

Naam:

Logisch redeneren



Versie: 29 oktober 2008

Colofon

Lesmateriaal voor experimenten Wiskunde C in het kader van het project commissie toekomst wiskunde-onderwijs (cTWO) voor de vernieuwing van wiskunde in de tweede fase per 2011 (www.ctwo.nl).

Auteurs: Anton Roodhardt en Michiel Doorman

(met bijdragen van Theo Janssen, Hugo Bronkhorst, Jos Geerlings, Johan Haasakker, Sjoerd Andringa en Ivo Claus)

Logisch redeneren

deel 1

Onderwerpen:

- Kenmerken van redeneringen
- Logische connectieven: niet, en, of, als-dan
- Waarheidstafels
- Modus ponens en modus tollens

Hoofdstuk 0 Logische puzzels

Wiskundigen vertellen graag dat je van wiskunde leert redeneren. Niet iedereen zal het hiermee eens zijn. Je herkent misschien wel dat het binnen de wiskunde voorkomt dat een persoon een oplossing logisch vindt, terwijl een ander er niets van begrijpt. Kan die andere persoon dus niet redeneren? Nee. Kennis over de logica in redeneringen is niet het enige dat telt. De volgende puzzels hebben iets te maken met 'logisch redeneren'. Na deze puzzels laten we zien dat inzicht in de kunst van het redeneren in allerlei situaties van belang is: niet alleen in de wiskunde, maar ook in rechtszaken, kunst en politiek.

- 1 Ali, Ben, Cé en Daantje hebben een cadeau voor hun vader gekocht. Een van de vier kinderen heeft het cadeau verstopt. Toen hun moeder vroeg wie dat had gedaan, antwoordden ze als volgt:

Ali: "Ik was het niet."

Ben: "Ik was het niet."

Cé: "Daantje heeft het gedaan."

Daantje: "Ben heeft het gedaan."

a. De uitspraken van Cé en Daantje kunnen niet allebei tegelijk waar zijn. Geef nog zo'n voorbeeld.

b. Stel: precies één van de kinderen heeft gelogen. Wie heeft dan het cadeau verstopt?

- 2 John en Leny nemen de getallen 3 en 11 in gedachten en bedenken:

* de som ($3 + 11$) is even

* het product (3×11) is oneven

John zegt: "Als de som van twee gehele getallen even is, is hun product oneven."

Leny zegt: "Als het product van twee gehele getallen oneven is, is hun som even."

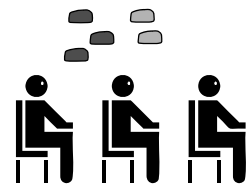
Hebben John en Leny gelijk?

- 3 Er zijn 2 rode en 3 zwarte petjes. Drie kinderen kennen de petjes en zitten in een rij. Ieder kind krijgt een petje op. Ze kunnen alleen de petjes zien van degenen die voor ze zitten.

Aan het achterste kind wordt gevraagd: "weet jij welke kleur pet je op hebt?"

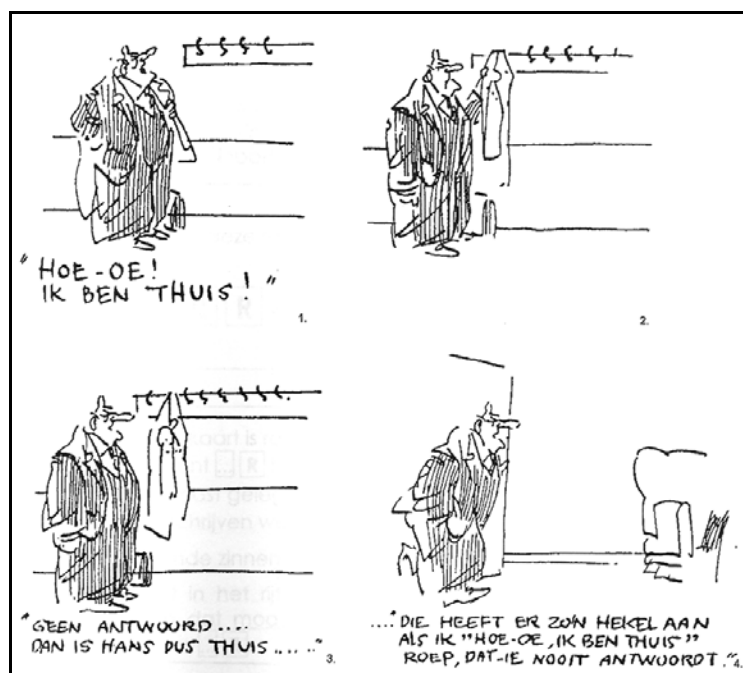
Ze kijkt naar de 2 petjes voor zich, denkt even na en zegt dan: "nee." Vervolgens wordt dit aan de middelste gevraagd. Die ziet maar 1 petje voor zich, denkt na en antwoordt ook ontkennend.

De voorste is even stil en zegt: "dan weet ik de kleur van mijn petje!" Welke kleur is dat?



- 4 De strip hieronder is van Peter van Straaten en gaat over vader en zoon.

Lees de strip en geef commentaar op de redenering van vader.



Extra opdrachten

5 Een moordzaak.

Ad en Ben zijn verdachten in een moordzaak. Ze leggen onder ede de volgende verklaringen af:

Ad: Ben is schuldig en Cor is onschuldig.

Ben: Als Ad schuldig is, dan is Cor ook schuldig.

Cor: Ik ben onschuldig, maar minstens één van de anderen is schuldig.

- Stel dat alle drie de verdachten onschuldig zijn, wie pleegde(n) er dan meideed?
- Stel dat ze alle drie de waarheid spraken, wie is/zijn er dan schuldig?
- Stel dat de onschuldigen de waarheid spraken en de schuldigen logen, wie is/zijn er dan schuldig?

6 Een klassieker: de prinses en de tijger.

De koning van Indrahadad had een idee. Hij riep zijn minister van justitie en zei: “We hebben teveel gevangenen. Als we ze nu eens laten kiezen tussen twee kamers. In de kamer zit een prinses of een tijger. Kiest hij de prinses, dan mag hij haar trouwen. Kiest hij de tijger, dan wordt hij opgegeten.” De koning vervolgt: “En we laten deze beslissing niet aan het toeval over. We zetten bordjes op de deuren waar de gevangen iets uit af kunnen leiden. Een slimme gevangene kan zo zijn leven redden.” “Een voortreffelijke gedachte, majesteit” zei de minister.

In principe zit in de ene kamer een prinses zitten en in de ander een tijger. Maar er kan in elke kamer een tijger zitten en het is ook mogelijk dat in beide kamers prinsessen zitten.

“Als er nu in beide kamers tijgers zitten”, zei de gevangene, “wat moet ik dan doen?”

“Tja, dan heb je pech gehad!”, zei de koning.

“En als er in elke kamer een prinses zit?”

“Dan zit je natuurlijk op fluweel, dat had je zelf ook kunnen bedenken.”

“Maar als in de ene een prinses en in de andere een tijger zit? Wat dan?”

“Ja, in dat geval moet je proberen de goede te kiezen aan de hand van de bordjes op de deuren.”

“Is het waar wat er op de bordjes staat?” vroeg de gevangene.

- Op deur 1: *In deze kamer zit een prinses en in de andere kamer een tijger.*
Op deur 2: *In één van de kamers zit een prinses en in de andere een tijger.*

Koning: ‘Eén van de twee bordjes is onwaar en de andere is waar.’

Welke deur moet de gevangene kiezen?

- Op deur 1: *In minstens één van de twee kamers zit een prinses.*
Op deur 2: *In de andere kamer zit een tijger.*

De gevangen krijgt te horen dat beide bordjes waar of beide onwaar zijn.

Welke deur moet hij nu kiezen?

[Meer prinses-en-tijger-puzzels zijn snel op internet te vinden.]

7 Tijdens het spelen van Sudoku gebruik je ook voortdurend logische redeneringen. Beschrijf bij deze Sudoku-6-puzzel aan hoe je het getal voor de omcirkelde plek kunt vinden. (Je hebt de rest van deze Sudoku daar niet bij nodig.)

4			1	2	
1	2	3	4	5	6
3	4		6		2
6	1	2	3	4	

Hoofdstuk 1 Nogal logisch

De dokter zegt: “Als je mijn medicijn slikt, dan word je beter.”
Een week later kom je de dokter tegen bij de supermarkt.
De dokter kijkt je aan en concludeert: “Je ziet er goed uit. Je hebt dus mijn medicijn geslikt.”

De conclusie van de dokter is begrijpelijk, maar is die wel volgens de regels van de logica? Het kan best zijn dat je *ook* beter wordt van een paar dagen rust. Zijn eerste uitspraak sluit dat niet uit. Dus dat je beter bent *dankzij* zijn medicijn is niet helemaal zeker.

- 8** In het volgende tekstfragment komt de term *logisch* voor.
Waarom wordt hier het woord ‘logisch’ gebruikt? Geef commentaar op de logica.

“De meeste studenten hebben een bijbaan tijdens hun studie. Nogal logisch als je kijkt naar de hoogte van de studiefinanciering.”

De volgende opgaven zijn gebaseerd op tekstfragmenten en krantenartikelen. De vragen gaan over de redeneringen in de teksten. Is er sprake van enige logica? Het zal blijken dat het niet altijd eenvoudig is om de redenering van de auteur te volgen. Dit is een oriëntatie op het onderwerp logisch redeneren in de dagelijkse praktijk. In volgende hoofdstukken zullen we de regels van de logica scherper stellen. Dat zal helpen bij het analyseren en beoordelen van redeneringen.

- 9** Uit de Trouw van 12 augustus 2006:

per saldo

Na jaren matigen heeft de werknemer nu alle recht loonherstel te eisen

Als het bedrijfsleven het moeilijk heeft, moeten de lonen worden verlaagd. En als het economisch weer wat beter gaat, moeten ze vooral niet te snel weer worden verhoogd.

Met voorspelbare ondernemerslogica verwijzen de werkgeversorganisaties VNO-NCW en AWWN looneisen van CNV en FNV naar de prullenbak. Volgens de vakcentrales is het tijd dat de werknemers meeprofiteren van de herstellende economie.

Wat wordt in deze tekst bedoeld met ‘ondernemerslogica’?

- 10** Uit de krant:

Logisch

Slechts 11 % van de Nederlanders reist met de bus of trein. Dat is de helft van het gemiddelde in Europa.

Logisch! Voor de prijs van een enkeltje Lelystad-Weesp (€ 6,50) maak je in een gebied van 40 km rondom Rome, 24 uur lang gebruik van al het openbaar vervoer (met uitzondering van vliegtuigen en taxi's). En voor die prijs kun je met je gezin de hele dag op een gezinskaart rondtoeren in Dresden. Ik snap het wel.

- a.** Wat zijn de redeneerstappen in dit krantenartikel?
- b.** De redenering is strikt genomen niet correct, want onvolledig. Maar de welwillende lezer begrijpt best wat de schrijver bedoelt. Welke redeneerstap ontbreekt eigenlijk?

11 Logica kan ook gebruikt worden voor indoctrinatie. Hieronder twee voorbeelden uit een Russisch leerboek uit de tijd van de Sovjet-Unie.

- “Geen enkel land van het Amerikaanse continent kun je democratisch noemen, want alle landen van het Amerikaanse continent zijn kapitalistische landen en in geen enkel kapitalistisch land is de democratie consequent verwezenlijkt.”
- “Alle landen van de volksdemocratie zijn van het juk van het imperialisme bevrijd. Dit land is een land van de volksdemocratie, dus heeft dit land geen last van imperialisme.”

a. Ondersteep bij beide voorbeelden de conclusie van de redenering.

b. Over welke uitgangspunten in de twee voorbeelden kun je twijfelen?

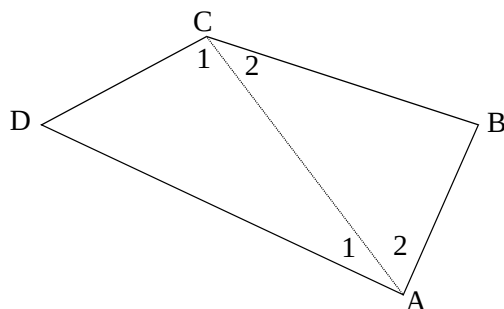
12 Bedenk enkele uitdrukkingen die dezelfde betekenis hebben als ‘logisch’.

13 In een boek over meetkunde staat de volgende stelling:

Als ik een vierhoek heb, dan is de som van de hoeken 360 graden.

Het bewijs van deze stelling gaat als volgt:

Teken een willekeurige vierhoek en benoem de hoekpunten achtereenvolgens A, B, C en D.



Deze vierhoek kun je altijd in twee driehoeken verdelen met de diagonaal AC. Zo krijg je de driehoeken ABC en ACD. De som van de hoeken in een driehoek is 180 graden. Dus $\angle A1 + \angle C1 + \angle D = 180^\circ$ en $\angle A2 + \angle C2 + \angle B = 180^\circ$. Hieruit volgt dat $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D$ gelijk is aan 360 graden.

a. Verklaar de laatste redeneerstap.

Iemand twijfelt aan het bewijs. Stel dat punt D binnen de driehoek ABC ligt. Waar zijn dan de twee driehoeken?

b. Pas de stelling of het bewijs aan, zodat deze twijfel is weggenomen.

14 In de 18e eeuw vond Euler een bijzondere formule voor veelvlakken:

het aantal zijvlakken – het aantal ribben + het aantal hoekpunten = 2

Euler was zo verrast door de eenvoud van deze formule dat hij het onbegrijpelijk vond dat nog niemand eerder dit gevonden had.

a. Controleer de formule voor de kubus en de piramide.

b. Onderzoek voor een aantal andere ruimtelijke figuren of je de formule van Euler kunt gebruiken en, zo ja, of hij wel of niet waar is.

c. Kun je uit je bevindingen tot nu toe concluderen dat de formule van Euler waar moet zijn voor *alle* ruimtelijke figuren?

- 15 “Het vogelbekdier is een uniek dier. Het heeft de kenmerken van drie andere bekende diersoorten: de snavel van een eend, het lijf van een mol en de staart van een bever. Toch is het vogelbekdier ook weer heel anders. Ze zogen hun jongen hoewel ze eieren leggen en niet levend baren. Bovendien hebben ze maar één uitgang die gebruikt wordt voor paren, eieren leggen en uitwerpselen. Het vogelbekdier komt van nature alleen in Australië voor.”



De ontdekking van het vogelbekdier zorgde voor veel hoofdbrekens bij de biologen die ons dierenrijk indeelden. Geef commentaar op de volgende uitspraken:

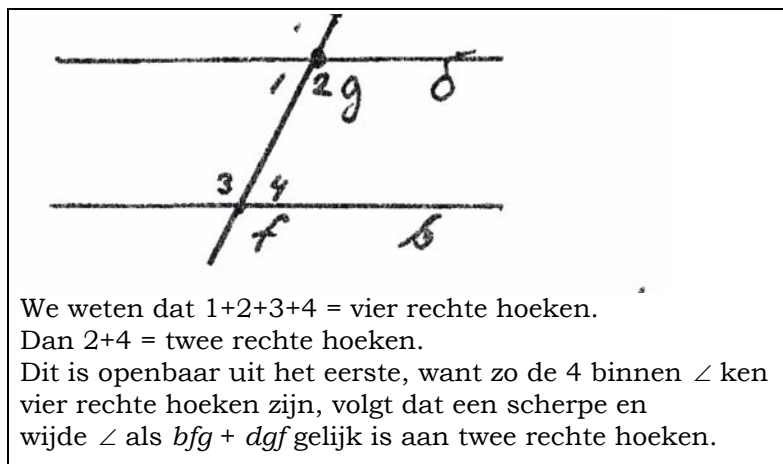
“Zoogdieren zogen hun jongen, dus het vogelbekdier is een zoogdier.”

“Het vogelbekdier is een vogel, want het heeft een snavel.”

“Voor het vogelbekdier moet een nieuwe soortnaam bedacht worden.”

- 16 Hieronder staat een deel van een manuscript uit 1786.

Neem aan dat het gaat om twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde.:



Onderzoek of de redenering correct is.

Ben je van mening dat dit niet het geval is, kijk dan of je er nog iets aan kunt doen.

Samenvatting

Woorden die bij het onderwerp logica een rol spelen zijn:

redenering, conclusie, uitgangspunt, redeneerstap, correct en volledig.

