**Paragraaf 4: Veranderingen bij lineaire verbanden en eenvoudige combifuncties**

Waar gaat deze paragraaf over?

*Lineaire verbanden worden soms gecombineerd. We gaan twee voorbeelden uit de praktijk bekijken.*

**Bij de volgende opdrachten ga je prijzen onderzoeken van mobiele-telefoonabonnementen van telecom-bedrijven. Je gaat na welk abonnement bij een bepaalde situatie het meest geschikt is. Je komt tot een onderbouwd advies.**

Een telecombedrijf hanteert de volgende prijslijst. Deze staat los van de aanschaf van een toestel. De kosten hiervan laten we buiten beschouwing.

Er wordt alleen gekeken naar belminuten, ook de sms’en worden buiten beschouwing gelaten.

*Prijslijst vanaf 6 april 2009 van Relaxabonnementen*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Type abonnement | Relax 100 | Relax 150 | Relax 200 | Relax 250 | Relax 300 | Relax 400 | Relax 500 | Relax 750 | Relax  1000 | Relax 1500 |
| Aantal belminuten | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 400 | 500 | 750 | 1000 | 1500 |
| Kosten per maand in € | 14,50 | 19,50 | 24,50 | 29,50 | 34,50 | 42,50 | 49,50 | 72,50 | 94,50 | 134,50 |
| Tarief per minuut in € | 0,15 | 0,13 | 0,12 | 0,12 | 0,12 | 0,11 | 0,10 | 0,10 | 0,09 | 0,09 |

Het aantal belminuten is het aantal minuten dat je per maand kunt verbellen zonder extra te moeten betalen. Het tarief per minuut geldt dus pas boven het vaste aantal belminuten.

**1.** Kijk naar de veranderingen in deze tabel. In het begin van de eerste en tweede rij is er sprake van een constante verandering. We noemen dat een *stapgrootte*.

De stapgrootte is in de rij met het aantal belminuten in het begin gelijk aan 50 belminuten.

Hoe groot is aanvankelijk de stapgrootte in de rij met kosten per maand?

**2.** Bereken de maandkosten bij Relax 400 en bij Relax 1500 als de stapgrootte in de kosten per maand gelijk zou blijven aan de eerste stappen.

**Relax 100-abonnement**

Bij het Relax 100-abonnement betaal je bij elke **extra** minuut nadat er 100 minuten verbruikt zijn 0,15 euro. Bij elke extra van 5 minuten betaal je precies 0,75 euro meer. Zie deels ingevulde onderstaande tabel.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Aantal verbruikte belminuten | 0 | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 |
| Totale kosten in € | 14,50 | 14,50 | 14,50 | 14,50 | 14,50 |  |  |

**3.** Neem de tabel over en vul de tabel verder in.

**4.** Teken een grafiek die het verband weergeeft tussen de totale kosten en het aantal verbruikte belminuten. Laat het aantal verbruikte belminuten variëren tussen de nul en honderdvijftig.

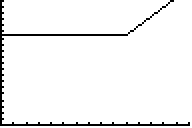
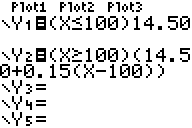
Er is een verband tussen de totale kosten *TK* van het Relax100-abonnement en het aantal belminuten *x.*

Dit verband kunnen we met twee formules weergeven:

 voor , waarbij *x* het aantal verbruikte belminuten is.

 voor .

Zie hieronder de samengestelde grafiek. De grafiek bestaat uit twee delen, een horizontaal lijnstuk en een schuine lijn die op elkaar aansluiten in het punt (100, 14,50).

*Op de TI-GR's kun je de >, <, ≤ en ≥ invoegen via het TEST-TEST-menu (2nd- MATH).*

**5** Schrijf de formules op die horen bij het Relax150-abonnement. Doe dit ook voor het Relax200-abonnement.

**6.** Teken in één assenstelsel voor de eerste 250 minuten de grafieken van Relax150 en Relax 200.

Iemand heeft met abonnement Relax500 in een maand tijd 90 euro aan kosten gemaakt.

De vraag is hoeveel minuten zij gebeld heeft.

Van de 90 euro breng je de maandkosten in mindering. Dat geeft een bedrag van 40,50 euro. Het tarief per extra minuut is 10 eurocent. Zie prijslijst.

**7.** Bereken hoeveel minuten zij in die maand gebeld heeft.

Een eigenaar van een makelaarsbedrijf heeft bepaald dat zijn werknemers iedere maand ongeveer 6 uur bellen.

**8**. Welk abonnement kan hij het beste voor hen afsluiten. Geef een advies met een wiskundige onderbouwing.

Dit telecombedrijf biedt ook nog andere abonnementen aan.

We bekijken nu de **Flex-abonnementen** van dit telecombedrijf.

Ook nu laten we de aanschafkosten van het mobieltje buiten beschouwing.

