y = mx + q*** onderzoeken, die óók bij rechte lijnen horen.
Het verband tussen hoeken en richtingscoëfficiënten onderzoeken en gebruiken.
Meetkundestellingen bewijzen met behulp van vergelijkingen van lijnen.

2: De algemene vergelijking *ax* + *by* + *c* = 0

Motivatie en inleidend voorbeeld

In de vorige paragraaf kwam je lijnvergelijkingen tegen van de vorm ***y = mx + q***. In deze paragraaf zoeken we de meest algemene vorm van de vergelijking van rechte lijne.
Daar zijn twee redenen voor.
De eerste is dat er lijnen zijn die niet in het patroon ***y = mx + q*** passen. Dat heb je misschien al gemerkt: de lijn *x = 3* kun je onmogelijk vangen in het net van ***y = mx + q***.
De tweede reden is belangrijker: Je komt bij meetkunde met coördinaten al gauw heel andere vergelijkingen tegen, die toch vergelijkingen van lijnen moeten zijn maar er niet uitzien als ***y = mx + q.***
Met zo'n voorbeeld beginnen we.

2.1 Gelijke afstanden tot twee punten



In deze figuur gaan we op zoek naar alle punten, die even ver weg liggen van ***P*(3; 0)** en ***Q*(0; 5)**.
Je mag verwachten dat die punten samen een lijn vormen. Het is de lijn die je krijgt, als je het papier zó dubbel vouwt, dat punt *P* op punt *Q* komt.

a. Op de lijn *x* = 4 kun je een roosterpunt vinden dat inderdaad gelijke afstanden heeft tot *P* en *Q*. Welk punt is dat?

b. Mogelijk vind je nog een ander roosterpunt met die eigenschap. Maar er is ook een niet-roosterpunt met de gelijke-afstanden-eigenschap dat je direct kunt vinden.
Denk aan het vorige hoofdstuk!

c. Als iemand zegt dat ***R*(9; 7)** ook een geschikt punt is, dan moet je dat niet zomaar geloven.
Bereken met de afstandsformule van Pythagoras of inderdaad geldt |*PR*| = |*QR*|

Nu gaan we echt algebraïsch an de slag.
We denken aan een punt waar we de coördinaten nog niet van weten; we noemen het punt dus S(x; y).
Maar het moet wel een punt zijn waarvoor geldt:

$$|PS| = |QS|$$

d. Hier is aan de linkerkant de afstand |*PS*| al uitgedrukt in *x* en *y*. Vul de rechterkant zelf aan:

$$\sqrt{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^2+\boldsymbol{y}^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e. Door links en rechts te kwadrateren, komt er een vergelijking zonder wortels te voorschijn.
Werk de kwadraten met de haakjes uit; vergelijk links en rechts, er zijn nu vast termen die aan twee kanten staan en dus weg mogen.
....
Laat zien dat je uiteindelijk op dit verband uit kunt komen:

$$\mathbf{5}\cdot\boldsymbol{y}-\mathbf{3}\cdot\boldsymbol{x} = \mathbf{8}$$

f. Controleer of eerder gevonden punten zoals (4; 4) en (9; 7) bij invullen inderdaad voldoen. Markeer deze punten in de figuur hier boven, als dat nog niet gedaan is.

g. Probeer nu een paar andere roosterpunten te vinden die aan dit verband voldoen en dus ook even ver van *P* en *Q* af liggen.

Vooruitblik
We gaan de vergelijking ***5 ·y – 3 ·x = 8*** op dezelfde manier onderzoeken als we dat in de vorige paragraaf gedaan hebben met andere vergelijkingen. Eigenlijk ben je daar bij vraag **f** daar al mee begonnen.

2.2 Schuiven naar nieuwe punten

Het punt (9; 7) voldoet aan de vergelijking $5 \cdot y - 3 \cdot x = 8$
*W*ant

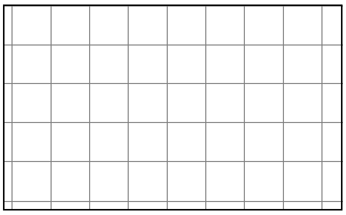
$$5 \cdot 7 - 3 \cdot 9 = 8$$

a. Verklaar weer (zonder dat je alles invult en geheel narekent) waarom de volgende punten óók aan de vergelijking voldoen:

(9,05; 7,03)
(9 + 50; 7+30)
(9 – 10; 7 – 6)

b. Ga na dat je de punten (14; 10) (19; 13) (24; 16) .... ook op deze manier kunt vinden.
Test het punt (19; 13) voor de zekerheid met Pythagoras.
(dwz. controleer of inderdaad |*PS*| = |*QS*| als *S* = (19; 13).)

2.3 Werken met pijlen en de richtingscoëfficiënt



a. De rij (4; 4) (9; 7) (14; 10) (19; 13) (24; 16) .... kun je zien als beginnend bij (4; 4). Hij groeit door steeds via dezelfde pijl het punt te verschuiven. Teken die pijl in de figuur hiernaast.

Je hebt in vraag 2.2a gezien dat je ook hondersten van die pijl of grote veelvouden ervan mag nemen. Steeds vind je goede punten.
Dat betekent dat het echt een lijn is, die verzameling punten *S* die voldoen aan |*PS*| = |*QS*|.

b. Teken die lijn in de figuur op bladzijde 10 (als je het nog niet gedaan hebt).
c. In opgave 1.8 heb je gezien hoe je uit de richtingspijl van de lijn de richtingscoëfficiënt van de lijn kunt bepalen als breuk. Doe dat hier ook.

Middelloodlijn

Blijkbaar ís er een richtingscoëfficiënt, al hebben we nu nog geen vergelijking van de vorm $y = mx + q$**!**
Je hebt gezien nu wel gezien dat de lijn van alle punten S *door het midden van lijnstuk PQ gaat en daar loodrecht op staat*. Het is de middelloodlijn van *PQ*.

De middelloodlijn was het eerste voorbeeld in dit hoofdstuk waar je vanuit de vergelijking eigenschappen van een figuur bepaalt. In het vervolg gaan we dat meer doen. Steeds geldt:

de figuur bestaat precies uit de punten waarvan de coördinaten aan de vergelijking voldoen.

Dat wil zeggen: waarbij er een gelijkheid ontstaat als je de coördinaten in de vergelijking invult.
Het wordt nu duidelijk dat de middelen die je daarbij gebruikt niet alleen voor de middellloodlijn gelden.

2.4 Doorgangen door de x-as en de y-as

a. Bereken de doorgangen van de lijn door de *y*-as en *x*-as. Doe dit precies op de manier van ***Invullen en oplossen*** die op bladzijde 7 staat.

2.5 Omzetten van de nieuwe vergelijking naar de oude vorm y = mx + q

a. Omdat we van de lijn $5 \cdot y - 3 \cdot x = 8$ inmiddels de richtingscoëfficiënt en de doorgang door de *y*-as kennen, kunnen we van de lijn ook een vergelijking in de vorm $y = mx + q$ geven.
Stel die op met wat je berekend hebt.

b. Maar die vorm moet ook af te leiden zijn uit de voorstelling $5 \cdot y - 3 \cdot x = 8$
Herleid dus $5 \cdot y - 3 \cdot x = 8$ in enkele stappen naar:

$$y = ...$$

De standaardvorm *ax + by + c = 0*.

De vergelijking

$$5 \cdot y - 3 \cdot x = 8$$

kun je op 0 herleiden

$$5 \cdot y - 3 \cdot x - 8 = 0$$

en dan links herschikken naar alfabetische volgorde van *x* en *y*

$$-3 \cdot x + 5 \cdot y - 8 = 0$$

en (zo nodig) met wat minder minnen schrijven als volgt:

$$3 \cdot x - 5 \cdot y + 8 = 0$$

Daarmee is de *standaardvorm*

$$ax + by + c = 0$$

bereikt, met ***a* = 3**, ***b*** = **–5** en ***c* = 8**.

Herleiden tot standaardvorm
Vergelijkingen van lijnen kunnen er heel verschillend uitzien. De standaardvorm brengt orde in het geheel.

2.6 Vind a, b, c

a. De volgende vergelijkingen kunnen allemaal ook in standaardvorm ***ax + by + c = 0*** worden opgeschreven. Voer die herleidingen uit.

vergelijking	*ax + by + c = 0*	*a*	*b*	*c*	*r.c.*
$5 \cdot y - 3 \cdot x = 8$	$3 \cdot x - 5 \cdot y + 8 = 0$	*3*	*– 5*	*8*	
$y = 8x + 2$				*–2*	
$(y - 1) = 1/3 \cdot (6 - x)$					
$y = -7$					
2x + 3 – y = x + 1					
U · (x – y) = V · (y + x)			*– (V + U)*		

2.7 De richtingscoëfficiënt van ax + by + c = 0

Bij het voorbeeld van de middelloodlijn hebben we die bepaald via de richtingspijl.
Bij deze opgave oefen je het allemaal nog een keer en trekken we een algemene conclusie.
Eerst bepalen we richtingscoëfficiënt en ***y***-as doorgang apart

a. Vind de richtingscoëfficiënt van **7*x* – 3*y* + 14 = 0** door eerst de richtingspijl van de lijn te bepalen.
b. Vind doorgang met de *y*-as door invullen van *x* = 0 en oplossen naar *y*.
c. Stel de vorm ***y = mx + q*** op.

Nu ook de andere manier: De standaardvorm direct herleiden naar de vorm y = ...

d. Herleid **7*x* – 3*y* + 14 = 0** in enkele stappen tot ***y = ...***

Daarbij zie je dan de richtingscoëfficiënt en ***y***-as doorgang vanzelf verschijnen.
e. Vul in de tabel ook de richtingscoëfficiënten in.

f. Het moet ook mogelijk zijn direct uit de vergelijking ***ax + by + c = 0*** de richtingscoëfficiënt, ***y***-as doorgang en daarmee de vorm ***y = mx + q*** af te leiden.
Hier vind je dus voor *m* en *q* geen getallen, maar kleine formules waarin *a*, *b* en *c* voorkomen.
Probeer dat te doen op een van de aangegeven manieren. Je mag kiezen welke!

2.8 Evenwijdig aan de y-as of niet

De lijn ***x = 5*** is een lijn die evenwijdig is aan de *y*-as. Ook deze lijn kan in de vorm ***ax + by + c = 0*** gebracht worden. Namelijk zo:

$$\boldsymbol{1 \cdot x + 0 \cdot y - 5 = 0}$$

Toegeven: dat ziet er een beetje raar uit. In dit geval heb je $a = 1$, $b = 0$ en $c = -5$.
Precies die termen met deze *a* en *b* zou je normaal niet zo opschrijven. Je zou de a = 1 verzwijgen en de hele b-term, die altijd nul is niet vertonen.
Maar het belang is dat het wel kán, en dat de vorm ***ax + by + c = 0 echt algemeen is.***

Er is nog iets ..
We onderzoeken dit nader met de algemene formule.

- **a.** Vul het punt (x; y) = (5; 7) eens in in de vorm ***1 · x + 0 · y – 5 = 0*** om te controleren of dat punt past bij de vergelijking.
- **b.** Vul het punt (x; y) = (5; 7) eens in in de vorm ***x = 5*** om te controleren of dat punt past bij de vergelijking.

Nu is juist die laatse vraag over invullen in x = 5 wat raar.
Bij de algemene vorm ***1 · x + 0 · y – 5 = 0*** is het duidelijk dat de vergelijking gaat over punten (***x; y***).

Maar was de vorm y = mx + q niet algemeen genoeg? Proberen ...

- **c.** Probeer ook ***x = 5*** om te zetten naar de vorm ***y = mx + q.***
  Er gaat iets mis, waar komt dat door?
- **d.** Leg uit:

*als **b** ≠ **0**, dan kan de vergelijking **ax+ by + c = 0** omgezet worden naar de vorm **y = mx + q** en als **b = 0** kan dat niet.*

2.9 Herleiden naar de vorm x = ...

- **a.** Herleid nu $7x - 3y + 14 = 0$ ook eens tot de vorm $x = n \cdot y + p$.
- **b.** Leg uit:

als **a** ≠ **0**, dan kan de vergelijking ***ax+ by + c = 0*** omgezet worden naar de vorm ***x = n · y + p*** *en als* a = 0 *kan dat niet.*

- **c.** Druk ook *n* en *p* in *a*, *b*, *c* uit.
- **d.** Herleid tot slot de vergelijking **3*y* = 13** tot de vorm ***ax + by + c = 0***

2.10 Verduidelijk!

Herleid de volgende vergelijkingen (indien mogelijk) tot de standaardvorm ***ax+ by + c = 0*** en doe dit net zo volledig als in het voorbeeld **1 · *x* + 0 · *y* – 5 = 0**, dus zo dat alle die van a, b en c echt zichtbaar zijn.

- **a.** $15 = -3x$
- **b.** $7y = 3x - 7(y - x)$
- **c.** $6y - 4 = 9$
- **d.** $x = 0$
- **e.** $y - (x - 1)^2 + 7 + (x + 1)^2 = 9$
- **f.** $(x - y)^2 + (x + y)^2 = 25$

Samenvatting

standaardvergelijkingen

*We weten nu dat alle lijnen in standvorm ax + by +c = 0 kunnen worden opgeschreven. Maar dat **niet** alle lijnen in de vorm y = mx + q of in de vorm x = ny + p kunnen worden opgeschreven. Er is een troost: één van de vormen y = mx + q of x = ny + p is wel altijd beschikbaar. En als er maar één beschikbaar is, is het de simpele vorm y = q of x = p.*

Welke vergelijkingen horen dus bij 'lijnen'?

Precies die vergelijkingen die je kunt herleiden tot de vorm ax + by + c = 0. En dan moeten niet a en b allebei nul blijken te zijn.
Dus wel

$$3x + 4y + 7x - 13 - 8y = 6(3 - x) + 17(y + 2)$$

want dat is te herleiden tot

$$16x + 13y - 65 = 0$$

maar niet

$$x^2 - 3(y - 8) = 0$$

want bij herleiden raak je die x^2 *niet kwijt.*
*Anders gezegd: alle **eerstegraadsvergelijkingen in x en y**. Dat zijn vergelijkingen waar wel x en/of y en gewone getallen in voorkomen, maar geen produkten en hogere machten van x en y.*

Hoe vind je de ligging van de lijn als je de vergelijking weet?

Bij het bepalen van de lijn in het vlak, als je de vergelijking gegeven hebt, kun je altijd gebruik maken van as-doorgang(en), de richtingscoëfficiënt, of de voorstelling y = mx + q of x = ny + p.
Maar soms kun je direct een punt zien dat op de lijn ligt.
Zo ligt op de lijn **$(y - 1) = 1/3 \cdot (6 - x)$** *zeker het punt* **(6,1)***. Want* $0 = 1/3 \cdot 0$*.*
Als je nu ook nog de richtingscoëfficiënt wist.
Dit oefenen we op de volgende bladzijde in een paar opgaven.

Hoe vind je de vergelijking als je de lijn (een beetje) kent?

Eigenlijk hebben we daar al een voorbeeld van gezien: de middelloodlijn! Het hangt dus wel erg af van wat je weet van de lijn!
Maar als je een of twee punten weet, en de richting: dan is er een algemene methode. Die komt in de volgende paragraaf aan bod.

2.11 Bij de samenvatting

a. Lees de samenvatting goed door.
b. In de samenvatting staat misschien ook wel iets dat nog niet in dit hoofdstuk is besproken. Zo ja, wat?
c. Vul de samenvatting aan op punten die je nodig vindt.