Als een redenering logisch is, dan betekent dat nog *niet* dat de conclusie waar is. Je kunt nog steeds van mening verschillen over de uitgangspunten in een redenering.

Vragen waarop we in het vervolg antwoorden proberen te vinden zijn:

- Wat is een redenering en hoe is die opgebouwd?
- Wat is een redeneerstap en wanneer is die correct?
- Wat is een (on)volledige redenering?
- Wat is het verschil tussen een voorbeeld en een tegenvoorbeeld in een redenering?

Geen straf na ongeval met springschans op fietspad

Slachtoffer had op de weg moeten letten, niet op Di-rect

AMSTERDAM – Het was ‘een naar ongeval’, daar was de verdachte Alwin M. (29) het met de politierechter over eens. Een springschans op het fietspad zetten was inderdaad onverstandig. De schuldigverklaring was echter onvoldoende reden voor verdere strafvervolgning.

Het leek de Vara leuk voor het televisieprogramma VARA Live op 12 april vorig jaar iets te doen met een schans en de skateboardende jongens van de popgroep Di-rect, die in de uitzending te gast waren.

Buiten op de stoep voor het B&W-café lag echter te veel zand om goed vaart te kunnen maken met de skateboards. Daarom verplaatste M. – die avond aan het werk als setdresser – de schans vlak voor de uitzending naar de fietsstrook op de Plantage Ker-

klaan. Hij verzuumde aan te geven dat het obstakel daar stond.

Toen M. even naar binnen ging om te kijken of daar alles goed ging, zag hij vanuit zijn ooghoeken het meisje op de fiets wel aankomen. Op dat moment was ze echter nog een meter of zestig van de schans verwijderd en was de verkeerssituatie ter plaatse overzichtelijk.

Uit verklaringen van getuigen en het achttienjarige slachtoffer zelf bleek dat ze niet meer op de weg lette toen ze de bandleden van Direct in de gaten kreeg.

Ze kwam tot halverwege de schans en verloor toen haar evenwicht.

Eenmaal gevallen had ze meteen door wat er mis was: “Mijn tanden, mijn tanden!” Aan de val hield ze vier gebroken tanden - waarvan

twee definitief zijn afgestorven en een blijvend litteken in de vorm van een winkelhaak op haar kin over.

Omdat M. na alle tumult een verklaring bij de politie had afgelegd, stond alleen hij gisteren voor de rechter - terwijl de schans niet zijn idee was en hij deze samen met een andere Varamedewerker had verplaatst.

Politierechter J. Hillenius bevond M. aansprakelijk en dus schuldig, maar gezien de omstandigheden moet het daar bij blijven. Dat het slachtoffer zelf volstrekt onvoldoende had opgelet was een belangrijke factor in het afzien van verdere strafvervolgning. Ze had even goed tegen een container of een andere fietser kunnen knallen. De civielrechtelijke zaak tegen de Vara voor een schadevergoeding loopt nog.

‘Geen straf voor M’ kan twee reacties oproepen:

1. Dat is niet eerlijk. Hij moet wel straf hebben.
 2. Dat is terecht. Je kunt zoiets toch niet verwachten?
- a. Probeer standpunt 1 te verdedigen met een redenering.
 - b. Doe hetzelfde voor standpunt 2.
 - c. Geef in je antwoorden van **a** en **b** aan wat de uitgangspunten en de redeneerstappen zijn en wat de conclusie is.
 - d. Hoe zeker kun je zijn van de redenering? Bekijk nog eens de uitgangspunten en de redeneerstappen. Geef met een getal tussen 0 en 1 aan hoe zeker je van die uitgangspunten en redeneerstappen bent en bepaal daarmee welke uitspraak de rechter vermoedelijk zal doen.

18 Vergelijk de strafmaat in de twee onderstaande krantenartikelen.

Drie jaar cel voor oplichtster kankerfonds

ASSEN – De rechtbank in Assen heeft een 43-jarige vrouw veroordeeld wegens diefstal van collecte-geld van de KWF Kankerbestrijding. De vrouw krijgt drie jaar cel, waarvan een jaar voorwaardelijk met een proeftijd van drie jaar en reclasseringstoezicht. Tussen 2002 en 2006 stak de vrouw ruim 160.000 euro aan collecteopbrengsten in eigen zak. Ze hield thuis collectebussen met inhoud achter. Ook collectegelden die bijvoorbeeld bij uitvaarten waren opgehaald, stak ze in eigen zak. Het geld is volgens de vrouw opgegaan aan „nutteloosheid.”

Tr. 10 okt 7

Penningmeester parochie gestraft voor verduistering

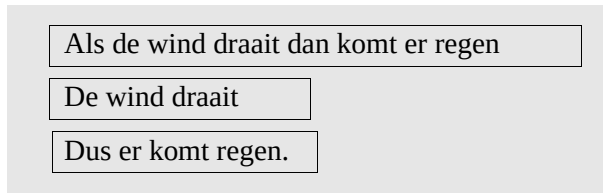
ROERMOND, KESSEL – Een voormalige penningmeester van de OLV Geboorteparochie in Kessel is veroordeeld tot een werkstraf van 240 uur en een gevangenisstraf van 182 dagen, waarvan 180 voorwaardelijk. Hij vergokte tussen 2001 en 2006 356.000 euro van het zwarte spaarboekje van de kerk. Ook verduisterde hij 44.000 euro van een particulier. De parochie verzweg inkomsten voor het bisdom en ontdook zo 16 procent kerkbelasting. De zwarte inkomsten stonden op rekeningen bij de plaatselijke Rabobank, waar de man accountmanager was.

Tr. 10 okt 7

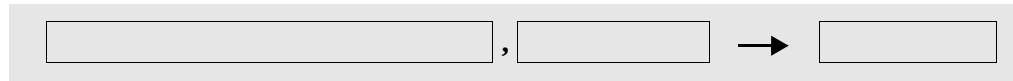
Op het eerste gezicht is het verschil in strafmaat in vreemd. Het lijkt logisch om het gestolen bedrag te koppelen aan de straf. Geef je eigen commentaar hierop.

Hoofdstuk 2 De opbouw van een redenering: OF en EN

Met ervaring en intuïtie heb je de problemen in het vorige hoofdstuk aangepakt. In dit hoofdstuk worden de zaken scherper gesteld. We bekijken eerst een zeer eenvoudige tekst om de opbouw te onderzoeken:



Deze redenering bestaat uit drie bouwstenen. De drie bouwstenen zijn ingekaderd en het woordje “dus” is vervangen door een ‘hieruit-volgt-pijl’:



In de kaders staan zinnen die waar of onwaar kunnen zijn. Een zin met deze eigenschap heet een **propositie**. In dit voorbeeld is de derde propositie de CONCLUSIE van de redenering. De eerste twee zijn UITGANGSPUNTEN.

De redenering zegt nu: ALS de *uitgangspunten* waar zijn, DAN is de *conclusie* ook waar.

De redenering zelf zegt *niet* dat de uitgangspunten altijd waar zijn!

19 Hieronder staan nog een keer twee teksten uit het vorige hoofdstuk.

Zet beide redeneringen in een vorm met hokken en een ‘hieruit-volgt-pijl’.

a. “Geen enkel land van het Amerikaanse continent kun je democratisch noemen, want alle landen van het Amerikaanse continent zijn kapitalistische landen en in geen enkel kapitalistisch land is de democratie consequent verwezenlijkt.”

b. “Alle landen van de volksdemocratie zijn van het juk van het imperialisme bevrijd. Dit land is een land van de volksdemocratie, dus heeft dit land geen last van imperialisme.”

In de twee bovenstaande teksten spelen “want” en “dus” een sleutelrol.

c. Noem nog een paar uitdrukkingen die de rol van “dus” kunnen spelen en gebruik die in de twee teksten.

20 De volgende uitspraak bestaat uit een aantal proposities:

“Ik ga op de fiets en ik neem een boek mee, of ik kom op een andere manier en neem geen boek mee, maar wel een bos bloemen.”

De uitspraak is af te korten tot: “[A en B] of [(niet A) en (niet B) en C]”

Voor welke proposities staan A, B en C?

In de volgende tekst komen een aantal proposities voor.

“...Hij is mathematicus en geen dichter.”

“Je vergist je; ik ken hem heel goed. Hij is dichter en wiskundige en het was daarom te verwachten dat hij logisch zou redeneren. Wanneer hij alleen mathematicus was geweest, had hij helemaal niet kunnen redeneren en dan had de prefect het gemakkelijk van hem kunnen winnen.”

“Dat lijkt me een zonderlinge opvatting”, zei ik. “Door alle eeuwen heen is men er toch altijd algemeen van overtuigd geweest dat de mathematische manier van redeneren alle andere overtreft.”

“Men kan er zeker van zijn”, antwoordde Dupin, een uitspraak van Chamfort citerend, “dat alles waarvan men algemeen overtuigd is en waarover iedereen het eens is altijd onzin is, omdat het de mening van de grote massa vertegenwoordigt.” En hij vervolgde: “Ik geef toe, dat de wiskundigen al hun best hebben gedaan om de gangbare dwaling omtrent de voortreffelijkheid van hun verstand te helpen verbreiden: maar dit neemt niet weg, dat het een dwaling is.”

Edgar Allan Poe (dichter en géén wiskundige)

‘Hij is dichter en wiskundige’ kunnen we herschrijven met twee proposities:

hij is dichter EN hij is wiskundige

Als we voor de twee proposities de afkortingen D en W gebruiken, dan kun je ze lezen als de samenstelling ‘ D EN W ’. Een propositie kan waar of onwaar zijn. Hoe zit dat voor deze samenstelling?

21 Ga na of de volgende tabel de waarheid van de samenstelling ‘ D EN W ’ goed weergeeft en vul de lege plekken in.

D	W	D EN W	
o	o	o	‘o’ is onwaar
o	w	o	‘w’ is waar
w	o	...	
w	...	w	

Voor EN wordt het symbool $\wedge$ gebruikt.

Voor ‘o’ en ‘w’ worden vaak de getallen 0 en 1 gebruikt.

De waarheidstabel of waarheidstafel voor proposities A (dichter) en B (wiskundige) komt er dan zo uit te zien:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

22 De overgang van de gewone taal naar deze notaties gaat niet automatisch door de proposities te herschrijven en EN te vervangen door $\wedge$.

a. Veranderen de waarden in de waarheidstafel als je $A \wedge B$ vervangt door $B \wedge A$?

In de gewone taal kan die verwisseling een betekenisverandering veroorzaken.

b. Vergelijk “Willem reed door en ramde het hek”
met “Willem ramde het hek en reed door”
Hebben deze twee zinnen dezelfde betekenis?

Bij de uitspraak hij is dichter EN hij is geen wiskundige kunnen we de tweede propositie ook schrijven als:

NIET hij is wiskundige

Voor deze ontkenning gebruiken we het $\neg$ -teken.

De uitspraak is dan te beschrijven met de volgende vorm: $A \wedge \neg B$.

23 Maak de waarheidstafel voor $\neg B$.

B	$\neg B$
0	...
1	...

24 Voor de samenstelling $A \wedge \neg B$ wordt het al iets lastiger om de waarheidstafel te maken. Extra kolommen helpen daarbij. Hieronder is een begin gemaakt. Vul de open plaatsen in.

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	...	...

25 In de volgende twee uitspraken wordt *of* gebruikt.

“Je mag gebruik maken van het openbaar vervoer als je een plaatsbewijs hebt of als je een identiteitsbewijs bij je hebt.”

“Je mag gebruik maken van korting als je jonger bent dan 12 jaar of als je ouder dan 65 jaar bent.”

- a. Het onderstreepte deel van de 1^e zin kunnen we afkorten tot P of I . Wanneer is deze samenstelling waar? Hieronder staat de waarheidstafel.

P	I	P of I
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	?

Maak aannemelijk dat ? de waarde 1 heeft.

Voor OF wordt het symbool $\vee$ gebruikt: $P \vee I$.

- b. Het onderstreepte deel in de 2^e zin is bedoeld als: Het is één van beide, maar niet beide. Welke aanpassing van de waarheidstafel voor die *of* is nodig?

Men spreekt wel van een *inclusieve of* (de eerste) en een *exclusieve of* (de tweede).

In de praktijk zijn er meestal aanwijzingen om te kunnen beslissen welke *of* het is. Vaak is dit de *inclusieve of* en wordt bij de *exclusieve of* de *of-of*-vorm gebruikt.

Ezelsbruggetje

EN bevat de n -klank en heeft het symbool dat op een n lijkt: $\wedge$.

OF bevat de v -klank en heeft het symbool dat op de v lijkt: $\vee$.

Tweede bruggetje: EN en OF vormen samen de hoofdletter n : $\wedge \vee$

Wat is vandalisme

DRIEBERGEN — Als de raad niet anders beslist, krijgt het bestuur van de Vereniging 'Een School met de Bijbel' geen vergoeding voor de kosten die gemaakt zijn om twee deuren van 'De Uilenburcht' schoon te maken. Het bestuur heeft de gemeente verzocht de schade te betalen.

Twee houten deuren van 'De Uilenburcht' waren met een waternastift beklad. Het ziet er naar uit dat de reinigingskosten niet door de gemeente betaald worden, omdat het bekladden

van gebouwen niet als vandalisme beschouwd wordt. Het bestuur van de Vereniging 'Een school met de Bijbel' vond echter dat het met stiften bewerken van eigendommen wel onder vandalisme valt.

Wel of geen vandalisme! Is het wel vandalisme, dan vallen de kosten onder artikel 74 van de Wet op het basisonderwijs en moet de gemeente die betalen. Is het geen vandalisme, dan moet de verfbeurt uit eigen beurs betaald worden. De raad zal hoogst waarschijnlijk negatief beslissen, omdat er zich onlangs eenzelfde situatie voerde bij 'De Weideblom'. Toen werd het verwijderen van de 'graffitikunst' ook niet door de gemeente betaald.

In het artikel wordt gebruik gemaakt van de combinatie:

[Het is wel vandalisme] *of* [het is geen vandalisme].

Hoe kun je beslissen welke *of* het is?

27 Tot slot onderstaand raadsel (zie http://www.puzzle.dse.nl/logical/index_nl.html)

Hier staan 3 antwoorden:

A. Antwoord A

B. Antwoord A of B

C. Antwoord B of C

Er is slechts één goed antwoord op de volgende vraag:

Welk antwoord kan alleen goed zijn?

In een debat wordt de **of** vaak misbruikt. Het suggereert namelijk een keuze tussen twee mogelijkheden. Die twee mogelijkheden hoeven echter niet alle opties te overdekken. Dit is bijvoorbeeld te zien in discussies rond het ontstaan van onze aarde.

Zo'n discussie start dan met het uitgangspunt: de wereld is geschapen *of* de wereld is ontstaan na een 'big bang'. Dit uitgangspunt suggereert dat *of* de ene *of* de andere propositie waar moet zijn. Vervolgens wordt aangetoond dat aan één van beide proposities kan worden getwijfeld en geconcludeerd wordt dat de ander dus het meest aannemelijk is.

Hierbij negeert men de optie dat er een derde oorzaak zou kunnen zijn. Bij het vak Nederlands valt zo'n analyse van een debat onder het domein *retorica*.

Hoofdstuk 3 De implicatie

In een milieudiscussie komt deze zin voor:

Als het reizen vermindert, dan vermindert de werkgelegenheid.

We kunnen deze samengestelde propositie splitsen in twee proposities:

Als het reizen vermindert, dan de werkgelegenheid vermindert.

Deze samenstelling heeft een *implicatie*. Hierbij hoort een nieuw symbool $\Rightarrow$, het implicatie-teken. Met de gebruikelijke afkortingen wordt het geheel $A \Rightarrow B$ (A impliceert B).

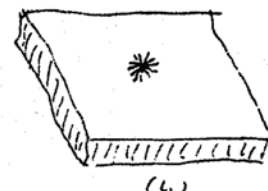
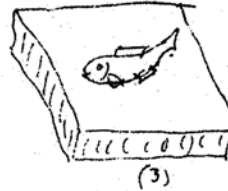
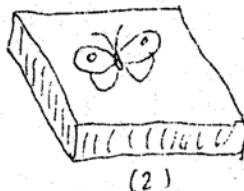
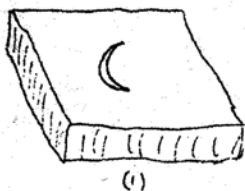
De waarheidstafel van $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	...
0	1	...
1	0	0
1	1	1

28 Ga na of de derde en vierde regel sporen met wat je van een *als ... dan ...* redenering verwacht.

29 Op de grond liggen vier zeer zware stenen. Op de ene kant is altijd een dier (vis, vlinder, ...) getekend en op de andere kant een hemellichaam (maan, zon, ...).