**Prijslijsttabel**

Flex, tarieven inclusief btw, afgerond op 2 decimalen, geldig vanaf 4 augustus 2009.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Abonnement (1 of 2 jaar) | **Flex15** | **Flex 20** | **Flex 25** | **Flex 30** | **Flex 45** | **Flex 70** | **Flex 100** |
| je koopt per maand een maandbedrag van | 15,00 | 20,00 | 25,00 | 30,00 | 45,00 | 70,00 | 100,00 |
| je betaalt | 15,00 | 20,00 | 25,00 | 30,00 | 45,00 | 70,00 | 100,00 |
| tarief per minuut | 0,20 | 0,17 | 0,15 | 0,13 | 0,12 | 0,11 | 0,10 |
| **Aantal minuten** | 75 |  |  |  |  |  |  |

**9.** In de prijstabel is de rij van “Aantal minuten" nog niet helemaal ingevuld. Neem deze rij over en vul deze rij verder in.

**10**. De maandkosten nemen aanvankelijk toe met een vast bedrag van 5 euro. Geldt dit ook voor de tarieven per minuut, dat ze met een vast bedrag toe- of afnemen?

Je bent waarschijnlijk bij opgave 10 tot de conclusie gekomen dat er geen lineair verband is tussen de maandkosten en het minutentarief.

Er is een abonnementenserie te bedenken waarbij er wel sprake is van een lineair verband tussen maandkosten (*MK*) en minutentarief(*m*). Laten we deze serie **Flexanders** noemen.

Hier onder zie je een tabel van **Flexanders**

|  |  |
| --- | --- |
| Maandkosten *MK* | Minutentarief *m* |
| 15 | 0,20 |
| 20 | 0,17 |
| 25 | 0,14 |
| 30 | 0,11 |

**11.** Bereken hoeveel belminuten je hebt bij een abonnement met een maandbedrag van 35 euro

**12.** Geef het lineaire verband waarbij de maandkosten worden uitgedrukt in het minutentarief.

**Hoe werkt Flex?**

Als je met abonnement Flex15 75 belminuten hebt gemaakt wordt je overgeschakeld op Flex20 en betaal je voor **alle** belminuten 0,17 euro. Zie tabel en hieronder een deel van een bericht van het telecombedrijf aan de klant:

*Beste klant,*

*0p 15-01-2010 gaat uw nieuwe flexbundel in.*

*Houdt u beltegoed over....*

*groet, bedrijf...*

**13.** Bereken wat je kwijt bent bij Flex 15 voor 76 minuten, je schakelt dus automatisch naar de Flex 20. Bereken vervolgens je kosten als je met het tarief 20 cent per minuut 76 minuten zou bellen. Reken uit hoeveel je goedkoper uit bent.

**14.** Iemand heeft een Flex15 abonnement. Teken de bijbehorende kostengrafiek voor de eerste honderd minuten.

Iemand belt elke maand voor ongeveer 380 minuten.

**15**. Welk Flexabonnement past het best bij 380 belminuten? Licht je antwoord toe.

Het Flexabonnement kunnen we nu vergelijken met het Relaxabonnement. Zie vraag 8.

**16**. Welk advies geef je nu?

|  |
| --- |
| **vwo5wiskunde C 019Figuur 1** |

**Cadeau**

Iemand krijgt voor zijn zestigste verjaardag van een vriendin een papieren zonnebloem cadeau. Het binnenste van de zonnebloem is gevuld, hoe kan het ook anders, met 60 muntstukjes. Er is gebruik gemaakt van twee soorten munten. Zie figuur 1. Twintigeurocent-munten en tieneurocent-munten.

De vriendin heeft gekozen voor evenveel twintigeurocent-munten als tieneurocent-munten.

**17.** Bereken welk bedrag zij hem cadeau heeft gedaan.

Zij had ook kunnen kiezen voor een bedrag van 10 euro. (eerste eis)

We voeren twee variabelen in.

*X* is het aantal twintigeurocent-munten en *Y* het aantal tieneurocent-munten.

Er geldt dan . Of:

**18.** Leg dit uit.

**19.** Leg uit , zo nodig met een tabel, dat hier sprake is van een lineair verband.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *Y* |  |  |  |  |  |

Er is nog een andere(verjaardags)eis omdat de jarige persoon 60 wordt: .

**20.** Bereken, als zij aan de twee eisen wil voldoen, hoeveel munten ze van beide soorten nodig heeft.

In een andere situatie zijn de formules:

* 
* 

**22**. Formuleer hierbij een verjaardagsprobleem en los het probleem op.

Paragraaf 5: Evenredigheden

Waar gaat deze paragraaf over?

*Wat is een evenredigheid en wat betekent omgekeerd evenredig? We gaan op zoek naar bijzondere verhoudingsgetallen.*

**Je onderzoekt euromunten op grootte en gewicht. Je onderzoekt ook hoe zuinig je kunt omgaan met verpakkingsmateriaal. Niet geheel onbelangrijk in het kader van duurzaamheid.**



**Euromunten**

Hiernaast zie je alle euromunten.