2.12 Teken deze lijnen

a. $y = -x/2 + 1$

b. $2x + 3 - y = x + 1$

c. $13\,x + 14\,y = 12$

d. $7\,x + 8\,y = 6$

e. $10\,x + 11\,y = 9$

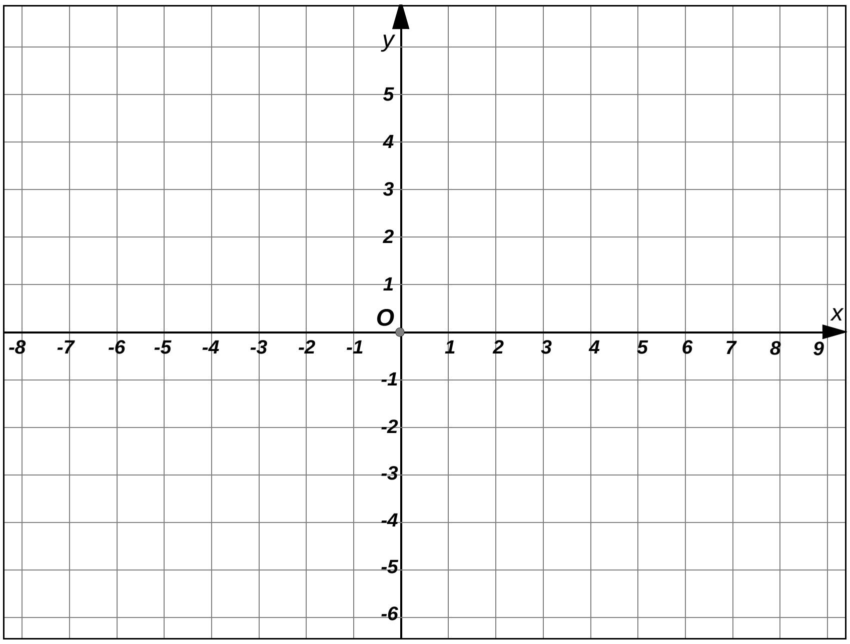
f. $x - 5 = 2\,(y - 3)$

g. $x/3 + y/4 = 2$

h. $x/3 + y/4 = 4$

i. $x/3 - y/4 = 4$

j. $2x = 7$



2.13 Toegift: twee as-doorgangen zichtbaar in de vergelijking

Vergelijkingen $ax + by + c = 0$ waarin a en b allebei ongelijk nul zijn, horen bij lijnen die niet evenwijdig aan de x-as en ook niet evenwijdig aan de y-as zijn. Bij zulke vergelijkingen is het mogelijk en vergelijking te geven met behulp van de as-doorgangen zichtbaar. Een voorbeeld.

a. Vind in welke punten de lijn met deze vergelijking de *y*-as en de *x*-as snijdt:

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{12} = 1$$

b. Teken deze lijn in de figuur hiernaast.

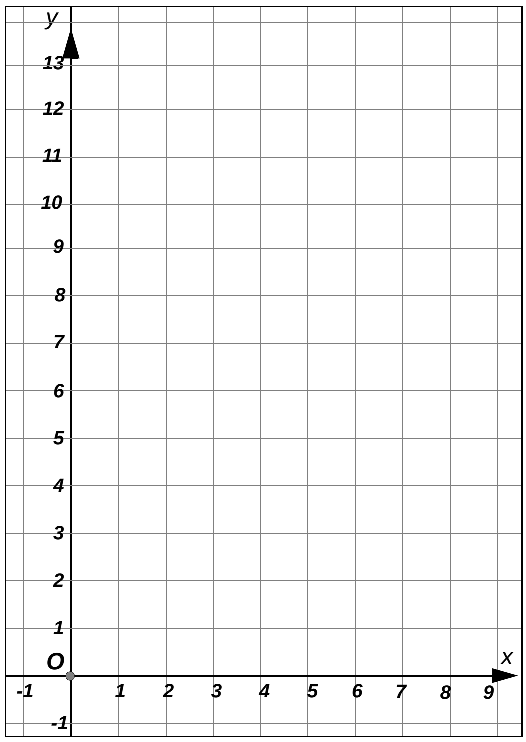
Bij deze figuur is kan de afstand van *O* tot de lijn makkelijk berekend worden. Dat doen we door de oppervlakte van de ingesloten driehoek te bepalen en dan te bedenken dat wie die oppervlakte óók kunnen berekenen met de hoogtelijn op de schuine zijde en de lengte van de schuine zijde zelf.

c. Bereken de lengte *S* van de schuine zijde.

d. Teken de hoogtelijn op de schuine zijde. Noem de lengte *H*.

e. Waarom geldt nu $H \times S = 7 \times 12$?

f. Bereken *H*.



2.14 Vervolg (uitdaging)!)

a. Als we willen weten hoever *O* af ligt van de lijn

$$2x + 5y - 21 = 0$$

kun je eerst de vergelijking in de vorm

$$\frac{x}{\dots\dots} + \frac{y}{\dots\dots} = 1$$

brengen.

Doe dat en bereken de afstand.

b. (extra uitdaging) Doe het ook met de algemene vorm $ax + by + c = 0$.

3: De richting en haar coëfficiënt

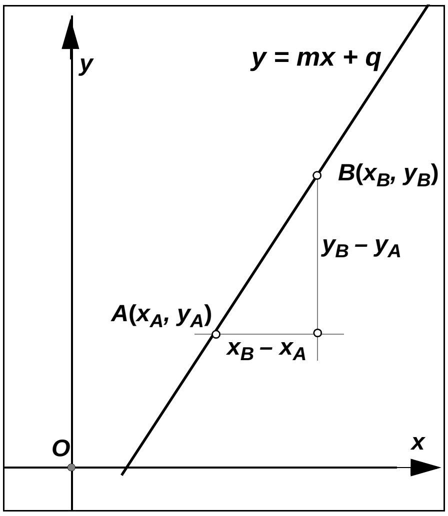
Vooraf
In de vorige paragraaf heb je gezien dat er meer soorten vergelijkingen van rechte lijnen zijn dan die van de soort y = 2x +3.
Je weet ook precies wat voor vergelijkingen bij lijnen horen.
Je weet hoe je bij een gegeven vergelijking de ligging van de lijn kunt vinden, via doorgangen door de assen en de richtingscoëfficiënt.

In deze paragraaf stellen we vergelijkingen op voor lijnen waarvan we iets weten. Bijvoorbeeld dat ze door een bepaald punt gaan.

De hele aanpak berust op een goed inzicht in wat de richtingscoëfficiënt eigenlijk is.
We nemen daar eerst een voorbeeld van.

de richtingscoëfficiënt onder de loep
Wat we eerst gaan aantonen is het volgende:

$$\textit{\textbf{richtingscoëfficiënt}} = \frac{\textit{\textbf{verschil van twee y -waarden}}}{\textit{\textbf{verschil van twee bijhorende x-waarden}}}$$



In de figuur hiernaast liggen *A* en *B* op de lijn en het betekent dus dat de richtingscoëfficiënt ***m*** van de lijn is:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Van belang is:
het maakt niet uit welke punten op de lijn je neemt,
er komt steeds hetzelfde uit.

3.1 De lijn y = 5x - 7 als voorbeeld

a. Vind twee punten die op de lijn ***y = 5x - 7*** liggen en bereken:

$$\frac{\textit{\textbf{verschil van de y -waarden}}}{\textit{\textbf{verschil van de x-waarden}}} .$$

Het maakte niet uit wat je koos! Nu naar het *algemene bewijs*.

b. Neem aan dat de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ op de lijn ***y = 5x– 7*** liggen.
Er geldt dus $y_A = 5x_A - 7$.
Noteer een soortgelijke relatie voor *B*.

c. Laat nu zien hoe uit de relaties voor de punten *A* en *B* inderdaad kan worden afgeleid aan dat gelden:

$$y_B - y_A = 5 \cdot (x_B - x_A) \text{ en } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 5$$

bewezen conclusie en controle
Voor alle punten *A* en *B* op de lijn ***y = 5x - 7*** krijgen we hetzelfde resultaat, namelijk 5, de richtingscoëfficiënt.
BIj andere lijnen gaat dat natuurlijk net zo als je de vergelijking in de vorm ***y = mx + q*** gebruikt.

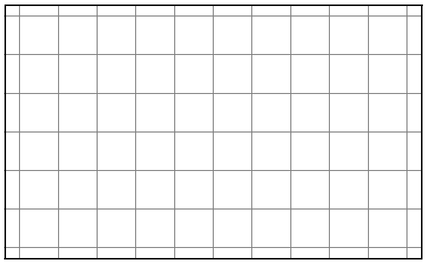
3.2 Zou het ook bij de lijn 3x + 8y – 23 = 0 opgaan?

a. Neem aan dat de punten $C(x_C, y_C)$ en $D(x_D, y_D)$ op die lijn liggen.
Noteer weer de twee relaties voor de punten *C* en *D*.

b. Trek ze weer van elkaar af en laat door herleiding zien dat nu gelden:

$$\mathbf{3} \cdot (\boldsymbol{x_D} - \boldsymbol{x_C}) + \mathbf{8} \cdot (\boldsymbol{y_D} - \boldsymbol{y_C}) = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \frac{\boldsymbol{y_D} - \boldsymbol{y_C}}{\boldsymbol{x_D} - \boldsymbol{x_C}} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$$

Zou dat inderdaad een richtingspijl die hoort bij zijn?



c. Teken in deze figuur de richtingspijl die hoort bij $-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$.

d. Met een klein beetje geluk is een punt op de lijn ***3x + 8y – 23 = 0*** gauw gevonden. Neem bijvoorbeeld y = 0, of y =1, bij een van de twee vind je snel een geschikte x-waarde.

e. Noteer het punt hier op de stippeltjes (in allebei de regels) en leg uit waarom het punt in de tweede regel zeker ook op de lijn ***3x + 8y – 23 = 0*** ligt.

(......; ......)

(..... + 0.0088; ...... - 0.0033)

Vergelijking van de lijn door gegeven punt met gegeven richting

Uit de laatste opgave kun je zien dat ook de ***3x + 8y – 23 = 0*** een richtingscoëfficiënt heeft. Maar die is niet 3, 8 of -23!
Andersom: als we de richtingscoëfficiënt van een lijn weten én een punt op de lijn weten, dan weten we precies hoe de lijn ligt en moet de vergelijking te vinden zijn.
Voorbeeld laat zien hoe dat gaat met.
Neem in het voorbeeld punt (4, 1) en richtingscoëfficiënt 0,75.

We zoeken de vergelijking die daar bij hoort.
We hebben zeker punt (4; 1) op de lijn
Denk aan een andere nog onbekend punt dat op de gezochte lijn ligt. Noem het (x; y)

Door de twee punten ligt de richtingscoëfficiënt vast en die moet 0,75 zijn.
We passen de formule voor de richtingscoëfficiënt van opgave 3.1 toe met de punten *A*(4; 1) en *B*(*x; y*) en met 0,75 in plaats van 5 voor de richtingscoëfficiënt.

Resultaat:

$$\frac{\boldsymbol{y} - \mathbf{1}}{\boldsymbol{x} - \mathbf{4}} = \mathbf{0,75}$$

De lijn vergelijking daarbij is natuurlijk deze:

$$\boldsymbol{y} - \mathbf{1} = \mathbf{0,75} \cdot (\boldsymbol{x} - \mathbf{4})$$

Dat is een prima eerstegraadsvergelijking voor de lijn waarin het punt (4; 1) en de richtingscoëfficiënt 0,75 mooi zichtbaar zijn. Beet!

Je zou - een beetje te braaf - de vergelijking om kunnen werken naar de modelvorm ***ax + by + c = 0***.
Maar waarom zou je? In de vorm die er nu staat zie je prachtig wat de de lijn is.

3.3 *Voorbeeld twee en de algemene formule*

a. Stel een vergelijking op voor de lijn door (13; -7) met richtingscoëfficiënt –2 . Bereken de doorgang door de *y*-as.

b. Stel een vergelijking op voor de lijn door (13; 34) met richtingscoëfficiënt 1,6. Gaat deze lijn door de oorsprong?

c. De algemene aanpak is nauwelijks anders.
Stel de vergelijking op van de lijn die gaat door $\boldsymbol{A(x_A, y_A)}$ en richtingscoëfficiënt $\boldsymbol{m}$ heeft.

3.4 *Het model van ax + by + c = 0 werkt ook*

a. Stel een vergelijking op van de lijn door (8; 3) met richtingscoëfficiënt $-\mathbf{\frac{12}{7}}$ met behulp van de formule in opgave 3.2.

b. Stel een vergelijking op van de lijn door (-8; 11) met richtingscoëfficiënt $\mathbf{\frac{5}{2}}$ met behulp van de formule in opgave 3.2.

c. Stel een vergelijking op van de lijn door (2, 5) die evenwijdig is aan de lijn 4 x - 3 y + 23 = 0.
Het is handig in de vergelijking de onderdelen (x – 2) en (x – 5) in te bouwen.

d. Stel de vergelijking op van de lijn die gaat door $\boldsymbol{A(x_A, y_A)}$ en evenwijdig is aan de lijn $\boldsymbol{ax + by} = 0$.

Vergelijking van de lijn door twee gegeven punten A en B

3.5 *Door twee gegeven punten*

a. Wat is de richtingscoëfficiënt van de lijn die gaat door de punten (3; 6) en (15; 6)?

b. En wat is dan de vergelijking van die lijn?

Je hebt vast de methode van vraag 3.3 gebruikt.
Er is echter maar één richtingscoëfficiënt maar je kunt tweé keuzes maken voor punt A, namelijk de punten (3; 6) en (15; 6). Dus is er nog een andere vergelijking mogelijk!

c. Stel die ook op en laat zien dat de twee vergelijkingen gelijkwaardig zijn; dat wil zeggen dat de de ene vergelijking algebraisch uit de andere kunt afleiden.

3.6 *Oefenen*

a. Stel een vergelijking op van de lijn die door (1; 2) en (11; 6) gaat.

b. Evenzo voor (0; 8) en (3; 0).

c. Herleid die laatste vergelijking ook tot de vorm $ax + by = 1$, waarin a en b eenvoudige breuken zijn.
Is er verband met een eerdere opgave uit dit blok?

3.7 *De kruisproductvorm*

In het voorgaande zagen we hoe de vergelijking van een lijn door $A(x_A, y_A)$ met gegeven richtingscoëfficiënt $\boldsymbol{m}$ er uit ziet:

$$\boldsymbol{y - y_A = m \cdot (x - x_A)}$$

Omdat ook $B(x_B, y_B)$ op de lijn ligt, kennen we de richtingscoëfficiënt ook.

a. Laat zien hoe de volgende vergelijking in *kruisproductvorm* daaruit kan worden afgeleid:

$$\boldsymbol{(y - y_A) \cdot (x_B - x_A) = (x - x_A) \cdot (y_B - y_A)}$$

b. Vul je de coördinaten van punten $A(x_A, y_A)$ in deze vergelijking in, dan zie je duidelijk dat het klopt, want 0 = 0.
Vul je $B(x_B, y_B)$ in, dan moet er ook gelijkheid ontstaan. Is dat zo? Is het óók de 0 = 0 gelijkheid of iets anders?

3.8 Oefenen

Stel een vergelijking in kruisproductvorm op van de lijnen op die gaan door:

a. (1; 2) en (3; 4).

b. (10; 20) en (30; 40). (Zijn de lijnen van **a** en **b** dezelfde?)

c. (13; -5) en (-11; 7).
Invullen wijst uit: (1; 1) ligt op deze lijn. Kun je dat ook met minder rekenwerk verklaren? (Tip verschuif de drie punten (13; -5), (-11; 7) en (1; 1) samen zó, dat (1; 1) op de oorsprong komt)

3.9 Circusact met dansers en in het donker

Een koorddanser in blauw tenue wandelt over het koord x = 3. Hij start in (3; 0) en loopt noordwaarts.
Een koordanseres (in geel) start in (20; 3) en loopt westwaarts op de lijn y = 3 met dezelfde snelheid.
Jouw plaats in dit circus is bij (-10; -10) en je volgt de danser met een scherpe volgspot, zodat het publiek hem fraai uitgelicht ziet en haar niet opmerkt.
De drummer voert de spanning op met een langdurige roffel .....

.... Waar verschijnt plotseling de danseres en is de danser ineens verdwenen?
[Tip de danser heeft coordinaten (3; t). En de danseres?]

