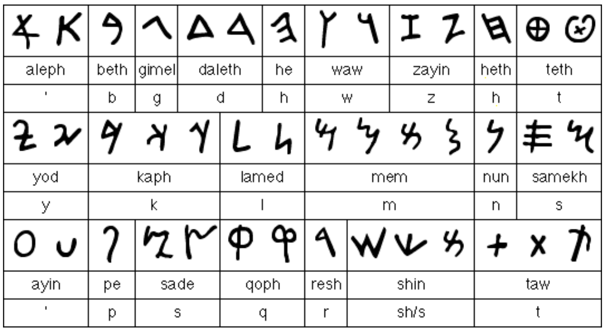
Systematisch ‘tellen’ (0.5 ; 16-9-2011)

Raymond Queneau schreeft 10 sonnetten (gedichten van 14 regels met als rijmschema: *abab abab ccd eed*), waarvan elke regel rijmt op de overeenkomstige regel van de andere 9 sonnetten. Dus alle eerste regels rijmen op elkaar, alle tweede enz. Door de regels op een speciale manier af te drukken (zie hiernaast) kan de lezer zijn/haar eigen sonnet maken.

1] Hoeveel verschillende sonnetten zijn er mogelijk?

Het Fenicisch alfabet (voorloper van het Grieks en verwant aan het Hebreeuws) kent 22 tekens, waarvan 20 voor een medeklinker. Zoals te zien in het overzicht hiernaast hebben veel tekens diverse schrijfwijzen. Zo wordt de ***yod*** op twee manieren geschreven, de ***kaph*** op drie, en de ***mem*** zelfs op vier.



2] Hoeveel schrijfwijzen zijn er mogelijk voor het ‘woord’ ym (een yod gevolgd door een mem) ?

3] En hoeveel voor ***stm*** ? (de ***t*** is een *taw*, geen *teth*)

De tekens werden oorspronkelijk in steen gebeiteld, en zijn soms lastig te lezen.

Een woord bestaat uit vier tekens: . Het eerste teken kan 4 verschillende letters voorstellen, het tweede vijf, voor de beide laatste tekens zijn 3 mogelijkheden.

4] Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er voor dit woord ?

5] Hoeveel verschillende ‘woorden’ kunnen gemaakt worden met twee verschillende medeklinkers?

6] Iemand kiest volstrekt willekeurig twee (verschillende) tekens uit dit alfabet. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er ?

7] Bestudeer het overzicht op de volgende pagina, en herzie zo nodig je antwoorden.

Op een *speeddate* ontmoeten 20 mannen en 20 vrouwen elkaar. Na afloop van elk gesprek vult elke deelnemer in of hij/zij de ander nog eens wil ontmoeten.

8] Hoeveel gesprekken worden er totaal gevoerd ?

Elke vrouw levert na afloop een lijst in waarop aangegeven is welke man(nen) ze nog eens wil spreken.

9] Hoeveel verschillende lijsten zijn er mogelijk ?

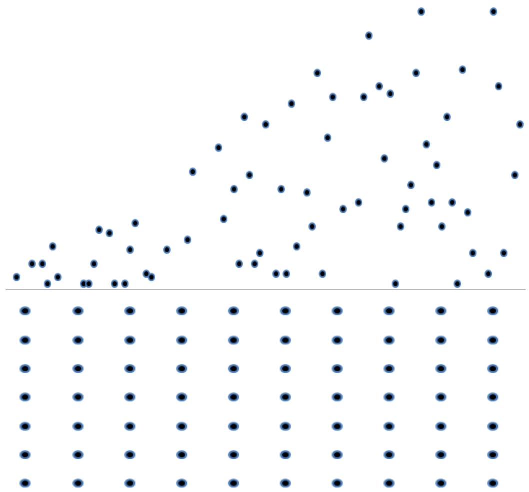
Bij een andere opzet geeft elk van de 20 mannen elke gesprekspartner 0 t/m 4 sterren.

10] Hoeveel verschillende lijsten zijn er nu mogelijk?

Op een feestje zijn 18 meisjes aanwezig en slechts 4 jongens. Ieder meisje heeft over elke jongen een duidelijk mening: wel of niet aantrekkelijk. Mogelijk vindt een meisje geen enkele jongen aantrekkelijk of juist allemaal.

11] Laat zien dat er minstens twee meisjes moeten zijn die precies de zelfde voorkeur hebben.

1. niet tellen, maar rekenen



Tellen is nog niet zo makkelijk. Probeer maar eens te tellen hoeveel stippen hiernaast te zien zijn. Dan gaat het nog om een vrij klein aantal - minder dan honderd. Stel je voor dat het om duizenden zou gaan!

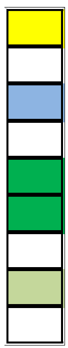
In de tweede tekening is het aantal stippen veel eenvoudiger te bepalen: 7 rijen van 10 stippen (of 10 kolommen van 7) dus 70. Ook als er bijvoorbeeld 4 stippen bij een hoek ontbreken zijn we snel klaar: 70 – 4 =66 .

Met het tellen van *mogelijkheden* is het net zo. In plaats van alle mogelijkheden op te schrijven is het vaak handiger om de zaak te schematiseren. Een korte berekening is daarna vaak voldoende.
Het Nederlandse alfabet telt 5 klinkers (a e i o u) en 20 medeklinkers (de y is een geval apart)
Je kunt je afvragen hoeveel woorden van twee letters er te maken zijn, die bestaan uit een medeklinker gevolgd door een klinker, zoals *ba, de, go, hu*.
Dat zijn er precies 100: We kunnen kiezen uit 20 medeklinkers, en bij elke medeklinker kunnen we 5 klinkers kiezen als tweede letter, we hebben dus 20×5 (=100) mogelijkheden.

Het is wel een kwestie van goed lezen van de vraag. Wanneer er wordt gevraagd *hoeveel woorden er zijn te maken bestaande uit twee letters: een medeklinker en een klinker*, wordt het antwoord twee maal zo groot. Bij elk gevonden woord (bijv. *pi*) komt dan ook nog het ‘spiegelbeeld’ (*ip*).