De munten verschillen onderling. Er zijn vele kenmerken. Bijvoorbeeld de grootte van de munt. Alle munten zijn cirkelvormig. Hoe groter de munt hoe groter de diameter hoe groter de omtrek en hoe groter de oppervlakte. Zie tabel 1.

## *Tabel 1*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Muntsoort in eurocenten | 1 | 2 | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 | 200 |
| Diameter in mm | 16,25 | 18,75 | 21,25 | 19,75 | 22,25 | 24,25 | 23,25 | 25,75 |
| Omtrek in mm |  |  |  |  |  |  |  |  |

De omtrek van een cirkel is gelijk is aan de diameter maal een vast getal. Dat getal noemen we een constante en dit is het bekende getal pi. Voor pi gebruiken we het symbool .

In formulevorm schrijf je dan  waarbij *P* de omtrek is en *d* de diameter. De eenheden zijn millimeters.

**1.** Bereken de omtrekken van de twee eurocentmunt en van het twee euro stuk (200 eurocent) in tienden van mm nauwkeurig.

**2.** Ga na hoeveel keer zo groot de omtrek van een twee euromunt is ten opzichte van een twee eurocent muntstuk en vergelijk ook de diameters van beide munten met elkaar. Welke conclusie kun je trekken?

We zeggen de omtrek is evenredig met de diameter. Het getal  heet de evenredigheidsconstante.



Een aantal bijzonderheden van een **evenredig** verband:

* wordt de diameter bijvoorbeeld vier maal zo groot dan wordt de omtrek ook viermaal zo groot.
* een evenredig verband is lineair, de bijbehorende formule is van de vorm *y=ax.* De startwaarde is dus altijd nul.



* de verhouding van *y* en *x* is constant en is gelijk aan *a*. *a* heetde evenredigheidsconstante.
* de bijbehorende grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.

|  |
| --- |
| bron: www.wiskundemeisjes.nl |

**3.** Een oud probleem over het getal  vindt je terug op de website van de wiskundemeisjes (www.wiskundemeisjes.nl).

*Er zit een touw strak om de aarde, zoals een ring om een vinger. Het is een heel lang touw van meer dan 40.000 kilometer. Nu knip je het touw door en doe je er één meter extra touw tussen. Dan til je het touw overal een beetje op, zodat het op elke plek even ver van het aardoppervlak is. Hoeveel ruimte is er nu tussen het touw en de aarde? Ongeveer zoveel als een elektron? Een bacterie? Een krant? Een kat? Een olifant?*

Tip: maak een situatieschets en noem de straal van de aarde *r* en de afstand tussen het opgetilde touw en aarde *x.*

Een eurocent met een diameter van 16,25 mm is de kleinste euromunt.

In plaats van de aarde bij het touwprobleem nemen we de kleinste euromunt.

**4.** Hoeveel ruimte is er nu tussen het touw en de kleinste euromunt?

De dikte van de eerste drie euromunten is 1,67 mm. Het volume is gelijk aan de oppervlakte maal de dikte. In formulevorm: waarbij *V* het volume is en *G* de oppervlakte van een ronde kant van de munt. Dit is ook weer een voorbeeld van een evenredigheid.

Voor het berekenen van het volume van een munt is het nuttig om de volgende zinnen in formulevorm te zetten.

*De oppervlakte van een cirkel is pi maal de straal in het kwadraat.*

*De oppervlakte van een cirkel is pi maal de halve diameter in het kwadraat.*

## 5. Schrijf bovenstaande zinnen op in formulevorm.

## 6. Bereken van de eerste drie euromunten het volume.

## *Tabel 2*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Muntsoort in centen | 1 | 2 | 5 | 10 | 20 |
| Diameter in mm | 16,25 | 18,75 | 21,25 | 19,75 | 22,25 |
| Gewicht in grammen | 2,30 | 3,06 | 3,92 | 4,10 | 5,74 |

**7.** Bekijk tabel 2. Onderzoek of er een evenredigheid bestaat bij de eerste drie euromunten tussen gewicht en volume. Zo ja, hoe groot is de evenredigheidsconstante dan?

**Verpakkingsmateriaal? Kan het zuiniger?**

Uit het boek "rekenen is leuker dan (als) je denkt" van Marjolein Kool en Ed de Moor:

*Neem twee velletjes van 20 bij 30 centimeter, vouw elk velletje in vieren en vorm daarvan een vierkante koker. Maar let op: de ene koker maakt u door het blaadje in de lengte te vouwen, de ander door het blad in de breedte te nemen. Plak de koker vast met wat plakband. U heeft nu twee kokertjes, allebei gevormd uit hetzelfde hoeveelheid verpakkingsmateriaa.(zie foto 1).*

|  |
| --- |
| *Foto1* |
| *Foto2* |
| *Foto 3* |

**8.** In welk kokertje gaat het meeste? Maak een keuze zonder nog te gaan rekenen.

De inhoud van een balk is lengte maal breedte maal hoogte.

**9.** Schrijf eerst de afmetingen op van ieder koker en bereken daarna de inhouden.

Voor beide kokers is evenveel verpakkingsmateriaal gebruikt. De inhouden verschillen echter.