3.10 Uitzonderingen bestaan niet meer

Denk eens terug aan de vergelijking ***y = mx + q***.
De meeste lijnen in het vlak kun je op die manier wel beschrijven, maar sommige niet.

a. Welke lijnen in het vlak kon je zo *niet* weergeven?

b. Hebben zulke lijnen een richtingscoëfficiënt?

In deze paragraaf is de kruisproductvergelijking afgeleid met behulp van de richtingscoëfficiënt.

c. Kies nu eens twee punten *A* en *B* op de lijn x = 5 en bouw de vergelijking in kruisproductvorm voor de lijn door de punten *A* en *B*.

d. Dat ging vast *toch* goed. Maar hoe kan dat nou? De richtingscoëfficiënt bestond toch niet in dit geval? Hoe komt het dat delen-door-nul in de kruisproduct vergelijking automatisch vermeden wordt?

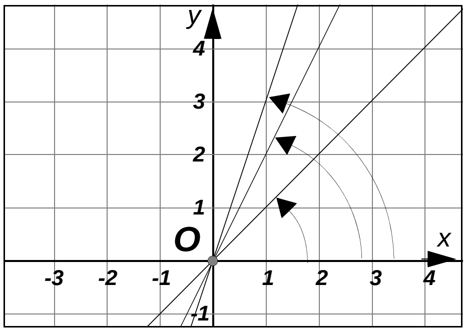
Belangrijke constatering:

de kruisproductvorm is net zo algemeen toepasbaar als de vorm ax + by + c = 0
Ook in de kruisproductvorm kunnen de lijnen evenwijdig aan de assen
prima worden voorgesteld.

4: Richtingscoëfficiënt en hoek

De richtingscoëfficiënt van een lijn is niet zelf de hoek die de lijn met de *x*-as maakt, maar hangt er wel mee samen. Dat onderzoeken we nu.

4.1 Lijnen door O

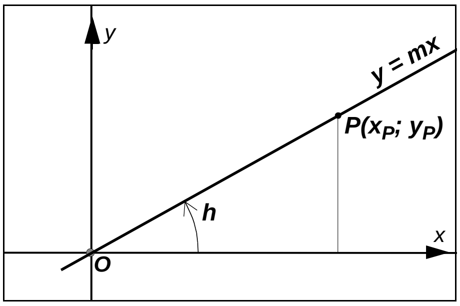


a. In de figuur hiernaast zie je de drie lijnen die gaan door
O en (1; 1)
O en (1; 2)
O en (1; 3)
Bepaal van de drie lijnen de richtingscoëfficiënt en de hoeken die ze maken met de x-as.
Bij dat laatste gebruik je de rekenmachine, maar één van de drie hoeken moet je zonder rekenmachine ook kunnen bepalen!

b. Geef een recept voor het bereken van de hoek die een lijn ***y = mx*** maakt met de *x*-as.

c. Welke hoek maakt de lijn ***y = – x*** met de positieve *x*-as?

4.2 De tangens



Een voorbeeld staat in de figuur hiernaast. De lijn is die met vergelijking ***y = mx***. Op de lijn ligt $P(x_P; y_P)$.

a. Schrijf de vergelijking op met punt *P* erin ingevuld.

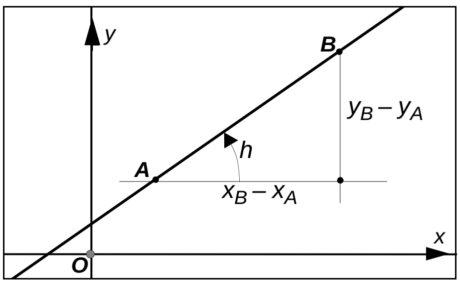
b. Zet de lengtes van de rechthoekszijden (in de coordinaten van *P* uitgedrukt) bij de rechthoekige driehoek in de figuur. Laat met behulp van de driehoek zien dat

$$\tan(h) = m$$

c. Stel nu de vergelijking van de lijn door O op, waarbij de hoek met de *x*-as 25° is.

Als de lijn waar het over gaat, niet door O gaat, maar door twee bekende punten *A* en *B*, dan kun je werken met dezelfde techniek; je gebruikt een hulpdriehoek waarvan *AB* de schuine zijde is.

4.3 Het algemene geval



Hier is *h* de hoek die de lijn door *A* en *B* met de horizontale lijnen en dus ook de x-as maakt.

a. Leg uit waarom voor de richtingscoëfficiënt m van deze lijn geldt:: $m = \tan(h) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

b. Leg uit waarom dit de vergelijking van de lijn door A en B is:

$$y - y_A = \tan(h) \cdot (x - x_A)$$

4.4 Vraag het de rekenmachine

a. Stel de vergelijking op van de lijn door (0; 0) die een hoek maakt van 35° met de x-as.

b. Welke hoek maakt de lijn ***y = 2x*** met de *x*-as?

c. Welke hoek maakt de lijn die door de punten (1; 1) en (7; -3) gaat met de *x*-as?
Schrijf de vergelijking op met tangens van die hoek erin.

d. Stel de vergelijking op van de lijn door (0; 3) die een hoek van –40° met de x-as maakt.

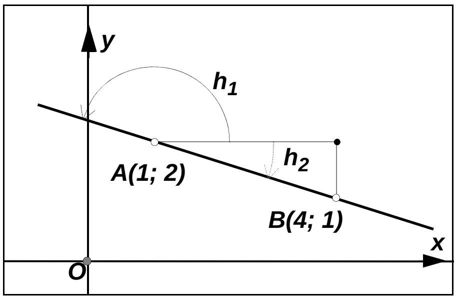
e. Stel de vergelijking op van een lijn die een hoek van 45° met de lijn *y* = ½ *x*.

Een afspraak over de hoek

In het voorgaande zag je steeds de hoek afgebeeld met een pijltje dat bij de horizontale richting begon en een draai linksom aangaf. Er zijn hoeken waar het niet zo voor de hand ligt dat zo te doen. We onderzoeken zo'n voorbeeld als dat in onderdeel c van opgave 4.4.

4.5 Klopt dat allemaal?

Hiernaast zie je een voorbeeld waar punt *B* rechts*onder* *A* ligt. Hoek h_1 is volgens de afspraak van zojuist ongeveer 160°.



a. In de figuur is de ligging van de punten: *A*(1; 2) en *B*(4; 1). Bepaal nu eerst tan(*h*) en daarna *h* zelf met je rekenmachine via de formule

$$\tan(h) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

b. Bepaalt je rekenmachine nu h_1 of h_2 ?

c. Als je een van de hoeken h_1 en h_2 weet, weet je de ander ook. Ga (met een paar keuzen voor h_1) na of je rekenmachine wél vindt dat $\tan(h_1) = \tan(h_2)$

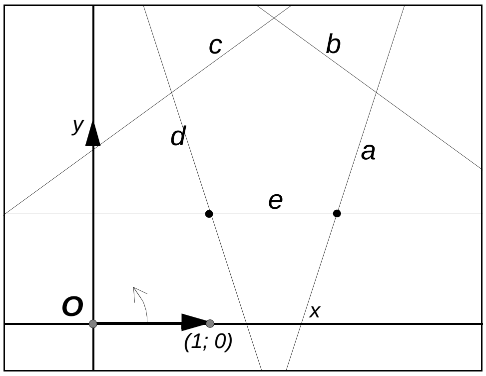
d. Leg uit waarom dit deze twee vergelijking van de lijn door *A* en *B* precies evn goed zijn:

$$y - 2 = \tan(h_1) \cdot (x - 1) \qquad \text{en} \qquad y - 2 = \tan(h_2) \cdot (x - 1)$$

Op grond van dit onderzoek zien we: voor de bepaling van de richtingscoëfficiënt maakt het niet welk van de twee *h*'s we kiezen. Maar voor de hoek zelf kunnen we beter een afspraak maken om onduidelijkheid te voorkomen.

Dé afspraak over de hoek met de x-as

De hoek van een lijn met de x -as is de hoek die de pijl van O naar (1; 0) linksom moet draaien om evenwijdig te komen met de lijn.



4.6 Regelmatige vijfhoek

(1; 1) en (2; 1) zijn hier twee hoekpunten van de regelmatige vijfhoek die hier door vijf lijnen wordt ingesloten.
Wat zijn de hoeken die de lijnen ***a, b, c, d, e*** met de *x*-as maken?

Samenvatting

Volgens de afspraak overhoeken van lijnen krijg je alleen hoeken tussen 0° en 180° graden.
Je kunt ook de richting ook met negatieve hoeken kunt aangeven. Je draait het pijltje dan rechtsom en werkt met negatieve getallen.
Dit is de regel: hoeken die 180° verschillen (of een veelvoud daarvan) horen bij dezelfde lijn; als het over lijnen gaat, ***het zijn eigenlijk dezelfde hoeken.***

De vergelijking voor een lijn door A(x_A; y_A) die een hoek h met de x-as maakt is:

$$\boxed{y - y_A = \tan(h) \cdot (x - x_A)}$$

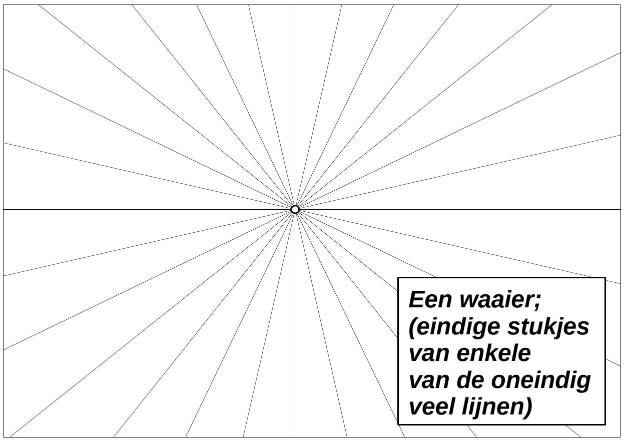
Da tangens, die in eerste instantie alleen bepaald was voor hoeken tussen 0 en 90°, wordt door deze vergelijking automatisch vastgelegd voor de hoeken die hier omschreven zijn.

5: Waaiers en snijdende lijnen

Waaiers. Van linksboven met de klok mee: Frans 18e eeuw, Hibari, Solar-vintage (met zonnecellen), Homefront General Store; Louis Vuitton

Een serie lijnen door één punt: een waaier. De handwaaiers in de illustratie gebruiken van de lijnen steeds een klein stukje.

In de wiskunde is een *waaier* de verzameling van *alle hele* lijnen door één punt. Het vaste punt heet het *centrum* van de waaier.



5.1 De waaier met centrum (2; 7)

Voor de lijnen van deze waaier staan nu enkele vergelijkingen ter keuze is deze algemene vergelijking dus een goed voorstel:

$$\boldsymbol{y} - \mathbf{7} = \mathbf{tan}(\boldsymbol{h}) \cdot (\boldsymbol{x} - \mathbf{2})$$

a. Door een andere punt, - bijvoorbeeld (–3; 2) -in de vergelijking in te vullen, kun je de waarde van ***h*** bepalen, waarvoor de lijn door dat punt gaat. Doe dat.

b. Is het zo dat voor elk punt in het vlak er op deze manier één lijn in de waaier gevonden wordt die door dat punt gaat, of zijn er uitzonderingen op deze regel?

5.2 Het algemene geval $A(x_A; y_A)$

a. Laat zien dat we de uitzonderingssituaties, net als in het begin van deze paragraaf, kunnen wegnemen door de *tangens* als quotiënt te schrijven. Herleid daarbij de vergelijking tot:

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{h}) \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_A}) = \mathbf{sin}(\boldsymbol{h}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_A})$$

b. Voor welke waarde van *h* vinden we in deze waaier:

de horizontale lijn, de lijnen evenwijdig aan ***x* = *y*** en ***x* = –*y*,** de verticale lijn.

c. Schrijf in deze vorm de vergelijking op van de lijn door (4; 8) die een hoek van 45° met de x-as maakt.

d. Schrijf in deze vorm de vergelijking op van de lijn door (4; 8) die een hoek van 30° met de x-as maakt.
[Herinner je: sin (30°) = ½ en cos (30°) = ½ √3.]

5.3 Twee waaiers hebben altijd één lijn samen

Neem de twee waaiers met centra (3; 1) en (5; 2).

a. Er is één lijn die tot beide waaiers hoort. Welke lijn is dat dan?

b. Stel de vergelijking van die lijn op in de twee vormen die bij de twee waaiers passen. Zijn de vergelijkingen gelijkwaardig?

c. Is het *altijd* zo dat twee verschillende waaiers één lijn gemeen hebben? Ook als de centra op een verticale lijn liggen?

Twee snijdende lijnen horen altijd bij één waaier
Daar hoef je nauwelijks over te denken: het is de waaier met het snijpunt van de twee lijnen als centrum. Maar spannender is de vraag: kunnen we vanuit die twee lijnen, op een makkelijke manier meer lijnen van die waaier vinden?

5.4 Méér lijnen van een waaier vinden.

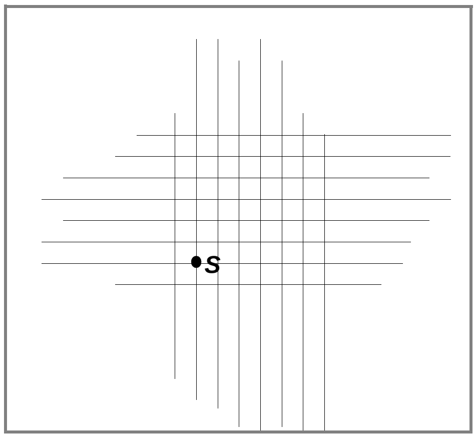
Deze twee lijnen zijn niet evenwijdig:

$$-6x + y + 27 = 0 \text{ en } x - 3y + 4 = 0.$$

a. Toon dat aan door de richtingscoëfficiënten te bepalen.

Dan moeten ze elkaar dus snijden. En is er een waaier waar deze twee lijnen bijhoren.
Je zou kunnen proberen het snijpunt te vinden, maar we gaan op avontuur en vinden méér lijnen van de waaier nog zonder dat we het snijpunt weten!
Maar we geven het snijpunt wel een naam: *S. S ligt dus op beide lijnen*

b. In de figuur hiernaast is *S* aangegeven, een stukje van het rooster maar niet de assen.
Toch kun je de twee lijnen nu tekenen omdat je dr richtingen weet.
Doe dat.



c. Als iemand (die ze wel kent) de coördinaten van *S*
in $\mathbf{-6x + y + 27}$ en in $\mathbf{x - 3y + 4}$
zou invullen, wat zou die dan als uitkomsten krijgen?

d. En als die de coördinaten van *S* zou invullen in
$\mathbf{2(-6x + y + 27) - 5(x - 3y + 4)}$
wat is dan de uitkomst?

e. Vereenvoudig nu de vergelijking
$\mathbf{2(-6x + y + 27) - 5(x - 3y + 4) = 0}$
om de richtingscoëfficiënten ervan te bepalen en teken de lijn in de figuur.

f. Verklaar, dat als *A* en *B* twee getallen zijn, niet allebei 0,
dat dan de lijn die bij deze vergelijking hoort
$\mathbf{A(-6x + y + 27) + B(x - 3y + 4) = 0}$
steevast door *S* gaat.

g. Schrijf nu nog eens twee vergelijkingen op van lijnen van de waaier met *S* als centrum.
Je hebt veel keus voor *A* en *B*!

h. De kunst is door speciale keuzes van *A* en *B*, ook speciale lijnen te vinden.
Bijvoorbeeld *A* = 1, *B* = 6. Die lijn is echt makkelijk te tekenen, want die is horizontaal!
Hoe kun je dat direct zien aan $\mathbf{1(-6x + y + 27) + 6(x - 3y + 4) = 0}$
Breng de vergelijking in de eenvoudige vorm $\mathbf{y = ...}$

i. Vind ook een keus voor *A* en *B* zodat de lijn vertikaal loopt.
Breng die vergelijking in de eenvoudige vorm $\mathbf{x = ...}$

j. Uit de resultaten bij *h* en *i* kun je de coördinaten van *S* vinden. Wat zijn ze?