We moeten dus opletten niet de helft te vergeten. Minstens net zo groot is het probleem van ‘**dubbeltellen**’ we krijgen een antwoord dat veel te groot is, omdat we de zelfde combinatie meerdere keren meerekenen.
Wanneer in een groep van 10 mensen (die elkaar niet kennen) visitekaartjes worden uitgewisseld, gaat het om 90 handelingen. Immers ieder van de 10 geeft de 9 andere zijn/haar kaartje: 10×9 =90.
Wanneer het gaat om de vraag hoeveel maal er handen worden geschud bij de kennismaking is het antwoord de helft: 45 Bij de berekening 10x9 telt het handenschudden tussen Dione en Harald, twee keer mee, een keer bij Dione en een keer bij Harald. Dit geldt uiteraard voor iedere combinatie.
Het juiste aantal is dus 10 × 9 /2 = 45.
Dubbeltellen moet ruim opgevat worden. Soms wordt alles 3 maal of 6 maal of 120 keer meegeteld als je niet corrigeert.

Vermenigvuldigen blijft een heel krachtige methode om snel het aantal mogelijkheden te berekenen.
Wanneer een ontwerper van een nieuw ‘beestje’ 5 schetsen heeft voor de kop, 4 voor de romp en 7 voor armen/benen, is het aantal mogelijkheden (gesteld dat alles op elkaar aansluit) 140. (5×4×7)
Wanneer je steeds met het zelfde getal vermenigvuldigt is er sprake van *machtsverheffen.*



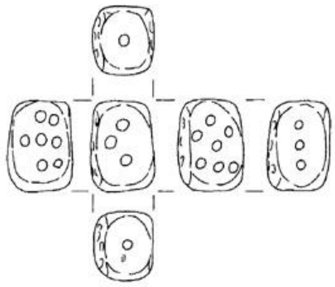
De figuur hiernaast bestaat uit 9 vakjes die ieder op 5 manieren kunnen worden gekleurd.
Het aantal mogelijkheden is dan 5×5×5×…×5 = 5^9 (=1 953 125)**.** Mogen aangrenzende vakjes niet de zelfde kleur krijgen dan zijn er voor elke vakje behalve het eerste nog maar 4 kleuren toegestaan, dat levert 5×4^8 (=327 680) mogelijkheden op.
Wanneer er sprake van maar 2 opties (wel niet inkleuren) is het aantal mogelijkheden 2×2×…×2 =2^9 (=512). Het kan zijn (hangt van de vraag af) dat er één mogelijkheid niet mee telt (bijv. niets inkleuren), dan wordt het aantal één minder: 511.

Het spel *Genius* wordt gespeeld een groot zeshoekig speelbord met daarin zeshoekige vakjes. De tegels die de speler kan plaatsen bestaan uit twee zeshoeken die tegen elkaar aan zijn geplakt en die samen één tegel vormen. Op elk van de zeshoeken van de tegel staat een 6-puntige ster, een 12-puntige ster, 24-puntige ster ('zon'), een ring, een cirkel, of een zeshoek. Elke mogelijke tegel met twee dezelfde symbolen (bijv. 2 cirkels) komt 5 keer voor. Elke mogelijke tegel met twee verschillende symbolen (bijv. een cirkel en een zeshoek) komt 6 keer voor. Iedere speler begint met zes tegels en mag in zijn beurt een van deze zes tegels plaatsen .

12] Hoeveel tegels zijn er met twee verschillende symbolen ?
13] Bereken hoeveel verschillende tegels er zijn.

Dominostenen kunnen niet alleen gebruikt worden om ze massaal te laten omvallen, maar ook voor een denkspel. In sommige landen wordt dit spel nog steeds veel gespeeld. Op elke dominosteen staan twee 'plaatjes' waarop 0 t/m 6 ogen te zien zijn. Elke combinatie komt maar één keer voor, er is dus maar één steen met drie en zes ogen erop

14] Bereken hoeveel dominostenen een volledig spel bevat.
15] Bestudeer de volgende pagina en kijk nog eens goed naar je aanpak.



Er wordt al duizende jaren gedobbeld. Eind vorige eeuw werd er bij een opgraving in de buurt van Arnhem een merkwaardige dobbelsteen gevonden: twee vlakken met een oog, twee vlakken met 3 ogen, en twee vlakken met 7 ogen. Met een dergelijke dobbelsteen kan geen 2, 4, 5 of 6 gegooid worden. Met twee dobbelstenen kun je wel bijv. 2 of 4 gooien (als we afspreken dat we de aantallen ogen optellen).

16] Ga na welke van de uitkomsten 2, 3,… 13, 14 mogelijk zijn
17] Ga na wat de mogelijkheden zijn bij twee dobbelstenen met daarop 1, 2, 3, 5, 7 en 11 ogen.

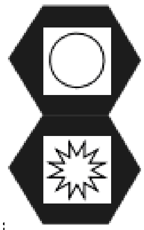
Drie vrouwen en vier mannen begroeten elkaar. De mannen schudden elkaar de hand, de vrouwen kussen de mannen en elkaar.

18] Hoeveel keer worden er handen geschud?
19] Bereken hoeveel keer er gekust wordt. Geef duidelijk hoe je telt.

Vier mannen en vier vrouwen ontmoeten elkaar. De mannen omhelzen andere mannen, de vrouwen omhelzen andere vrouwen. Mannen en vrouwen omhelzen elkaar niet

20] Hoeveel omhelzingen zijn er ?

2 Hulpje: tabel /rechthoek



Een tabel is goed bruikbaar voor situaties waarin **twee** uitkomsten worden gecombineerd. Daarmee is vaak ook dubbeltellen goed te bestrijden.We gebruiken dit om het aantal tegels bij het spel Genius te berekenen. Een tegel bestaat uit twee seshoeken, en op elke zeshoek staat een van de zes plaatjes.(6-puntige ster, 12-puntige ster, 24-puntige ster ('zon), een ring, een cirkel, of een zeshoek). Elke mogelijke tegel met twee dezelfde symbolen (bijv. 2 cirkels) komt 5 keer voor. Elke mogelijke tegel met twee verschillende symbolen (bijv. een cirkel en een zeshoek) komt 6 keer voor.