**10.** Bereken dat verschil en schrijf. Vergelijk dit verschil met de inhoud van de grootste koker. Komt dit overeen met je keuze bij opgave 8?

We gaan nu een vaste inhoud bekijken van een doos maar variëren hoogte van de doos en oppervlakte van de bodem. Anders gezegd: hoe varieert de hoeveelheid verpakkingsmateriaal bij een vaste inhoud?

Een nieuwe trend in koffieland is Nespresso. Tien capsules koffie worden verpakt in langwerpige doosjes. Zie foto 2 en 3.

De afmetingen van de vierkante bodem 3,7 cm bij 3,7 cm. De hoogte van het doosje is 28 cm.

**11.** Reken na dat de inhoud afgerond op honderdtallen 400 kubieke centimeter is.

We gaan nu uit van doosjes met een inhoud van 400 kubieke centimeter. We laten even achterwege wat we in zo'n doosje stoppen. Omdat de inhoud gelijk is aan hoogte maal oppervlakte bodem geldt: 

**12.** Wat gebeurt er met de vorm van het doosje als de hoogte afneemt? Wat gebeurt er met de vorm als de grootte van het grondvlak afneemt?

*Tabel 3*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hoogte *h* in cm | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| Oppervlakte bodem *G* in vierkante cm |  |  |  |  |  |

**13.** Neem tabel 3 over en vul de tweede rij van de tabel in.

**14.** Wat gebeurt er met de oppervlakte van de bodem als de hoogte wordt gehalveerd?

Het verband is een voorbeeld van *omgekeerd evenredigheid*. We zeggen dat de hoogte van het doosje en de oppervlakte van de bodem omgekeerd evenredig zijn.

**15.** Heb je al enig idee hoe je de vorm van de doos moet kiezen om zo zuinig mogelijk om te gaan met verpakkingsmateriaal? Schrijf je idee op zonder te gaan rekenen.

Een doosje Nespresso zetten we rechtop. Zie foto 3.

De verpakking van een doosje bestaat uit twee vierkanten, bodem en bovenkant en vier rechtopstaande rechthoeken. We herhalen de gegevens. De afmetingen van de vierkante bodem is 3,7 cm bij 3,7 cm. De hoogte is 28 cm.

**16.** Bereken de totale oppervlakte van de verpakking.

We gaan weer uit van een doosje met een inhoud van 400 kubieke cm.

Voor het invullen van tabel 4 is het handig om in plaats van de formule een andere formule te gebruiken namelijk

.

***Tabel 4***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Breedte bodem in cm | Oppervlakte vierkante bodem *G* | Hoogte *h* | Oppervlakte opstaande rechthoek | Totale oppervlakte verpakkingsmateriaal. |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |
| 10 |  |  |  |  |

**17.** Neem tabel 4 over en vul het verder in.

**18.** Teken de grafiek van *h* met op de horizontale as *G.* Welke naam heeft deze grafiek?

**19.** Als je de oppervlakte van de bodem onbeperkt laat toenemen snijdt de grafiek dan de horizontale as?

**20.** Als je de hoogte van de doos onbeperkt laat toenemen snijdt de grafiek dan de verticale as?

**21.** Zie je in de tabel van opgave 17 meer (omgekeerde) evenredigheden?

## Een aantal bijzonderheden van een omgekeerd evenredig verband :

## formule is niet lineair



## bijbehorende grafiek gaat niet door de oorsprong

## de grafiek is een hyperbool of een deel van een hyperbool

* wordt X bijvoorbeeld vier maal zo groot dan wordt Y viermaal zo klein.
* formule  kun je herschrijven tot . *c* is de constante.
* *Y* is evenredig met , het "omgekeerde van *X*", want je kunt schrijven .

**Terug naar de verpakking**

*Zie ook opgave 15. We willen zo min mogelijk verpakkingsmateriaal.*

**22.** Zoek uit hoe je de afmetingen van de bodem moet kiezen om zo min mogelijk verpakkingsmateriaal te gebruiken. Zie tabel 4.

Als we de breedte van de bodem van de doos *x* noemen dan geldt voor de hoogte van het doosje: .

**23.** Leg dat uit.

De vier opstaande rechthoekige grensvlakken van de doos zijn alle vier even groot. Zie ook foto 2. Voor de oppervlakte *A* van een opstaande rechthoek van het doosje geldt breedte maal hoogte: .

**24.** Laat zien dat de oppervlakte *A* van de opstaande rechthoek omgekeerd evenredig is met een afmeting van de bodem van het doosje.

**Waterverbruik**

In de jaarafrekening van bewoners van een huis vermeldt waterbedrijf ***brabantWater*** onder andere de volgende gegevens:

Prijs per  water in 2008 € 0,4426 exclusief BTW

Prijs per  water in 2009 € 0,4495 exclusief BTW

Voor het jaar 2008 kun je dan de volgende formule opstellen:  waarbij *K* de kosten in euro's zijn en *x* het aantal gebruikte  water. Voor het verbruik van water wordt ook 6 % BTW in rekening gebracht.

