Toelichting bij Rekenen met patronen

Onderwerp: combinatoriek / telproblemen (permutaties, combinaties etc)
Omvang ca. 10 lessen (ca 15-20 slu) Het is van groot belang om niet te 'haasten'.
Doelgroep 4 vwo wiskunde C
status versie 2.0 [aug. 2010]
Versie 1.2 uitgetest op een vijftal scholen 2009-10

achtergrond

Achterliggend idee is om het onderwerp combinatoriek eens te benaderen vanuit de (abstracte) beeldende kunst. Mogelijke voordelen zijn:

- Betere motivatie
- Meer houvast, minder verwarring

Overigens komen ook andere contexten in het materiaal aan bod, maar de beeldende kunst vormt een soort rode draad.

Mogelijkheden met mozaïek (opdr 1- 5)

Het is aan te bevelen deze pagina (evenals enkele andere) in kleur af te drukken, of wel in kleur te projecteren. Centraal staat het *redenerend rekenen* dat verder gaat wanneer gewoon tellen niet meer kan. Bij het redeneren spelen *dubbeltellingen* (eigenlijk meervoudige tellingen) een belangrijke rol. Die dubbeltellingen komen later uitgebreid terug.
Bij een onderwerp als dit treden vaak grote tempoverschillen op. Het is van groot belang hier goed mee om te gaan, en vooral de leerlingen die wat langzamer zijn de tijd te gunnen het zich goed eigen te malen, maar ook de snelle leerlingen de gelegenheid te geven om verder te gaan. Bespreking (klassikaal of in groepjes) van mogelijk aanpakken is erg belangrijk

Combineren met composities

Aan de hand van werk van Piet Mondriaan worden diverse telproblemen verkend. Misschien goed om te benadrukken dat hoewel veel werk van Mondriaan er wiskundig uitziet hij (zeker op later leeftijd) niets moet hebben van een wiskundige benadering van zijn werk- in tegenstelling bijv met *Stijl*-genoot Theo van Doesburg. (Het kan zijn dat nog niet alle leerlingen bekend zijn met *de Stijl* als kunststroming, en denken dat het iets te maken heeft met de beruchte website *GeenStijl.nl*)
Met behulp van de bekende boomdiagrammen ("machtsbomen en faculteitsbomen worden ze elders genoemd) komen berekeningen als 9^4 en $9\times8\times7\times6$ aan bod, uitlopend op berekeningen als 9!. Er wordt uitdrukkelijk aandacht besteed aan de orde van grootte van getallen als 20! en 30!, en voor veel leerlingen is dit ook een eye-opener. Eventueel kunnen de getallen nog meer gaan spreken wanneer men zich voorstelt dat elke seconde een andere volgorde (van bijv 20 leerlingen) optreedt, en dan berekent hoe lang het duurt voordat alle mogelijkheden geweest zijn (De leeftijd van het heelal wordt geschat op ca. $4{,}4\times10^{17}$ sec.)
Het berekenen van combinaties komt vervolgens via de recursieve methode (o.a. driehoek van Pascal) , en met behulp van de(grafische) rekenmachine. Diverse notaties komen aan de orde, zie ook de volgende paragraaf. De driehoek van Pascal geeft misschien aanleiding tot enige aandacht voor historische feiten of beschouwingen. Het inzien dat *n* uit *k* het zelfde is als *n-k* uit *n* is vaak "een mooi moment". Hierop aan sluit het spreken over het *opdelen* van een groep in twee subgroepen. De laatste twee opgaven van dit deel (20 en 21) wordt dit weer veralgemeniseerd. De gesuggereerde aanpak is om een verdeling in *k* groepen op te

vatten als k-1 opeenvolgende tweedelingen. Een andere methode werkt met 'dubbeltellingen'. Deze laatste komt aan het eind van de volgende paragraaf aan de orde.

Patronen en permutaties

Centraal staat is dit gedeelte combinaties en permutaties en de relatie tussen beide.
Het begrip permutatie heeft (helaas) twee betekenissen

1. Een rangschikking van **alle** elementen van een verzameling.
2. Een rangschikking van **sommige** (eventueel alle) elementen van een verzameling.

De tweede betekenis is te beschouwen als een uitbreiding van de eerste.
De laatste jaren is (ook) in Nederland de tweede betekenis gangbaar. Eerder werd hiervoor wel de term *variaties* gebruikt.

