Verhoudingen: wat moet je weten, kunnen en begrijpen. Versie 0.4 25-6-2011 15:05

In verhouding..

Hieronder staan wat aanbiedingen voor blikjes cola

A. 4 blikjes voor € 2,35
B. 6 blikjes voor € 2,82
C. 24 blikjes voor € 9,75
D. 72 blikjes voor € 26,50

We willen graag weten in welk geval je in verhouding het minste betaalt, maar ook of het veel scheelt.

1] Ga na welke aanbiedingen je makkelijk met elkaar kunt vergelijken.
2] Bedenk een manier om de aanbiedingen op volgorde te zetten.
3] Is er veel verschil tussen de voordeligste en de minst voordelige aanbieding ?
4] Iemand wil voor een feest ca. 50 blikjes inslaan. Welke aanbieding is het voordeligst?

Blikjes zijn in het algemeen duurder dan flessen. Hieronder een paar aanbiedingen voor flessen cola.

I. 1 liter voor € 0,80
II. 1,5 liter voor € 1,22
III. 6 liter voor € 3,49

5] Ga na welke aanbieding het voordeligst is

Om de prijzen van de blikjes te vergelijken met die van de flessen, is het nodig te weten dat de inhoud van een blikje 33 cl (=0,33 liter) bedraagt

6] Vergelijk de voordeligste aanbieding van bij de blikjes met de voordeligste aanbieding bij de flessen
7] Bestudeer **overzicht 1**, en ga na of je achteraf sommige vragen sneller, handiger had kunnen aanpakken.
8] Een stukje jonge goudse kaas van 354 gram kost € 3,15; Bereken op drie verschillende manieren hoeveel en stuk van 489 gram zal kosten.
9] Leg aan de hand van tabel hiernaast uit waarom in een verhoudingstabel de kruisproducten gelijk zijn .

a	$g \cdot a$
$f \cdot a$	

10] In het schooljaar 2009-10 zaten in 3 vwo 42669 leerlingen, waarvan 22795 meisjes. In 6 vwo zaten 36131 leerlingen, waarvan 19683 meisjes. Ga na in welk leerjaar er naar verhouding meer meisjes zaten, en of er veel verschil was.

overzicht 1 in verhouding

Waar heb je in verhouding meer ruimte in Nederland of op Aruba ?

	Nederland	Aruba
Aantal inwoners	16 660 000	107 000
Oppervlakte (km^2)	41 526	193

Aanpak A [horizontaal]

1. 16660/107 ≈ 155,70
2. Het aantal inwoners van Nederland is ca. 156 maal zo groot als dat van Aruba.
3. 41526 /193 ≈ 215,16
4. De oppervlakte van Nederland is ca. 215 maal zo groot al die van Aruba.
5. In Nederland is dus relatief meer ruimte - ca. 1,4 maal zo veel [215/156 ≈ 1,4].

Er zijn allerlei varianten op deze aanpak. Zo kun je bijv. uitrekenen hoeveel inwoners Nederland zou hebben wanneer het even dichtbevolkt zou zijn als Aruba: 107 000 x 215,16 ≈ 23 000 0000

Aanpak B [verticaal]

	Nederland	Aruba
Aantal inwoners	16 660 000	107 000
Oppervlakte (km^2)	41 526	193
Inwoners per km^2	*401*	*554*

1. 16660000 / 41526 ≈ 401
2. Er wonen in Nederland gemiddeld ca. 401 mensen per km^2.
3. 107000 / 193 ≈ 554
4. Er wonen op Aruba gemiddeld ca. 554 mensen per km^2.
5. Aruba is dus dichter bevolkt, en in Nederland heb je dus relatief meer ruimte.

Je kunt ook de oppervlakte delen door het aantal inwoners. Je krijgt dan de *ruimte per inwoner* (in km^2). Nederland : ca. 0,0025; Aruba: 0,0018.
Het wordt wat beter voorstelbaar als je het omrekent in m^2 [1 km^2 = 1000m x 1000m = 1000000 m^2]
Nederland: ca. 2500 m^2 (50 m bij 50 m) ; Aruba ca. 1800 m^2 (50 m bij 36 m of 45 bij 40 m)

Aanpak C [kruisproducten]
Door *kruislings vermenigvuldigen* kun je zien dat de verhouding tussen inwoneraantal en oppervlakte in Nederland en Aruba niet gelijk is:

	Nederland	Aruba
Aantal inwoners	16 660 000	107 000
Oppervlakte (km^2)	41 526	193

1. 1 6660 000 × 193 = 3 215 380 000 ≈ 3,2 × 10^9
2. 107 000 × 41 526 = 4 443 282 000 ≈ 4,4 × 10^9
3. Aruba heeft (dus) in verhouding meer inwoners (107 000); Nederland heeft in verhouding meer oppervlakte (41526)

Je kunt met kruisproducten ook snel uitrekenen hoeveel inwoners Nederland zou hebben wanneer het even dichtbevolkt zou zijn als Aruba:

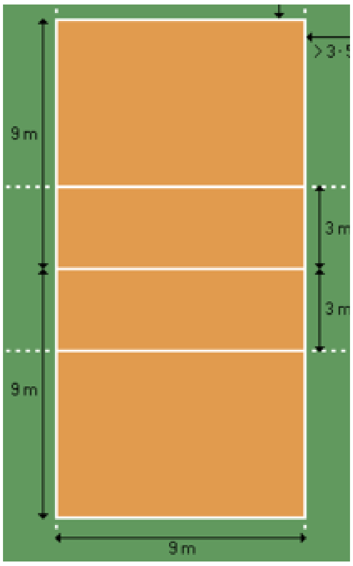
$$193\,x = 41\,526 \times 107000$$
$$x = \frac{41\,526 \times 107000}{193} \approx 23\,000\,000$$

vereenvoudigen

Soms zijn verhoudingen weer te geven met kleine getallen, zoals 1 : 2; 2 : 3; 3 : 4 etc.
In de muziektheorie komen dergelijke verhoudingen voor wanneer het gaat om de hoogte van tonen: octaaf 1 : 2 ; kwint 2 : 3 ; kwart 3 : 4 etc.

11] De (centrale) A heeft tegenwoordig een frequentie van 440 Hz (trillingen per seconde) De E daarboven heeft een frequentie van 660 Hz. Laat zien dat deze E een *kwint* hoger ligt.

12] Op een muziekinstrument wordt een akkoord gespeeld, bestaande uit drie tonen. De laagste twee vormen een kwint, de hoogste twee een kwart. Laat zien dat de laagste en de hoogste toon een octaaf vormen.



Ook bij de afmetingen van speelvelden kom je vaak mooie verhoudingen tegen. Hiernaast zie je afmetingen van het speelveld bij volleybal

13] Schrijf de lengte-breedte-verhouding van het speelveld, en diverse (rechthoekige) onderdelen daarvan met behulp van zo klein mogelijke hele getallen.

Bij een *tennisveld* meten de vakken waarbinnen de opslag terecht moet komen 13,5 bij 21 feet.

14] Schrijf deze verhouding met behulp van zo klein mogelijke hele getallen.

15] Bestudeer **overzicht 2**, en ga na of je achteraf sommige vragen sneller, handiger had kunnen aanpakken.

Een hockeyveld meet officieel 91,44 m bij 54,864 m

16] Schrijf de verhouding tussen lengte en breedte met behulp van zo klein mogelijke hele getallen

Een full- HD tv heeft een beeldscherm van 1920 bij 1080 pixels.

17] Schrijf de verhouding met zo klein mogelijke kleine hele getallen

De afmetingen van de *i-pad 2* bedragen 7,31 bij 9,5 inch.

18] Ga na of de verhouding tussen deze twee getallen kunt benaderen met kleine hele getallen

Bij de gulden snede is de verhouding tussen kortste en langste zijde niet exact te schrijven met behulp van twee hele getallen. De exacte waarde van ϕ (het verhoudingsgetal tussen langste en kortste zijde) is $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Een benadering is 3 decimalen is : 1,618

19] Geef een zo goed mogelijke benadering van deze verhouding met behulp van twee getallen onder de 20

20] Geef een betere benadering van deze verhouding met behulp van twee getallen onder de 100

overzicht 2 vereenvoudigen

Een verhouding blijft gelijk(waardig) wanneer je alle onderdelen met het zelfde getal vermenigvuldigt of door het zelfde getal deelt.
Bij voorbeeld 3 : 4 = 6 : 8 = 30 : 40 = 15 : 20 = 75 : 100
Dit kun je gebruiken om verhoudingen te combineren:
Bij voorbeeld: gegeven : verhouding lengte : breedte = 3 : 2
verhouding hoogte : lengte = 1 : 2
gevraagd: verhouding hoogte : breedte
aanpak (met verhoudingstabel):

X 2

lengte	breedte	hoogte
3	2	
2		1
6	**4**	***3***

X 3

Een andere aanpak is met breuken (verhoudingsgetallen)

1. $l = {}^{3}/_{2}\, b$
2. $h = {}^{1}/_{2}\, l$
3. dus $h = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} l = \frac{3}{4} l$
4. De verhouding is dus $h : b = 3 : 4$

Er zijn allerlei varianten. Zo kun je één van de drie tijdelijk de waarde 1 geven, of bijv. 120 (deelbaar door o.a. 3, 4, 5 en 6)

Bij het vereenvoudigen van lastige verhoudingen zoals 168 : 210 kun je in veel gevallen de breuk-toets op je GR gebruiken. Deze vereenvoudigt vaak de breuk $\frac{168}{210}$ automatisch tot $\frac{4}{5}$, zodat de verhouding als 4 : 5 kan worden geschreven.