**25.** Laat met een berekening zien hoe de evenredigheidsconstanten horend bij 2008 en 2009 dan veranderen.

Echter er moet ook vastrecht worden betaald. Van dit vast bedrag wordt het leidingnet onderhouden en de watermeter. In 2008 was dat € 66 per jaar exclusief BTW.

**26.** Stel de waterkosten formule op voor 2008 exclusief BTW en ga na of de kosten evenredig zijn met de verbruikte hoeveelheid water.

Bij de specificatie van de jaarafrekening wordt vermeld dat het gaat om de volgende periodes: 01-04-08/01-01-09 en 01-01-09/01-04-09 en de prijs van het water is 0,4443 per .

Exclusief BTW en vastrecht luidt de kostenformule: 

**27.** Leg met een berekening uit hoe men de evenredigheidsconstante 0,4443 gevonden heeft.

**Tabellen**

**28.** Ga bij de drie volgende tabellen na of er sprake is van evenredigheid, omgekeerd evenredigheid of geen van beide.

A

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 8 |
| Y | 6 | 3 | 2 | 1,5 | 0,75 |

B

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| U | 3 | 9 | 21 | 45 | 93 |
| V | 6 | 12 | 24 | 48 | 96 |

C

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| H | 23 | 37 | 41,65 | 48,87 | 51,56 |
| P | 37,24 | 59,90 | 67,43 | 79,12 | 83,48 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **29.** Een jonge vrouw gaat op internet na of ze wel haar juiste gewicht heeft. Ze komt bij de volgende site:  ***Bereken Quetelet Index (www.fysioweb.nl/info)***  *De Quetelet Index is een objectieve manier om te meten of u te mager, goed op gewicht of te zwaar bent. Bedenk wel dat deze index zijn beperkingen heeft. Een bodybuilder bv. wordt niet aangeraden deze index als maatstaf te gebruiken. De index is gebaseerd op een gemiddelde van de bevolking.  De Quetelet Index geeft de relatie tussen lengte en gewicht aan. Bij een Quetelet Index van 27 of meer is er sprake van overgewicht of vetzucht.  Neem in dat geval contact op met de huisarts.*  Ze vult vervolgens haar gegevens in en krijgt het volgende overzicht te zien. Zie figuur 1.  *Figuur 1*   |  |  | | --- | --- | | Uw gewicht *in* ***Kg*** | Uw lengte *in* ***Meters.*** *Bijv. 1.84* | |  | | | **Dit is uw Quetelet Index** | **U valt onder de noemer:** | |  |  | |  | | | **Quetelet Index** | **Omschrijving** | | Minder dan 20 | Mager | | 20 tot 25 | Goed gewicht | | 25 tot 27 | Neiging tot overgewicht | | 27 tot 30 | Overgewicht | | 30 of meer | Vetzucht (obesitas) | |  | |   De relatie waar men het op de site over heeft is de volgende: . *G* is het gewicht in kilo's en *L* lichaamslengte in meters.  In het geval van de jonge vrouw geval luidt de relatie: . Immers haar lengte verandert toch niet. In deze relatie herkennen we weer een evenredigheid.  **30.** Bereken de evenredigheidsconstante op twee decimalen nauwkeurig.  **31.** Bereken vanaf welk gewicht ze mager is en vanaf welk gewicht ze de neiging heeft tot overgewicht. |

**"*Op zoek naar bijzondere verhoudingsgetallen"***

|  |
| --- |
| *Figuur 2* |

In figuur 2 is een gelijkbenige driehoek ABC getekend met een tophoek **C**van 36 graden. Zo'n driehoek heeft voor de verhouding van de zijdes een bijzondere eigenschap.

**32.** Meet de lengtes op van basis *AC* en een van de gelijke zijden bijvoorbeeld *AB*. Bereken de verhouding *AB*:*AC.*

**33.** Teken zelf een paar gelijkbenige driehoeken met een tophoek van 36 graden en reken de verhouding uit van een van de gelijke zijden met de basis.

**34.** Schrijf op wat je ontdekt hebt bij de verhoudingsgetallen van opgaven 32 en 33. Schrijf ook de bijbehorende evenredigheid op.

Een driehoek met hoeken van 36°, 72° en 72° heet **gulden driehoek**.

Het bijbehorende verhoudingsgetal is een van de gulden snede getallen:.

Het is ongeveer gelijk aan 1,618. We noteren dit getal ook met het symbool:φ.



**Pakken zeeppoeder**

In de foto hiernaast zie je twee dozen wasmiddel voor gekleurde was. Het grote pak is een voordeelpak.

In tabel 5 staat productinformatie en afmetingen van beide dozen.

*Tabel 5*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Breedte | diepte | hoogte | hoeveelheid waspoeder | Aantal wasbeurten |
| Kleine pak | 14,5 cm | 9,5 cm | 16,5 cm | 1,215 kg | 18 |
| Voordeelpak | 19,5 cm | 9,5 cm | 23 cm | 2,7 kg | 40 |

De prijzen staan in de tabel niet vermeld.