Iemand beweert: “Als aan de ene kant een maan staat, dan staat aan de andere kant een vis.”



- Stel de eerste twee stenen voldoen aan de bewering. Wat kan er dan aan de andere kant van de steen staan?
- Kan aan de andere kant van steen 4 een vis staan?
- Bij welke stenen kan aan de andere kant een maan staan?

De eerste en tweede regel in de waarheidstafel van de implicatie (A is onwaar) zijn vreemd. Als je die situaties niet zou invullen, dan kunnen ze later storend zijn. De knoop moet worden doorgehakt.

Het bleek het beste om $A \Rightarrow B$ in die lastige gevallen de waarheidswaarde 1 te geven. Als A onwaar is, dan is $A \Rightarrow B$ altijd waar, ongeacht de waarheidswaarde van B .

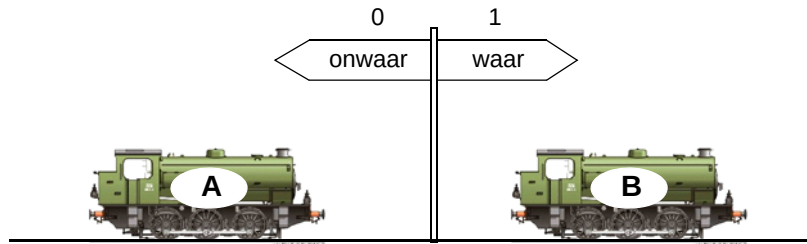
In de praktijk zie je dat terug in zinnen als:

“Als de maan van kaas is, dan ben ik een boon.”

“Als jij 200 jaar wordt, dan krijg je van mij 1000 euro.”

Je kunt niet zeggen dat de zinnen onwaar zijn, dus zeggen we dat ze waar zijn.

- 30** Bekijk onderstaande situatie met twee locomotieven op één treinbaan.
Botsen van locomotief A met locomotief B is verboden.



- a. De waarden 0 en 1 geven bij A en B de rijrichting aan. Bekijk alle mogelijke bewegingen van locomotief A en B en vul de tabel verder in:

A	B	Het gaat goed (geen botsing)
0	0	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...

- b. Vergelijk de waarheidstabel met die van de implicatie.
Verklaar overeenkomsten en verschillen (als die er zijn).

Let op:

$A \Rightarrow B$ betekent dat je in ieder geval weet: **als A dan B**.

Maar je weet niet of het de enige manier is om bij B te komen.

In het voorbeeld hierboven kunnen er ook andere redenen zijn om iemand 1000 euro te geven.
Dus als je iemand 1000 euro geeft, dan hoeft dat niet te betekenen dat die geveer 200 jaar geworden is.

- 31** Bekijk de twee strips van Peter van Straaten aan het begin van dit boekje.
Geef commentaar op de implicatie in de strips.

- 32** Er zijn veel varianten van ‘als-dan-redeneringen’. Schrijf onderstaande teksten in de vorm $A \Rightarrow B$.

- “Als de lichten in het centrum uitgaan schiet de criminaliteit omhoog.”
- “Mensen die hun spaargeld beleggen in aandelen nemen de verkeerde beslissingen als zij zich door hun emoties laten leiden.”
- “Je werkt een levenlang hard en spaart wat geld waarover je belasting betaalt. Als je daarvan iets wilt nalaten aan je kinderen komt de fiscus nogmaals langs om de helft van dat geld op te halen.”

- 33** Bij grotere teksten kun je de proposities onderstrepen en nummeren.
Omcirkel bovendien de termen die een implicatie aangeven.

- “Wanneer een tot het Gerecht gericht verzoekschrift of ander processtuk bij vergissing wordt neergelegd bij de griffier van het Hof van Justitie, wordt het onverwijld doorgezonden naar de griffier van het Gerecht.” (Bron: Europese grondwet)
- “Indien voor bepaalde grondstoffen een gemeenschappelijke ordening in het leven wordt geroepen voordat er een gemeenschappelijke ordening voor de overeenkomstige verwerkte producten bestaat, mogen de betrokken grondstoffen die gebruikt worden voor de producten welke voor de uitvoer naar derde landen zijn bestemd van buiten de Unie worden ingevoerd.”

De taal van de logica

De taal van de logica voor zover we die nu hebben ontwikkeld bestaat uit:

Propositieletters, $\wedge$, $\neg$, $\vee$, $\Rightarrow$, (en).

Je kunt met deze *woordenschat* heel veel uitdrukkingen maken, maar je kunt niet in het wilde weg iets opschrijven. Deze taal heeft namelijk ook een *grammatica*.

$\wedge \wedge \wedge A$ is onzin.

$\neg \neg \neg A$ kan wel als we ook nog beschikken over haakjes. Die zijn voortaan ook voorradig:

$\neg(\neg(\neg A))$

De logica waar we mee bezig zijn hoort bij een geïdealiseerde wereld. Zo hebben we immers afgesproken dat een propositie waar of onwaar is, hoewel we in de werkelijkheid ook wel eens aannemen dat een propositie niet zeker waar, maar wel erg aannemelijk is.

Ook zijn niet alle zinnen te symboliseren in de taal van de logica. Bekijk bijvoorbeeld:

“Jan komt, *maar* Marie komt niet.”

“*Hoewel* Jan op tijd is, zal het feest toch niet doorgaan.”

Als je de eerste zin vertaalt met **[Jan komt]** $\wedge$ **[Marie komt niet]**, dan lijkt de zin er wel op, maar toch ben je informatie verloren, de betekenis is net iets anders.

Je gebruikt een waarheidstafel om systematisch na te gaan wanneer een bewering waar is.

Voorbeeld: de positie van $\neg$ heeft gevolgen voor een bewering. Vergelijk de volgende drie zinnen:

als de appel groen is, dan is hij niet rijp

als de appel niet groen is, dan is hij rijp

het is niet zo dat een appel rijp is als hij groen is

Deze drie zinnen zijn als volgt te schrijven in de taal van de logica:

$G \Rightarrow \neg R$

$\neg G \Rightarrow R$

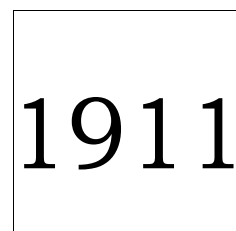
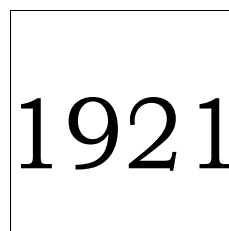
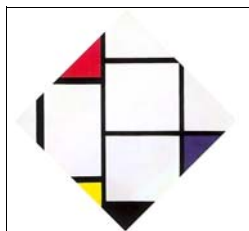
$\neg(G \Rightarrow R)$

Met waarheidstafels kun je nagaan dat deze drie zinnen niet hetzelfde zeggen:

G	R	$G \Rightarrow \neg R$	G	R	$\neg G \Rightarrow R$	G	R	$\neg(G \Rightarrow R)$
0	0	1 1	0	0	1 0	0	0	0 1
0	1	1 0	0	1	1 1	0	1	0 1
1	0	1 1	1	0	0 1	1	0	1 0
1	1	0 0	1	1	0 1	1	1	0 1

Nog een extra als-dan-oefening:

Hieronder zie je vier kaartjes afgebeeld. Op het eerste kaartje zie je een abstract schilderij, op het tweede een figuratief werk (een boom). Op de achterkant van deze kaartjes staat het jaar waarin het werk is gemaakt. De rechter twee kaartjes liggen met het jaartal boven, op hun achterkant staat een schilderij afgebeeld dat in dat jaar is gemaakt door Mondriaan.



Een kunsthistoricus beweert dat al het figuratieve werk van Mondriaan van vóór 1915 is. Om deze bewering te controleren mag je twee kaartjes omdraaien.

Welke kaartjes draai je om (en vooral: waarom)?

Hoofdstuk 4 Kenmerken van redeneringen

Hoever zijn we gekomen met de vragen aan het eind van hoofdstuk 2?

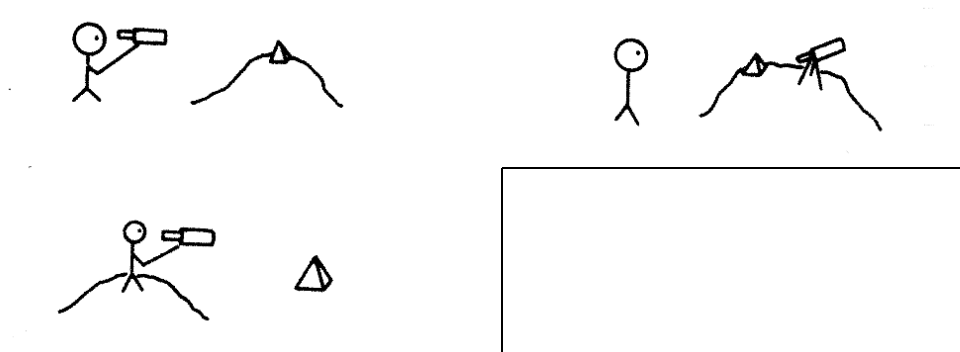
Een redenering bestaat uit een weg van uitgangspunten naar een conclusie. Propositionen en en samenstellingen zijn verbonden door de term ‘hieruit volgt’ of een uitdrukking met dezelfde betekenis, zoals ‘dus’. Een propositie kan een fijnere structuur hebben, het kan namelijk een samenstelling zijn van uitgangspunten door middel van ‘en’, ‘of’ en ‘als ... dan ...’.

Bij een eerste lezing van een betoog zijn woorden als ‘dus’, ‘en’, ‘of’ en hun soortgenoten belangrijke herkenningpunten.

Voorzichtigheid is geboden bij het omzetten van gewone taal naar logische taal. Je hebt soms achtergrondkennis nodig om de juiste interpretatie te kiezen.

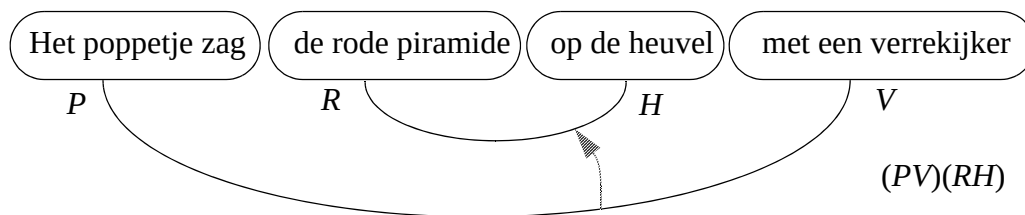
Een extreem voorbeeld van deze problematiek is het volgende.

34 Tekenen is een wereldtaal.



In de drie plaatjes zie je mogelijke interpretaties van de zin: “Het poppetje zag de rode piramide op de heuvel met een verrekijker.”

- Teken een vierde plaatje dat een mogelijke interpretatie kan zijn.
- De meerduidigheid van de zin is een gevolg van de structuur die je in de zin aanbrengt. Bijvoorbeeld:

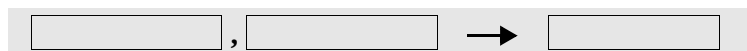


Ga hiermee eens experimenteren. Moeilijkheden zijn onvermijdelijk.

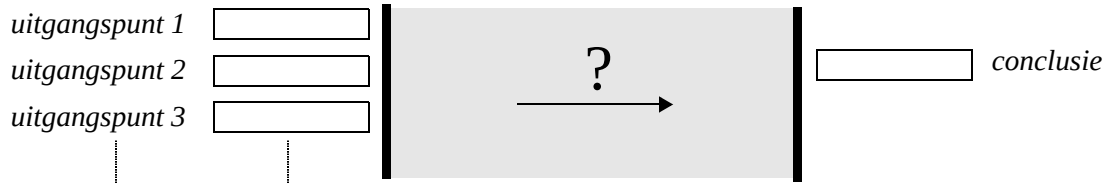
- Maak een versie van de zin die *niet* tot misverstanden leidt.

Behalve uitgangspunten, propositionen en conclusie is er meer nodig, zoals aanduidingen waarom een bepaalde stap in een redenering gezet mag worden. Vaak zijn aanduidingen niet compleet. De uiteindelijke vorm van de redenering kan heel verschillend zijn.

In het algemeen is dit schema niet de volledige redenering.



Meestal zijn er meer uitgangspunten, dan is er sprake van een meervoudige redenering. De plaats van uitgangspunten en conclusie kunnen in een tekst variëren. De redenering is ook zo te beschrijven:



Hoe kom je aan de overkant? Dat is één van de kernvragen in de logica. Om die te beantwoorden moeten we eerst iets meer over proposities weten.

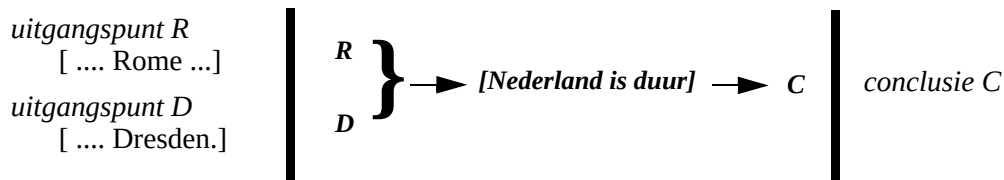
De correctheid van een redenering

Een redenering is correct als er een verantwoorde weg is van uitgangspunten naar conclusie. Soms moet je de uitgangspunten aanvullen met kennis van het betreffende onderwerp.

Bekijk bijvoorbeeld een opgave uit hoofdstuk 1:

	Logisch
C	[Slechts 11 % van de Nederlanders reist met de bus of trein. Dat is de helft van het gemiddelde in Europa.]
R	Logisch! [Voor de prijs van een enkeltje Lelystad-Weesp (€ 6,50) maak je in een gebied van 40 km rondom Rome, 24 uur lang gebruik van al het openbaar vervoer (met uitzondering van vliegtuigen en taxi's).] En [voor die prijs kun je met je gezin de hele dag op een gezinskaart rondtoeren in Dresden.] Ik snap het wel.
D	

Kennis over de situatie helpt bij het beschrijven van de weg naar de conclusie:



In zuivere logische redeneringen weet je niet eens waar de letters voor staan. Je hebt dan geen extra kennis.

We onderzoeken de werking van de implicatie in redeneringen.

We nemen $A \Rightarrow B$ is waar. Dus regel 3 in de waarheidstafel hier-naast vervalt.

We onderzoeken conclusies van een redenering met $A \Rightarrow B$ en verschillende waarden voor A en B . Stel:

A is onwaar (0) en $A \Rightarrow B$ is waar (1).

Dan kunnen we geen uitspraak doen over de waarheid van B .

Als A waar is (1) en $A \Rightarrow B$ is waar (1), dan kunnen we concluderen dat B waar is.

Kortom:

$A = 1$ en $A \Rightarrow B = 1$: dan regel 4, dus $B = 1$.

$B = 1$ en $A \Rightarrow B = 1$: geen uitspraak over A .

$B = 0$ en $A \Rightarrow B = 1$: dan regel 1, dus $A = 0$.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

We houden twee bruikbare redeneringen over. Met de “hier-uit-volgt” pijl zijn die:

$$A, A \Rightarrow B \longrightarrow B$$

(de oude naam is **modus ponens**)

en

$$\neg B, A \Rightarrow B \longrightarrow \neg A$$

(de oude naam is **modus tollens**)

Een verleidelijke maar foutieve redenering is:

$$B, A \Rightarrow B \longrightarrow A$$

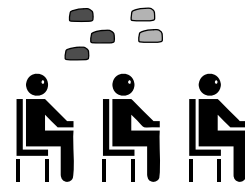
(die mag je noemen: **modus nonsens**)

35 We bekijken nog eens de puzzel van de rode en zwarte petjes uit het begin van dit boekje:

Er zijn 2 rode en 3 zwarte petjes. Drie kinderen kennen de petjes en zitten in een rij. Ieder kind krijgt een petje op. Ze kunnen alleen de petjes zien van degenen die voor ze zitten.

Aan het achterste kind wordt gevraagd: “weet jij welke kleur pet je op hebt?” Ze kijkt naar de 2 petjes voor zich, denkt even na en zegt dan: “nee.” Vervolgens wordt dit aan de middelste gevraagd. Die ziet maar 1 petje voor zich, denkt na en antwoordt ook ontkennend.