	5	3	3	3	3	3
	3	5	3	3	3	3
	3	3	5	3	3	3
	3	3	3	5	3	3
	3	3	3	3	5	3
	3	3	3	3	3	5

In de tabel hiernaast zijn alle mogelijkheden snel te zien. We hebben daarbij een handigheidje toegepast: De zes tegels met een cirkel en een (12-puntige)ster zijn gesplitst in drie met cirkel-ster en drie met ster- cirkel. Dat kan ook anders, maar deze aanpak maakt een zeer snelle berekening mogelijk: In elke rij is het aantal mogelijkheden 20 (5×3+5); het totaal aantal mogelijkheden is dus 6 × 20= 120.

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
0	0	1	2	3	4	5	6
1		2	3	4	5	6	7
2			4	5	6	7	8
3				6	7	8	9
4					8	9	10
5						10	11
6							12

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
0	0	1	2	3	4	5	6
1	12	2	3	4	5	6	7
2	10	11	4	5	6	7	8
3	8	9	10	6	7	8	9
4					8	9	10

Op een soortgelijk manier is het aantal dominostenen in een spel te bepalen en het totaal aantal ogen. Op elke dominosteen staan twee 'plaatjes' waarop 0 t/m 6 ogen te zien zijn. Elke combinatie komt maar één keer voor, er is dus maar één steen met drie en zes ogen erop. Wanneer we tabel maken kunnen we dus een hoek leeg laten. Het aantal niet lege vakjes, is makkelijker te bepalen door wat vakjes te verplaatsen. We krijgen dat **4** (0 t/m 3) rijen met ieder **7** (0 t/m 6) getallen : 4 × 7 = 28.

Deze 28 stenen bestaan ieder uit 2 vierkanten, dus totaal 56 vierkanten.
Op elk vierkant staan 0, 1, 2, 3, 4, 5, of 6 stippen.
Elk aantal stippen komt 8 keer voor: twee keer op een dubbele, en 6 keer is combinatie met een ander aantal. Het gemiddeld aantal stoppen op een vierkant is dus **3** (gemiddelde van 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).
Het totaal aantal stippen is dus 56 x 3 = 162
Een andere aanpak is om steeds paren dominostenen te maken met totaal 12 ogen.
Zoals je in de eerste tabel kunt zien is dat mogelijk.
We krijgen dus 14 paren met ieder 12 ogen: 14 x12=168

Een tabel is goed bruikbaar voor situaties waarin twee uitkomsten worden gecombineerd, bijv. opgeteld, afgetrokken, of vermenigvuldigd. Als het gaat om om meerdere uitkomsten is een andere aanpak aan te raden.

De eerste kentekens voor brom-en snorfietsen hadden de volgende opbouw:

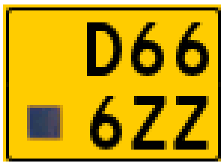
- Een getal 01-99
- Een code van drie letters waarvan het eerste een D of een F , en de laatste twee willekeurig , maar geen A, C, E, I, M, O, Q ,U, of W
- Een getal 1-9

21] Hoeveel verschillende kentekens waren er mogelijk met dit systeem wanneer alle combinaties zijn toegestaan?

Vervolgens bestond een kenteken uit twee letters, waarvan de eerste een D of een F, en de tweede uit een groep van 17 letters (BDFGHJKLNPRSTVXYZ), een getal 001-999 en een letter uit de reeks van 17.

22] Hoeveel verschillende kentekens waren er in theorie mogelijk met dat systeem ?

Sinds 2009 hebben brom-en snorfietsen e.d. hebben een kenteken dat als volgt is opgebouwd:



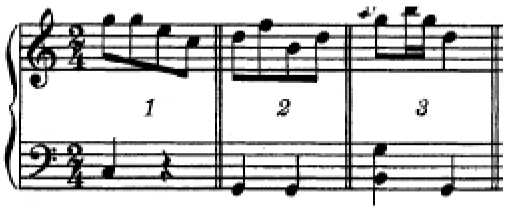
- De letter D of F
- Een getal 001 – 999
- Twee letters uit een reeks van 17.

Er worden elk jaar ca. 100 000 nieuwe kentekenplaten verstrekt voor brommers e.d.

23] Hoelang kan men nog voort met dit systeem ?
24] Ga na of de volgende pagina van dienst kan zijn.

Een gezelschap van vier vrouwen en drie mannen gaan naar het theater. Er zijn 7 stoelen naast elkaar gereserveerd.

25] Op hoeveel verschillende manieren kan het gezelschap gaan zitten ?
26] Hoeveel mogelijkheden zijn er wanneer wordt afgesproken dat iedere vrouw tussen twee mannen moet zitten
27] Hoeveel mogelijkheden zijn er wanneer drie mannen en drie vrouwen 'om-en-om' willen zitten ?



Een Engelse contradans is een muziekstuk dat uit twee delen bestaat. Ieder deel bestaat uit acht maten.
In het boekje „Musik mit Würfeln" staat een systeem beschreven om zelf zulke contradansen te maken met behulp van tweedobbelstenen. In dit boekje staan 176 verschillende maten uitgeschreven. Hiernaast zie er drie.
De getallen 1 tot en met 176 zijn verdeeld over twee even grote tabellen. De tabel die nodig is voor het eerste deel van de contradans staat hiernaast.
Door nu 8 keer met twee zuivere dobbelstenen te gooien, kun je in de tabel aflezen uit welke maten het eerste deel van de contradans zal bestaan. Gooi je bijvoorbeeld bij de eerste worp samen 10 ogen, dan lees je in kolom A af dat maat 99 de eerste maat is. Zo ga je door totdat je uit elk van de kolommen A tot en met H één maat hebt gekozen. De aldus verkregen acht maten vormen het eerste deel van de contradans.