**35.** Verwacht je dat de hoeveelheid wasmiddel evenredig is met de prijs?

We bekijken de volgende relaties.

* Hoeveelheid waspoeder *H* en inhoud van doos *I*
* Hoeveelheid waspoeder *H* en aantal wasbeurten *A*.

**36.** Leg uit bij welke relatie er sprake is van een evenredigheid

|  |
| --- |
| *Figuur 3* |

**Terugblik**

**Platonische lichamen of regelmatige veelvlakken**

Er zijn vijf soorten Platonische lichamen of regelmatige veelvlakken. In figuur 3 zijn er twee afgebeeld. Een icosaëder (regelmatig twintigvlak) en een kubus.

De totale oppervlakte van kubus zowel van icosaëder staan in verband met de oppervlakte van een grensvlakje.

**37.** Schrijf de bijbehorende evenredigheden op.

Voor de inhoud *I* van een kubus geldt: waarbij *x* de lengte van een ribbe is van zowel de kubus als de icosaëder.

Voor de inhoud *V* van de icosaëder geldt: .

**38.** Laat zien dat de inhouden van beide Platonische lichamen recht evenredig zijn (bij gegeven *x*).

Het getal  is een bijzonder verhoudingsgetal.

**39.** Geef een overzicht van bijzondere verhoudingsgetallen die we in deze paragraaf zijn tegengekomen.

**40.** Geef de verschillen aan tussen de begrippen recht evenredig en omgekeerd evenredig. Welke soort formules horen bij deze begrippen?

**Paragraaf 6: Groei**

Waar gaat deze paragraaf over?

*Wat voor soorten groei zijn er zoal?*

*Wat is gemiddelde verandering?Hoe bereken je de gemiddelde verandering? Waar kun je het voor gebruiken?*

Een aantal krantenkoppen of -citaten:

* Commerciële TV groeit gestaag door. (Vokskrant 26-09-2009)
* De huizenprijzen zullen vrijwel zeker verder dalen. (Volkskrant 14-09-2009)
* Het consumentenvertrouwen in de VS is fors gedaald. De vertrouwensindex kwam uit op een stand van 66, tegen 70,6 in oktober. (NRC 14-11-2009)
* Het kabinet rekent erop dat de files meer dan halveren door de invoering van de kilometerheffing. (Volkskrant 14-11-2009)
* Nederlandse economie groeit weer. (Volkskrant 14-11-2009)
* Winststijging Shell vlakt af tot 20 procent in derde kwartaal. (Trouw, 3-11-1995)
* Aantal verkeersdoden neemt fors af. (Nederlands Dagblad, 12-11-2009)
* Nederland wordt erg langzaam ouder. De levensverwachting stijgt. (Volkskrant, 14-11-2009)
* Jeugdwerkeloosheid flink opgelopen (Webmagazine, 26 augustus 2009)

**Stijging**

In figuur 1 zijn drie schetsen te zien van stijging.

**  **

**Gelijkmatige stijging Toenemende stijging Afnemende stijging**

*Figuur 1*

We zijn niet altijd gelukkig met stijgingen.

**1.** De economische recessie komt onder andere tot uitdrukking in het aantal openstaande vacatures bij bedrijven en instellingen. Het Centraal Bureau voor de Statistiek heeft grafiek in figuur 2 gemaakt voor het aantal openstaande vacatures in een aantal kwartalen vanaf de zomer van 2005.   
  
Wanneer steeg het aantal openstaande vacatures het sterkst?

|  |
| --- |
| **Aantal openstaande vacatures**  *Aantal openstaande vacatures in een aantal kwartalen vanaf de zomer van 2005.Figuur 2* |
| *BevolkingsgroeiFiguur 3* |

A. van het derde naar het vierde kwartaal in 2005

B. van het tweede naar het derde kwartaal in 2006

C. van het eerste naar het tweede kwartaal in 2007

D. van het derde naar het vierde kwartaal in 2008

Een voorbeeld van *toenemende stijging* is de groei van de wereldbevolking. Zie figuur 3.

**2.** Neem de volgende tabel over en vul het verder in. *Let op: het Amerikaanse "Billion" betekent miljard.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **jaar** | **0** | **1650** | **1850** |
| **aantal** |  |  |  |
| **jaar** | **1930** | **1975** | **1993** |
| **aantal** |  |  |  |

**3.** In welke periode nam de wereldbevolking het snelst toe?

Het verschil tussen twee opeenvolgende tijdstippen is in de grafiek van figuur 3 steeds verschillend. Om de toename van de wereldbevolking over verschillende perioden beter met elkaar te vergelijken rekenen we de gemiddelde verandering uit.

De gemiddelde verandering in de periode 1650-1850 is bijvoorbeeld:

Gemiddeld kwamen er per jaar in die periode 2,5 miljoen mensen erbij.