Soms zijn verhoudingen niet echt te vereenvoudigen, maar wel te *benaderen* door een verhouding met veel kleinere getallen. In zo'n geval is het vaak handig om het kleinste getal door het grootste te delen (of het grootste door het kleinste). Een schilderij van 97 bij 130 (cm) heeft een lengte breedte verhouding van ongeveer 3 : 4. Immers $97/130 \approx 0{,}746 \approx 0{,}75 = {}^{3}/_{4}$
Wanneer we de langste zijde delen door de kortste krijgen we: $130/97 \approx 1{,}34 \approx 1{,}33\ldots = {}^{4}/3$

We noemen de uitkomst van een dergelijke deling het *verhoudingsgetal*. Eigenlijk gaat het om een paar (bijv. ${}^{3}/_{4}$ en ${}^{4}/_{3}$, of 2 en ${}^{1}/_{2}$). De twee getallen zijn elkaars *omgekeerde*. Vaak wordt het grootste gekozen.

Een paar bekende verhoudingen zijn:

$1 : \sqrt{2}$ bij de A-papierformaten, zoals A4. Deze verhouding is bij benadering 5 : 7.

$1 : \phi$ de 'gulden' verhouding. Het verhoudingsgetal ϕ is goed, en steeds beter te benaderen door twee opeenvolgende getallen uit de reeks van Fibonacci:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 …

$55/34 \approx 1{,}6176$ en dat ligt dicht bij ϕ ($\approx 1{,}6180$)
Het kleinste verhoudingsgetal (${}^{1}/_{\phi}$) is gelijk aan $\phi - 1$ ($\approx 0{,}6180$)

Verhoudingen en aandeel in het totaal

In het schooljaar 1990/91 zaten er iets meer jongens dan meisjes op het vwo (klas 3-6): (ongeveer) 69900 tegen 69100. Negentien jaar later was het beeld heel anders: ca. 75800 jongens tegen ongeveer 88100 meisjes. De 'verovering' van het vwo door de meisjes kan op verschillende manieren in cijfers worden gevat.

21] Bereken voor 1990/91 en 2009/10 hoeveel procent van de vwo leerlingen bestond uit meisjes. (Rond verstandig af)

22] Bereken het verhoudingsgetal meisjes/jongens voor beide schooljaren.

Het aandeel van de meisjes is duidelijk toegenomen, maar met hoeveel procent ?
Anne heeft berekend dat het aandeel meisjes met ca. 4% is toegenomen; Bea heeft berekend dat het aandeel meisjes met ca. 8% is toegenomen.

23] Laat zien hoe Anne aan deze 4% komt.

24] Reken voor hoe Bea aan deze 8 % is gekomen.

25] Bestudeer **overzicht 3** en loop je antwoorden en berekeningen van de vorige vier vragen nog eens na.

26] In een bepaald dorp bestaat de bevolking voor maar liefst 83% uit vrouwen en meisjes. Hoeveel keer zo veel vrouwen/meisjes zijn er als mannen/jongens?

27] In een wiskunde-B groep was de verhouding meisjes : jongens ongeveer 3 : 5. Hoeveel % van de groep bestond uit jongens ?

Volgens een recent onderzoek verhoogt het drinken van een bepaald drankje het risico op een bepaalde ziekte met 20 %. De kans dat je deze ziekte krijgt bedraagt normaal ca. 0,4 %

28] Bereken met hoeveel procentpunt de kans op deze ziekte toeneemt bij drinken van dit drankje.

Volgens hetzelfde onderzoek wordt de kans op de bewuste ziekte met 35% *verlaagd* als je bepaalde pillen slikt.

29] Met hoeveel % stijgt de kans dat je die ziekte *niet* krijgt ?

30] Laat met een voorbeeld zien dat een toename van een bepaald risico met 100% niet verontrustend hoeft te zijn.

overzicht 3 verhoudingen en aandelen

Wanneer een groep bestaat uit twee deelgroepen (bijv. jongens en meisjes) kun je

1. kijken naar het aandeel van een groep in het totaal
2. letten op de verhouding tussen beide groepen

Als een (wiskunde C) groep bestaat uit 12 meisjes en 3 jongens, dan krijg je:

1. Aandeel meisjes 12/15 = 4/5 = 0,8 = 80 %
2. Verhoudingsgetal jongens/meisjes 3/12 = ¼ = 0,25
   Het verhoudingsgetal is 4 (of ¼): er zijn 4 x zoveel meisjes als jongens.
   In het Engels wordt dit vaak aangegeven met de *Odds*.

Omgekeerd als een groep bestaat uit 6 x zoveel jongens als meisjes zijn de aandelen in het totaal 1/7 (meisjes) en 6/7 (jongens).
Algemeen: bij een verhoudingsgetal v hoort een verhouding 1 : v
De bijbehorende aandelen zijn dus $1/(v+1)$ en $v/(v+1)$
Bij een percentage p voor de ene groep (en dus $100-p$ voor de andere) hoort het verhoudingsgetal $p/(100-p)$

Het aandeel jongens in de wiskunde C hierboven groep is uiteraard 20 %.
Stel dat het jaar daarop de groep bestaat uit 4 jongens en 6 meisjes, dus 60% meisjes en 40% jongens. Je kunt die verandering op diverse manieren becijferen:

1. De meisjes zijn gezakt van 80% naar 60% (en de jongens gestegen van 20% naar 40%), dat is een verschil van 20 %. Men zegt dat het aantal meisjes gedaald is met 20 **procentpunt** (afgekort met pp).
2. Het aandeel van de jongens is verdubbeld van 20% naar 40%. Een groei met 100%
3. Het aandeel van de meisjes is afgenomen van 80% naar 60%. 60/80/3/4 =0,75=75%. De achteruitgang bedraagt dus 25 %.