De eerste acht maten:

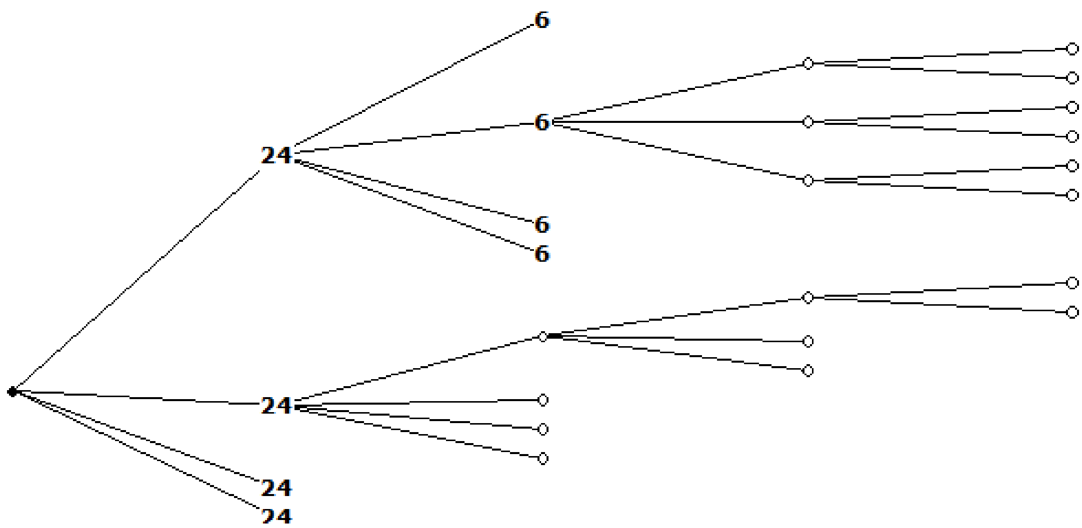
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
2	70	14	164	122	25	153	18	167
3	10	64	100	12	149	30	161	11
4	33	1	160	163	77	156	168	172
5	36	114	8	35	111	39	137	44
6	105	150	57	71	117	52	132	130
7	165	152	112	15	147	27	73	102
8	7	81	131	37	21	125	49	115
9	142	106	40	69	43	140	23	89
10	99	68	86	139	120	92	143	83
11	85	45	90	158	82	123	78	58
12	145	97	6	121	56	67	63	16

28] Iemand beweert dat er op deze wijze meer dan 200 miljoen verschillende eerste delen gemaakt kunnen worden. Ga na of dat klopt.
29] Hoeveel verschillende contradansen zijn er op deze manier mogelijk?

hulpje: boomdiagrammen e.d.

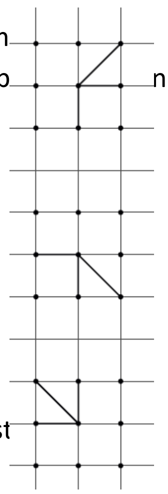
Wanneer drie of meer uitkomsten gecombineerd moeten worden is een tabel minder geschikt. Een veel gehanteerd model is dan een boomdiagram.

Bovenstaande taarten worden iemand aangeboden in een willekeurige volgorde. De vraag is hoeveel volgordes er zijn waarbij de eerste taart niet de grootste is.
Dit kan aangepakt worden met diagram als hieronder:



Voor de eerste plek zijn er 4 mogelijkheden (de grootste doet niet mee). Bij elke keuze zij er vier mogelijkheden voor de tweede plek (er is een taart afgevallen, maar de grootste doet nu wel meer mee). Bij elke tweede keuze zijn er drie mogelijkheden voor plek 3, en tenslotte nog twee voor plek 4.
Het tekenen van het hele diagram is veel werk, en niet echt nodig. Het gaat erom dat je inziet dat het aantal mogelijkheden 4 x 4 x 3 x 2 (= 4 x 4 x 6 = 4 x 24 = 96) is.

Bij de figuur hiernaast kan de vraag gesteld worden hoeveel verschillende figuurtjes je kunt m vanuit een (rooster)punt drie lijnstukjes te tekenen naar drie naburige roosterpunten, waarb n van die lijnstukjes diagonaal loopt, één horizontaal, en één verticaal.
Een mogelijk aanpak is:



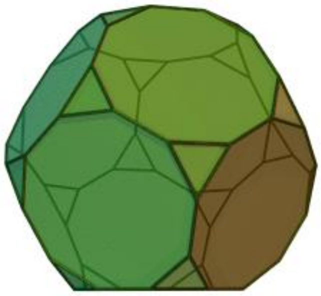
- er zijn 4 diagonalen mogelijk
- bij elke keuze zijn er 2 mogelijkheden voor een horizontaal lijnstukje
- Bij elke keuze zijn er 2 mogelijkheden voor een verticaal lijnstukje
- Het aantal mogelijkheden is dus 4 x 2 x 2 (=16)

Ook hier kun je een boomdiagram tekenen, maar waar het om gaat is dat je je het probleem st aanpakt.

Een *Kuboctaëder* is een zg *archimedisch* veelvlak , opgebouwd uit 8 (gelijkzijdige) driehoeken en 6 vierkanten. In elk hoekpunt komen twee vierkanten en twee driehoeken bij elkaar.

30] Bereken het aantal ribben.
31] Laat met een berekening zien dat er 12 hoekpunten zijn

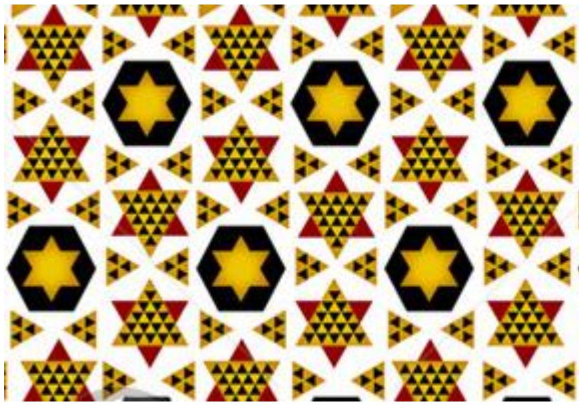
Een *Afgeknotte dodecaëder* is een ander archimedisch veelvlak. Het bestaat uit 12 tienhoeken en 20 driehoeken. In elk hoekpunt komen twee tienhoeken en één driehoek samen



32] Bereken het aantal ribben
33] Bereken op twee manieren het aantal hoekpunten.
34] Bestudeer de volgende pagina en herzie eventueel je aanpak

35] Bereken het aantal hoekpunten en het aantal ribben van een dodecaëder (regelmatig twaalfvlak). In elk hoekpunt komen drie vijfhoeken samen.