Terugblik op het vinden van nieuwe lijnen in een waaier

We onderzochten twee lijnen, waarvan we wisten dat ze moesten snijden, omdat de richtingscoëfficiënten ongelijk waren.
Om de gedachten te bepalen schrijven we de vergelijkingen schetsmatig zó op, want we kijken hoe het verhaal liep, en even niet naar de specifieke getallen:

Uitdrukking1 = 0 en ***Uitdrukking2 = 0***

Er bestaat een (nog onbekend) snijpunt S. Dus er bestaat een waaier met centrum S.

Nieuwe lijnen van die waaier kunnen we maken bij de vleet. Voor elke twee getallen *A* en *B* is dit er een:

A (Uitdrukking1) + B (Uitdrukking2) = 0

Want *S* zorgt er voor dat beide stukken links de waarden 0 hebben als *S* in gevuld zou worden.

Het is mogelijk een handige combinatie van *A* en *B* te kiezen, zodat in de vergelijking

A (Uitdrukking1) + B (Uitdrukking2) = 0

bij vereenvoudigen helemaal geen ***x*** meer voorkomt. (Dat is in onderdeel *h* voorgedaan bij het voorbeeld.)
Dit is dan is een vergelijking die te herleiden is tot de vorm

y = p

Dit is het horizontale exemplaar van de waaier, en *p is de y- coördinaat van S*!

Op net zo'n manier vind je de *x-coördinaat* van *S*; door een andere handige keus voor *A* en *B* te maken, waardoor juist *y* wegvalt. Je houdt na vereenvoudigen over

x = q

Dit is het verticale exemplaar van de waaier, en *qis de y- coördinaat van S*!
De coördinaten van het snijpunt *S* zijn gevonden!

Oefenen

Het vinden van een snijpunt van twee lijnen heet in vergelijkingentaal: twee vergelijkingen met twee onbekenden oplossen. Het is een belangrijke techniek!
Let er bij de volgende oefenvoorbeelden zelf op, óf je wel oplossingen kunt vinden. Ofwel: dat de richtingscoëfficiënten ongelijk zijn. Het bespaart je een hoop tijd .....

5.5 Oefenen in oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden

Volg nauwkeurig de stappen van hier boven om de volgende stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden op te lossen.

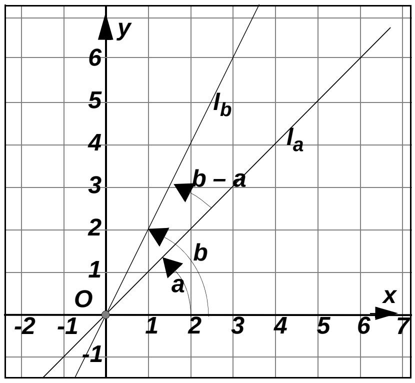
a. $\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 3x - 5y - 13 = 0 \end{cases}$. **b.** $\begin{cases} 2x + 5y - 11 = 0 \\ 5x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$. **c.** $\begin{cases} y - 4 = 0 \\ 5x - 3y + 32 = 0 \end{cases}$. **d.** $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 5x - 3y - 32 = 0 \end{cases}$.

e. $\begin{cases} 2x - 4y - 1 = 0 \\ -x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$. **f.** $\begin{cases} 13x - 8y - 1 = 0 \\ 21x - 13y - 1 = 0 \end{cases}$.

6: Werken met hoek en richtingscoëfficiënt

De hoek tussen twee lijnen

Tot nu toe bepaalden we bij lijnen alleen de hoek ten opzichte van de *x*-as.
Nu kijken we naar de hoek van twee lijnen onderling.



In deze figuur is de hoek tussen de twee lijnen l_a en l_b het verschil van de hoeken *a* en *b* die de lijnen met de *x*-as maken.

Nauwkeuriger wat betreft het preciese verschil:

Als a en b de hoeken zijn die de lijnen l_a en l_b met de x-as maken, dan is de hoek die l_b maakt met l_a gelijk aan b – a.

6.1 *Nader onderzoek naar richting en teken*

a. Bereken (eventueel met de rekenmachine) de hoeken *a* en *b* in de figuur en de '*de hoek die l_b maakt met l_a*'

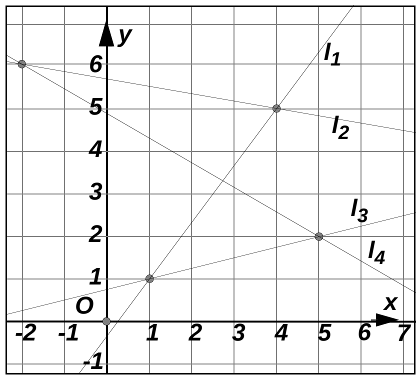
b. *Pas op:*

Wat is de hoek die l_a maakt met l_b?

In dit voorbeeld gingen beide lijnen door *O*. Dat is echter niet van belang, behalve dat je dan makkelijker de richtingscoëfficiënten kunt vinden.

Bij de volgende voorbeelden kun je allemaal met de dezelfde regel de hoek tussen een lijn en een andere lijn bepalen, alleen moet je wel eerst de richtingscoëfficiënten en de hoeken met de *x*-as bepalen.

6.2 *De tangens-methode op volle kracht laten werken*



a. Bereken de hoeken die de vier lijnen met de *x*-as maken.
Bereken de hoek die

b. die l_1 maakt met l_2

c. die l_2 maakt met l_3

d. die l_3 maakt met l_4

e. die l_1 maakt met l_3

f. die l_2 maakt met l_4.

g. De antwoorden op vraag e en f kun je ook vinden door eerder antwoorden b t/m d te gebruiken, dus zonder terugkijken naar de hoeken met de x-as. Hoe dan?

6.3 *Een andere (?) hoek-afspraak*

Eerder hadden we deze afspraak:

De hoek van een lijn met de x -as is de hoek die je de pijl van O naar (1; 0) linksom moet draaien om evenwijdig te komen met de lijn.

a. Laat zien dat je de ook over de hoek tussen twee willekeurige lijnen l_1 en l_2 zo'n afspraak met een draaiende pijl kunt maken zonder hoeken met de *x*-as, door in plaats van O het snijpunt van de lijnen te gebruiken.

b. Wat is een goede afspraak voor de groote van de hoek tussen twee lijnen die elkaar *niet* snijden?

gerichte of georiënteerde hoeken

Op de vorige bladzijde is vast komen te staan dat we met de richtingscoëfficiënt en de tangens alle hoeken tussen lijnen kunnen uitrekenen.
Er blijkt dat we ook de richting van de hoek kunnen vaststellen. Zo zijn de hoeken

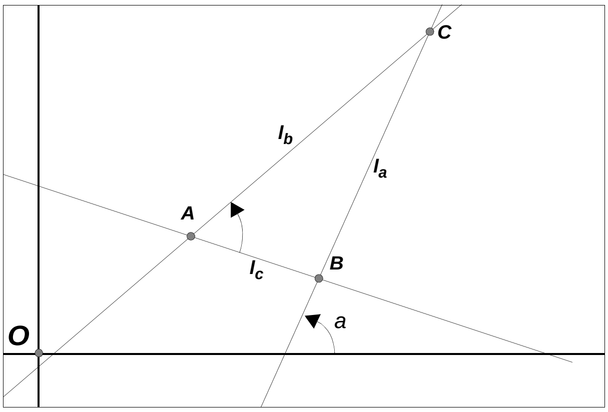
de hoek tussen lijn l_1 en lijn l_2 en *de hoek tussen lijn l_2 en lijn l_1*

elkaars tegengestelde!
Als je nauwkeurig werkt leveren de berekeningen met richtingscoëfficiënt en tangens dat ook precies op.
We spreken van *gerichte* of *georiënteerde* hoeken; omdat we de hoeken in feite meten door draaien van een pijl in de linksom-richting.

De georiënteerde hoeken van een driehoek

6.4 Verassende hoeken in de driehoek.

Hier is een driehoek *ABC* getekend; de zijden zijn de lijnen l_a, l_b en l_c. De georiënteerde hoeken ten opzichte van de *x*-as zijn *a, b* en *c.*



a. Voeg de pijltjes voor *b* en *c* aan de figuur toe.

Er geldt *hoek A = b - c*.

b. Druk ook de *georiënteerde* hoeken *B* en *C* in *a, b* en *c* uit.
Voeg ook pijltjes toe bij de hoeken *B* en *C.*

c. Toon aan dat de som van de *georiënteerde* hoeken *A, B* en *C* gelijk aan 0 is.

Er lijkt niets van te kloppen wat hier in c staat. De som van de drie hoeken was vroeger immers 180°!
Op twee manieren kun je jezelf meer helderheid verschaffen.

d. *Eerste manier:* Leg een potlood op lijn op lijn l_c. Draai nu lijn l_c rond *A* linksom naar l_b, dan rond *C* linksom naar l_a, dan rond *B* linksom naar uitgangspositie l_c.
Hoeveel graden is de lijn (het potlood) gedraaid? Wat is de hoek die het potlood nu maakt met lijn l_c?

e. *Tweede manier: Zoek op bladzijde 21 iets hierover in de 'Samenvatting'.*

Samenvatting van deze paragraaf

Je hebt geleerd wat de samenhang is tussen de richtingscoëfficiënt m en de tangens van de hoek die een lijn maakt met de x-as:

tan(h) = m.

Je hebt gezien dat je met behulp van coördinaten en vergelijkingen die hoek altijd kunt uitrekenen.

Bij de uitzonderingsgevallen is de lijn evenwijdig aan de y-as. Dan is de hoek h 90° graden, maar de richtingscoëfficiënt en de tangens bestaan niet.

Je hebt gezien dat hoeken van lijnen onderling maar tot 180° graden gaan.
De hoeken heten ***georiënteerd*** *en de hoek tussen de lijnen l_1 en l_2 is het tegengestelde van de hoek tussen l_1 en l_2.*
Het betekent dat je soms verassende resultaten krijgt als je met deze hoeken werkt. Zo is de som van de hoeken van een driehoek nu gelijk aan 0.
Maar bij coördinaten en vergelijkingen, met de tangens en de richtingscoëfficiënt werkt het optimaal!

7: Hoek verdubbelen, lijnen spiegelen

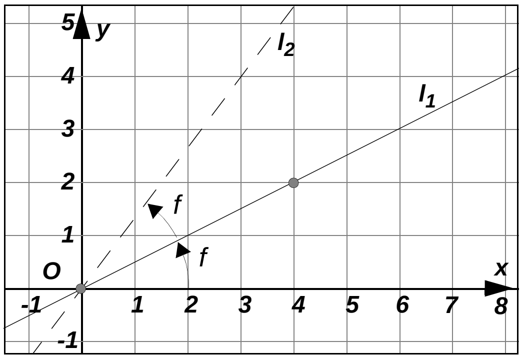
Doordat we de richting van de lijn in een getal (de tangens van een hoek) hebben gevangen, kunnen we ermee rekenen en redeneren bij verbanden tussen lijnen. Deze paragraaf bevat enkele voorbeelden daarvan.

Verdubbelen van de hoek

7.1 De lijn door O en (4; 2)

In de figuur is de lijn $y = ½x$ getekend. Dat is lijn l_1; deze gaat zeker door (4; 2). De lijn maakt een hoek f met de x-as.

Lijn l_2 maakt met l_1 dezelfde hoek als lijn l_1 met de x-as maakt; zie de twee f-jes bij *de hoekpijlen.*



a. Bedenk een plan om de vergelijking van de lijn l_2 te bepalen met behulp van wat je in het voorgaande over tangens en richtingscoëfficiënt geleerd hebt.
Voer daarna het plan uit. Je hebt je GR nodig.

b. Controleer door invullen in de vergelijking of punt (3; 4) op l_2 ligt.

c. Als je rekenmachien bij invullen een gelijkheid gaf, in de pakweg 10 decimalen die het ding kan leveren, was het dan absoluut zeker dat punt (3; 4) exact op l_2 ligt?

Een stevig computerprogramma geeft het volgende decimale getal voor de hoek f in graden:
26,565051177077989351572193720453294671204214299645221027986016315 ....
Daar is niet veel regelmaat in te zien, en het zou een raar toeval zijn als voor tan(2f) door dat zelfde computerprogramma een regelmatig decimaal getal wordt aangewezen, voor de eerste 80 decimalenaangewezen met:. Het is dit:
1.3333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333..........
Het is geen slecht vermoeden te denken dat dit inderdaad 4/3 is. Als het waar is, ligt inderdaad (3; 4) op l_2

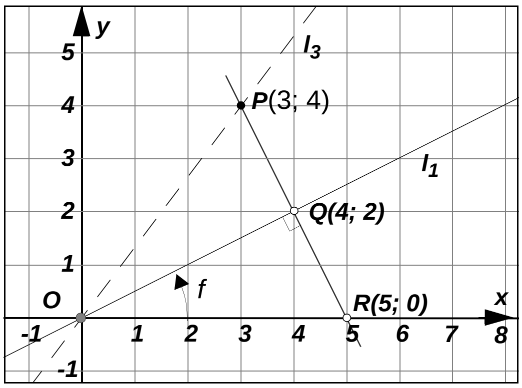
7.2 Het vermoeden bewijzen!

In deze figuur zie je dezelfde lijn l_1 en hoek f.

Ook is lijn l_3 aangegeven; dat *is* de lijn die door O en (4; 3) gaat. Wat we gaan bewijzen is dat l_3 precies dezelfde lijn is als l_2 door meetkundige te bewijzen dat de hoek tussen l_3 en l_1 gelijk is aan f.

De punten (4; 2), (3; 4) spelen natuurlijk een grote rol in het bewijs, dat de lijnen l_1 en l_3 behalve door OO ook door die punten gaan, is het uitgangspunt.

Maar let nu op (5; 0)!



a. Toon aan dat
P(3; 4), Q(4; 2) en R(5; 0) op één rechte lijn liggen
dat die lijn loodrecht staat op l_1
dat Q het midden van PR is

b. De twee driehoeken in de figuur zijn ......
Toon dat aan en maak het bewijs dat de hoeken bij O gelijk zijn, af.

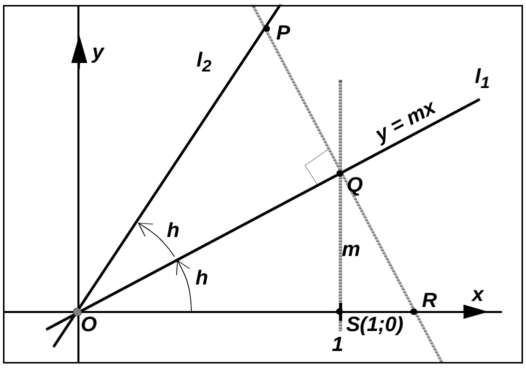
Je kunt het resultaat van deze opgave ook zo lezen: als de tangens van een hoek 1/2 is, dan is de tangens van het dubbele van de hoek 4/3.
In de volgende opgave gaan we het bewijs van zo even hergebruiken om een algemeen verband te vinden tussen de tangens van een hoek en de tangens van het dubbele van de hoek.