Voor het aangeven van het *aantal* combinaties bestaan diverse notaties. Van oudsher wordt de notatie $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ ("*n* boven *k*") veel gebruikt. Andere notaties zijn ${}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{k}}$, *n*C*k*, C(*n*,*k*) en $\mathrm{C}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}}$

Wij hebben gekozen voor de laatste en (in lijn daarmee) voor $\mathrm{P}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}}$ als aanduiding voor het aantal permutaties.
Vaak wordt bij het uitleggen van het verschil tussen combinaties en permutaties benadrukt het al dan niet letten op de volgorde. In dit materiaal is er bewust voor gekozen om dat niet te doen. Het verschil wordt meer benaderd op de volgende manier:

- Bij $\mathrm{C}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}}$ kijk je naar wie/ wat meedoet. (en wie /wat niet)
- *k*! is het aantal invullingen van de rollen (k verschillende kleuren/ letters, functies etc)
- Bij $\mathrm{P}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}}$ kijk je naar het totaal wie/wat meedoet en wat de rol/kleurverdeling is

Op die manier is goed in te zien dat $\mathrm{P}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}} = \mathrm{C}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{k}!$ oftewel $\mathrm{C}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}} = \dfrac{\mathrm{P}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{k}!}$

Dit verband kan gebruikt worden om $\mathrm{C}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}}$ in eenvoudige gevallen 'uit het hoofd' te berekenen.
Uiteraard zijn er veel meer ontdekkingen te doen, zoals $\mathrm{P}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}!$ In deze gelijkheid zit eigenlijk het verband tussen de twee definities van permutatie verborgen.
In de opgaven 27en 28 worden 'mengvormen' van permutaties en combinaties benaderd vanuit de optiek van 'dubbeltellen'. Dit levert ook een nieuwe aanpak op voor het verdelen van een groep in meer dan twee subgroepen. Als context wordt gebruikt gemaakt van het werk van de Franse kunstenaar *Daniël Buren*. Op internet is veel over deze man te vinden,.

Opdracht 30 is een soort slotopdracht (voor de 'basisstof.) De leerling wordt uitgedaagd om zelf vragen te bedenken bij gegeven antwoorden. Sommige leerlingen zullen dicht blijven bij de opgaven in het materiaal, maar hopelijk zijn er ook enkele originele bijdragen.

Meerstaps berekeningen

Deze opgaven zijn nieuw in versie 2. Voor veel leerlingen is het lastig om zelfstandig een probleem op te lossen waarbij meerdere stappen nodig zijn. In deze vier opgaven wordt hier expliciet aandacht aan besteed.

Oefenopgaven

Er is ook interactief oefenmateriaal beschikbaar in de vorm van DITwis. Deze manier van oefenen wordt gekarakteriseerd door

- Steeds andere getallen bij de zelfde (soort) vraag
- Inhoudelijke feedback op (bekende) fouten
- Aanwijzingen wanneer de leerling niet verder komt

Hierdoor is dit materiaal ook zeer geschikt als oefening buiten de les.
In de oefenopgaven worden contexten afgewisseld. Naast contexten die in het materiaal voorkomen worden ook heel andere, zoals mogelijke coderingen, gebruikt
Het interactief oefenmateriaal is beschikbaar via
http://wiskunde.stmichaelcollege.nl/DITwis/DIT5Wis-tellen4vc.htm
Desgewenst kan het oefenmateriaal ook verstrekt worden als SCORM-pakketje, wat integratie in een (doorvoor geschikte) ELO mogelijk maakt (met bewaren van het gemaakte werk en registratie van de vorderingen)

Verdiepingsopgaven

Hier komen wat lastiger vragen aan bod, zoals kleuringen waarbij aangrenzende vakken niet de zelfde kleur mogen hebben. Mogelijke aanpakken worden wel uitdrukkelijk besproken. De opgaven zijn uitdrukkelijk bedoeld voor de wat sterkere leerlingen, en zeker niet ‘verplicht’.

De laatste vier opgaven zijn gewijd aan de vraag hoeveel “dingen” er bij hoeveel herschikking er ‘op hun plaats’ blijven. In dit kader komt het bekende sinterklaaslootjes probleem ook aan de orde. De recursieve aanpak van de algemene vraag (Op hoeveel manieren kunnen n elementen worden gerangschikt zodat er k op hun plaats blijven) gaat vrij ver, maar de conclusies die getrokken worden (37 % is uiteraard een benadering van 1/e) zijn te aardig om te laten lopen. En passant is de relatie gelegd tussen combinatoriek en kansrekening.

Gerard Koolstra 14-9-2010