Kijk eens naar het volgende mozaiëk hiernaast. (fragment)
Er zijn drie soorten figuren te zien:



- Zeshoeken (met ster) 
- Soort Davidsterren 
- Driehoekjes in diverse standen 

Het aantal driehoekjes lijkt 6 maal zo groot als het aantal zeshoeken. Elke zeshoek is omringd door 6 driehoekjes.

36] Ga na hoe dat zit met het aantal “Davidsterren”.

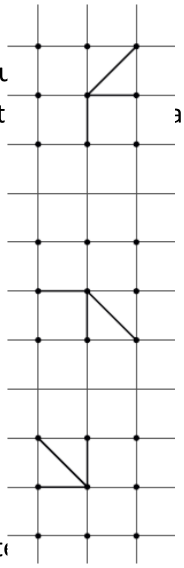
Sommige landen, zoals Nederland, Duitsland, Hongarije en Italië, hebben een vlag die bestaat uit drie (even hoge) horizontale banen. We gaan ervan uit dat de drie banen elk een verschillende kleur hebben, en dat de beide afbeeldingen hiernaast de zelfde vlag voorstellen.

37] Hoeveel verschillende vlaggen kunnen er gemaakt worden met de kleuren rood, blauw, groen, geel, zwart en wit ?

38] Hoeveel mogelijheden zijn er als de vlak bestaat uit drie verticale banen (zoals de vlag van Frankrijk) ?

39] Hoeveel diagonalen van een regelmatige 32-hoek lopen precies door het middelpunt ?

4 Valkuil: “dubbeltellen”



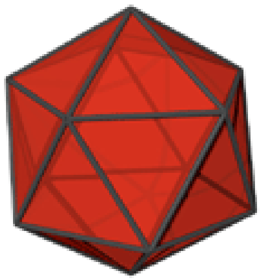
De vraag is nu: Hoeveel verschillende figuurtjes je kunt maken door vanuit een (rooster)pu lijnstukjes te tekenen naar drie naburige roosterpunten, waarbij precies één van die lijnst al loopt.

Een voor de hand liggende aanpak is nu:

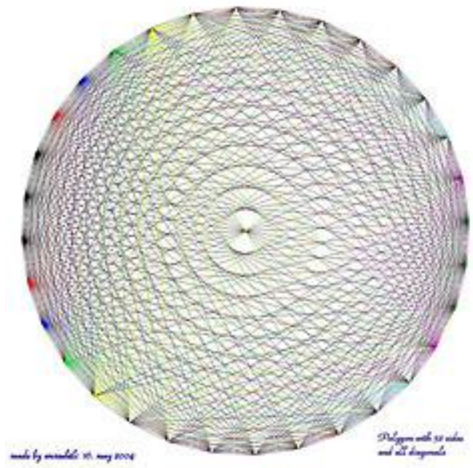
- er zijn 4 diagonalen mogelijk
- bij elke keuze zijn er 4 mogelijkheden voor het tweede lijnstukje
- Bij elke keuze zijn er 3 mogelijkheden voor het derde lijnstukje
- Het aantal mogelijkheden is dus 4 x4 x3 (=48)

Helaas is deze aanpak **fout.** Je telt namelijk elk figuurtje dubbel.
Het onderste figuurtje kun je krijgen door na de diagonaal eerst het horizontale lijntje te t daarna het verticale, maar ook door het andersom te doen. Je telt het voor twee, maar het gaat maar om één figuurtje. Iets dergelijks geldt voor elk figuurtje.
Als je bedacht bent op deze fout, is het juiste antwoord eenvoudig te bepalen: 4 x4 x3 **/ 2** (=24)

Je moet ‘dubbeltellen’ ruim opvatten, soms tel je iets 3 of meer keer mee. Een mooi voorbeeld is een regelmatig twintiglak (icosaëder) . Deze bestaat uit 20 driehoeken.
Het aantal hoekpunten is als volgt te berekenen:



- Er zijn 20 driehoeken
- Elke driehoek heeft 3 hoekpunten
- Dat lijken 60 (20 x 3) hoekpunten, maar
- Elk hoekpunt wordt 5 keer meegeteld (zie plaatje)
- Het aantal hoekpunten is dus 20 x 3 / 5 = 60/5 = **12**

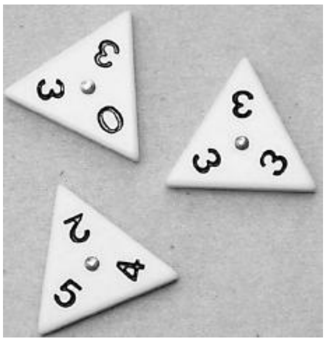


Ook bij het bepalen van het aantal diagonalen in een veelhoek speelt het alert zijn op dubbeltellen een belangrijke rol.

In de figuur hiernaast zijn alle diagonalen van een (regelmatige) 32-hoek getekend. Het aantal is als volgt te berekenen:

- Vanuit elk hoekpunt zijn er 29 diagonalen te tekenen.
    - Het punt zelf, en de beide buren kunnen niet gebruikt worden als eindpunt, dus 32 − 3.
- Dat zou 32 x 29 (=928) diagonalen betekenen
- Elke diagonaal tel je nu dubbel, dus het juiste aantal is:
  32 x 29 / 2= **464**

Het spel *Triominos* bestaat uit driehoekige stenen.Op elke steen staan drie cijfers, één cijfer bij elke hoek. Dit cijfer kan zijn een 0, 1, 2, 3, 4 of 5. Voor de stenen met drie verschillende cijfers geldt dat met de klok meedraaiend de cijfers in grootte oplopen als je met het kleinste cijfer begint. Alle stenen zijn verschillend. Alle mogelijke combinaties van cijfers komen voor.