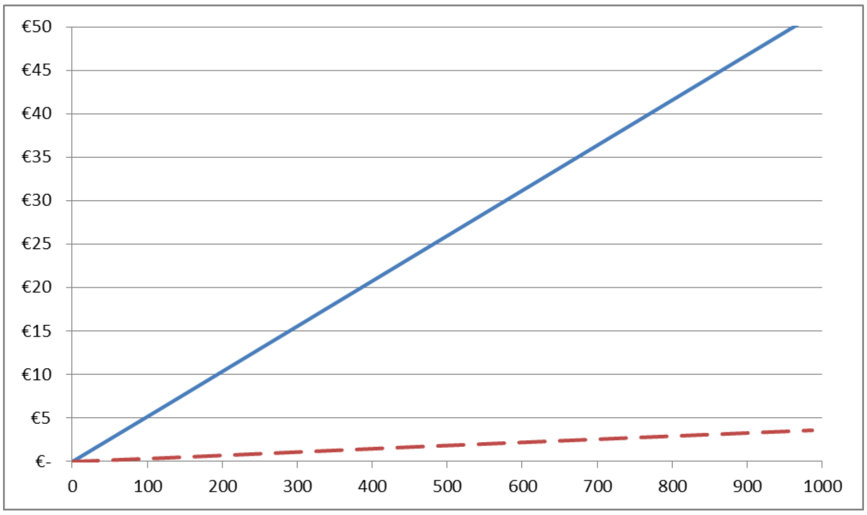
Op basis van dezelfde gegevens zijn dus drie zeer verschillende berekeningen te doen.

Vooral als het aandeel van een van beide groepen klein is (en van de andere dus groot) krijg je heel verschillende uitkomsten. Stel dat op een school het vorig jaar 2,4 % van de lessen vervielen. Het jaar daarop was dat 3,0 %. Je kunt nu drie getallen berekenen:

1. De verandering in procentpunten (een stijging van 0,6 pp)
2. De stijging van het aandeel vervallen lessen (van 2,4% naar 3,0%, dus met 25 %)
   - 3,0/2,4 = 1,25 =125 %
3. Een daling van het aandeel gegeven lessen (van 97,6% naar 97,0 %, dus met ca. 0,61%)
   - 97/97,6 = 0,99385.. ≈ 99,39 %, dus een daling met ca. 0,61 %

Vaste verhouding, (recht) evenredig en gelijkvormigheid

Een vaste verhouding maakt situaties overzichtelijk. Een vaste prijs per kg per liter, per seconde, per uur, per maand, per bericht, per km of per gB maakt berekeningen eenvoudig.
Vaak zijn tarieven echter een stuk ingewikkelder, met instaptarieven, vrij gebruik tot een bepaald maximum, kortingen e.d.
Hieronder zie je de brandstofkosten van twee scooters afhankelijk van het aantal gereden km.



31] Maak een zo goed mogelijke schatting van de brandstofkosten per km van de 'duurste' scooter.

32] De grafieken hierboven zijn een rechte lijnen, maar dat is op zich nog geen garantie voor evenredigheid. Aan welke voorwaarde moet ook nog worden voldaan ?

De tweede scooter rijdt op elektriciteit. De brandstofkosten zijn dan 3,6 cent per 10 km.

33] Geef een formule voor de brandstofkosten (*b*) als functie van het aantal gereden km (*a*)
Met de *marginale* kosten bedoelt met de extra kosten voor één km extra.

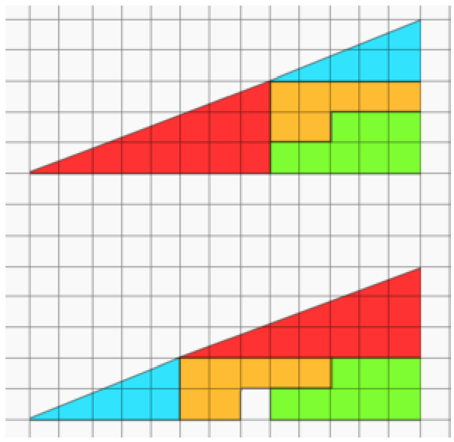
34] Leg uit dat hierboven de marginale brandstofkosten gelijk zijn aan de gemiddelde kosten.

35] Bestudeer **overzicht 4** en kijk nog eens naar je uitwerking van de vragen hierboven.

36] Wat gebeurt er met de omtrek van een cirkel wanneer de *straal* 1 cm groter wordt?

37] De omtrek van een (wedstrijd)bal is 1 cm kleiner geworden. Wat betekent dit voor de diameter?

Hiernaast lijken twee gelijke rechthoekige driehoeken (rhd) te staan met ongelijke oppervlaktes (die schelen 1 hokje).



38] Bereken het verhoudings getal van de rechthoekszijden van de blauwe (kleinste) rhd.