7.3 ***Afleiding van de verdubbelingsformule voor de tangens.***

We nemen weer de lijn $\boldsymbol{y = mx}$; dat is nu onze lijn $\boldsymbol{l_1}$.
Lijn $\boldsymbol{l_2}$ vinden we door verdubbelen van de hoek bij *O*.
We willen weten hoe de richtingscoëfficiënt van l_2 van *m* afhangt.
We gebruiken eigenlijk het idee van de vorige opgave, met het loodrecht op $\boldsymbol{l_1}$ staande grijze lijntje.
We geven nu Q de coordinaten (1; m). Let even op het punt S(1; 0)
Gegeven is nu:

de hoeken bij *O* zijn gelijk

$PQR \perp l_1$.



a. Laat zien dat *QSO* en *RSQ* gelijkvormige driehoeken zijn.
b. Bereken daarmee *SR* en schrijf de coördinaten van *R* op. (De *x*-coördinaat hangt van *m* af)

c. Van Q en R weten we nu de coördintaen. We weten ook dat Q midden tussen P en R ligt. Druk nu coördinaten van *P nu* en die van *R* en *Q* uit en uiteindelijk in *m*.
d. Teken voor de duidelijkheid ook de loodlijn uit *P* op de x-as en laat zien dat:

$$\tan(2h) = \frac{2m}{1-m^2}$$

7.4 ***De formule getoetst***

a. Controleer of deze verbanden tussen *h*, 2*h* en *m* opgaan voor het geval *h* = 30°, 60° en 26,5650511770779893515721937204532946712042142996452210279860163 15 ....°.
b. Neem eens *h* = 44,9° en bereken tan(2*h*) op twee manieren:

door de tan(2 * *h*) te berekenen

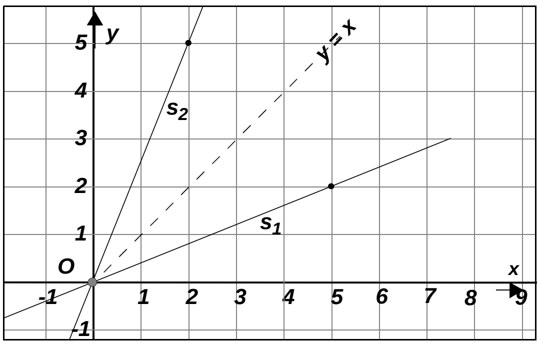
door *m* = tan(*h*) te berekenen en dan $\frac{2m}{1-m^2}$ te berekenen.

c. Als *h* = 45° komt er een probleem bij het uitrekenen van tan(2*h*) en ook van *m*. Wat gebeurt er dan? En hoe erg is dat nu eigenlijk?

Spiegelen en richtingscoëfficiënten

7.5 ***Spiegelen in de lijn x = y; lijnen door O***

De lijnen $\boldsymbol{s_1}$ en $\boldsymbol{s_2}$ zijn elkaars spiegelbeelden in de lijn $\boldsymbol{y = x}$.
Lijn $\boldsymbol{s_1}$ gaat door (5; 2)

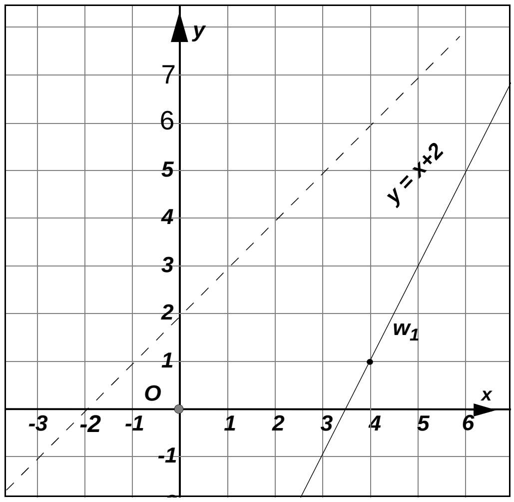


a. Leg uit waarom geldt dat $\boldsymbol{s_2}$ door (2; 5) gaat.
b. Schrijf de richtingscoëfficiënten van $\boldsymbol{s_1}$ en $\boldsymbol{s_2}$ als breuken op. Wat valt er op? Wat komt er uit als je ze met elkaar vermenigvuldigt?
c. De lijn $\boldsymbol{k_1}$ (niet getekend in de figuur) gaat door O en door het punt (*a*; *b*). Als $\boldsymbol{k_2}$ het spiegelbeeld van k_1 in de lijn $\boldsymbol{y = x}$ is, dan gaat $\boldsymbol{k_2}$ door (*b*; *a*).
d. Laat zien dat het product van de richtingscoëfficiënten van $\boldsymbol{k_1}$ en $\boldsymbol{k_2}$ weer gelijk aan **1** is.

7.6 Spiegelen; algemeen

De lijn w_1 gaat door (4; 1) en heeft richtingscoëfficiënt 2.
De vergelijking is dus: $\boldsymbol{y - 1 = 2(x - 4)}$

a. Teken het spiegelbeeld $\boldsymbol{w_2}$ van $\boldsymbol{w_1}$ in de lijn $\boldsymbol{y = x + 2}$.
b. Wat is de richtingscoëfficiënt van $\boldsymbol{w_2}$?
c. Geldt weer dat het product van de richtingscoëfficiënten gelijk aan 1 is?
d. De lijn $\boldsymbol{l_2}$ gaat door het spiegelbeeld van (4; 1) in de lijn $\boldsymbol{y = x + 2}$. dat spiegelbeeld kun je in het rooster makkelijk bepalen.
e. Stel nu de vergelijking van $\boldsymbol{l_2}$ op.



In deze opgave heb je het voor één geval geprobeerd.
Je kunt wel bedenken dat bij het spiegelen van twee evenwijdige lijnen in één andere lijn, er twee evenwijdige spiegelbeelden ontstaan.
Je kunt ook wel je beredeneren dat, als je één lijn spiegelt in twee spiegellijnen die onderling evenwijdig zijn, dat er dan óók twee evenwijdige spiegelbeelden ontstaan.
Wat voor de richtingscoëfficiënten bij spiegelen in de lijn $\boldsymbol{y = x}$ geldt, dat geldt ook voor de andere situaties geldt, waar je een lijn in $\boldsymbol{y = x + a}$ spiegelt.

Kortom: je kunt algemeen uitgaan van de volgende samenvatting:

algemene regel spiegelen in y = x + a

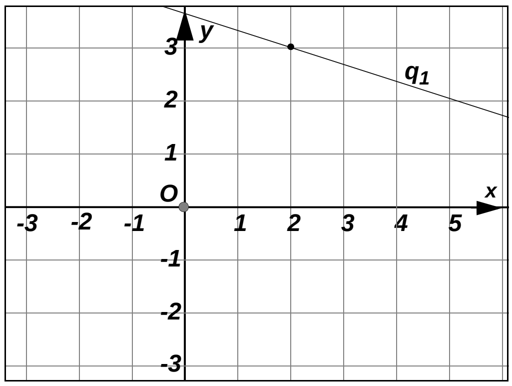
Als twee lijnen l_1 en l_2 elkaars spiegelbeeld zijn in een lijn die evenwijdig is aan $y = x$, dan geldt voor de richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 van de lijnen:

$$\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 = 1} \quad \text{ofwel} \quad \boldsymbol{m_2 = \frac{1}{m_1}}$$

7.7 Spiegelen in lijn evenwijdig aan de x-as en y-as

a. Spiegel de lijn $\boldsymbol{q_1}$ in de tekening in de lijnen $\boldsymbol{y = 0}$, $\boldsymbol{y = 1}$, $\boldsymbol{x = 0}$ en $\boldsymbol{x = 3}$.

b. De vier spiegelbeelden zijn verschillend, maar hebben allemaal dezelfde richtingscoëfficiënt.
Stel de vier vergelijkingen van de spiegelbeelden op.
c. Maak onderstaande algemene regel af:



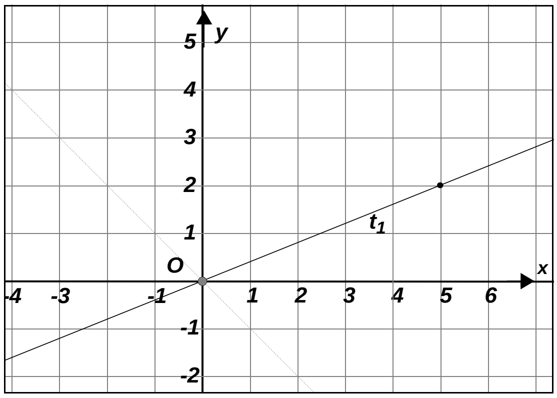
algemene regel spiegelen van lijnen in y = a of x = b

Als twee lijnen l_1 en l_2 elkaars spiegelbeeld zijn in een lijn $y = a$, of in een lijn $x = b$, dan geldt voor de richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 van de lijnen:

$$\boldsymbol{m_1 + m_2 = 0} \quad \text{ofwel} \quad \boldsymbol{m_2 = -m_1}$$

7.8 Onderzoek spiegelen in de lijn y = –x

Bij spiegel in de *x*-as en bij spiegelen in de y-as onderging de richtingscoëfficiënt dezelfde verandering: die werd tegengesteld.
Na het voor gaande blijft nog open: wat gebeurt er bij spiegelen in de lijn ***y = –x***.



Vind zelf de relatie tussen de richtingscoëfficiënten van een lijn en zijn spiegelbeeld in ***y = –x*** (en lijnen evenwijdig daaraan) op de manier van de vorige opgaven.

7.9 Ze lijken dezelfde!

Bij de lijn in de figuur van de vorige opgave geldt: het spiegelbeeld in ***y = x*** is het zelfde als het spiegelbeeld in de lijn ***y = –x***.

a. Geldt dat ook voor punten? Voor lijnen niet door de oorsprong?
b. Geldt de relatie tussen de richtingscoëfficiënten ook voor andere lijnen?

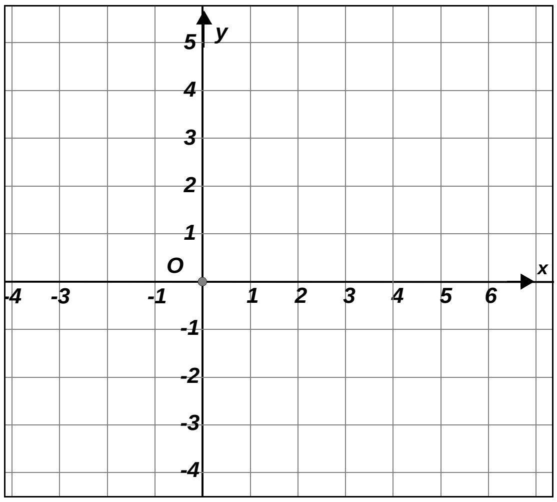
7.10 Hoe vind je de lijn?

In de vorige opgaven heb je gevonden hoe je de richtingscoëfficiënt van het spiegelbeeld kunt bepalen.
Als je van het spiegelbeeld nu nog één punt weet, dan ben je klaar.
Daarom is het makkelijk om de lijn in de vorm

$$y - y_A = m \cdot (x - x_A)$$

te gebruiken.
Voorbeeld:

Spiegel de lijn door (5; 3) met richtingscoëfficiënt –1/3 in de lijn y = x– 4
en geef de vergelijking van het resultaat.



a. Bepaal met de figuur het spiegelbeeld van (5; –3) in de lijn **y = x – 4**. Noteer de coördinaten.
b. Kies de juiste regel voor het bepalen van de richtingscoëfficiënt van het spiegelbeeld en bereken die.
c. Stel de vergelijking op en teken het spiegelbeeld.

7.11 Formules voor een ster

In de figuur op de volgende bladzijde zie je een ster, die uit 8 lijnstukken bestaat. Van twee van de lijnstukken zijn de vergelijkingen en het toegestane deel van de x-as al aangegeven.

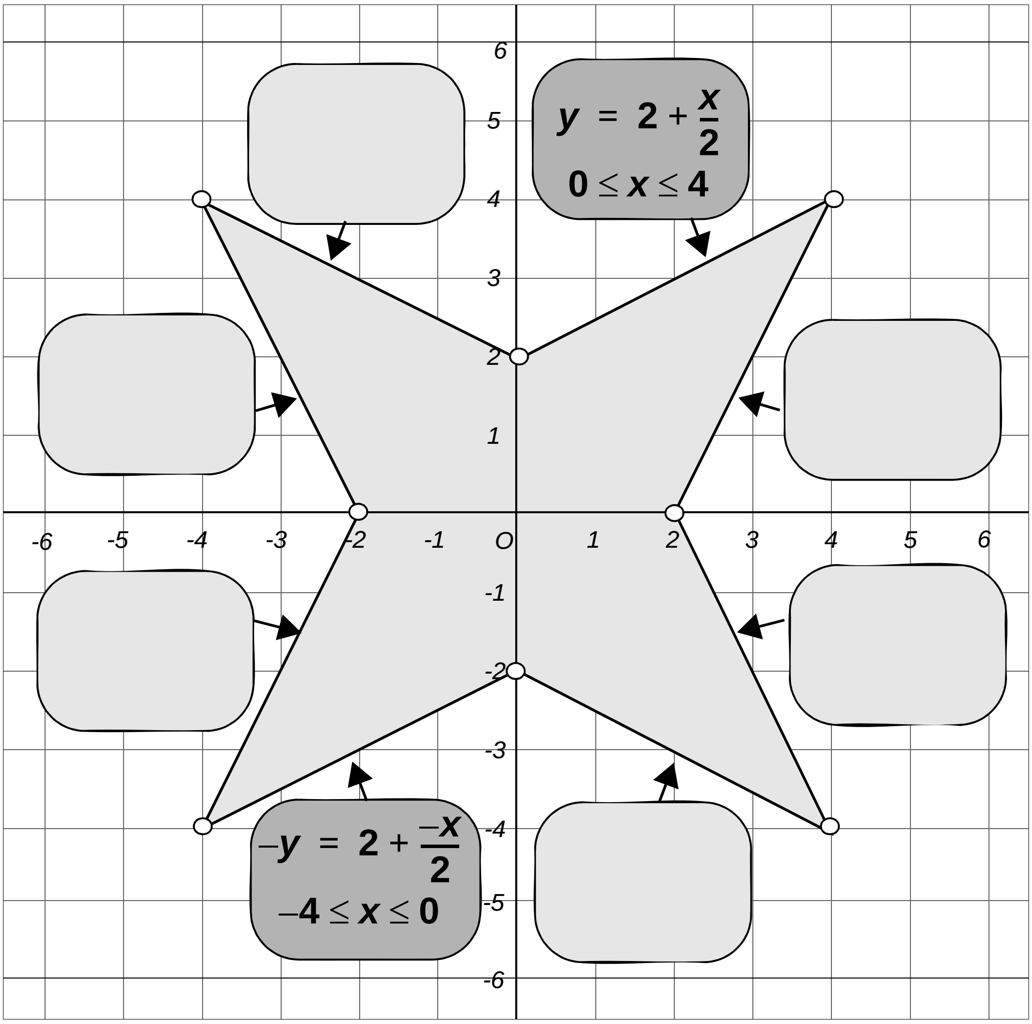
Door spiegelen in de lijnen ***y = x***, ***y = –x***, ***y* = 0**, ***x* = 0** zijn de andere lijnstukken bepaald.

Geef in alle vakken de juiste vergelijkingen aan en het toegestane gebied voor *x*.

Vooruitblik

In deze paragraaf oefende je in rekenen met richtingscoëfficiënt en hoek. Vooral rond verdubbelen en spiegelen. De bijzondere regels die daarbij optraden zijn makkelijk in de tekst van deze paragraaf te vinden.

Een belangrijk ander voorbeeld is eigenlijk al eventjes gebruikt, in **7.2:** het werken met de loodlijn op een andere lijn. Daaraan besteden we een aparte paragraaf.


$y = 2 + \frac{x}{2}$
$0 \leq x \leq 4$
$-y = 2 + \frac{-x}{2}$
$-4 \leq x \leq 0$
-6
-5
-4
-3
-2
-1
O
1
2
3
4
5
6

8: De loodrechte stand

Vooraf
Ook bij twee lijnen die loodrecht op elkaar staan, is er een eenvoudige verband tussen de richtingscoëfficiënten. Loodrechte lijnen komen vaak in meetkundige problemen voor. De moeite waard dus om op twee manieren dat verband te vinden.
In dit blok volgen later enkele belangrijke meetkundestellingen die op dit verband steunen, zoals de stelling over de hoogtelijnen in paragraaf 9 en de afleiding van een vergelijking van de cirkel met de stelling van Thales als spin-off in dezelfde paragraaf. Die laatste ken je nog uit blok 1. Een comeback daarvan in onze nieuwe styling met coordinaten!

eerste aanpak: loodrechte lijnen en vierkanten

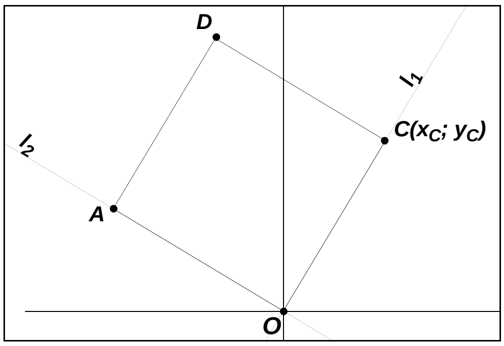
8.1 Lijnen op de zijden van een vierkant

In de figuur hiernaast is *AOCD* een vierkant; de coördinaten van *O* zijn duidelijk, en de van C zijn aangegeven. Lijn $\boldsymbol{l_1}$ gaat door *O* en *C* en lijn $\boldsymbol{l_2}$ door *O* en *A*.

a. Druk de richtingscoëfficiënt m_1 van lijn $\boldsymbol{l_1}$ in x_C en y_C uit.

b. Druk de coördinaten van *A* in die van *C* uit en druk daarna ook de richtingscoëfficiënt $\boldsymbol{m_2}$ van lijn $\boldsymbol{l_2}$ in x_C en y_C

c. Laat zien dat $\boldsymbol{m_1 \times m_2 = -1}$.