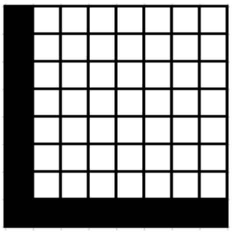
40] Hoeveel stenen zijn er met drie verschillende cijfers ?
41] Laat zien dat er 30 stenen zijn er met twee verschillende cijfers
42] Hoeveel stenen zijn er in het totaal ?

Doel van het spel is zoveel mogelijk stenen passend aan te leggen.
Dit betekent dat de cijfers op de twee hoeken die tegen elkaar aan komen te liggen, hetzelfde zijn. Zie de figuur hiernaast.
Stel dat alleen de steen 2 4 5 op tafel ligt.

43] Hoeveel verschillende stenen kunnen aangelegd worden ?
44] Bekijk de volgende bladzijde en je aanpak van de vorige opgaven.

Er wordt tegenwoordig veel gewerkt met zg QR (Quick Read) codes, dat zijn twee dimensionale streepjecodes, ook wel matrixcodes genoemd.
Hoeveel informatie zo'n codde kan bevatten hangt van allerlei factoren af. In deze opgave bekijken we een vereenvoudigd model van deze matrixcode.

In de figuur hiernaast is een lege matrixcode getekend. De matrixcode bestaat uit een vierkant van 8 bij 8 vakjes. Om de code machinaal goed te kunnen lezen zijn twee randen altijd zwart. De overige 49 vakjes kunnen zwart of wit zijn.



45] Bereken hoeveel verschillende codes er mogelijk zijn met 3 zwarte vakjes.

Met 10 zwarte vakjes zijn er veel meer verschillende code mogelijk.

46] Hoeveel ?
47] Met hoeveel zwarte vakjes zijn de meeste codes mogelijk ?
48] Hoeveel codes zijn er totaal ?

Iemand heeft een pincode met de cijfers 2, 3 6 en 9

49] Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er ?
50] Hoe zit dat met iemand die een pincode heeft met de cijfers 1 (2x) en 9 (2x) ?

5 hulpjes: faculteiten, permutaties en combinaties

Het is handig om een paar zaken paraat te hebben:

- Het aantal manieren waarop je 4 ('objecten') uit tien kunt kiezen wordt het aantal **combinaties** (4 uit 10) genoemd. Op rekenmachines worden daarvoor de notaties als 10 **C** 4 en 10 **nCr** 4 gebruikt. Andere notaties zijn C_4^{10} en $\binom{10}{4}$.
  Bij deze laatste notatie past de uitspraak *10 boven 4*.
- Het aantal manieren waarop je 4 verschillende ('objecten') kunt rangschikken (op volgorde zetten) is: 4 x 3 x2 (x 1) . Hiervoor wordt algemeen het !-teken gebruikt: 4! = 4x3x2x1=24
  Men spreekt wel van vier *faculteit.*
- Het aantal manieren waarop je 4 ('objecten') uit tien kunt kiezen waarbij ieder een eigen rol/positie krijgt wordt het aantal **permutaties** (4 uit 10) genoemd. Op rekenmachines worden daarvoor **10 P 4** en **10 nPr 4** als notaties gebruikt. Wij gebruiken P_4^{10}
- $P_4^{10} = C_4^{10}$ x 4!

Voorbeeld 1

In een klas zitten 12 meisjes. Bij het jaarlijkse basketbaltoernooi kunnen er 5 tegelijk spelen in het klassenteam. Tijdens het spel heeft iedere speelster haar eigen taak.

- Het is op 792 (C_5^{12}) manieren mogelijk om 5 uit 12 te kiezen
- Bij de 5 gekozen speelsters zijn de taken op 120 (5 !) manieren te verdelen
- Er kan dus op 95 040 (=120 x 792) manieren gespeeld worden.
- Dit aantal is ook direct te bepalen met P_5^{12}

Voorbeeld 2

Een bepaalde toets bestaat uit 12 meerkeuzevragen. Deze worden gekozen uit een voorraad van 40, en vervolgens in een willekeurige volgorde gezet.

- Het is op 5 586 853 480 manieren (C_{12}^{40})mogelijk om 12 vragen te kiezen uit een groep van 40
- Deze 12 vragen zijn op 479 001 600 (12!) manieren op volgorde te zetten
- Het totaal aantal mogelijke toetsen is ca. 2,7 x 10^{18} (P_{12}^{40})
- Dit is ook te berekenen door de eerste twee uitkomsten te vermenigvuldigen.

Voorbeeld 3

Bij een geschiedenistoets moeten 7 gebeurtenissen gekoppeld worden aan 7 verschillende jaartallen. Op hoeveel manieren kan dat ?

De eerste gebeurtenis kan gekoppeld worden aan 7 jaartallen. Bij elke keuze zijn er nog 6 mogelijkheden voor de tweede gebeurtenis, voor de derde 5, enz. Het aantal mogelijkheden is 7x6x5 x..x1 =7! (=5040)
In feite gaat om niets anders dan om het in (de juiste) volgorde zetten van de jaartallen.

Bij tennis wordt een set gewonnen door de speler die het eerste 6 punten heeft gehaald, mits de voorsprong minstens 2 punten is. De uitslag kan bijv 6-3 of 6-4 zijn, maar geen 6-5. Wanneer het 6-5 is wordt er doorgespeeld. Wanneer er daarna 7-5 wordt is de partij afgelopen. Wordt het 6-6 dat zijn er twee mogelijkheden (afhankelijk van gemaakte afspraken):

1. Er wordt doorgespeeld tot er twee punten verschil is (Zo werd het in juni 2010 op Wimbledon in de partij *Isner–Mahut* in de vijfde set na ruim 11 uur spelen: 70-68)
2. Er wordt een zg. *tie-break* ***gespeeld***, met eigen regels. Wie deze wint, wint de set

In de partij A-B staat A voor met 5-3. Een mogelijk score verloop is: 1-0;1-1;2-1;2-2;3-2;4-2 (break);5-2;5-3. Maar er zijn natuurlijk veel meer mogelijkheden

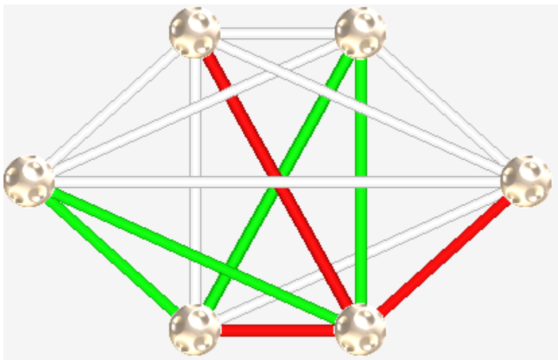
51] Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er ?