De voorste is even stil en zegt: “dan weet ik de kleur van mijn petje!” Welke kleur is dat?



Een deel van de redenering van het middelste kind is:

1. Als [de achterste twee rode petjes voor zich ziet], dan [de achterste weet welk petje hij op heeft].
2. niet [de achterste weet welk petje hij op heeft].
3. Dus: niet [de achterste ziet twee rode petjes voor zich].

Deze redenering heeft de vorm van modus tollens.

Beschrijf zo ook de redenering (modus tollens) van het voorste kind met het antwoord van het middelste kind.

36 Bekijk de volgende uitspraak:

“Als het regent, dan gaat Jona met de bus naar school.”

Wat kun je zeggen over het vervoer van Jona naar school, of over het weer in de volgende situaties:

- a. Jona komt met de bus naar school.
- b. De zon schijnt.
- c. Het regent.
- d. Jona komt met de fiets naar school.

37 Een agrarische setting:

“Als een zeug meer dan 30 dagen geleden gebigd heeft, dan is de melkproductie per dag minder dan $5\frac{1}{2}$ kg.”

Deze uitspraak is waar zolang je met deze opgave bezig bent.

In de volgende situaties weet je iets over het aantal dagen geleden dat er gebigd is of over de grootte van de melkproductie. Probeer telkens iets te concluderen met behulp van bovenstaande uitspraak.

- a. De zeug heeft 35 dagen geleden gebigd.
- b. De zeug heeft 23 dagen geleden gebigd.
- c. De melkproductie is 5 kg per dag.
- d. De zeug heeft 8 dagen geleden gebigd.
- e. De melkproductie is meer dan $5\frac{1}{2}$ kg per dag.
- f. De zeug heeft minder dan 30 dagen geleden gebigd.

Samenvatting

We herhalen twee vragen uit het eind van hoofdstuk 2:

- Wat is een redenering en hoe is die opgebouwd?
Een redenering bevat uitgangspunten, waaruit een conclusie volgt. Daartussen zitten redeneerstappen.
- Wat is een redeneerstap en wanneer is die correct?
In een redeneerstap *vervang* je een of meer uitgangspunten *door* een andere (samengestelde) propositie, die ook altijd waar is, als de uitgangspunten waar zijn.

De kenmerken van voorbeeld en tegenvoorbeeld komen onder andere in hoofdstuk 6 aan de orde. Eerst wordt in hoofdstuk 5 aandacht besteed aan het vervangen van proposities door andere proposities.

38 Ontleed de volgende tekst (van uitgangspunten via redeneerstappen naar conclusie).

- a. Een onderdeel van de redenering is:
Als mensen gestresst zijn, dan krijgen ze een hoge bloeddruk.
Beschrijf ook de overige onderdelen van de redenering in zo'n vorm, en laat zien wat de uitgangspunten van het geheel zijn en hoe de conclusie daaruit volgt (volgens de redenering).
- b. Wat vind jij van de redenering?
- c. Waarom heeft de journalist het woord 'mogelijk' in de kop gezet?

Mogelijk tientallen doden door herrie

ROTTERDAM, 19 JUNI. In de regio Rijnmond overlijden jaarlijks mogelijk tientallen mensen aan de gevolgen van verkeersherrie. Dat concludeert de Milieumonitoring Stadsregio Rotterdam (MSR) vandaag in de jaarlijkse milieubarometer. Uit het rapport *Geluid, gezondheid en geld* blijkt dat één op de twaalf Rijnmonders slaapproblemen heeft door herrie. Bij ongeveer 3 procent neemt dat ernstige vormen aan. „Mensen raken daardoor gestrest en lopen een hoge bloeddruk op. Dat kan weer leiden tot een beroerte of hartinfarct”, aldus een woordvoerder van de Milieudienst Rijnmond. Volgens het rapport scoort de Rotterdamse regio niet slecht in vergelijking met andere steden. (ANP)

Hoofdstuk 5 Oefeningen en equivalentie

Het bepalen van waarheidstafels bij ingewikkelde samenstellingen kan met een programma op internet: de TRUTHTABLE CONSTRUCTOR van Brian Borowski (<http://www.brian-borowski.com/Truth/>). Dat programma maakt geen extra kolommen maar werkt direct in de samenstelling (en gebruikt &, v en ~ voor respectievelijk $\wedge$, $\vee$ en $\neg$).

Hieronder is te zien hoe het programma bovenstaande waarheidstafel bepaald. Onder de samenstelling wordt eerst de kolom voor $\neg B$ geschreven, waarna de waarden voor de volledige samenstelling volgen.

stap 1:			
A	B	A & ~B	
0	0	1	
0	1	0	
1	0	1	
1	1	0	

stap 2:			
A	B	A & ~B	
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

conclusie:		
A	B	A & ~B
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Zo bepaalt het programma ook waarheidstafels voor ingewikkelde samenstellingen:

A	B	C	A & (~B v C)
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

A	B	C	A & (~B v C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

A	B	C	A & (~B v C)
0	0	0	1 1
0	0	1	1 1
0	1	0	0 0
0	1	1	0 1
1	0	0	1 1
1	0	1	1 1
1	1	0	0 0
1	1	1	0 1

A	B	C	A & (~B v C)
0	0	0	0 1 1
0	0	1	0 1 1
0	1	0	0 0 0
0	1	1	0 0 1
1	0	0	1 1 1
1	0	1	1 1 1
1	1	0	0 0 0
1	1	1	1 0 1

39 a. Verklaar waarom er 8 rijen nodig zijn om alle waarheidswaarden weer te geven.

b. Bepaal (met de Truthtabel Constructor) de waarheidstafel van $A \wedge (B \vee C)$

40 Een oefening met haakjes: we vergelijken de combinatie $A \wedge (B \vee C)$ met $(A \wedge B) \vee C$.

A	B	C	A & (B v C)	(A & B) v C
0	0	0	0 0 0 0 0	0 0 0
0	0	1	0 0 0 1 1	0 0 1
0	1	0	0 0 1 1 0	0 1 0
0	1	1	0 0 1 1 1	0 1 1
1	0	0	1 0 0 0 0	1 0 0
1	0	1	1 1 0 1 1	1 0 1
1	1	0	1 1 1 1 0	1 1 0
1	1	1	1 1 1 1 1	1 1 1

a. Maak de waarheidstafel af (gebruik eventueel de Truthtabel Constructor).

b. Leg uit waarom de twee samenstellingen verschillend zijn.

- c. Er wordt gesteld dat $A \wedge (B \vee C)$ hetzelfde is als $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
Is dat zo?
Zie je een overeenkomst tussen dit gebruik van haakjes en de haakjes bij het rekenen?

In opgave 40 komen de volgende paren samengestelde uitgangspunten voor:

$$A \wedge (B \vee C) \text{ en } (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$\neg(A \wedge B) \text{ en } \neg A \vee \neg B$$

Je hebt gezien dat voor alle waarden van proposities A , B en C deze twee samenstellingen dezelfde waarheidswaarde hebben. De samenstellingen heten dan *equivalent*.

- 41 Equivalenties kunnen we gebruiken bij redeneringen. Heb je bijvoorbeeld een samenstelling van de vorm $\neg(A \wedge B)$ dan kun je die inruilen voor $\neg A \vee \neg B$.
Maak twee versies van een zin die deze equivalentie illustreert.

- 42 Een simpel voorbeeld: de luchtsluis als ingang van een gebouw.

In gebouwen, bijvoorbeeld ziekenhuizen of bibliotheken, wordt bij de ingang wel eens gebruik gemaakt van een luchtsluis om tocht te voorkomen. Er zijn dan twee deuren: een buitendeur en een binnendeur.

We maken deze afkortingen: A betekent dat de buitendeur open is en B dat de binnendeur open is.

De deuren mogen niet tegelijk open staan: $\neg(A \wedge B)$.

Dit kan vervangen worden door $\neg A \vee \neg B$.

- a. Beschrijf in woorden wat $\neg A \vee \neg B$ betekent.

De $\vee$ staat hier voor de inclusieve OF.

- b. Is dat juist?

Wat zou het betekenen als hier de exclusieve OF had gestaan?

- c. (extra) We hebben geen speciaal symbool voor de exclusieve OF. Maar het is mogelijk om een samenstelling te maken met $\vee$, $\wedge$, en $\neg$ die dezelfde waarheidstafel heeft als de exclusieve OF. Probeer maar eens.

Een voorbeeld van een equivalente uitruil is de volgende:

De drie uitgangspunten A , $\neg A \vee B$ en $\neg B \vee C$ zijn equivalent met C .

$$\begin{array}{c} A \\ \neg A \vee B \\ \neg B \vee C \end{array} \left| \begin{array}{c} A \\ \neg A \vee B \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{c} B \\ \neg B \vee C \end{array} \left\} \rightarrow C \right| C$$

De verantwoorde stappen in de weg van uitgangspunten naar equivalente uitspraken (conclusie) zijn kleine logische redeneringen. Die noemen we *redeneerregels*.

- 43 a. Hoe kun je (met waarheidstafels) zulke redeneerregels testen?
b. De hierboven gebruikte redeneerregel heeft de algemene vorm:
Uit $[A \vee B]$ en $[\neg A]$ volgt $[B]$.
Ga dat na.

44 Leidt C af uit de volgende drie uitgangspunten: $A \vee B$, $A \Rightarrow (B \vee C)$ en $B \Rightarrow C$.

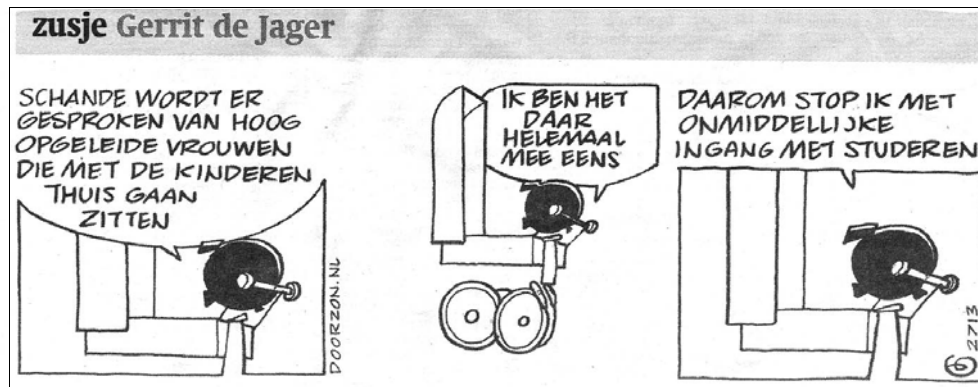
De volgende twee opgaven zijn oefeningen met de taal van de logica.

45 Een uitspraak van Loesje in de rubriek ‘Grootse daden van de kleine burger’:

“De conciërge van het Willem III college heeft een doos vol smoesjes voor als je te laat bent en hij geen zin heeft om streng te zijn.”

Schrijf deze uitspraak in de taal van de logica.

46 Deze strip gaat over vrouwen met kinderen.



Voor de symbolisatie van de tekst gebruiken we twee proposities

H : ze is hoger opgeleid

T : ze blijft thuis

a. Er wordt schande gesproken van $H \wedge T$.

Zusje zegt eigenlijk $\neg(H \wedge T)$.

Is haar besluit correct volgens (ons kleine wereldje van) de logica?

b. Laat met een waarheidstafel zien waar haar besluit zit.

c. Een algemene regels is dus:

$\neg(A \wedge B)$ is hetzelfde als $\neg A \vee \neg B$.

Controleer deze equivalentie met een twee waarheidstafels.

47 Bekijk nog eens de de puzzels van de prinses en de tijger uit het begin van dit boekje.

a. Gebruik de taal van de logica om de twee situaties te beschrijven.

Tip: Kies P_1 voor ‘in kamer 1 zit een prinses’.

b. Bereken met waarheidstafels welke deur de gevangene in de twee situaties veilig kan openen.

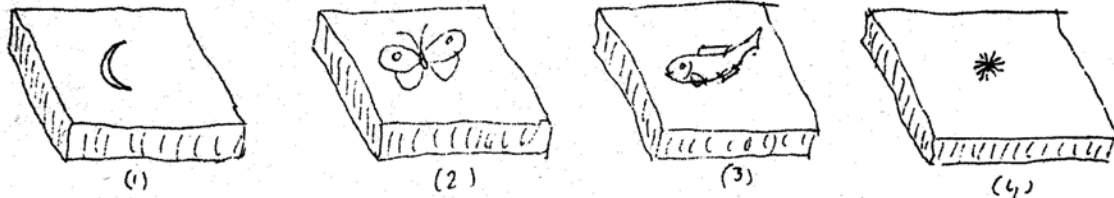
48 Uit een advertentie voor een automatisch horloge:

**Als dit horloge stil blijft staan, moet u een dokter bellen.
Want dan hebt u zich al zeven dagen niet bewogen.**

Maak hiervan een volledige redenering.

- 49 Gegeven zijn vier kaarten met aan de ene kant de naam van een land en aan de andere kant de huwbare leeftijd in dat land (bovenkant eerst):
 [Nederland, 18] , [Afghanistan, 12] , [19, USA] , [14, Slowakije].
 Stel: je ziet alleen de bovenkant van de vier kaarten.
 Welke kaart(en) moet je omdraaien om te controleren: In Europa mag je pas trouwen na je 16^e.

- 50 Op de grond liggen we vier zeer zware stenen. Op de ene kant is altijd een dier (vis, vlinder, ...) getekend en op de andere kant een hemellichaam (maan, zon, ...).
 Iemand beweert: "Als aan de ene kant een maan staat, dan staat aan de andere kant een vis."



Welke stenen moet je omdraaien om de bewering te controleren?

Gegeven zijn vier kaarten met op iedere kant een leeftijd en een bijbehorend drankje.
 Regel: als je jonger dan 16 bent, dan mag je geen alcoholische drankjes drinken.
 Op de vier kaarten is te zien: 14 , 19 , bier , cola .
 Welke kaarten moet je omdraaien om dat te controleren?

- 51 Eerste premisse (uitgangspunt): Als de lonen omhoog gaan, zullen de prijzen stijgen.
 Tweede premisse: De lonen gaan omhoog.
 Conclusie: De prijzen zullen stijgen.
 Deze conclusie is logisch gerechtvaardigd. Vervang de tweede premisse en de conclusie achtereenvolgens door de volgende uitspraken en onderzoek of de redenering dan nog steeds logisch correct is (gebruik eventueel een waarheidstafel).

- a. Tweede premisse: De prijzen stijgen.
 Conclusie: De lonen zijn omhoog gegaan.
- b. Tweede premisse: De lonen gaan niet omhoog.
 Conclusie: De prijzen stijgen niet.
- c. Tweede premisse: De prijzen gaan niet omhoog.
 Conclusie: De lonen zijn niet omhoog gegaan.

- 52 Een dokter zegt: "Als je mijn medicijn slikt, dan wordt je beter."
 DUS

- Als je beter bent, dan heb je zijn medicijn geslikt
- Als je zijn medicijn niet slikt, wordt je niet beter
- Als je niet beter bent, dan slikt je niet zijn medicijn

Wat volgt er *wel*, wat volgt er *niet*?

Maar let op: Als iemand koorts heeft, dan voelt hij warm aan. Dus zal de arts, als zij vindt dat je warm aanvoelt, denken dat je koorts hebt. Koorts is een mogelijke en voor de hand liggende oorzaak. Deze redeneervorm wordt vaak gebruikt in de medische discipline!

Samenvatting

Met een *waarheidstafel* kun je zien onder welke condities een logische zin waar is.

Voorbeeld:

In de waarheidstafel hiernaast kun je zien dat de zin $A \wedge (\neg B \vee C)$ precies in drie situaties waar is.

	A	B	C	A & (¬B ∨ C)
0)	0	0	0	0
1)	0	0	1	0
2)	0	1	0	0
3)	0	1	1	0
4)	1	0	0	1
5)	1	0	1	1
6)	1	1	0	0
7)	1	1	1	1

Twee logische zinnen zijn equivalent als ze onder dezelfde condities waar zijn.

Voorbeeld:

Uit de volgende twee waarheidstafels kun je concluderen dat $P \wedge (\neg Q \vee \neg P)$ equivalent is met $P \wedge \neg Q$.