Lijnen die evenwijdig zijn aan lijn 1 en lijn 2 staan natuurlijk ook loodrecht op elkaar en hebben ook richtingscoëfficiënten m_1 en m_2. Daarom kunnen we weer een *algemene regel* vaststellen.

algemene regel over richtingscoëfficiënten en loodrechte stand

Als twee lijnen l_1 en l_2 loodrecht op elkaar staan, dan geldt voor de richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 van de lijnen:

$$\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 = -1} \quad \text{ofwel} \quad \boldsymbol{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$$

tweede aanpak: vanuit spiegelen

8.2 Tweemaal spiegelen

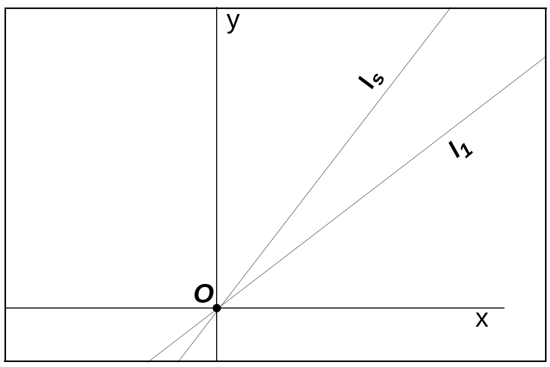
In figuur is $\boldsymbol{l_1}$ gespiegeld in de lijn $\boldsymbol{y = x}$, zoals eerder. Het resultaat is aangegeven me $\boldsymbol{l_s}$. Laat $\boldsymbol{m_1}$ de richtingscoëfficiënt van $\boldsymbol{l_1}$ zijn en $\boldsymbol{m_s}$ die van $\boldsymbol{l_s}$.

a. Spiegel nu $\boldsymbol{l_s}$ in de ***y***-as om $\boldsymbol{l_2}$ te krijgen.

b. Toon nu met behulp van diverse deelhoeken bij *O* aan dat $\boldsymbol{l_1}$ en $\boldsymbol{l_2}$ loodrecht op elkaar staan.

c. Druk nu m_s in m_1 uit, volgens een eerder verband.

d. Laat $\boldsymbol{m_2}$ de richtingscoëfficiënt van $\boldsymbol{l_2}$ zijn.
Druk $\boldsymbol{m_2}$ in $\boldsymbol{m_s}$ uit en tenslotte in $\boldsymbol{m_1}$.
Komt hetzelfde verband uit rollen als in de vorige opgave bovendrijven?
Vast wel!



loodlijn op een gegeven lijn door een gegeven punt; met voetpunt

Als je een loodlijn vanuit een punt neerlaat op een lijn, vind je op de lijn het zogenaamde ‘voetpunt’ van de loodlijn.
In de volgende twee voorbeelden leer je hoe je de loodlijnen en het voetpunt kunt bepalen.
Bij de voorbeelden 8.3 en 8.4 vind je een uitwerking op bladzijde 37.

8.3 Voorbeeld met uitgewerkt stappenplan.

De lijn $\boldsymbol{l_1}$ is de lijn door de punten $A(–8; 0)$ en $B(0; 10)$. We zoeken eerste de vergelijking van de loodlijn uit O op $\boldsymbol{l_1}$. Die lijn noemen we $\boldsymbol{l_2}$.

a. Maak een schets!
b. Bereken de richtingscoëfficiënt van $\boldsymbol{l_1}$ met de bekende methode uit het begin van dit blok.
c. Je kunt nu met de loodrechte standregel de richtingscoëfficiënt $\boldsymbol{m_2}$ van $\boldsymbol{l_2}$ bepalen.
d. Omdat je weet dat O op $\boldsymbol{l_2}$ ligt, is de vergelijking van $\boldsymbol{l_2}$ gauw bepaald in de vorm $\boldsymbol{y = m_2 x}$.

8.4 Het voetpunt van de loodlijn

Uiteindelijk moet natuurlijk ook het voetpunt *S* van de loodlijn bepaald worden; dat is dus het snijpunt van de loodlijn met de lijn zelf.

a. Om het snijpunt met l_1 te bepalen moet je ook de *vergelijking* van $\boldsymbol{l_1}$ kennen. Dat kan!
Het gezochte snijpunt heeft coordinaten die aan $\boldsymbol{l_2}$ én aan $\boldsymbol{l_1}$ voldoen. Als $(x; y)$ het voetpunt S is, dan is dat volgens de vergelijking van $\boldsymbol{l_2}$ eigenlijk $(x; m_2\, x)$.
b. Vul dus $(x; m_2\, x)$ in $\boldsymbol{l_1}$ in. Dat komt neer op: vul op de plek van $\boldsymbol{y}$ in $\boldsymbol{l_1}$ nu $\boldsymbol{m_2\, x}$ *in.*
c. Los nu naar *x* op!
d. Bij deze *x*-waarde bepaal je dan de *y*-waarde via de vergelijking van $\boldsymbol{l_2}$: $\boldsymbol{y = m_2\, x}$.
S is gevonden!
e. Controleer of *S* ook op $\boldsymbol{l_1}$ ligt.

8.5 De algemene formule maken

Gegeven de lijn *L* met vergelijking:

$$\boldsymbol{y - y_P = m \cdot (x - x_P)}$$

Stel de vergelijking op van de loodlijn op *L* door $Q(x_Q; y_Q)$.

8.6 Oefenen

a. Stel de vergelijking op van de lijn die loodrecht staat op

$$\mathbf{y = 3/2\ x - 15}$$

en door (21; 0) gaat. Bepaal ook het voetpunt van de loodlijn.

b. Bepaal het voetpunt van de loodlijn uit O op de lijn

$$\boldsymbol{y = 10 - 3/4\, x}.$$

9: Vier stellingen

Vooraf
In deze paragraaf bewijzen we vier meetkundige stellingen met behulp van algebra. Het zijn stellingen over speciale lijnen in de driehoek. Allicht gebruiken we wat we nu van lijnen weten!

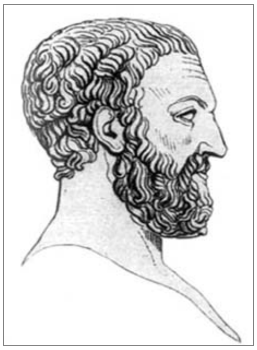
De eerste is de stelling van Thales. Die ken je al uit een eerder blok, maar het algebraïsch bewijs levert een mooi extraatje op in de vorm van een onverwachte vergelijking.

De tweede is de beroemde stelling dat de drie hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan. Daar zijn veel meetkundige bewijzen van, die er van alles bij halen: hoeken, afstanden, Pythagoras, enzovoort.
In het algebraïsche bewijs wordt gebruikt waar het om gaat: loodrechte stand en meer niet.

De derde stelling is die van de drie middelloodlijnen van een driehoek. Die gaan ook door een punt!
Er is een meetkundig bewijs voor het feit, dat zo'n punt er is, maar met de algebraïsche methode vinden we als extraatje ook de coördinaten van dat punt.

De vierde stelling zegt dat het zwaartepunt, het hoogtepunt en het snijpunt van de middelloodlijnen van een driehoek op één lijn liggen. Na de eerdere stelling is een eenvoudig berekening van een gewogen gemiddelde hier afdoende!

Thales en Descartes



Thales

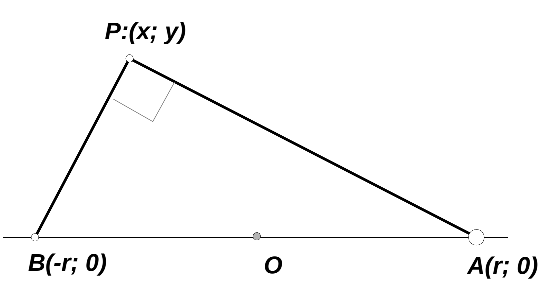
Rond 600 voor Christus

Descartes

Rond 1630 na Christus

9.1 ***Rechthoekige driehoek***

In deze figuur zijn A en B vaste punten. Driehoek APB is recht in P.
P kan dan niet zomaar overal liggen; wat we willen is een verband tussen de coördinaten van P afleiden uit de meetkundige situatie, d.w.z. uit de ligging van A en B en de loodrechtheid van de lijnen PA en PB.



We gebruiken wat we weten over lijnen en richtingen. Misschien hebben we niet eens de vergelijkingen zelf van de lijnen nodig.

a. De richtingscoëfficiënten van de lijnen PA en PB kun je uitdrukken in x, y en r. Hoe?

b. Pas de voorwaarde voor loodrechte stand toe op het resultaat van **a** en leid hieruit af dat

$$x^2 + y^2 = r^2$$

c. Welke mededeling staat hier over de afstand van P tot O?

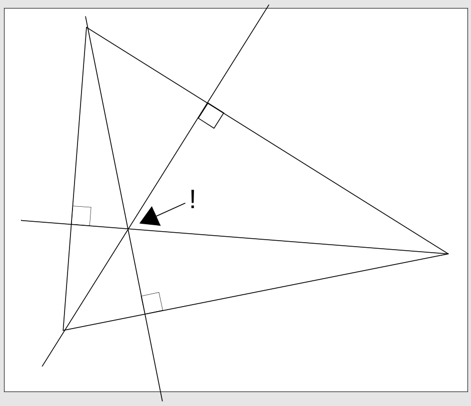
d. Geef een beschrijving in woorden van de meetkundige betekenis van deze vergelijking, waarin je uitlegt wat de figuur is die gevormd wordt door alle mogelijke punten P.

De hoogtelijnen van de driehoek

De hoogtelijnen van de driehoek zijn de loodlijnen vanuit de hoek punten op de zijden tegenover die punten. (het heeft dus meer met '*loodrecht'* dan met '*hoogte*' te maken!)
Er geldt de volgende stelling:

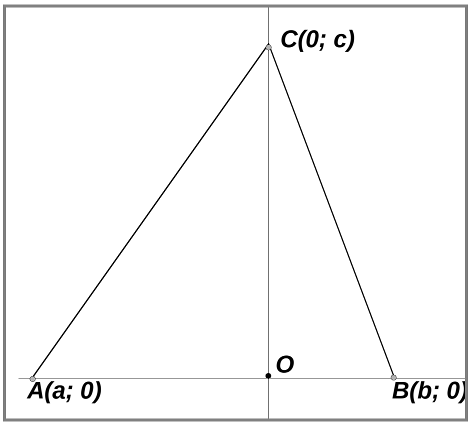
Hoogtelijnenstelling

De drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.



We gaan deze stelling bewijzen met coördinaten!
Voor het bewijs leggen we de hoekpunten van de driehoek op de assen. Dat vereenvoudigt waarschijnlijk het rekenwerk, om de doodeenvoudige reden dat veel coördinaten dan gelijk aan 0 zijn en je wat minder 'schrijfwerk' hebt.

9.2 Bewijsvoorstel ter nadere uitwerking
Kies driehoek *ABC* met: *A*(*a*; 0), *B*(*b*; 0) en *C*(0; *c*).



a. Teken de hoogtelijnen in het schetsje hiernaast.

De hoogtelijn uit C is een weggevertje: de *y*-as, ofwel: de lijn $x = 0$.

Van de hoogtelijnen weet je één punt en de richting. Later moet je snijpunten vinden. Je hebt dan echt de vergelijkingen wel nodig.

b. Stel de vergelijkingen op van de loodlijn uit *A* op *BC* en van de loodlijn uit *B* op *AC*.

Waarschuwing en Tip
Gebruik heel nauwkeurig de formules voor richtingscoëfficiënten en het opstellen van vergelijkingen te gebruiken, zonder te kijken of getallen a, b en c negatief zijn of niet. Die formules kun je in alle gevallen blindelings vertrouwen als je ze zuiver en correct gebruikt!

Als de *drie* hoogtelijnen door één punt gaan, ligt dat punt op de *y*-as, want dat is de hoogtelijn uit *C*.

c. Laat dus zien dat de twee hoogtelijnen uit *A* en *B* de *y*-as in hetzelfde punt snijden. Door x = 0 in te vullen vind je die y-waarde(n) direct.

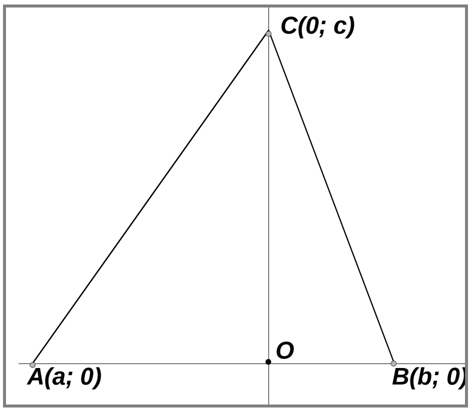
d. De coördinaten van het hoogtepunt *H* heb je nu gevonden. Noteer ze.

De middelloodlijnen van de driehoek

De drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt; dat is de te bewijzen stelling.
Ook hier gaat het om loodlijnen op de drie zijden. Niet zo gek dat de dit bewijs en het vorige als tweelingen op elkaar zullen lijken.

9.3 Bewijsvoorstel ter nadere uitwerking

Houd het op dezelfde driehoek ABC met: $A(a; 0)$, $B(b; 0)$ en $C(0; c)$.



a. Teken de middelloodlijnen in het schetsje hiernaast.

De vergelijking van de middelloodlijn van AB is een weggevertje: $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

b. Stel de vergelijkingen van de middelloodlijnen van BC en AC op.

Als de *drie* middelloodlijnen door één punt gaan, ligt dat punt op de lijn $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$, want dat is de middelloodlijn van AB uit C.

c. Laat dus zien dat de twee middelloodlijnen van BC en AC die lijn in hetzelfde punt snijden.

Door $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$ in te vullen vind je de y-waarden vrij snel.

Wat zijn de coördinaten van het snijpunt M? Noteer ze !

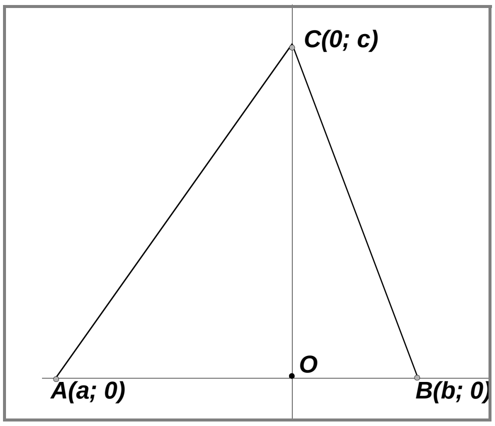
d. Uit de meetkunde weet je dat M op gelijke afstanden van A, B en C moet liggen. Wat weet je dus van de cirkel met middelpunt M die door A gaat?

Samenhang tussen de drie punten: De lijn van Euler

Leonard Euler ontdekte (en bewees) dat drie belangrijke driehoekscentra, namelijk het hoogtepunt H, het zwaartepunt Z en het middelpunt van de omgeschreven cirkel M, op één lijn liggen en dat Z het lijnstuk HM verdeelt in de verhouding 1 : 2.

Die lijn heet dan ook: de lijn van Euler.