C wint een set van D met 6-3

52] Geef een voorbeeld van een scoreverloop dat bij nader inzien volgens de spelregels *niet* mogelijk is.
53] Laat zien dat er 56 mogelijkheden zijn voor het scoreverloop
54] Ga na of je iets hebt aan de volgende twee pagina's hierna.

E wint een set van F met 9-7
55] Ga na hoeveel mogelijke scoreverlopen er waren.

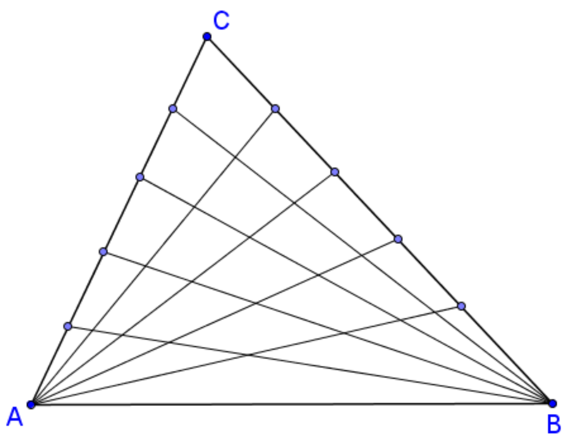
Bij het spel *Hexi* moeten twee spelers twee (van de 6) hoekpunten met elkaar verbinden. Ieder gerbruikt daarvoor een eigen kleur. Als je een driehoek maakt in jouw kleur heb je verloren.



In de situatie hiernaast heeft "groen" 4 verbindingen (twee V-vormen). "Rood" heeft een soort T vorm gemaakt en is aan zet

56] Hoeveel mogelijkheden heeft "rood" voor de volgende zet ?
57] En hoeveel "groen"op de zet daarna ? [!]

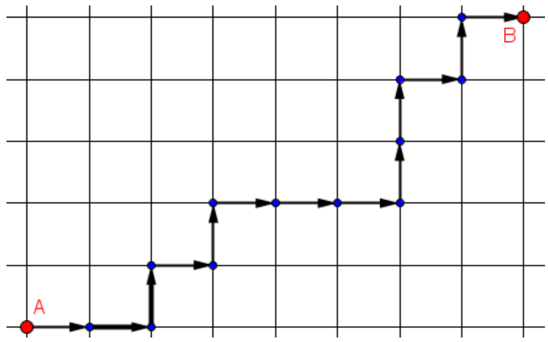
Een variant op een bekende "puzzel"
Probeer het berekend aan te pakken!
Alleen tellen geeft problemen.



58] Hoeveel lijnstukken zijn te zien ?
59] Hoeveel punten ?
60] Hoeveel driehoeken zijn er in het totaal te zien ?

(meer dan 100)

6 combinaties in beeld

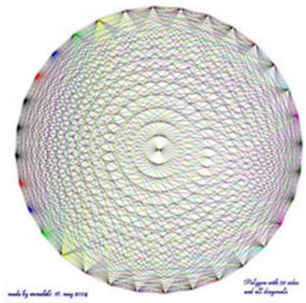


We gebruiken het aantal mogelijkheden om (in een rooster) van A naar B te komen. (In veel Amerikaanse steden, en sommige Nederlandse polders hebben de wegen/straten een dergelijk patroon)

B ligt 13 stappen verwijderd van A: 8 horizontaal en 5 verticaal.
Een van de vele routes is getekend. We kunnen deze ‘coderen’ als **h h v h v h h h v v h v h** ;

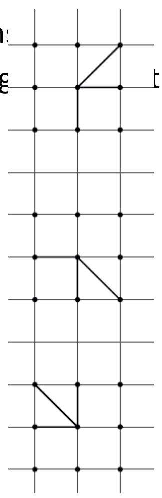
Uiteraard zijn er veel meer routes mogelijk. Elke route is te coderen als een rijtje van 13 letters, waarvan 5 **v**’s en 8 **h**’s

Hoeveel mogelijkheden zijn er ?
We beginnen met 13 lege plekken: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
Op 5 daarvan moet een v komen. We moeten dus 5 van de 13 plekken kiezen. De 5 gekozen plekken zijn volstrekt gelijkwaardig. Het aantal mogelijkheden is dus C_5^{13} [=1287] . De plekken voor de **h**’s liggen dan vast.
We kunnen natuurlijk ook letten op de **h**’s . Dat levert de zelfde uitkomst : C_8^{13} =1287
Kom niet in de verleiding om beide uitkomsten op te tellen of te vermenigvuldigen. Het gaat om twee manieren om het zelfde te berekenen.



Combinaties kunnen gebruikt worden snel het totaal lijnstukken (diagonalen en zijden) van een veelhoek (bijv. een 32-hoek) te bepalen. Bij elk lijnstuk hoort een keuze van 2 punten (en omgekeerd). Het aantal mogelijkheden is dus C_2^{32} [=496]: 32 zijden en 464 diagonalen.
Je kunt zo ook snel bepalen hoeveel verschillend driehoeken de figuur hiernaast bevat. Elke driehoek komt overeen met de keuze van 3 (van de 32) punten. Het aantal mogelijkheden is dus C_3^{32} [=4960].

Hoeveel verschillende figuurtjes je kunt maken door vanuit een (rooster)punt drie lijn tekenen naar drie naburige roosterpunten, waarbij precies één van die lijnstukjes diag t.