39] Bereken het verhoudingsgetal van de rechthoekszijden van de rode (grootste) rhd.

40] Laat zien wat de oplossing van het raadsel is.

overzicht 4 vaste verhoudingen, recht evenredig en gelijkvormigheid

Wanneer er een vaste verhouding is tussen twee grootheden, zegt men dat de grootheden (recht) *evenredig* zijn.

- Bij een vast uurtarief is je loon (recht) evenredig met de gewerkte tijd
- Bij cirkels is de omtrek (recht) evenredig met de diameter

Bij recht evenredige verbanden behoren eenvoudige formules en eenvoudige grafieken:

- De formules zijn van de vorm: $\boldsymbol{y = r \cdot x}$, bijv.
  - $b = 4{,}50\ u$ voor het bedrag (in euro's) dat je in *u* uur verdient bij een uurloon van € 4,50
  - $P = \pi\, d$ voor de omtrek (*P*) van een cirkel, uitgedrukt in zijn diameter (*d*)
- De grafieken zijn rechte lijnen *door de oorsprong* , immers als een van beide grootheden nul is, moet de andere dat ook zijn. De helling van deze lijn wordt bepaald door het *richtingsgetal* ***r***.

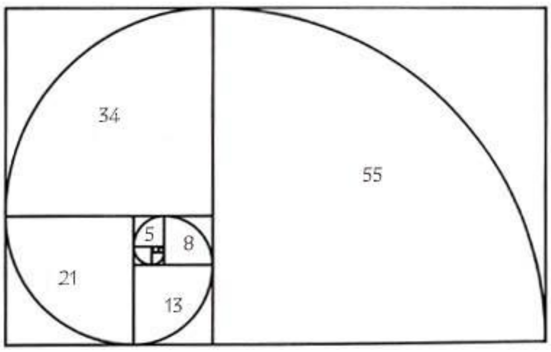
Bij rechthoeken en rechthoekige driehoeken (rhd) wordt de vorm helemaal bepaald door de verhouding tussen de lange en korte rechthoekszijden. Wanneer deze verhoudingen bij twee rechthoeken gelijk zijn, noemen we de rechthoeken of de rhd *gelijkvormig.* Bij gelijkvormige figuren kun je de ene als een vergroting zien van de andere. Alle zijden worden met de zelfde factor vermenigvuldigd. De hoeken blijven gelijk.

De vorm van een driehoek wordt helemaal bepaald door de hoeken. Bij vierhoeken is er meer nodig voor gelijkvormigheid: alle rechthoeken hebben dezelfde hoeken, maar ze zijn niet allemaal gelijkvormig.

Bij sommige figuren ligt de vorm vast , bijv.: cirkels, gelijkzijdige driehoeken, geodriehoeken en vierkanten. Met andere woorden: alle cirkels zijn gelijkvormig, en dat leidt dan weer tot een vast verband tussen omtrek en straal (of diameter).

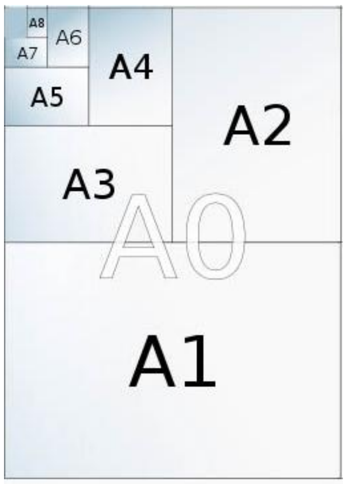
Ook bij ruimtelijk objecten kun je spreken van gelijkvormigheid. Zo zijn alle kubussen gelijkvormig, evenals alle bollen. Balken zijn echter alleen gelijkvormig wanneer er een vaste verhouding tussen lengte, breedte en hoogte bestaat.

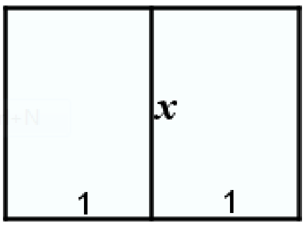
De figuur hiernaast laat zien hoe de spiraal van Fibonacci ontstaat. Er zijn veel (gelijkvormige) vierkanten te zien, met zijden van 55, 34, 21 etc., maar ook *bijna gelijkvormige* rechthoeken, zoals :



- 55 bij 89 (verhoudingsgetal ≈1,6182)
- 34 bij 55 (verhoudingsgetal ≈1,6176)
- 21 bij 34 (verhoudingsgetal ≈1,6190)

Bekende papierformaten zijn A3, A4, A5 etc.
Hiernaast zie je hoe het ene formaat uit het andere ontstaat. Uit de gelijkvormigheid van de rechthoeken volgt dat het verhoudingsgetal tussen lange en korte zijde √2 is. Dit is snel te zien met de volgende tekening en bijbehorend verhoudingsschema:





1	x
x	2

Vaste verhouding keer op keer

41] Bij een reeks poppetjes is het volgende steeds 20% kleiner.
Het eerste poppetje heeft een hoogte van 10 cm.
Hoe hoog is het zevende ?