	P	Q	P & (¬Q ∨ ¬P)
0)	0	0	0
1)	0	1	0
2)	1	0	1
3)	1	1	0

	P	Q	P & ¬Q
0)	0	0	0
1)	0	1	0
2)	1	0	1
3)	1	1	0

Kern van de laatste twee hoofdstukken zijn de *als-dan*-redeneringen met de “hier-uit-volgt” pijl:

$A, A \Rightarrow B \rightarrow B$ (Modus Ponens)

en

$\neg B, A \Rightarrow B \rightarrow \neg A$ (Modus Tollens)

Voorbeeld:

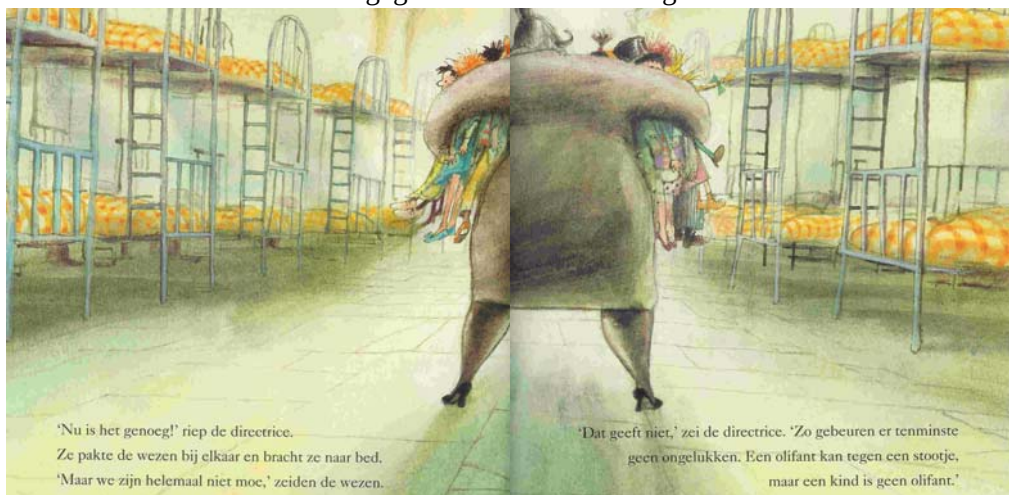
Je weet dat ik met de bus naar school ga als het regent.

Het regent. Conclusie: ik ga met de bus naar school.

Nog een keer:

Je weet dat ik met de bus naar school ga als het regent.

Ik ben niet met de bus naar school gegaan. Conclusie: het regende niet.



Hoofdstuk 6 Verdieping en gemengde opdrachten

53 Bekijk de strip hiernaast.

- a. Weet de vrouw met de geruite rok in alle gevallen waar hij is?
- b. Stel dat je weet dat de hoed weg is, maar van jas en paraplu weet je nog niets. Kun je dan al concluderen dat hij een kopje koffie is gaan drinken?

De voorwaarde “*er hangt niets meer*” is voldoende om te weten dat hij weg is en die dag niet meer terug komt.

De hoed moet ook weg zijn, maar dat is onvoldoende om te concluderen dat hij weg is.

Men maakt hierbij een onderscheid tussen een **nodige voorwaarde** (*hoed is weg*) en een **voldoende voorwaarde** (*alles is weg*).



54 Moedermelk lijkt van invloed op het IO van kinderen.

Moedermelk alleen goed voor IQ als je gunstig DNA hebt

Borstvoeding verhoogt het IQ van kinderen, maakten Britse wetenschappers deze week bekend. Maar, voegden zij eraan toe, dat geldt alleen als het kind beschikt over een genvariant waardoor het vetten uit de moedermelk goed kan afbreken en opnemen.

Daar gaan we weer, zou de cynicus zeggen. Over het verband tussen borstvoeding en intelligentie wordt al gesproken sinds 1929. Toen stuitten wetenschappers voor het eerst op een mogelijke link. Sindsdien volgt de ene studie op de andere. Nu eens lijkt borstvoeding gunstig, dan weer niet. En steeds treden er twee vertekeningen op. Moeders die borstvoeding geven, zijn gemiddeld bijvoorbeeld iets slimmer dan andere moeders, en die aanleg geven zij door aan hun kroost. Bovendien krijgen kinderen met borstvoeding relatief veel aandacht, en ook dat werkt IQ-verhogend.

docosahexaeenzuur (DHA) en arachidonzuur (AA). Beide vetzuren zitten in moedermelk, niet in koemelk. De stoffen stapelen zich de eerste maanden na de geboorte in het brein op. Ze zorgen er mogelijk voor dat zenuwcellen meer onderlinge verbindingen aanleggen. Een efficiënt FADS2-gen kan daarom best leiden tot een hoger IQ, dachten de Britten.

Ze testten hun hypothese bij meer dan 3000 kinderen uit Groot-Brittannië en Nieuw-Zeeland. Degenen met het gunstige gen leken inderdaad veel baat te hebben bij borstvoeding: ze scoorden bijna 7 punten extra op een IQ-gemiddelde van 100. Geen borstvoeding betekende een verlaging, wel borstvoeding een verhoging. Bij kinderen met het ongunstige gen had borstvoeding geen effect.

We zien hier een overtuigend verschil én een mechanisme. Zijn we er dus?

Is borstvoeding een nodige of een voldoende voorwaarde voor een goed IQ volgens de onderzoekers?

55 Chloorpromazine lijkt te helpen bij het verlagen van de neiging tot het plegen van strafbare feiten.

Zeer fraai was daarbij het onderzoek dat Schachter samen met Latané heeft verricht. Aan deze studie heeft de volgende gedachte ten grondslag gelegen. Als het juist is dat er een verband bestaat tussen een laag aktivatieniveau van het autonome zenuwstelsel en de neiging om strafbare feiten te plegen, dan zouden mensen bij wie het aktivatieniveau verlaagd wordt, eerder tot dit soort gedragingen moeten overgaan, dan mensen met een normaal aktivatieniveau.

Om deze hypothese te toetsen brachten zij studenten op ingenieuze wijze in de gelegenheid om te frauderen bij een tentamen. De helft van deze studenten had voorafgaand aan het tentamen chloorpromazine ingenomen, de overige studenten hadden een placebo gekregen. De chloorpromazine diende hierbij om langs kunstmatige weg een verlaging van het aktivatieniveau van het autonome zenuwstelsel van de betrokken studenten te bewerkstelligen.

De resultaten van het onderzoek hielden een bevestiging van de theorie in. De studenten met het verlaagde aktivatieniveau bleken achteraf significant meer gebruik te hebben gemaakt van de mogelijkheid om te frauderen dan de studenten uit de placebo-groep.¹⁷

- a. Herschrijf de eerste alinea in de vorm $A \Rightarrow B$, waarbij A en B goede Nederlandse zinnen zijn.
- b. In je symbolisatie stelt A de te toetsen theorie voor. Het experiment bevestigde deze theorie. Maak duidelijk dat de **bevestiging** van de theorie niet hetzelfde is als een **logisch bewijs** van de theorie.
- 56 Een voorbeeld kan een stelling, vermoeden of theorie bevestigen of illustreren. Slechts één **tegen-voorbeeld** is voldoende om een theorie te weerleggen. Het *vermoeden van Goldbach* is dat ieder even getal te schrijven is als de som van twee priemgetallen.
- a. Geef drie voorbeelden van dit vermoeden.
- b. Wat zou één tegenvoorbeeld betekenen voor dit vermoeden?
- 57 In de volgende zinnen wordt gebruik gemaakt van verschillende voegwoorden. Schrijf deze zinnen in de taal van de logica. Laat daarmee duidelijk zien wat de conclusie is en onder welke voorwaarde die bereikt wordt.
- a. "Bezwaarschriften worden niet in behandeling genomen, tenzij deze tijdig worden ingeleverd."
- b. "U krijgt in de maand april bericht over eventuele belastingteruggave, mits u het daartoe strekkende aanvraagformulier tijdig indient."
- c. "Zij laat nooit verstek gaan, behalve als ze echt ziek is."
- d. "Je hebt recht op een versnapering, als je tenminste een consumptiebon bij je hebt."
- e. "Het leven is zo prachtig wanneer alles goed gaat."

58 De ziekte van Lyme wordt overgedragen door de teek. Hoewel het diertje onschuldig lijkt, is het in staat om de bacterie die de ziekte van Lyme veroorzaakt – de bacterie *Borrelia burgdorferi* – op mensen over te dragen. Zeker in de zomer en het najaar is het oppassen geblazen. Dan kan een gezellige wandeling door het bos, uitlopen op een regelrechte ramp. Je kunt er behoorlijk ziek van worden. In een folder over tekenbitten staat dat je het beste contact met je huisarts kunt opnemen als:

- een rode vlek op de huid ontstaat die steeds groter wordt (S_1);
- een griepig gevoel ontstaat met koorts of spierpijn (S_2);
- u dubbel gaat zien of een scheef aangezicht krijgt (S_3);
- u pijn, krachtverlies of tintelingen in uw ledematen krijgt (S_4);
- er gewrichtsklachten ontstaan (S_5).

a. We hebben de vijf symptomen genummerd. Ga na dat we dan krijgen:

$S_1 \Rightarrow D, S_2 \Rightarrow D, S_3 \Rightarrow D, S_4 \Rightarrow D$ en $S_5 \Rightarrow D$, waarin D de gang naar de dokter betekent.

We willen dit eenvoudiger schrijven in één samenstelling:

$$(S_1 \dots S_2 \dots S_3 \dots S_4 \dots S_5) \Rightarrow D$$

Maar nu ontstaat de vraag welke propositieletter we op de plaats van de stipjes moeten zetten.

b. Onderzoek wat het in de praktijk betekent als je voor een $\vee$ kiest.

c. Idem voor een $\wedge$.

d. Zijn deze resultaten realistisch?

e. Weet je een beter alternatief?

59 Yvonne Keuls schreef het boek *Mevrouw mijn moeder* over haar Indische wortels en de repatriëring naar Nederland. Hieronder volgt een citaat uit het boek.

Ik zat op de kweekschool van het Haags Genootschap in de Antonie Duyckstraat – ‘Kinderen zijn er altijd geweest, dus mijn dochters worden onderwijzeres’. Het was mijn eerste schooldag. Naast mij zat Willie H., tot op haar hemd nat, want ze was in de regen uit Leiden komen fietsen.

‘Als het nu straks nog zo regent, dan kan je wel bij mij slapen,’ zei ik.

‘Vindt je moeder dat goed?’ vroeg Willie verbaasd. ‘Ze kent me niet eens.’

Mijn verbazing was al net zo groot als de hare. ‘Waarom zou ze jou moeten kennen?’ vroeg ik. ‘Het regent toch?’

Ik sprak de logica uit van mijn moeder. Haar gastvrijheid was natuurlijk en ging niet uit van de persoon, maar van de omstandigheid. Wanneer het regent, geef je iemand onderdak. Wanneer de laatste tram niet is gehaald, wanneer er ruzie is thuis, geen gezeur, je geeft hem onderdak.

Beschrijf hoe de logica van de moeder verschilt van die van vriendin Willie.

- 60** Een groot ruimteschip is geland op een verre planeet. De dampkring heeft zoveel overeenkomst met die van de aarde, dat het dragen van een ruimtepak niet nodig is. De mensen kunnen zich weer eens echt aards bewegen. Na twee weken is er een aantal mensen met overwegend huidklachten. Gelukkig zijn die ongemakken na een dag of vier weer voorbij. Maar dan, ongeveer een maand na de landing, komen er mensen met ernstige kwalen: doofheid, blindheid en verlamming van de ledematen. Nu bleken de slachtoffers veertien dagen geleden allerlei klachten te hebben die misschien als symptomen van die ernstige kwalen beschouwd kunnen worden. Deze symptomen waren: gereduceerde transpiratie, ontkleuring van de huid, sterke haaruitval en leerachtige huid.

De artsen beschikken eigenlijk over te weinig waarnemingen over het verband tussen symptomen en kwalen. En het weinige dat ze weten lijkt wel een tegentrijdig. Maar toch maken ze een voorlopige balans op:

- I. Als iemand doof wordt, dan heeft hij gereduceerde transpiratie en geen ontcleuring van de huid.
- II. Als iemand niet doof wordt, maar wel verlamming van de ledematen krijgt, dan heeft hij een leerachtige huid.
- III. Als iemand niet blind wordt, maar wel een verlamming van de ledematen krijgt, dan heeft hij gereduceerde transpiratie en sterke haaruitval.
- IV. Als iemand blind wordt en dat samen gaat met doofheid of met normaal blijven van de ledematen, dan heeft hij geen gereduceerde transpiratie, maar wel een leerachtige huid.

Om deze regels in te voeren in de boordcomputer, moeten ze eerst vertaald worden in de taal van de logica.

- a. Doe dat door voor de kwalen te gebruiken K_1 , K_2 en K_3 en voor de symptomen S_1 , S_2 , S_3 , en S_4 .
- b. Iemand heeft ontcleuring van de huid, maar beslist geen sterke haaruitval en ook geen leerachtige huid. De transpiratie is een twijfelgeval. Onderzoek van de computer kan meedelen over de eveneutele kwalen van de deze ruimtevaarder, als alleen de regels I, II en III gebruikt worden.
- c. Als de regels I, II en III aangevuld worden met regel IV, dan ontstaan er tegenstrijdigheden. Toon dat aan.

- 61 a.** Beredeneer of laat met waarheidstafels zien dat equivalent (zie p. 15) zijn:

$$A \Rightarrow B \text{ en } \neg A \vee B \text{ en } \neg B \Rightarrow \neg A.$$

- b. Illustreer met een voorbeeld dat deze drie samenstellingen equivalent zijn door het voorbeeld op drie manieren te beschrijven.
- c. Gebruik je voorbeeld om aan te tonen dat $A \Rightarrow B$ *niet* equivalent is met $B \Rightarrow A$.
- d. Onderzoek of $A \Rightarrow B$ en $\neg A \Rightarrow \neg B$ equivalentie zijn.

62 Een redeneervorm in de wiskunde is het bewijs uit het ongerijmde.

Hieronder volgen een stelling en een bewijs als voorbeeld.

Stelling: Als p en q twee priemgetallen zijn (en $p \neq q$), dan is p/q geen geheel getal.

Bewijs: Stel p/q is wel een geheel getal, dan is q een deler van p . Maar dat kan niet, want p is priem.

a. Laat eerst met een voorbeeld zien van de stelling.

b. Geef in eigen woorden aan wat ‘een bewijs uit het ongerijmde’ zou kunnen betekenen.

63 Een bewijs uit het ongerijmde van Simon Stevin: de cloodcrans.

De stelling luidt: *Twee lichamen op een hellend vlak houden elkaar in evenwicht als hun gewichten zich verhouden als de lengte van de vlakken.*

Het bewijs van Stevin verloopt als volgt. Gegeven is een driehoek (zie de illustratie hiernaast). Om de driehoek hangt een kralensnoer waarvan de kralen even zwaar zijn en op gelijke afstand liggen. Het snoer kan zich vrij bewegen.

Omdat de kralen op gelijke afstand van elkaar liggen, is het aantal kralen op elk van beide schuine zijden evenredig met de lengte van die zijden.

Stel dat de kralen elkaar *niet* in evenwicht houden. Dan moet het kralensnoer in beweging komen en kunnen de kralen precies één plaats opschuiven. Daarmee is dan weer de beginsituatie bereikt. Maar dat betekent dat het snoer voortdurend in beweging blijft (Stevin: “de cloten sullen uyt haer selven een eeuwich roersel maken, t’welck valsch is”).

De onmogelijke conclusie dat de kralen in voortdurende beweging raken, is het gevolg van onze aanname dat het snoer niet in evenwicht zou zijn. Dus moet die aanname fout zijn. Stevin concludeert dat het kralensnoer in rust blijft en dus



Onderzoek wat de logische vorm is van deze redenering uit het ongerijmde. Benoem daarbij de proposities die een rol spelen in de redenering en geef in een schema aan welke hier-uit-volgt redeneringen of welke equivalenties een rol spelen.