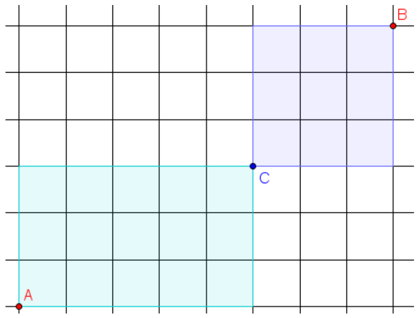
Een oplossings methode is:

- Je kiest 2 van de 4 mogelijke roosterpunten voor de 2 lijnstukje die niet diagonaal lopen.
- Dat kan op C_2^4 [= 6] manieren
- Je kiest 1 van de 4 mogelijke roosterpunten voor de ene diagonale lijn
- Dat kan op C_1^4 [=4] manieren
- Het aantal mogelijke figuren is 6 x 4 [=24]

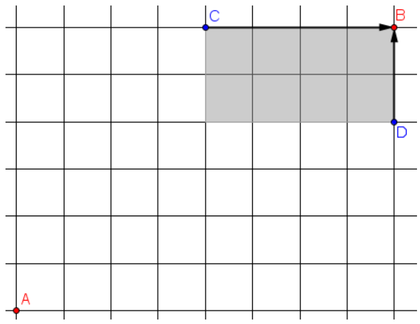
7 vermenigvuldigen of optellen

Soms moet je optellen en soms juist vermenigvuldigen.

Wanneer het gaat om alle routes van A naar B via C kun je als volgt te werk gaan:



1. Van A naar C is 5 stappen horizontaal en 3 verticaal, samen 8
2. Er zijn C_3^8 (=56) routes van A naar C
3. Van C naar B is 3 stappen horizontaal en 3 verticaal, samen 6
4. Bij elke route van A naar C zijn er C_3^6 (=20) routes van C naar B
5. Het totaal aantal routes is dus 56 x 20 (=1120)



In de onderste tekening gaat het om wat anders.
B is alleen bereikbaar via punt C of via punt D.

1. Van A naar C is 4 horz; 6 vert. (samen 10)
2. Het aantal routes naar C is C_4^{10} (=210)
3. Van A naar D is 8 horz, 4 vert. (samen 12)
4. Het aantal routes naar D is C_4^{12} (=495)
5. Vanuit C of D is er maar één route naar B
6. Het totaal aantal routes is dus 210 + 495 (=705)

Wanneer we willen weten hoeveel routes er van A naar B zijn die *niet* via C lopen kunnen we als volgt te werk gaan:

1. Er zijn C_6^{14} (=3003) routes van A naar B
2. 1120 daarvan [zie hierboven] gaan via C, en vallen dus af
3. Het aantal routes dat niet via C loopt is dus 3003 – 1120 = 1883

8 handig optellen

Stel je krijgt het volgende aanbod bij een vakantiebaantje.

- De eerste dag krijg je 3 euro per uur
- De volgende dag (als je bevalt) 3,25 euro per uur
- De daaropvolgende dag 3,50 euro per uur

Je overweegt 3 weken (15 dagen) te gaan werken (6 uur per dag). Hoeveel levert dat je op ?

Een mogelijke aanpak

1. Op je laatste dag (dag 15) is je uurloon 3,00 + **14** x 0,25 = 6,50 (euro)
2. De eerste dag was je uurloon 3,00 euro
3. Gemiddeld is dit (3,00+6,50)/2 = 4,75 (euro)
4. Het gemiddelde van dag 2 en dag 14 is ook 4,75 (ga na waarom)
5. Het gemiddelde over de hele periode is dus ook 4,75
6. Je verdient dus in het totaal 15 x 6 x 4,75 = 427,50 (euro)

Als je de dagelijks verdiensten in een rij zet krijg je: 18,00 ; 19,50; 21,00 ; 22,50 ; …. ; 39,00
Dit is een rij bestaande uit 15 getallen met een lineair verband.

Het gemiddelde van alle getallen is (18+39)/2 =28,50 ; de gemiddelde dagverdienste is dus €28,50, en de totale verdiensten zijn 15 x 28,50 = 427,50 (euro)
Een veel gebruikte aanpak om de s*om* van een dergelijke rij te bepalen gebruikt $\frac{n}{2}(t_1 + t_n)$, in woorden *de helft van het aantal getallen maal de som van het eerste en het laatste getal*

Ga na dat de aanpak met het gemiddelde geschreven kan worden als: $n \cdot (\frac{t_1+t_n}{2})$, en (dus) op het zelfde neer komt.

Ook een rij getallen als 5, 15, 45, … , 98415 (een exponentieel verband) kan snel opgeteld worden. Hier is het wat moeilijker om zelf een methode te vinden.
Een paar veel gebruikte methoden zijn:

- Het volgende getal (dus 3x98415=295245) min het eerste getal (5) optellen, en delen door de groeivoet (1 minder dan de groeifactor) van de rij: (295245−5)/2 = 147 620
- De formule $a\frac{r^n-1}{r-1}$ Hierbij is *a* het eerste getal (dus 5) en *r* de groeifactor (‘reden’) van de rij (3), en *n* het aantal getallen (dat is in dit geval 10)
    - $5\frac{3^{10}-1}{3-1} = 5\frac{59048}{2}$= 147 620

9 (on)handig rekenen

Het is een misverstand dat een berekening maar op één manier, in een bepaalde volgorde kan worden uitgevoerd. Dit wil niet zeggen dat alles maar kan: 2 − 9 heeft een andere uitkomst dan 9 −2 , en 4×5 +6 een andere dan 4 x (5+6), maar bij berekeningen als 97−79 +3−11 en 25/10 ×197×4 is veel winst te halen:

- **97** *−79* **+3** *−11* = **100 −** *90* = 10
- **25** / 10 ×197 **× 4** = **100** /10 × 197 = 10 ×197 =1970

Een paar andere voorbeelden:

- **2**+4+6+...+32+34+**36** =**38** + 38 +...+38 = 9 ×38 =342
- $200\,\frac{0{,}7902848}{0{,}2}$ = 1000 $\times 0{,}7902848$ = 790,2848