In de muziektheorie betekent een kwint hoger dat de frequentie 1,5 maal zo hoog is. Een octaaf hoger betekent dat de frequentie is verdubbeld.

42] Je begint met een (lage) toon, en gaat steeds een kwint omhoog. Laat zien dat je na 12 keer ongeveer 7 octaven bent omhooggegaan.

43] Bij het vergroten van een A-4 op A-3 formaat, wordt de oppervlakte verdubbeld. Wat gebeurt er met de afstanden? (bijv. de hoogte van letters)

44] Bestudeer **overzicht 5**, en bekijk nog eens je aanpak van bovenstaande vragen

We kijken nog eens naar de bekende rij van Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

45] Laat zien dat bij deze rij geen exponentieel verband hoort is, maar bij benadering wel (steeds beter)

46] Bereken F_{12} : het twaalfde getal van de rij van Fibonacci.

47] Bereken ϕ^{12}

48] Bereken F_{13} en ϕ^{13}

Je kunt F_n direct berekenen door $c \times \phi^n$ af te ronden op het dichtstbijzijnde hele getal

49] Probeer te achterhalen hoe groot *c* is

50] Bepaal hiermee F_{37}.

overzicht 5: vaste verhouding keer op keer

Een blad A0 heeft een oppervlakte van precies 1 m^2 = 10 000 cm^2 . A1 heeft een oppervlakte van 5 000 cm^2, A2 heeft een oppervlakte van 2500 cm^2, enz.

Je kunt ook direct uitrekenen dat bijv. de oppervlakte van een A5- tje gelijk is aan: $10000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$=312,5 ($cm^2$)

Een rij getallen als 10000; 5000; 25000; 1250; … waarbij er steeds een vaste verhouding *r* is tussen twee opeenvolgende getallen noemt men een rij met een exponentieel verband *r* wordt wel de *reden* van een dergelijke rij, maar het gaat in feite natuurlijk om de groeifactor.
Voor bovenstaande rij geldt dat het startgetal *a* gelijk aan 10000, en de *reden r* aan ½ .

Bij de rij 1000; 1100; 1210; 1331; …. geldt *a* = 1000 en *r* = 1,1
Elke getal is 10% groter dan de voorganger.

Het tiende getal van deze rij is snel te berekenen met $1000 \times 1{,}1^{\mathbf{9}}$.
Om vanuit het eerste getal het tiende te berekenen moet je 9 (10−1) maal vermenigvuldigen met 1,1.

Bij de *gelijkzwevende* stemming is de frequentieverhouding tussen twee opeenvolgende tonen steeds gelijk. Na 12 stappen (octaaf) is de frequentie verdubbeld. Hoe moet de frequentieverhouding tussen twee opeenvolgende tonen zijn ?

Als we het verhoudingsgetal *f* noemen , moet gelden: f^{12} =2
Hieruit volgt $f = \sqrt[12]{2}=2^{\frac{1}{12}}$ ≈ 1,06. De frequentie moet dus per toon met ca. 6% verhoogd worden.

Bij de gulden verhouding 1 : ϕ geldt wat bijzonders: $\phi^2 = \phi+1$. Dit is te zien als de definitie van ϕ.

Dit betekent dat we de rij 1; ϕ ; ϕ^2 ; ϕ^3; ϕ^4 .. ook anders kunnen schrijven

Elke getal is immers gelijk aan de som van de twee voorgangers.
Dit geeft: 1 ; ϕ ; ϕ +1 ; 2ϕ+ 1 ; 3ϕ+2 ; 5ϕ+ 3; …

Deze exponentiële rij is dus ook een soort Fibonacci rij (een Lucas-rij) .

Evenredig met …

Voor het ontwerp hiernaast (50 bij 70 cm) was 0,5 liter rode verf nodig; 0,4 gele; 0,4 paarse; 0,3 liter groene, en 0,2 liter blauwe. Het echte schilderij moet 6 x zo hoog worden (3 m bij 4,20 m)

51] Hoeveel liter van elke kleur is daar voor nodig ?

Een cirkelvormig raam heeft een diameter van 90 cm. Het wordt vervangen door een groter (ook cirkelvormig) raam dat 50% meer licht doorlaat. De hoeveelheid licht die wordt doorgelaten is evenredig met de oppervlakte van het raam.

52] Laat zien dat een vergroting met 50% van de diameter zou betekenen dat er ruim twee maal zoveel licht wordt doorgelaten.

53] Bereken de diameter van het nieuwe raam.

54] Bekijk **overzicht 6** en kijk of je hiermee de vorige vragen eenvoudiger kunt oplossen.

Bij windturbines is het vermogen evenredig met het kwadraat van de diameter. Een windturbine met 'wieken' van 20 m levert een vermogen van ca. 500 kW

55] Hoe groot zal het vermogen zijn met 'wieken 'van 30 meter.

Van de beroemde Oscar-beeldjes zijn diverse replica's in omloop . Het echte beeldje is 34 cm hoog en weegt 3,85 kg. Als het zelfde materiaal gebruikt wordt als bij de echte Oscar moet gelden : $\boldsymbol{m} = 0{,}098\boldsymbol{h}^3$

56] Een teleurgestelde acteur laat een replica maken die 3 maal zo hoog is. Hoe zwaar wordt dit beeld ?