**4**. Bereken over de andere 4 periodes de gemiddelde verandering.

**Gemiddelde verandering**

gemiddelde verandering=

Sinds het begin van de industriële revolutie is de wereldbevolking exponentieel gegroeid.

In 1950 waren er ongeveer 2521 miljoen mensen.

In 1950 werd de groeisnelheid van de wereldbevolking geschat op 1,7 % per jaar.

Neem voor  het jaar 1950.

**5.** Leg uit dat de groeifactor per jaar gelijk is aan 1,017.

**6.** Stel een formule op die het verband aangeeft tussen de grootte van de wereldbevolking en het aantal jaren na 1950.

**7.** Volgens sommige wetenschappers is in verband met voldoende voedsel, water en energie 10 miljard mensen de grens. Bereken in welk jaar die grens volgens de formule wordt bereikt.

|  |
| --- |
| **Ontwikkeling omzet auto- en motorbranche totaalOntwikkeling omzet auto- en motorbranche totaal**  *Figuur 4* |

**Daling en stijging**

De omzet van de auto- en motorbranche is in 2009 sterk gekrompen. Zie figuur 4.

**8.** Hoe kun je in de grafiek van figuur 4 zien dat er sprake is van een sterke krimp in 2009?

**9.** Beschrijf de ontwikkeling van de omzet met termen als afnemend/toenemend stijgend/dalend.

**10.** Bekijk nog eens de drie schetsen over stijging in figuur 1. Maak drie dergelijke schetsen schetsen over daling.

**Bevolkingstrends in Nederland**

*Tabel 1- De aantallen zijn in duizendtallen.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **jaar** | **immigratie** | **emigratie** | **geboorte** | **sterfte** | **huwelijken** | **Echtschei­dingen** | **Bevolkings­­groei** |
| **2000** | 132,9 | 79,0 | 206,6 | 140,5 | 88,1 | 34,7 | 123,1 |
| **2001** | 133,4 | 82,6 | 202,6 | 140,4 | 82,1 | 37,8 | 118,2 |
| **2002** | 121,3 | 96,9 | 202,1 | 142,4 | 85,8 | 37,3 | 87,3 |
| **2003** | 104,5 | 104,8 | 200,3 | 141,9 | 80,4 | 36,3 | 65,5 |
| **2004** | 94,0 | 110,2 | 194,0 | 136,6 | 73,4 | 36,1 | 47,5 |
| **2005** | 92,3 | 119,7 | 187,9 | 136,4 | 72,3 | 36,6 | 28,7 |
| **2006** | 101,2 | 132,5 | 185,1 | 135,4 | 72,4 | 35,6 | 23,8 |
| **2007** | 116,8 | 122,6 | 181,3 | 133,0 | 72,5 | 35,2 | 47,4 |
| **2008** | 143,5 | 117,8 | 184,6 | 135,1 | 75,4 | 35,0 | 80,4 |
| **2009** | 147,3 | 110,8 | 184,8 | 134,2 | 72,9 | 31,6 | 91,8 |

|  |
| --- |
| I:\img422 correctie.jpg*Figuur 5* |

De immigratie in Nederland is eerst vanaf 2000 afgenomen daarna is er vanaf 2006 weer een stijging.

**11.** Bereken de gemiddelde afname van het aantal immigranten in de periode 2000-2005 en de gemiddelde toename in de periode 2005-2009.

**12.** Beschrijf de ontwikkelingen bij de overige kolommen van de bevolkingsontwikkeling van Nederland.

**13.** In figuur 5 zijn grafieken getekend van bevolkingsgroei, immigratie, emigratie, geboorte en sterfte. Zet bij elke grafiek de juiste benaming.

De bevolkingsgroei had een dieptepunt in 2006. Het aantal inwoners in Nederland was eind 2009 ongeveer 16,5 miljoen.

**14.** Bepaal de jaarlijkse toename van de bevolkingsgroei sinds 2006 en bereken daarmee een schatting van het aantal inwoners eind 2012.

**Schaatsen**

In februari 2010 won Sven Kramer de 5 km tijdens de Olympische spelen in Vancouver.

Verrassend was de opkomst van de Koreaan Seung-Hoon Lee. Hij eindigde als tweede.

Bij elk rondje van 400 meter kun je de gemiddelde snelheid uitrekenen met de formule:

waarbij *V* wordt uitgedrukt in km/uur en T de rondetijd is in seconden

**19.** Leg uit hoe die formule is opgesteld.

**20.** Leg uit dat er sprake van omgekeerd evenredigheid.

In tabel 2 staat voor elke ronde de eindtijd van beide schaatsers.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Afstand | 200 | 600 | 1000 | 1400 | 1800 | 2200 | 2600 |
| Kramer | 17,98 | 46,4 | 75,84 | 105,61 | 135 | 164,57 | 194,14 |
| Lee | 19,18 | 48,88 | 78,75 | 108,93 | 138,8 | 168,65 | 198,63 |
| Afstand | 3000 | 3400 | 3800 | 4200 | 4600 | 5000 |  |
| Kramer | 223,88 | 253,53 | 283,43 | 313,46 | 343,99 | 374,6 |  |
| Lee | 228,56 | 258,62 | 288,64 | 318,15 | 347,69 | 376,95 |  |

*Tabel 2*

Na 3800 meter had Lee een achterstand van 5,21 seconden.