Een Belg en een Nederlander zitten samen in de trein, de Belg leest een boek over logica. Logica, vraagt de Nederlander, wat is logica? Wel, zegt de Belg, heb je goudvissen? Ja. Wel, dan houd je van dieren. Ja, dat klopt. Wel, als je van dieren houdt, houd je ook van mensen. Ja, dat klopt ook. En als je van mensen houdt, dan houd je ook van kinderen. Ja, ik houd van kinderen. Wel, en als je van kinderen houdt, heb je natuurlijk ook kinderen. Ja, dat klopt. Wel, en als je kinderen hebt, ben je getrouwd. Ja, dat klopt ook. Wel, als je getrouwd bent, ben je geen homo. Nee, zegt de Nederlander, ik ben geen homo! Wel, zegt de Belg, dat is logica.

Stapt de Belg uit en komt er een andere Nederlander tegenover de eerste zitten. Nou, zegt Nederlander 1, er was net een Belg, en die las een boek over logica, kei interessant! Logica, vraagt Nederlander 2, wat is dat? Nou, heb je goudvissen? Nee. Wel, dan ben je een homo.

Samenvatting

In dit hoofdstuk zijn een aantal nieuwe begrippen behandeld:

- het onderscheid tussen een nodige en een voldoende voorwaarde
- het verschil tussen een voorbeeld (een illustratie) en een tegenvoorbeeld (weerlegt een theorie)
- een bewijs uit het ongerijmde (neem het tegengestelde aan en laat zien dat dit tot een onmogelijke situatie leidt)

Logisch redeneren

deel 2

Onderwerpen:

- Kwantoren en Venn-diagrammen
- Contradicties en paradoxen
- Axiomatische systemen en grammatica's

Hoofdstuk 7 Uitbreiding met kwantoren

- 1 Zie het krantenartikel hiernaast. Neem aan dat die kop letterlijk waar is. Je bent er achtergekomen dat Nico een Amsterdammer is. Wat kun je zeggen over de eerlijkheid van Nico?

Amsterdammer niet eerlijk

Van een verslaggever

AMSTERDAM – Amsterdammers zijn geen eerlijke mensen. Slechts één op de twee zal een op straat gevonden mobieltje teruggeven aan de eigenaar.

Verslaggevers van het blad *Reader's Digest* lieten in grote steden

van 32 landen in totaal 960 mobiele telefoons achter. Van de dertig stuks die ze in Amsterdam lieten liggen, werden er veertien teruggebracht. Alleen in Hongkong en Kuala Lumpur was dat minder: dertien stuks.

Toeristen in Amsterdam waren eerlijker dan de bevolking. Tot vier keer toe pakte een buitenlandse

bezoeker de telefoon van straat op, die steeds werd geretourneerd. Mannen gaven acht van de 21 gevonden mobieltjes terug, terwijl zes van de negen vrouwen die een telefoon vonden het apparaat inleverden.

De Sloveense stad Ljubljana is het eerlijkst: 29 van de dertig telefoons werden teruggegeven.

Als je de krantenkop letterlijk neemt, dan zeg je eigenlijk:
“Alle Amsterdammers zijn niet eerlijk.”

Zulke proposities met *alle* of synoniemen daarvan, komen veel voor. Daarom is er een speciale notatie ingevoerd:

$$\forall x[x \text{ is een Amsterdammer} \Rightarrow x \text{ is Oneerlijk}]$$

Dit kun je lezen als:

voor alle x -en (uit een bepaald domein) geldt: als x een Amsterdammer is, dan is x Oneerlijk.

Nog korter:

$$\forall x[A(x) \Rightarrow O(x)]$$

Met de voor de hand liggende afkortingen. Hierbij moet het domein bekend zijn. Bijvoorbeeld de inwoners van de randstad.

- 2 Geef nog een paar voorbeelden van bruikbare domeinen voor bovenstaande logische zin.

$\forall$ heet de **Voor-Alle-kwantor** (of ook wel de al-kwantor). Het begrip kwantor zegt iets over aantallen.

Terug naar de krantenkop. Het artikel beschrijft een experiment. In enkele Europese steden is een aantal mobieltjes neergelegd alsof iemand ze verloren is. Vervolgens telde men het aantal mobieltjes dat werd teruggebracht nadat iemand er één gevonden had. Daarbij scoorde Amsterdam het laagst. Aardig detail: onder de terugbrengers in Amsterdam bevonden zich veel buitenlanders.

- 3 a. Wat is nu je commentaar op bovenstaande de krantenkop?

b. Geef ook commentaar op het experiment.

- 4 Voor de balans hiernaast een stukje over Rotterdammers.

Bij deze opdracht heb je even geen kwantoren nodig.

Geef met behulp van enkele afkortingen de uitgangspunten in de redenering. Om de redenering compleet te krijgen moet je enkele *verzwegen premissen* boven water halen. Behandel die net zoals de andere. Stel nu op overzichtelijke wijze de volledige redenering op.

Rotterdammer leeft korter

Van onze Rotterdamse
redactie

ROTTERDAM, vrijdag
Rotterdammers leven gemiddeld anderhalf jaar korter dan andere Nederlanders.

De inwoners van de Maasstad lijden onder de concentratie fijn stof in de Rotterdamse lucht, die 13 procent hoger ligt dan in de rest van het land. Bovendien zijn er relatief meer rokers, hebben de inwoners vaker last van overgewicht en bewegen ze te weinig. Dat blijkt uit onderzoek van het Erasmus Medisch Centrum. Volgens onderzoeker Lex Burdorf zitten veel Rotterdammers in de bijstand en zijn ze laaggeschoold. Hierdoor krijgen ze te maken met slechtere huisvesting en arbeidsomstandigheden.

Kwantoren worden ook gebruikt in de taalkunde. Uit het boek *Betekenis en Taalstructuur* van de Jong, Oversteegen en Verkuyl zullen we een aantal voorbeelden gebruiken. Het boek is bestemd voor de studie taalwetenschap en verwante vakgebieden, waarin de interpretatie van taalvormen een belangrijke rol speelt. In het boek staat het volgende voorbeeld:

(25)	a.	Erica roskamt alle paarden	a'. $\forall x [P(x) \rightarrow Ro(e,x)]$
	b.	Dirk geeft alle paarden aan Erica	b'. $\forall x [P(x) \rightarrow Ge(d,x,e)]$
	c.	Iedereen zag Dirk	c'. $\forall x [Me(x) \rightarrow Zi(x,d)]$
	d.	Erica gooide alle ballen naar Dirk	d'. $\forall x [Ba(x) \rightarrow G(e,x,d)]$

In (25c) is de kwantor beperkt tot mensen. Dit houdt voor B in dat Dirk en Erica beiden Dirk zagen: Dirk zag dus zichzelf. Het gebruik van *iedereen* voor twee personen is hier wat ongewoon, maar het is wel correct.

Bekijk de zinnen a, b, c en d. De inhoud lijkt erg gekunsteld. Bedenk dat het hier gaat om de structuur van de zinnen.

5 Een puzzeltje vooraf:

- In de symbolisaties a', b', c, ' en d' komen een aantal afkortingen voor. Maak daarvoor een verbaalsleutel.
- Bestudeer de paren zinnen en bedek een symbolische vorm en probeer die terug te vinden uit de tekst. Doe het zelfde met enkele gewone zinnen.
- Schrijf zelf twee zinnen op die het gebruik van de al-kwantor illustreren.

6 Amsterdammers zijn niet eerlijk.

- Op de stippen kan een synoniem van alle staan. Geef enkele voorbeelden.
- Op de stippen kunnen ook andere uitdrukkingen over aantallen ingevuld worden. De betekenis van de zin verandert dan. Geef hiervan enkele voorbeelden. (Je mag de zin aanpassen.)

In de volgende opgave introduceren we nog een kwantor.

7 Een groep mensen zit in zaal 24 (niet roken). Je komt binnen en merkt op:
"Iemand heeft hier gerookt."

- Hoeveel personen komen in aanmerking?
- Kunnen er twee personen gerookt hebben?
- Kan er één persoon gerookt hebben?
- Kan niemand van deze groep gerookt hebben?
- Kan de hele groep gerookt hebben?

De oorspronkelijke zin kan zo gelezen worden:

"Er bestaat minstens één persoon die gerookt heeft."

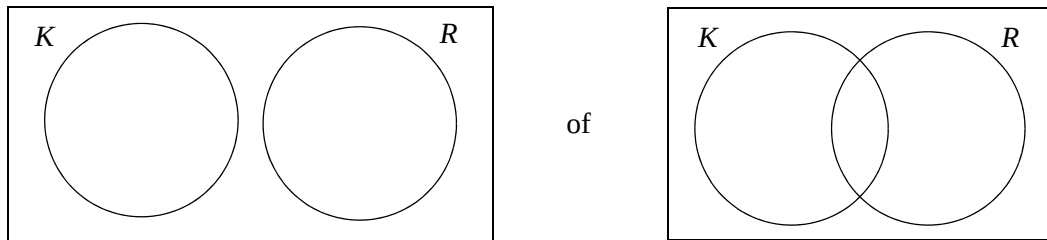
In symbolische taal schrijft men:

$$\exists x R(x)$$

Stel persoon *a* heeft gerookt. Dan geldt $x = a$, dus $R(a)$. En dat is weer een vertrouwde propositie.

$\exists$ heet de **Er-Is-kwantor** (of ook wel de existentiële-kwantor).

De mensen die zich in de kamer bevinden vormen het domein waaruit x gekozen wordt. Het domein kan, indien gewenst, in de formule worden aangeduid: $\exists x(K(x) \wedge R(x))$. Dan is de volgende grafische voorstelling voor de hand liggend:

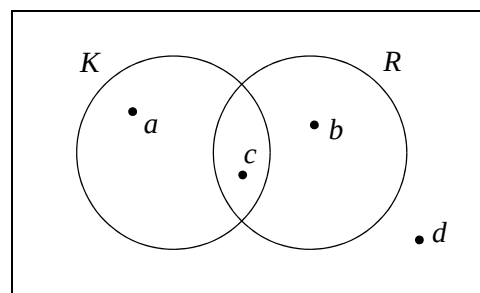


Deze tekeningen heten **Venn-diagrammen**.

Binnen de cirkel K bevinden zich alle in de kamer aanwezige personen. Binnen R alle rokers (bijv. in het gebouw).

8 Waarom past het tweede plaatje beter bij het verhaal?

9 a. In het plaatje hiernaast zijn een aantal elementen (personen) getekend. Welke eigenschappen hebben de elementen a , b , c en d ?



b. Een mogelijke notatie is $K(a) \wedge \neg R(a)$.

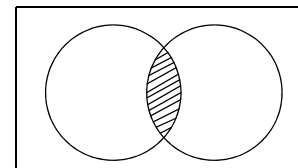
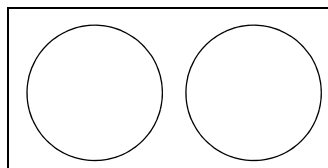
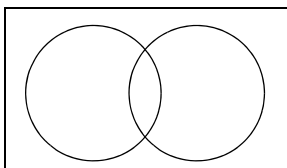
Of in woorden:

a bevindt zich in de kamer, maar is geen roker.

Schrijf ook zo'n logisch zin voor de elementen b , c en d .

Bij het tekenen van Venn-diagrammen zijn enkele afspraken:

- De grote rechthoekige omheining laat men vaak weg. Toch kan die nuttig zijn.
- Stel dat in de loop van de opgave blijkt dat K en R geen gemeenschappelijk element hebben en je hebt al het linker diagram getekend, dan kun je opnieuw beginnen met het middelste diagram, maar handiger is om aan te geven dat de doorsnede leeg is zoals in het rechterdiagram.



Venn-diagrammen beschrijven eigenschappen van verzamelingen elementen. In de wiskunde is verzamelingenleer een aparte tak van sport.

10 Hieronder zie je weer een kopie uit het taalkunde boek.

a. Erica roskamt een paard	c. $\exists x[P(x) \wedge Ro(e,x)]$
a. Dirk geeft een paard aan Erica	a'. $\exists x[P(x) \wedge Ge(d,x,e)]$
b. Dirk geeft Albert aan iemand	b'. $\exists x[Mc(x) \wedge Ge(d,a,x)]$
c. Erica zag sommige paarden	c'. $\exists x[P(x) \wedge Zi(e,x)]$
d. Erica gooit een bal naar Dirk	d'. $\exists x[Ba(x) \wedge G(e,x,d)]$

Bestudeer ook deze paren van zinnen.

11 Bij het zoeken op internet kun je meestal gebruik maken van AND en OR.

Op woensdag 9 april 2008 gaf dat de volgende resultaten:

Amsterdammer:	341.000 hits.
leugenaar:	174.000 hits
Amsterdammer AND leugenaar:	39.000 hits
Amsterdammer OR leugenaar:	476.000 hits

Verklaar deze getallen.*

In een juridische handboek staat het volgende over zoeken op internet:

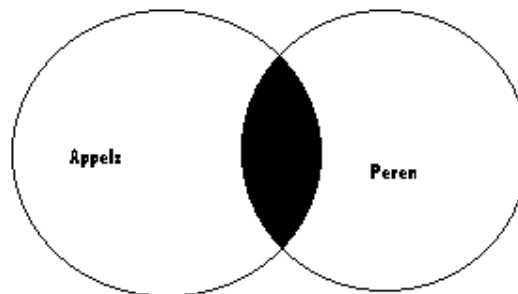
Booleaanse operatoren zijn logische zoekoperatoren, genoemd naar de Engelse wiskundige George Boole (1816-1854). Met behulp van de operatoren AND, OR en NOT kunnen relaties tussen zoektermen worden aangegeven, waardoor er preciezer gezocht kan worden.

AND = alle zoektermen gecombineerd met AND moeten in een pagina voorkomen.

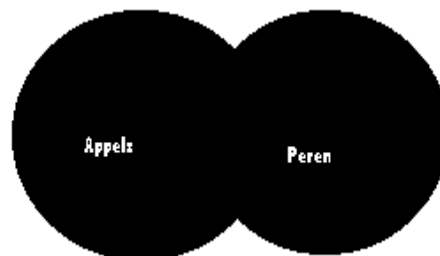
OR = bij zoektermen gecombineerd met OR hoeft maar één van de termen voor te komen.

NOT = met NOT geef je aan dat een zoekterm niet in een pagina voor mag komen.

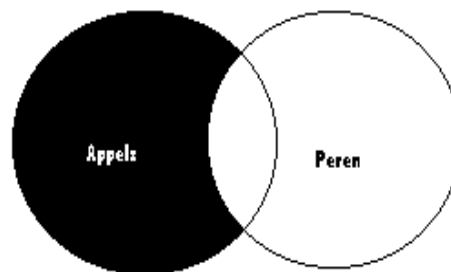
Bijvoorbeeld de zoekvraag: **appels AND peren** heeft als resultaat pagina's waarin de termen appels en peren beide voorkomen. In onderstaande figuur is dit geïllustreerd.



Zoekvraag: **appels OR peren**. Resultaat: pagina's waarin in ieder geval één van beide termen voorkomt. Pagina's waarin beide termen voorkomen behoren natuurlijk ook tot de resultaten.



Zoekvraag: **appels NOT peren**. Resultaat: pagina's waarin wel de term appels voorkomt, maar niet de term peren.



AltaVista heeft een afwijkende not-operator. Daar dien je AND NOT te gebruiken om een term uit te sluiten. Bovenstaande zoekvraag zou bij AltaVista als volgt geformuleerd moeten worden: **appels AND NOT peren**.

* Zie ook "De Google-dans" in het tijdschrift Pythagoras (nummer 1, september 2008).

12 Verderop in het juridische handboek staat:

Je kunt de verschillende operatoren ook combineren in één zoekvraag. Zoek je bijvoorbeeld informatie over campings op Terschelling of Ameland, dan zou je zoekvraag er zo uit kunnen zien:

camping AND (Ameland OR Terschelling)

Het trefwoord camping moet voorkomen, in combinatie met of Ameland, of Terschelling, of beide. Gebruik je de OR operator in combinatie met AND of NOT, plaats dan de OR-verklaring altijd tussen haakjes.

Laat met een voorbeeld zien waarom de haakjes nodig zijn.

13 In plaats van de operatoren AND en NOT maken sommige zoekmachines gebruik van het plusteken (+) en het minteken (-). Een plusteken (+) direct voor een trefwoord betekent dat dit trefwoord in een pagina voor moet komen. Een minteken (-) direct voor een trefwoord betekent dat dit trefwoord niet voor mag komen.

Schrijf de zoekvraag: **+appels +peren -bananen** met AND, OR en NOT

14 Logische redeneringen zijn vaak een onderdeel van intelligentie tests!

Zie bijvoorbeeld:

<http://www.123test.nl/iq-test/index.php#vragengroep-0>

Onderstaande vragen komen uit zo'n intelligentietest.

a. Welke conclusies kun je met *echte zekerheid* trekken bijde twee gegeven zinnen?