57] Iemand anders wil een Oscarbeeldje maken dat 30% kleiner is dan de echte. Hoe zwaar zou dat worden ?

De tijd die het kost om een vast traject af te leggen is omgekeerd evenredig met de (gemiddelde) snelheid.

58] Ga na hoeveel % tijdsbesparing een 40% hogere snelheid oplevert.

Van veel uitgestorven dieren kan het lichaamsgewicht (m) worden berekend op basis van het skeletgewicht (s). Een formule die voor zoogdieren geldt is: $s = 0{,}06 \cdot m^{1{,}1}$ (alles in kg)

59] Vergelijk het skeletgewicht van twee zoogdieren, waarvan de een 10 x zo 'zwaar' is als de andere.

Om snel terug te rekenen van skeletgewicht naar lichaamsgewicht wordt deze formule wel gebruikt: $m = 13{,}2 \cdot s^{0{,}92}$

60] Per abuis werd het lichaamsgewicht berekend op basis van het gewicht van 80 % van het skelet. Met hoeveel % moet de uitkomst gecorrigeerd worden?

overzicht 6: evenredig met …

Voor de oppervlakte (A) van een cirkel geldt $\boldsymbol{A = \pi \cdot r^2}$ bij benadering $\boldsymbol{A \approx 3,14 \cdot r^2}$
Je kunt de oppervlakte ook uitdrukken in de diameter d (d=2r) : $\boldsymbol{A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \approx 0,785 \cdot d^2}$
Voor een gelijkzijdige driehoek met zijde z geldt: : $\boldsymbol{A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot z^2 \approx 0,433 \cdot z^2}$
Voor regelmatige vijfhoek met zijde z en diagonaal d geldt : $\boldsymbol{A \approx 1,72 \cdot z^2}$ en $\boldsymbol{A \approx 0,657 \cdot d^2}$

In alle gevallen geldt dat de oppervlakte **evenredig** is met het **kwadraat** van de zijde/diameter:
Wanneer een zijde (of bijv. de diameter) 7 x zo groot wordt, wordt het kwadraat 49 [7^2] maal zo groot, en dus de oppervlakte ook.
Wanneer de figuur met 30% vergoot wordt (vergrotingsfactor 1,3) wordt de oppervlakte 69% groter. [$1,3^2$=1,69]

De inhoud (en bij massieve voorwerpen ook de massa) van een bol is **evenredig** met de derde macht van de straal (of diameter) . Zo geldt voor loden bollen bij benadering : $m = 47,3 \cdot r^3$
Wanneer de straal verdubbelt, wordt de massa 8 (=2^3) maal zo groot.

Soms is het verband tussen twee grootheden zo dat een verdubbeling van de een halvering van de ander betekent. Bij rechthoeken van gelijke oppervlakte (zeg 12) geldt $l \times b = 12$ of te wel $l = \frac{12}{b}$
We noemen dan l **omgekeerd evenredig met** b. In feite is l evenredig met het omgekeerde van b.

$$l = \frac{12}{b} = 12 \cdot \frac{1}{b} = 12 \cdot b^{-1}$$

Ook gebroken getallen komen voor als exponent. Het verband tussen de oppervlakte(A) en de inhoud(V) van een bol kun je schrijven als $A \approx 4,84 \cdot V^{\frac{2}{3}}$. Dit betekent dat de oppervlakte **evenredig** is met het volume tot de macht $^2/_3$. Bij andere vormen (bijv. cilinders met een vaste verhouding tussen diameter en hoogte) geldt hetzelfde. Dit heeft als gevolg dat een verdubbeling van de inhoud betekent dat de oppervlakte $2^{\frac{2}{3}}$ dus ca 1,59 maal zo groot wordt.

Een groot dier heeft dus in verhouding minder huidoppervlak, wat bij warmbloedige dieren grote gevolgen heeft voor warmtehuishouding.
De relatie oppervlakte-inhoud meer gevolgen voor de bouw van grote dieren. Omdat bij gelijkvormigheid ook de oppervlakte (van de dwarsdoorsnede) van botten minder sterk toeneemt dan de massa, moeten de poten extra dik worden. Een olifant heeft dan ook in verhouding met zijn lengte/hoogte dikke poten.

Een groot gebouw heeft in verhouding minder muuroppervlak. Om toch voldoende daglicht binnen te laten moet bij grote gebouwen een relatief groot deel van de wanden voorzien worden van ramen.

Snelheid en tijd : toepassingen en valkuilen

61] Iemand loopt 200 meter in een tijd van 25,36 sec. Bereken de gemiddelde snelheid.

62] Iemand loop de 800 meter in een tijd van 2:15,68 (2 min en 15,68 sec.). Bereken de gemiddelde snelheid in km/u.

63] Hoelang doe je over een afstand van 5,3 km als je snelheid precies 20 km/u is. Geef de tijd in minuten en seconden.