**21**. Onderzoek met behulp van nog in te vullen tabel 3 en het berekenen van gemiddelde snelheden in de laatste drie ronden hoe Lee er alles nog aan deed om de 5 km te winnen.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ronde | 3800-4200 | 4200-4600 | 4600-5000 | Gehele afstand |
| Rondetijd Kramer |  |  |  | 374,60 |
| Rondetijd Lee |  |  |  | 376,95 |
| Gemiddelde snelheid Kramer |  |  |  |  |
| Gemiddelde snelheid Lee |  |  |  |  |

*Tabel 3*

|  |
| --- |
| *Lee.gifFiguur 6* |

In figuur 6 zie je de tijd-afstand grafiek van Lee. De tijd is afgezet op de horizontale as.

De gemiddelde snelheden (in meter per seconde) die we berekend hebben zijn steeds gelijk aan

Voor *verandering afgelegde weg* gebruiken we het symbool (spreek uit: delta s)

Voor *verandering tijd* gebruiken we het symbool (spreek uit : delta t)

Voor de gemiddelde snelheid in m/s schrijven we: .

*Δ is de Griekse hoofdletter D en staat voor 'differentie' (difference)*

**Formules**

Gegeven is de formule *y* = 1 + 10·2-0,5*x*. Zie grafiek en tabellen hierbonder.

We kijken eerst naar het interval [0,5]. De grafiek daalt op dit interval van punt (0,11) naar punt (5; 2,7678), zie tabel. De gemiddelde verandering van de hoogtes van de punten op de grafiek is gelijk aan = .

**22a.** Bereken voor deze formule de gemiddelde verandering van de hoogtes van de punten van de grafiek op de intervallen [5,10] en [20,25].

**b.** Wat valt je op aan die gemiddelde veranderingen? Hoe zie je dat terug aan het verloop van de grafiek?

Gegeven is nu de formule: .

**23a**. Bereken voor deze formule de gemiddelde verandering  over de volgende intervallen:

|  |  |
| --- | --- |
| interval | Gemiddelde verandering |
| [0,1] | 0,6598 |
| [0,3] |  |
| [0,6] |  |
| [0,9] |  |
| [0,12] |  |

**b.** Zoek uit op welk interval vanaf 0 de gemiddelde verandering het grootst is. Rond af op helen.

**c.** Teken een lijn vanaf het snijpunt van de grafiek met de *y*-as die de grafiek raakt en lees de helling van die lijn af.

**d.** Zie je een verband tussen de antwoorden van de vragen b en c? Geef een toelichting.

**24.** Zoek uit op welk interval vanaf 0 de grafiek toenemend stijgend is en vanaf waar afnemend stijgend.

**25.** Wat valt je op bij de gemiddelde verandering bij het interval [20; 25]? Hoe zie je dat aan het verloop van de grafiek.

**26.** Welk verband bestaat er tussen de grafieken van *H* en *y?* Beschrijf de grafiek van *H∙y .*

**27.** Neem de volgende zin over en vul die aan:

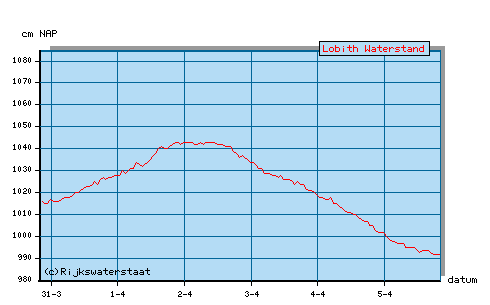
*Als x toeneemt neemt y af maar de waarde van H.........................................*

**Samenvatting**

In tabel 4 staat het verloop van de waterstanden van 29 maart 2010 tot en met 5 april.in centimeter (+NAP) gemeten bij Lobith steeds om 6.00 uur. In de laatste rij staat ook de afvoer van het water in kubieke meter per seconde.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Datum** | 29 mrt | 30 mrt | 31 mrt | 1 apr | 2 apr | 3 apr | 4 apr | 5 apr |
| **Tijdstip t** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **Waterstand in cm** | 978 | 1001 | 1018 | 1031 | 1043 | 1029 | 1015 | 997 |
| **Afvoer in kubieke meter per seconde** |  | 2446 | 2556 | 2641 | 2722 | 2628 | 2536 | 2404 |

*Tabel 4*



*Figuur 7*

**28.** Noem een paar verschillen tussen de twee grafieken in figuur 7. Noem voor- en nadelen op.

**29a.** Noem de grootste periode op waarbij de gemiddelde verandering van de waterstand gelijk is aan nul.

**b.** Gedurende welke periode verandert de waterstand nauwelijks?

**c.** Bereken de gemiddelde snelheid waarmee de waterstand daalt tussen 2 april en 5 april.