1. Geen van de Eskimo's is een drinker.
2. Alle dichters zijn drinkers.

Mogelijke conclusies:

- Alle dichters zijn Eskimo's.
- Sommige Eskimo's zijn geen drinkers.
- Sommige dichters zijn Eskimo's
- Sommige niet drinkers zijn dichters
- Geen stelling is zeker.

b. Welke conclusies kun je met *echte zekerheid* trekken bijde twee gegeven zinnen?

1. Alle voetballers zijn gezellige mensen.
2. Sommige voetballers zijn lang.

Mogelijke conclusies:

- Geen van de gezellige mensen is lang.
- Alle gezellige mensen zijn klein.
- Sommige gezellige mensen zijn lang.
- Geen voetballer is lang.
- Geen stelling is zeker.

Hoofdstuk 8 Gemengde opdrachten en wiskundige verdiepingen

Hierkomen gemengde opdrachten met kwantoren en Venn-diagrammen.
Ook een aantal wiskundige opdrachten!

- 15 Bekijk de volgende uitspraak:
“Alle ongelovigen zijn honden.”

Deze uitspraak is waar zolang je met deze opgave bezig bent.
Wat kun je zeggen over de volgende uitspraken:

- a. Er zijn honden die ongelovig zijn.
- b. Alle gelovigen zijn honden.
- c. Er zijn gelovigen die geen hond zijn.
- d. Als iemand geen hond is, dan is hij niet gelovig.

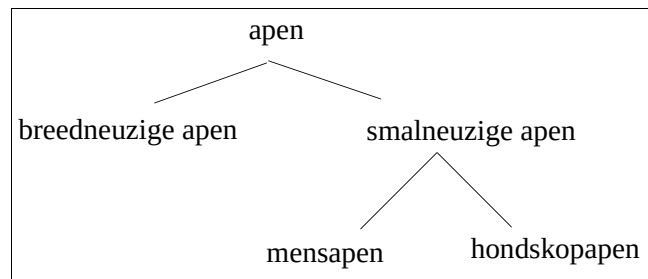
- 16 Het domein bestaat uit de gebouwen in een stad.
De eigenschap waar het om draait is het hebben van drie woonlagen, afgekort $D(x)$.
Door de al-kwantor te gebruiken kunnen we onderstaande proposities maken.
Geef vertalingen van die proposities in normaal Nederlands.

- a. $\neg \forall x[D(x)]$
- b. $\neg \forall x[\neg D(x)]$
- c. $\forall x[\neg D(x)]$
- d. Doe hetzelfde met $\exists x[D(x)]$.
Schrijf de drie logische zinnen en hun vertalingen in het Nederlands.
- e. Vergelijk de uitkomsten bij de twee verschillende kwantoren. Wat merk je op?

- 17 De verzameling zoogdieren omvat de verzameling apen.
De apen worden onderverdeeld volgens dit schema:

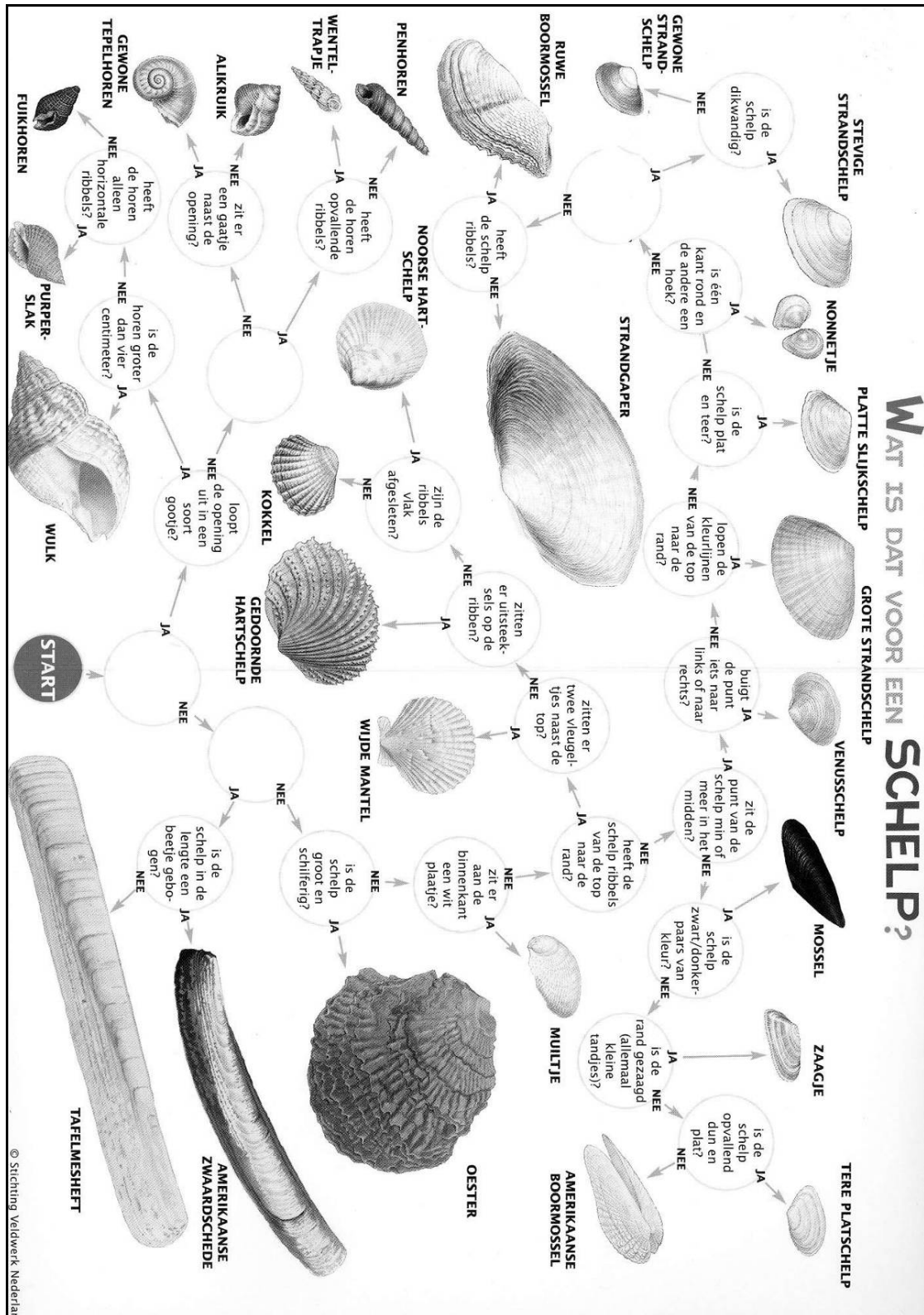
Schrijf in de taal van de logica:

Alle mensapen zijn apen.
Er zijn smalneuzige mensapen.
Een breedneuzige aap is geen hondskapaap.
Niet alle apen zijn breedneuzig



18 Hieronder zie je een zoekkaart voor schelpen.

Formuleer zelf drie zinnen over de verdeling van deze verzameling schelpen. Bedenk daarbij eventueel namen voor deelverzamelingen (zoals de breedneuzigen in bovenstaande opgave).



Zie eventueel ook: <http://www.20q.net/> (de website die met 20 vragen achterhaald wat jij in gedachten hebt).

19 Gegeven is de functie $f(x) = 1/6 x^3 + 1/2 x^2 - 2/3 x + 1$

Er wordt beweerd dat als je voor x een geheel getal invult, $f(x)$ ook weer een geheel getal is.

Een groot aantal waarden van x wordt over de klas verdeeld.

Het blijkt waarachter te kloppen voor al die waarden!

Een leerling zegt: “het lijkt me sterk dat de bewering onwaar is, dus ik teken ervoor.”

De docent(e): “ik ben niet overtuigd.”

a. Maak het verschil van mening duidelijk met behulp van logische zinnen met kwantoren.

b. Kun jij beslissen welke van de twee zinnen waar is?

20 De punten A , B en C zijn de hoekpunten van een driehoek.

x is een punt binnen deze driehoek.

a. Is deze uitspraak altijd waar?

$$\exists x[xA = xB = xC]$$

(met xA wordt bedoeld: de afstand van x tot A ; teken een driehoek en bedenk eerst waar de punten liggen met gelijke afstand tot A en B)

b. Kun je in gewone bewoordingen de uitspraak verscherpen?

c. Hoe worden de antwoorden van **a** en **b** als x zich ook in de ruimte kan bevinden?

21 Een partij zaden is ingedeeld naar zes eigenschappen.

Eigenschappen W , G en Z sluiten elkaar uit.

Dat is ook het geval voor S , B en R .

a. Onderzoek de waarheid van de volgende beweringen.

- $\exists x[W(x) \wedge B(x)]$
- $\neg \exists x[W(x) \wedge \neg B(x)]$
- $\forall x[B(x) \Rightarrow G(x)]$
- $\forall x[\neg B(x) \wedge (W(x) \vee Z(x))]$
- $\exists x[B(x) \Rightarrow W(x)]$

	<u>W</u> it	<u>G</u> rijs	<u>Z</u> wart
<u>S</u> tekelig	14	6	10
<u>B</u> ehaard	0	7	0
<u>R</u> impelig	12	6	8

b. Symboliseer onderstaande uitspraken in de taal van de logica.

- Alle zwarte zaden zijn rimpelig.
- Niet alle stekelige zaden zijn grijs.
- Alle stekelige zaden zijn niet wit.
- Er zijn geen behaarde zwarte zaden.
- Er zijn geen stekelige grijze zaden.

22 Lees onderstaand artikel. Waar zit jij in het Venn-diagram?

Tuurlijk bestaat Nederland

Een mening inzake de Nederlandse identiteit is één ding. Helder voor het voetlicht krijgen hoe het zaakje in elkaar steekt, is iets anders. Al dat gedoe vanaf de Batavieren, zie het eens bij een buitenlander op de radar te krijgen. Die leest in de krant over 'the Aruban Joran van der Sloot, from The Netherlands', over 'Bruxelles, European capital in the Low Countries', en denkt dat Peter Stuyvesant uit Holland (hoofdstad van Kopenhagen) kwam. Daarom hierbij een plaatje met alle internationaal courante namen voor onze

gewesten, geordend en afgebakend ten opzichte van concurrerende omstreken. Niet schrikken van het dr. Clavangehalte: het is een simpel 'Venn-diagram' om hele en deelverzamelingen te illustreren. (Op verzoek verkrijgbaar in het Engels.)

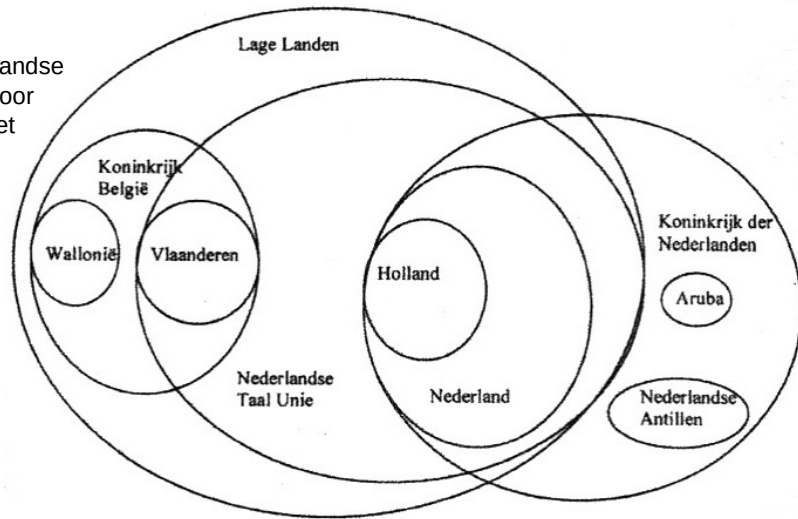
Zo kunt u in de marge van een vergadering of tijdens een wandeling langs culturele hoogtepunten een buitenlander uitleggen waarom sommige politici vinden dat Arubanen of Walen niet deugen. Ze horen er niet bij, want ze vallen buiten de cultuurgrens van de Taalunie. En ook zijn de gradaties van arrogantie ineens duidelijk: hoe meer cirkels om je identiteit, hoe hoger je status. De volgorde is Hollanders, Vlamingen, Nederlanders, Belgen. Walen en Antillianen doen wat minder mee. Of u wijst op de kleine cirkels en de heel grote cirkel, die allemaal erg oud zijn. Eenheden als Holland, Vlaanderen, Aruba en de Lage Landen gaan al sinds mensenheugenis mee, al verandert de bevolking soms wat van samenstelling.

O, zegt dan de oplettende bezoeker, het zijn de nieuwe cirkels – de koninkrijken van de negentiende eeuw – waarin de problemen spelen, is het niet? Precies, zegt u, pubers zorgen altijd voor moeilijkheden. In die cirkels maken we onze wetten en dat houdt ze jong.

En, zegt dan de waakzame vreemdeling weer, zijn het niet de mensen in de binnenste cirkels die zich druk maken om het verlies van identiteit? Het is toch in Holland en Vlaanderen waar mensen willen dat de vaderlandse geschiedenis er weer toe doet? Ja logisch, zegt u, want zij hebben in hun eigen ogen het meest te verliezen. En dan kunt u zelf wat puntjes zetten in de tekening, bijvoorbeeld waar Ayaan Hirsi Ali staat of stond, en dat het vanuit het Koninkrijk der Nederlanden misschien een grote stap is naar Frankrijk, maar vanuit de Lage Landen helemaal niet.

Wanneer de vreemdeling aanhoudt en vraagt welke cirkel precies groter, kleiner of belangrijker moet worden van de mensen die trots op Nederland willen zijn, antwoordt u in alle eerlijkheid dat niet te weten. Daarna gaat u samen naar de bar.

© Menno Hurenkamp / De Groene Amsterdammer - 15-02-2008



23 Welke kwantoren kunnen op de stippeltjes staan zodat het een ware uitspraak wordt?

a. ... $x[2x + 3 = 4x - 1]$

b. ... $x[2x + 3 = 2(x + 1) + 1]$

c. ... $x[(x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3)]$

24 Onderzoek de volgende proposities op waarheid.

- a. $\forall(x, y)[(x + y = \text{even}) \Rightarrow (x \times y = \text{oneven})]$
- b. $\exists(x, y)[(x + y = \text{even}) \Rightarrow (x \times y = \text{oneven})]$
- c. $\forall(x, y)[(x \times y = \text{oneven}) \Rightarrow (x + y = \text{even})]$
- d. $\exists(x, y)[(x \times y = \text{oneven}) \Rightarrow (x + y = \text{even})]$
- e. $\forall x[((x = a + b) \wedge \text{Priem}(a) \wedge \text{Priem}(b)) \Rightarrow (x = \text{even})]$
- f. $\forall x[(x = \text{even}) \Rightarrow ((x = a + b) \wedge \text{Priem}(a) \wedge \text{Priem}(b))]$

25 Onderzoek de volgende proposities op waarheid.

Het domein bestaat uit de getallenparen (x, y) .

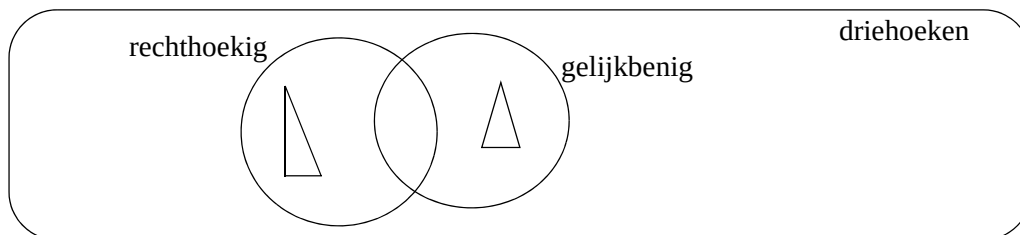
- a. $\exists(x, y)[(2x - y = 7) \wedge (3x + 2y = 28)]$
- b. $\exists(x, y)[(2x - y = 7) \wedge (4x - 2y = 17)]$
- c. $\forall(x, y)[(2x - y = 7) \Rightarrow (6x - 3y = 21)]$

26 De volgende logische zinnen gaan over veelhoeken die vierhoeken (V) zijn en waarvan diagonalen elkaar middendoor kunnen snijden (DM). Onderzoek de volgende uitspraken op waarheid.