64] Bij een wielerwedstrijd werd de sprint met een banddikte gewonnen (zeg 2 cm) Bereken, uitgaande van een snelheid van 55 km/u hoe groot het tijdsverschil was

65] Na een spannende schaatswedstrijd over 1500 zijn de eindtijden 1:53:06 en 1:53:08. Hoeveel cm bedroeg het verschil bij de finish?

66] Iemand rijdt per auto een afstand van 60 km, waarvan 40 km op de snelweg. Op de snelweg rijdt hij gemiddeld 110 km/u, de rest van het traject (bebouwde kom, veel stoplichten) slechts 30 km/u. Hoe groot is de gemiddelde snelheid over het hele stuk ?

67] Iemand vertrekt om 9:30 u voor een afspraak om 11:00 in een plaats 120 km verderop, en verwacht de hele afstand ongeveer de zelfde snelheid te kunnen rijden. Na 50 km ligt hij een kwartier achter op schema. Hoe hard moet er gereden (kunnen) worden om nog op tijd te komen?

68] Iemand rijdt over rustige een weg waar 80 km/u is toegestaan. Over een deel van deze weg (15 km) wordt een trajectmeting gedaan. Er wordt van iedere auto bijgehouden hoelang deze over de 5 km doet. Als dat betekent dat de gemiddelde snelheid over dat stuk 84 km/u (of meer is) wordt er automatische een boete uitgedeeld Onze hoofdpersoon rijdt de eerste 10km net een snelheid van 97 km/u. Hoe hard (langzaam) moet hij gaan rijden om een boete te ontlopen?

69] Een internationale trein vertrekt om 9:16 uit Amsterdam Centraal en komt om 12:35 in Parijs aan. De afstand Amsterdam Parijs is ongeveer 500 km. Het oponthoud op de verschillende tussenliggende stations bedraagt totaal 15 min. Hoeveel bedraagt de gemiddelde snelheid? (Er zijn twee verschillende antwoorden mogelijk)

70] De ICE Amsterdam-Basel doet 6:43 u over de reis, ca. 700 km. Als je het oponthoud op de tussenstations niet mee zou tellen, zou je uitkomen op een gemiddelde snelheid van 130 km/u. Hoe lang is de totale wachttijd op de tussenstations ?

overzicht 7: sneheid en tijd

Bij een constante snelheid is de afgelegde afstand evenredig met de tijd. Door terug te rekenen naar een standaardtijd (meestal seconde of uur) is de (gemiddelde) snelheid bij gegeven afstand en tijd eenvoudig te berekenen
Bij een constante afstand zijn tijd en snelheid *omgekeerd* evenredig: Twee maal zo lang betekent twee maal zo langzaam, dus halve snelheid.

Berekeningen met tijden worden soms bemoeilijkt door de verdeling van uren in 60 seconden, en van minuten in 60 seconden. Dit sexagesimale stelsel is duizenden jare oud en is afkomstig uit Mesopetanië in het huidige Irak. De zelfde onderverdeling wordt ook gebruikt bij graden (Bijv. bij positiebepaling NB, OL), maar daar zie je steeds meer ook decimale notaties. Veel rekenmachines hebben de optie [soms verstopt onder ANGLE] om sexagesimale getallen om te zetten in decimale en vice versa. Het omrekenen kan ook goed met een (verhoudings) tabel gebeuren. In onderstaande tabel zijn diverse aanpakken te zien van opdr. 62.

afstand	meter	800	**5,90**	
	km	0,8		**21,2**
tijd	sexag.	0:02:15,68	0:00:01	1:00:00
	sec.	135,68	1	
	uur	0,037689		1

Je kunt zien dat de (gem.) snelheid 21,2 km/u bedraagt (oftewel 5,9 m/s) Het is handig om paraat te hebben dat 1 m/s overeenkomt met 3,6 km/ u (ga maar na) Op een soortgelijke manier zijn –als de snelheid bekend is - tijdsverschillen om te zeten in afstandsverschillen. Bij een snelheid van 18 km/u komen 5 meter overeen met 1 seconde, dus een meter met 0,2 sec (en 1 cm met 0,002 sec):

afstand	meter	18000	**5**	0,01
	km	18		
tijd	sec.	3600	1	**0,002**
	uur	1		

Soms is een omrekening nodig om niet in de fout te gaan. Een beroemd voorbeeld hiervan is de berekening van de gemiddelde snelheid over een afstand, waarbij de gemiddelde snelheden over de deel afstanden zijn gegeven. Iemand reist de eerste helft met een snelheid van 100 km/u, het tweede deel (file) met een snelheid van slechts 20 km/u . Om de gemiddelde snelheid over de hele afstand te berekenen zijn de **reistijden** over beide stukken van belang. Je kunt die ook als volgt berekenen

- Ga uit van de gegeven afstand of bedenk er een : bijv 100 km
- De eerste helft van de reis duurt 0,5 uur (50/100)
- De tweede helft duurt 2,5 uur (50/20)
- De totale reisduur is dus 3 uur
- De gemiddelde snelheid is dus ca. 33 km/u (100/3)

Ga na dat je uitgaande van een afstand van bijv. 20 km hetzelfde eindantwoord krijgt.

===