9.4 Bewijs bij de Euler-lijn



a. Teken de drie punten in één driehoek.

b. Uiteraard ga je de coördinaten van de punten gebruiken. Die van het zwaartepunt kunnen gevonden worden met behulp van het gemiddelde van drie punten, zoals in blok II stond.

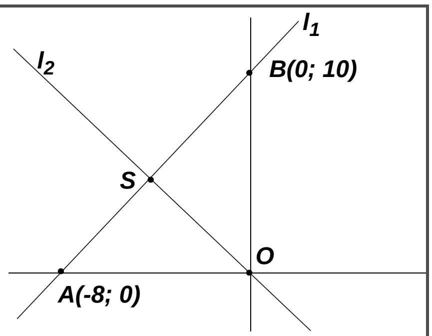
c. De aangegeven ligging van Z ten opzicht van H en M moet nagerekend worden. Te laten zien:

Z is het gewogen gemiddelde van H en M
bij gewichten 1 en 2.

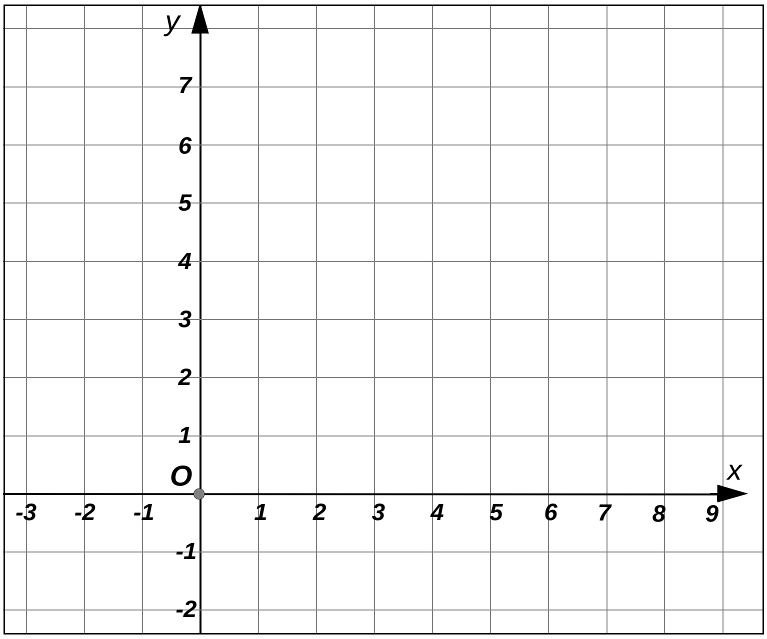
Voetnoot

Ook Euler bewees de stelling via rekenen met coördinaten. Maar hij gebruikte niet de handige voorstelling van de driehoek in deze paragraaf. Euler had een groot algebraïsch uithoudingsvermogen en tempo. Maar dit heeft hem meer werk gekost dan deze bladzijde suggereert, dat blijkt uit zijn aantekeningen!

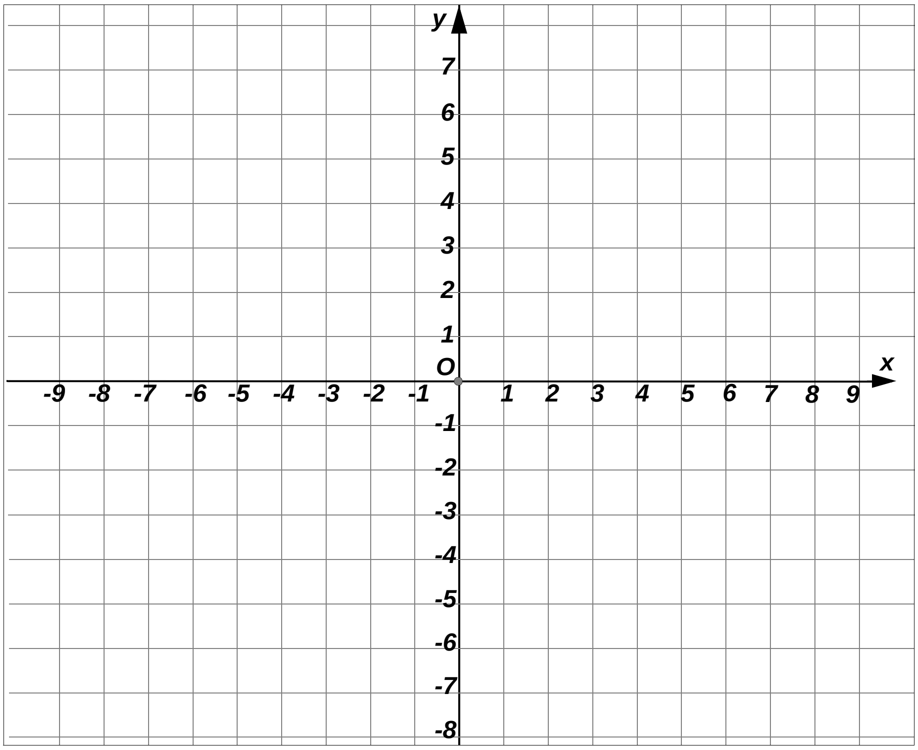
10: Uitwerking van 8.3 en 8.4

8.4 a	
b	$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10 - 0}{0 - (-8)} = \frac{5}{4}$
c	$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{4}{5}$
d	$y = -\frac{4}{5}x$
8.4 a	$y = \frac{5}{4} \cdot (x + 8)$
b	$-\frac{4}{5}x = \frac{5}{4} \cdot (x + 8)$
c	$-16x = 25 \cdot (x + 8)$ $x = \frac{-200}{41}$
d	$y = -\frac{4}{5} \cdot \frac{-200}{41} = \frac{160}{41}$
e	$y = \frac{5}{4} \cdot (x + 8)$ $\frac{160}{41} \stackrel{?}{=} \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{-200}{41} + 8\right)$ $\frac{5}{4} \cdot \left(\frac{-200}{41} + 8\right) =$ $\frac{5}{4} \cdot \frac{-200 + 8 \cdot 41}{41} = \frac{5}{4} \cdot \frac{128}{41} = \frac{160}{41}$

1.4

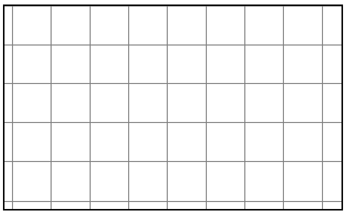

y
7
6
5
4
3
2
1
O
x
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
-1
-2

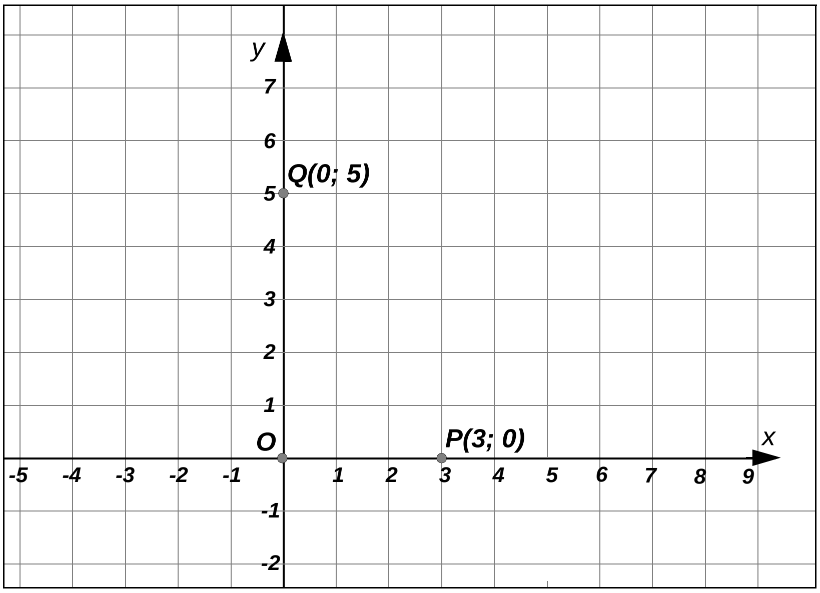
1.7


y
7
6
5
4
3
2
1
O
x
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8

2.1

2.3

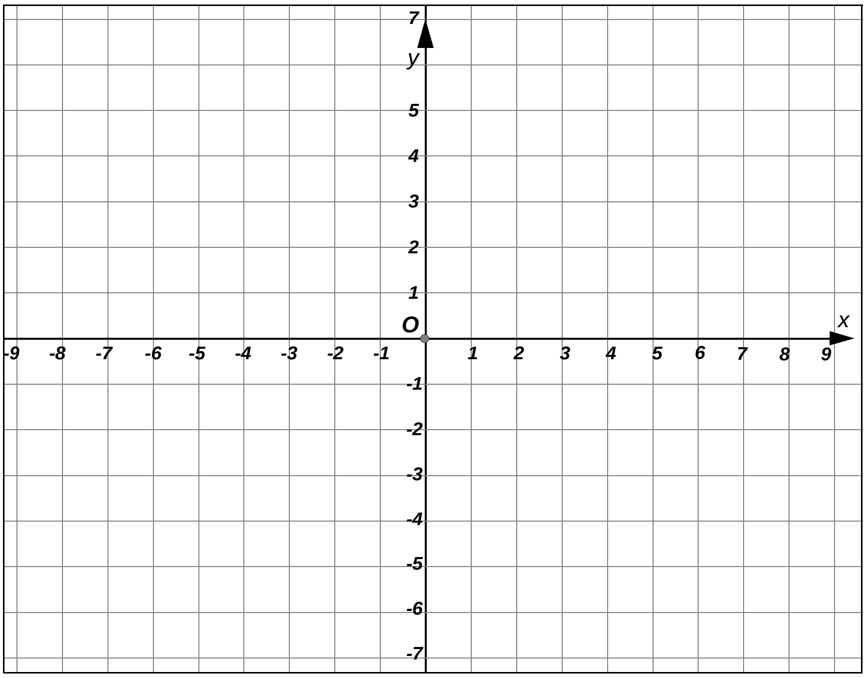




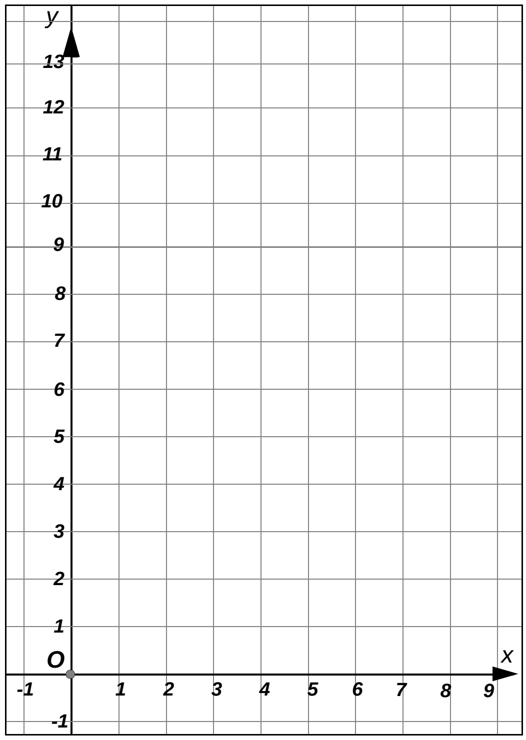
2.6

vergelijking	*ax + by + c = 0*	*a*	*b*	*c*	*r.c.*
$5 \cdot y - 3 \cdot x = 8$	$3 \cdot x - 5 \cdot y + 8 = 0$	*3*	*– 5*	*8*	
$y = 8x + 2$				*–2*	
$(y - 1) = 1/3 \cdot (6 - x)$					
$y = -7$					
$2x + 3 - y = x + 1$					
$U \cdot (x - y) = V \cdot (y + x)$			*– (V + U)*		

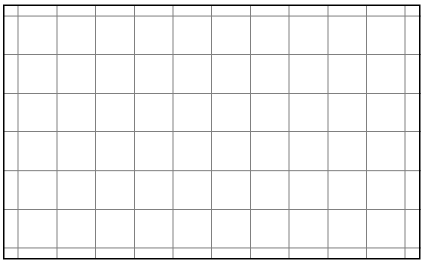
2.12



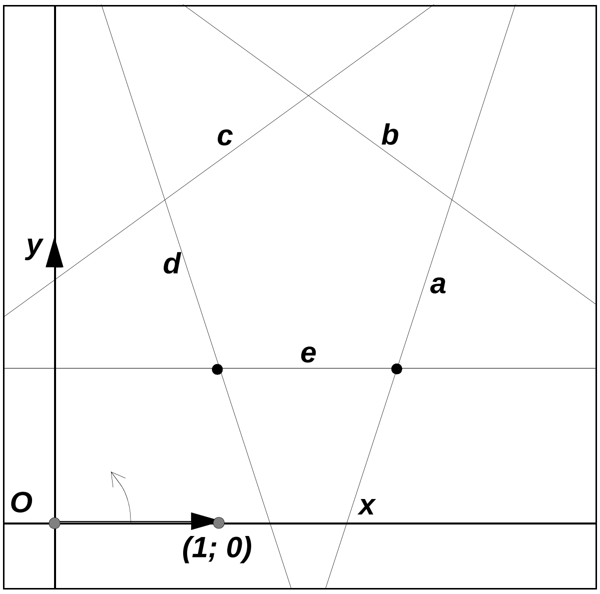
2.13



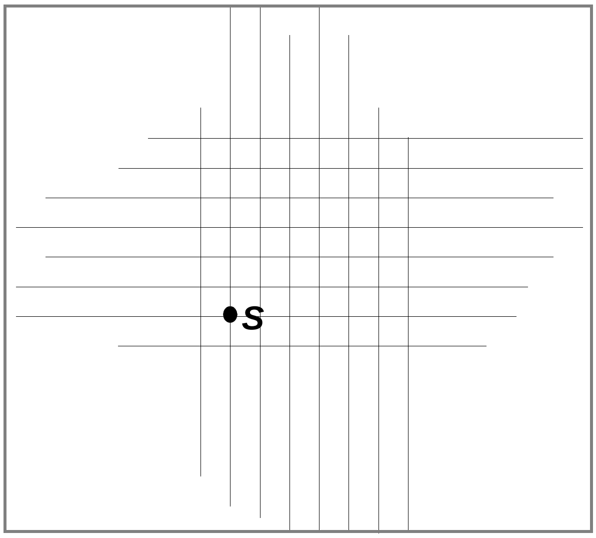
3.2



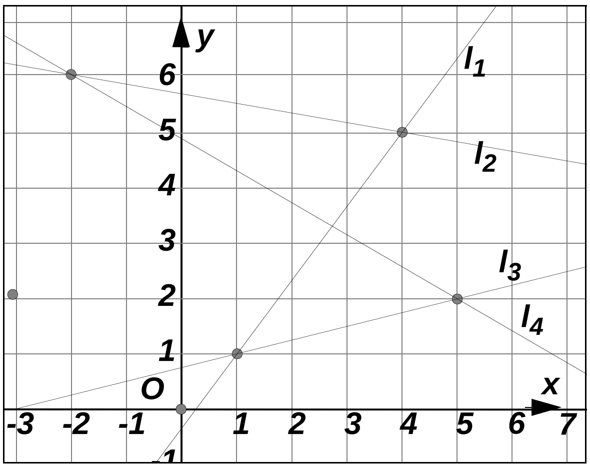
4.6



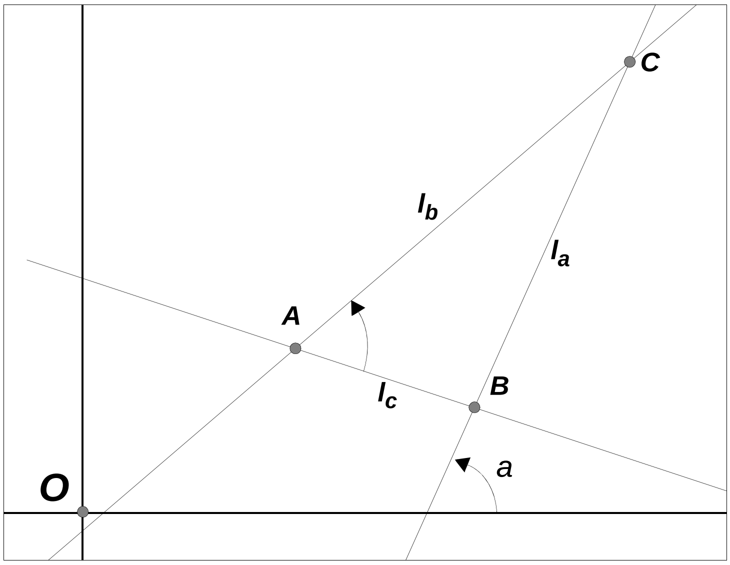
5.4



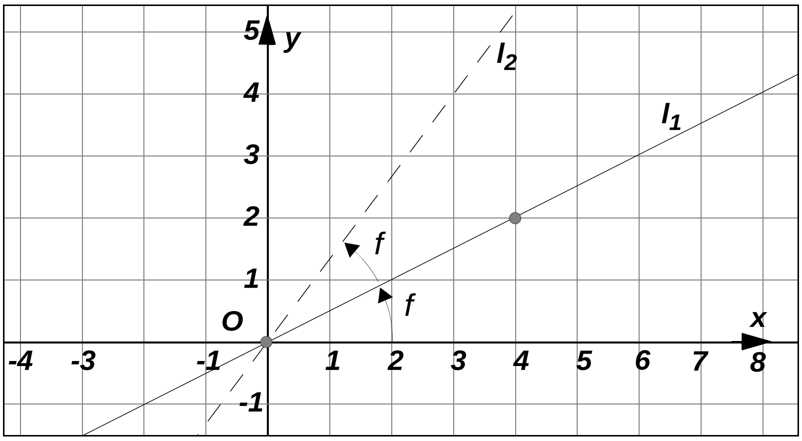
6.2



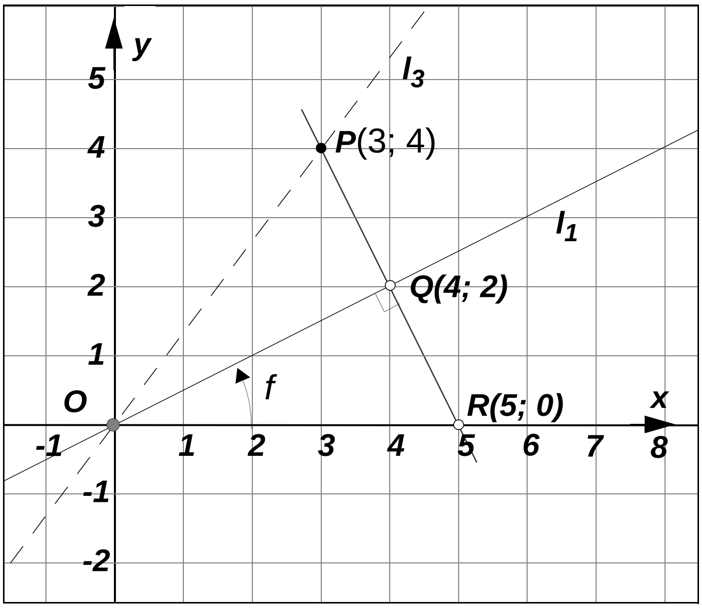
6.4


C
l_b
l_a
A
B
l_c
a
O

7.1

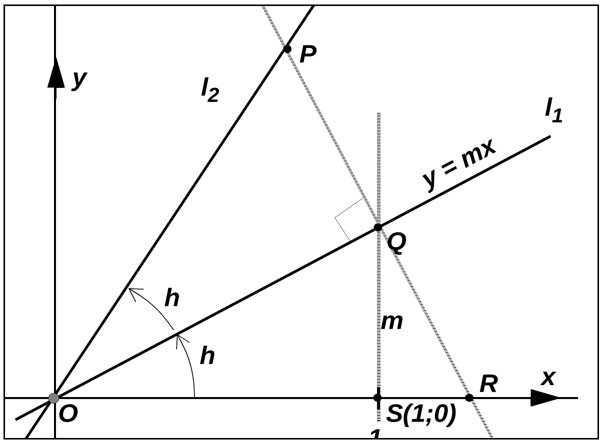

y
l_2
l_1
f
f
O
x
5
4
3
2
1
-1
-4
-3
-1
1
2
3
4
5
6
7
8

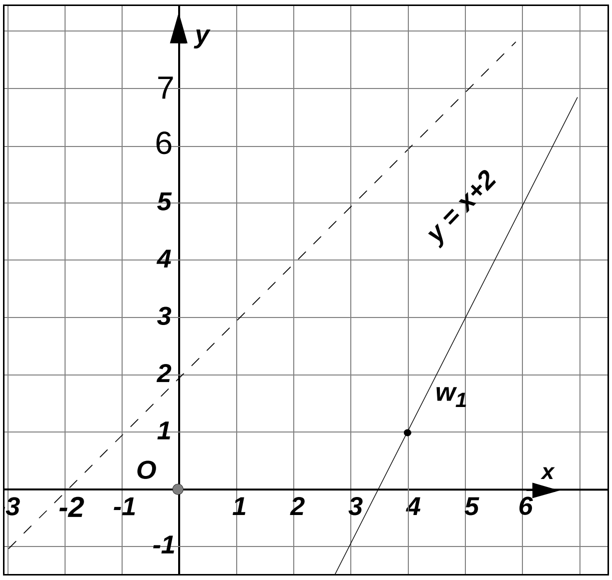
7.2


y
l_3
P(3; 4)
l_1
Q(4; 2)
f
O
R(5; 0)
x
5
4
3
2
1
-1
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8

7.3

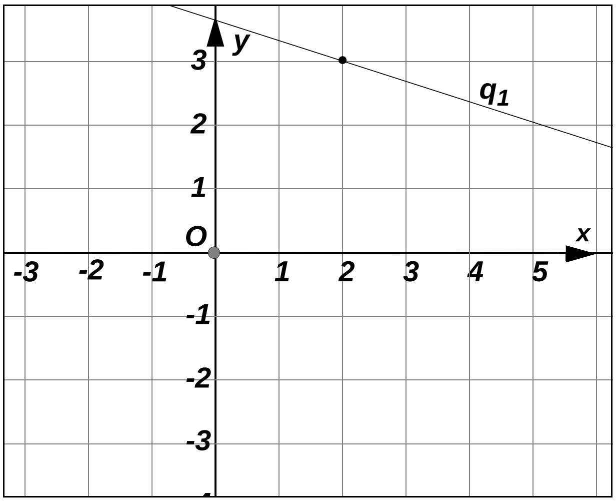
7.6

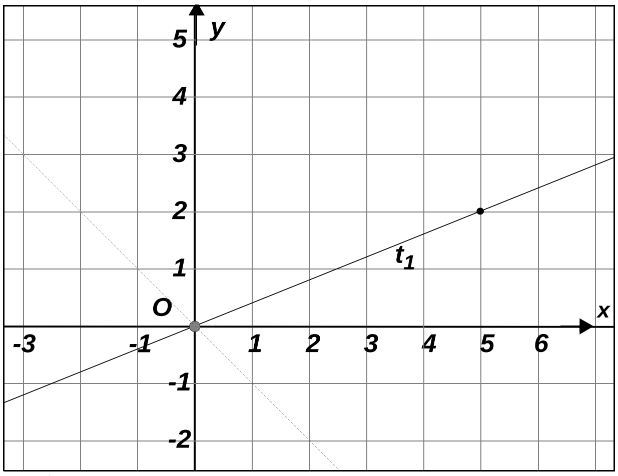




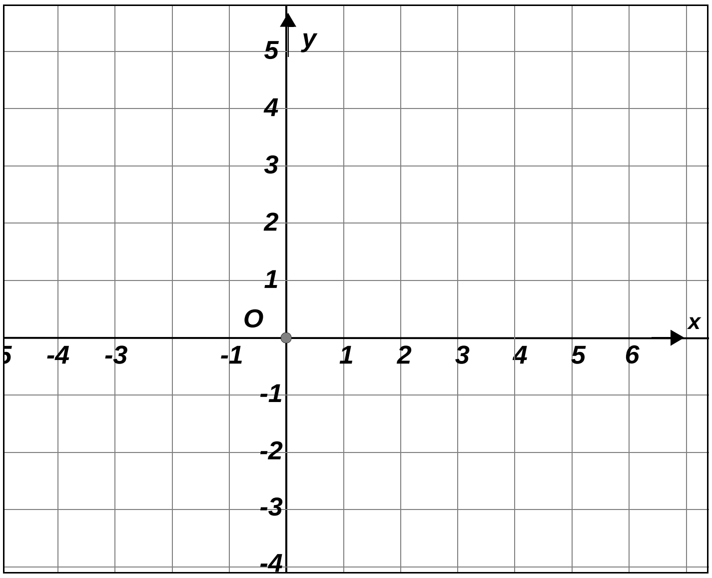
7.7

7.8

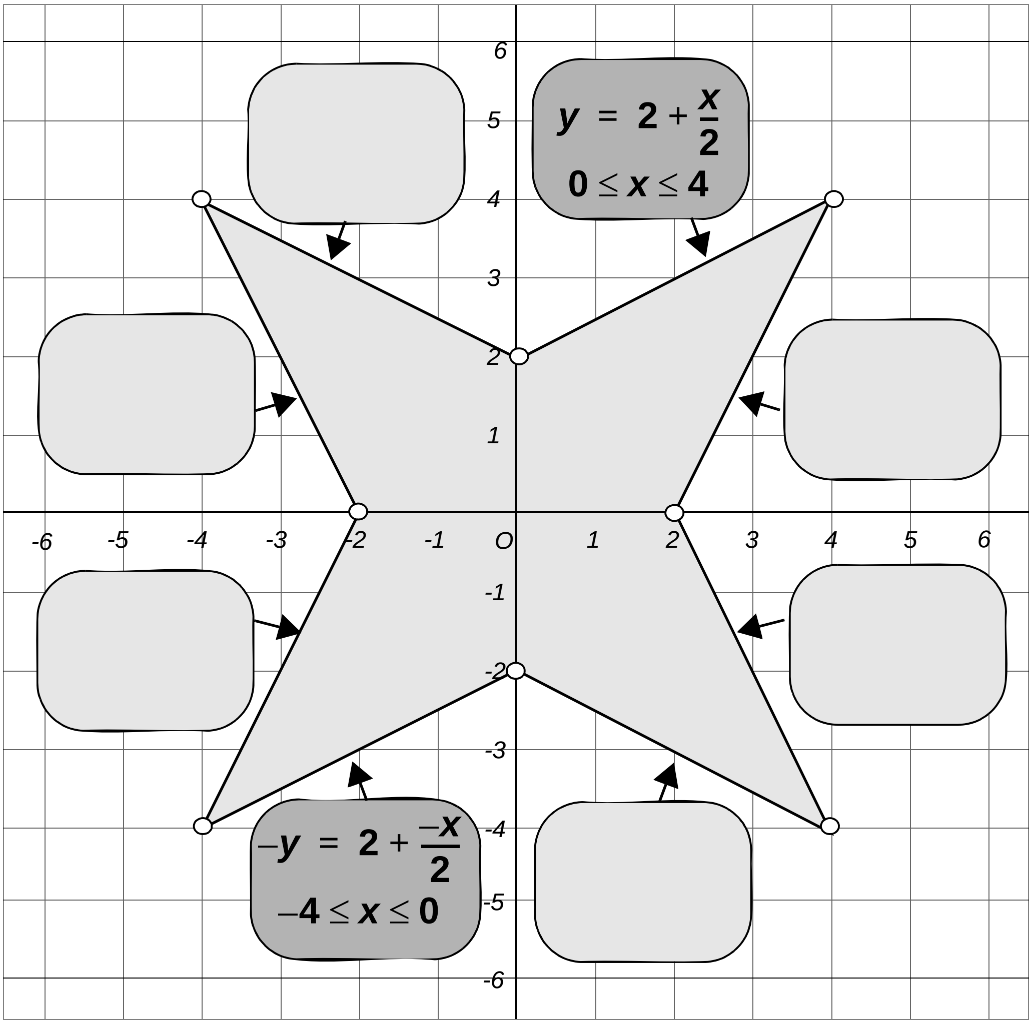




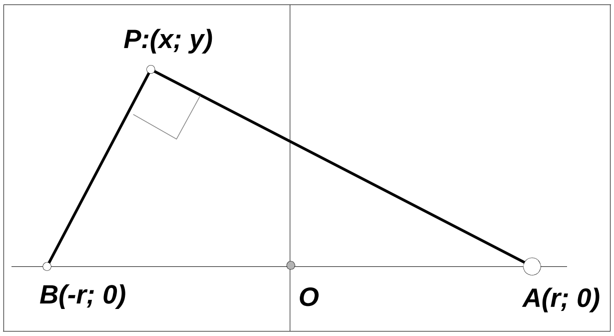
7.10

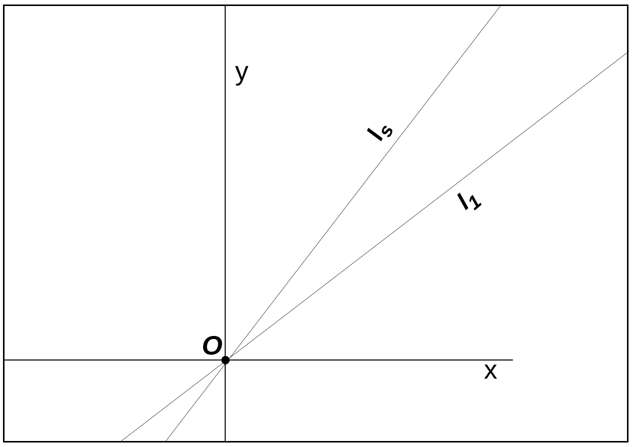


7.11

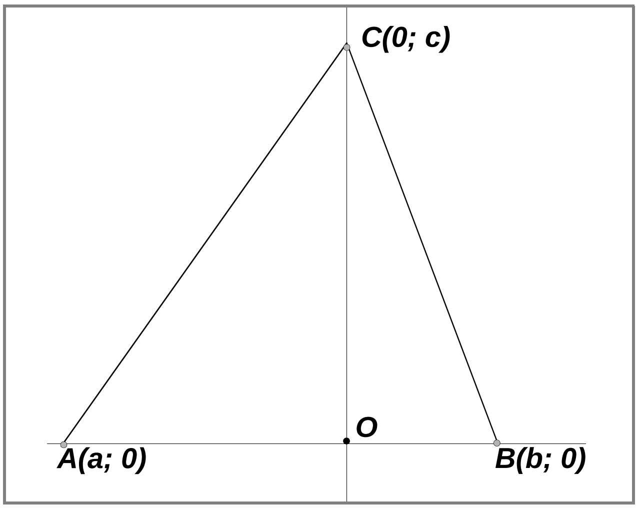


8.2
9.1

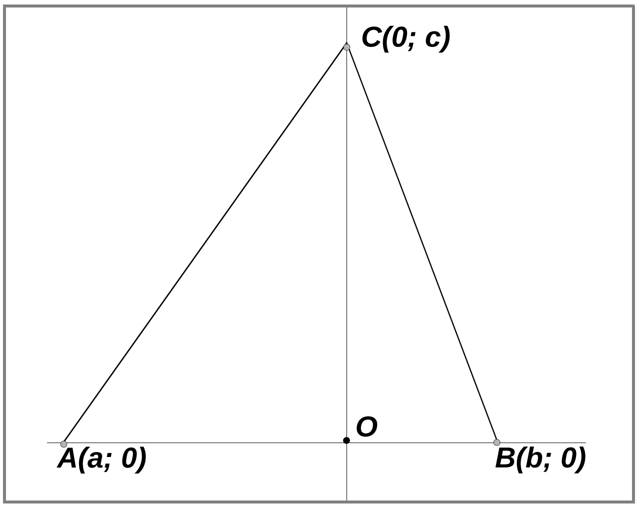




9.2



9.3



9.4