- a. $\forall x[V(x) \Rightarrow DM(x)]$
- b. $\forall x[V(x) \wedge DM(x)]$
- c. $\forall x[V(x) \vee DM(x)]$
- d. $\forall x[DM(x) \vee \neg V(x)]$

27 Er zijn verschillende soorten driehoeken. Hieronder is een begin gemaakt van een Venn-diagram.

Teken dit begin in je schrift en voeg nog een paar verzamelingen toe (in ieder geval die van de gelijkzijdige driehoeken) en teken op iedere plek in het diagram een voorbeeld.

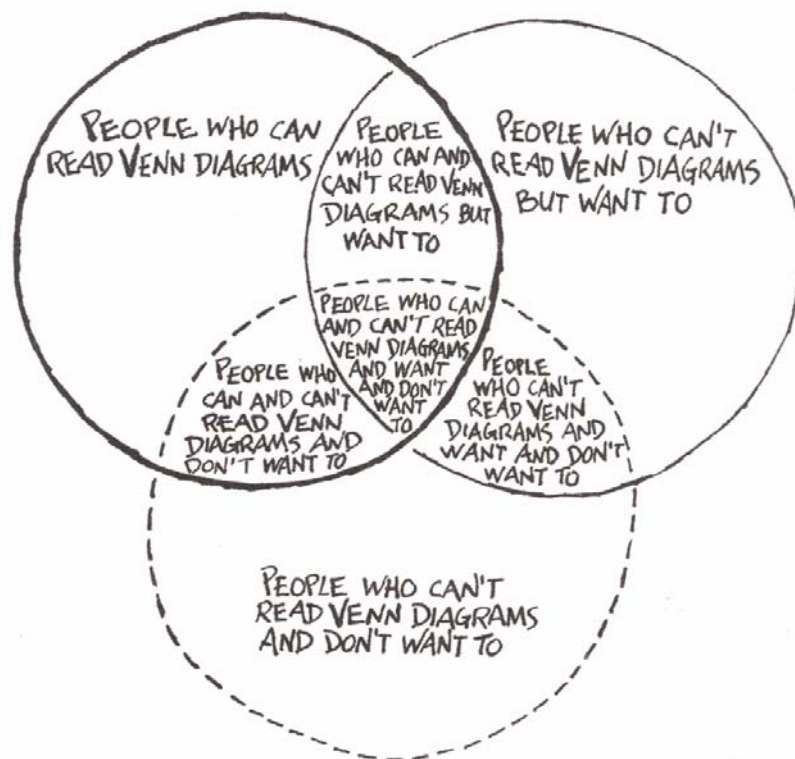


28 Onderzoek de volgende uitspraken en verbeter ze als ze in deze vorm niet waar zijn.

- a. "Het getal a is een drievoud mits a niet even is."
- b. "Als $(x + 1) \cdot (x - 2) = 0$, dan $x = 2$."
- c. "De lengte is drie, want de lengte in het kwadraat is negen en de lengte moet groter dan nul zijn."
- d. "Stel p is even en q is oneven en p kun je delen door q en $p/q = r$. Dan is r ook oneven, want als r even zou zijn, dan zou $r \cdot q$ oneven zijn, terwijl $r \cdot q$ gelijk moet zijn aan p en die was even."

Samenvatting

Je hebt 7 soorten mensen...

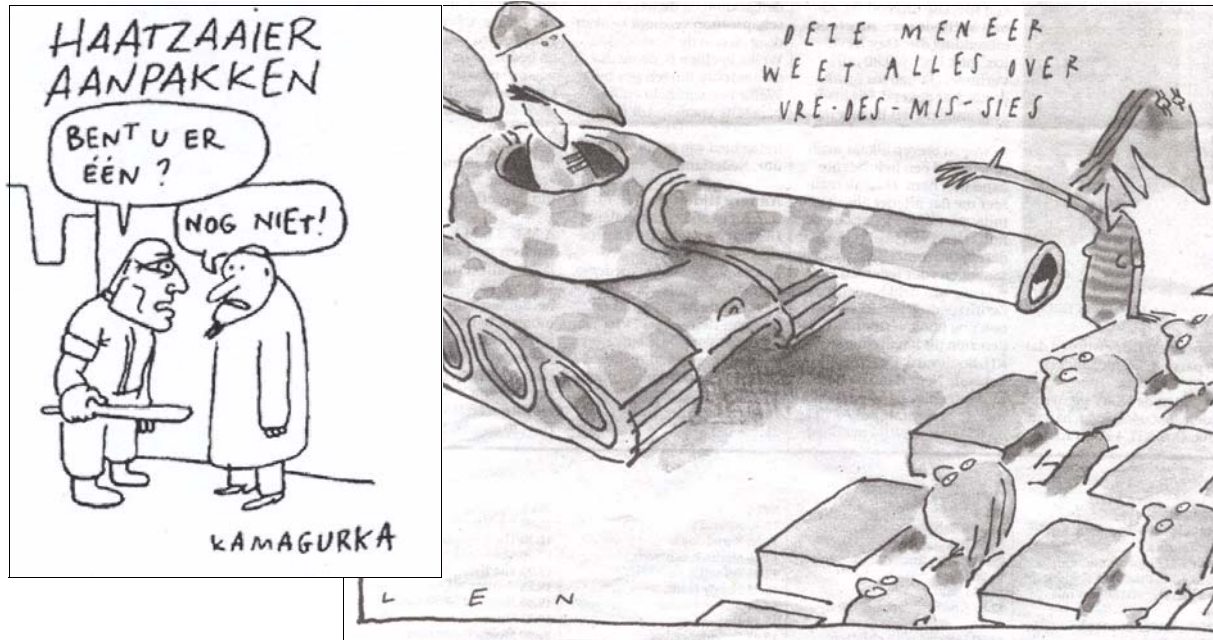


Waar zit jij nu?

Hoofdstuk 9 Tautologie, contradictie en paradox

In de titel van dit hoofdstuk staan drie termen die voorkomen in klassieke teksten over logica. Enkele historische logici zullen in dit hoofdstuk de revue passeren. Eerst volgen drie opgaven die bedoeld zijn om zelf een idee te krijgen waarover de termen gaan en welke logische problemen ermee geïdentificeerd worden.

29 Als je onderstaande plaatjes logisch bekijkt, dan is er iets vreemds aan de hand. Probeer dat onder woorden te brengen.



30 Twee uitspraken over een wedstrijd:

“Wij hebben gewonnen en zij hebben verloren.”

“Wij schakelen ze uit, we maken ze in en we verpletteren ze.”

Beschrijf de twee uitspraken met een combinatie van proposities en geef ‘logisch’ commentaar op beide zinnen.

31 Dichterlijke taal:

“Want wat dood is is dood, maar wat vermoord is leeft voort.” (M. Nijhoff)

“Ik verga en duur.” (Ellen Warmond)

“Sinds je er bent, ben ik weer alleen.” (Ellen Warmond)

“The more I give to thee, the more I have.” (Shakespeare)

“I am not who I am.”

“Voorspellen is moeilijk, zeker als het om de toekomst gaat.” (Wim Kan)

Deze dichters kramen geen onzin uit. Waarom dan toch deze uitspraken? Bedenk zinnige betekenissen van de uitspraken.

In de eerste opgave van dit hoofdstuk staan twee strips. Een woord of begrip is door een netwerk verbonden met andere woorden. Daardoor kan een woord een ander woord oproepen. Hier kan ‘tank’ leiden tot ‘oorlog’. Zo ontstaat de tegenstelling oorlog-vrede en dat is de bedoeling van de cartoonist. De andere strip gaat over het voorkomen van het zaaien van haat. De strip laat zien dat het aanpakken van haatzaaiers juist leidt tot haatzaaien: *als P dan niet Q* staat tegenover *als P dan Q*.

Bij de tweede opgave zijn meerdere symbolisaties mogelijk. Eigenlijk komt het telkens neer op $A \wedge A$ & $A \wedge \dots$. In deze gevallen is iedere vorm equivalent met A (we hebben gewonnen). Vooral bij de tweede zin is gebruik gemaakt van een recept uit de retoriek (de kunst van het overtuigen), namelijk: herhaling met toenemende sterkte.

In de derde opgave lijken de uitspraken op het eerste gezicht ‘dubbelop’ of een ‘tegenstelling’. Bij nadere beschouwing is dat echter anders te interpreteren doordat bijvoorbeeld het woord ‘dood’ in verschillende netwerken kan voorkomen. Deze methode van verrassing daagt uit om de zin nog eens te lezen en om de lezer beter te raken. Een ‘dubbelop’ en een ‘tegenstelling’ blijven beter in ons brein hangen. En dat is natuurlijk de bedoeling van de auteur: aansporen tot verder lezen.

Kunnen we met onze logica enige greep krijgen op deze verschijnselen. Bekijk eens de volgende waarheidstabellen:

A	B	$A \Rightarrow (A \vee B)$	$A \vee (A \wedge B)$	$(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0
		(1)	(2)	(3)

Er zijn dus proposities die altijd waar zijn (1), en die nooit waar zijn (3).

Een propositie die altijd waar is, noemen we een **tautologie** en een propositie die nooit waar is een **contradictie** (tegenstelling).

32 Een oefening voor de twee soorten proposities. Bepaal voor elk van de onderstaande zes of het een contradictie of een tautologie is.

$$A \vee A \qquad A \vee \neg A$$

$$A \wedge A \qquad A \wedge \neg A$$

$$A \Rightarrow A \qquad A \Rightarrow \neg A$$

We missen in de waarheidstabellen proposities die op het eerste gezicht een contradictie vormen, maar het bij doordenken niet blijken te zijn.

33 Het citaat van Nijhoff:

“Want wat dood is is dood, maar wat vermoord is leeft voort.”

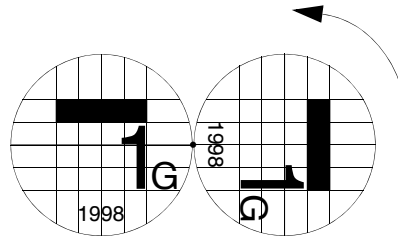
In het tweede deel staat zo’n schijncontradictie.

a. Wat is de contradictie?

b. Waarom is het een schijncontradictie?

De officiële naam voor een schijncontradictie is **paradox**. Soms wordt het begrip uitgebreid tot situaties waarbij een vraag een niet verwacht antwoord heeft. De volgende opgave is daarvan een illustratie.

- 34 Twee guldens (ken je ze nog?) liggen tegen elkaar aan. De linker gulden ligt vast. De rechter gulden gaat nu, zonder slippen, om de linker rollen. De vraag is: hoeveel omwentelingen heeft deze gulden nodig om in de oorspronkelijke positie terecht te komen?



Je denkt dat het antwoord zal zijn: één. Maar

In de oudheid hielden Grieken zich al bezig met paradoxen. De bekendste Griek is misschien wel Zeno van Elea (ca.490v.Chr. - ca.430v.Chr.). Zijn uiteenzettingen over de onmogelijkheid van beweging, zoals in het verhaal van Achilles en de schildpad, zijn beroemd en berucht.

De schildpad daagde Achilles uit voor een hardlooptwedstrijd. Hij beweerde dat hij zou winnen als Achilles hem een kleine voorsprong gaf. Achilles moest lachen, want hij was natuurlijk een machtige strijder, snel van voet, terwijl de Schildpad zwaar en langzaam was.

"Hoeveel voorsprong?" vroeg hij de Schildpad met een glimlach.

"Tien meter," antwoordde deze. Achilles lachte harder dan ooit.

"Dan ga jij zeker verliezen, vriend" vertelde hij de Schildpad, "maar laten we vooral rennen, als je graag wilt."

"In tegendeel," zei de Schildpad, "ik zal winnen, en ik kan het je met een eenvoudige redenering bewijzen."

"Kom op dan ," antwoordde Achilles, die al iets minder vertrouwen voelde dan voordien. Hij wist hij de superieure atleet was, maar hij wist ook de Schildpad een scherper verstand had, en dat hij al vaak een discussie met het dier had verloren.

"Veronderstel," begon de Schildpad, "dat u me een voorsprong van 10 meter geeft. Zou u zeggen dat u die 10 meters tussen ons snel kan afleggen?"

"Zeer snel," bevestigde Achilles.

"En hoeveel meter heb ik in die tijd afgelegd, denkt u?"

"Misschien een meter - niet meer," zei Achilles na even nagedacht te hebben.

"Zeer goed," antwoordde de Schildpad, "dus nu is er een meter afstand tussen ons. En zou u die achterstand snel inlopen ?"

"Zeer snel inderdaad!"

"En toch zal ik in die tijd verder gegaan zijn , zodat u DIE afstand moet inhalen, ja?"

"Eeh ja" zei Achilles langzaam.

"En terwijl u dat doet, zal ik een stukje verder gegaan zijn, zodat u steeds een nieuwe achterstand moet inlopen" ging de Schildpad stug door.

Achilles zei niets.

"En zo ziet u, elke periode dat u bezig bent uw achterstand in te halen zal ik gebruiken om een nieuwe afstand, hoe klein ook, aan die achterstand toe te voegen."

"Inderdaad, daar valt geen speld tussen te krijgen," antwoordde Achilles, nu al vermoeid.

"En zo kunt u nooit de achterstand inlopen," besloot de Schildpad met een sympathieke glimlach.

"U heeft gelijk, zoals altijd," besloot Achilles droevig - en gaf de race gewonnen.

Conclusie: de achterstand wordt kleiner, maar Achilles haalt de schildpad nooit in. Dit is een paradox, want in werkelijkheid zou Achilles de schildpad wel inhalen. Deze paradox is met een wiskundige redenering op te lossen, maar dat is niet eenvoudig.

35 Probeer de paradox zelf op te lossen (of zoek op internet de oplossing van deze paradox van Achilles en de schildpad).

36 Twee klassieke paradoxen zijn de leugenaar-paradox en de paradox over de kapper die iedereen knipt die zichzelf niet knipt.

Zoek op internet naar klassieke paradoxen. Verzamel er tenminste drie. Beschrijf waarom het een schijnbare tegenstelling betreft en – indien mogelijk – geef aan hoe de tegenstelling kan worden opgelost.

37 Het Belgische artikel hier-naast gaat over de relatie tussen straatverlichting en verkeersveiligheid.

In het artikel wordt geschreven over een paradox.

a. Leg uit waarom hier sprake is van een paradox.

b. Hoe wordt deze paradox verklaard?

Vals gevoel van veiligheid

Een aspect dat zowel door de overheid als door de bevolking vaak als argument ten voordele van verlichting wordt aangehaald, is de veiligheid. En uiteraard, het bestrijden van lichthinder en lichtvervuiling mag die veiligheid niet in gevaar brengen. Maar heel wat onderzoeken hebben echter aangetoond dat het meestal slechts om een gevoel van veiligheid gaat.

Een Europese studie, aangevraagd door verzekeringsmaatschappijen, publiceerde per land het aantal doden per 10.000 voertuigen en leverde volgende resultaten. In Denemarken, één van de minst verlichte landen in Europa, telde men op één jaar 59 doden. Frankrijk, waar men enkel in steden en op- en afritten verlicht, telde 83 slachtoffers per jaar. België, met veel verlichting, telde maar liefst 203 doden! Het moet natuurlijk gezegd dat België een van de dichtst bevolkte landen ter wereld is, maar ook in België zelf toonde een onderzoek van dokter Luc Beaucourt van de afdeling spoedopname van het UIA-ziekenhuis in Antwerpen aan dat er geen verband kan worden vastgesteld tussen meer ongevallen en minder verlichting.

Hoe kan men deze paradoxale situatie verklaren? Er zijn een aantal duidelijke redenen. Het is bewezen dat men roekelozer wordt wanneer de weg beter verlicht is. Men denkt immers dat men een gevaar snel genoeg zal opmerken wanneer de weg baadt in het licht. Hoewel dit in sommige gevallen waar is, moet men ook het volgende in acht nemen: wanneer de hindernis overstraald wordt door verlichting, wordt het juist moeilijker om de afstand en omvang ervan in te schatten.

Waarschuwingssignalisatie, zij het van aan de gang zijnde werken of gewoon de remlichten van auto's, valt minder snel op. Zo gebeuren heel wat ongevallen achteraan een file, waar een auto of vrachtwagen niet snel genoeg merkte dat er iets aan de hand was en hierdoor niet tijdig kon remmen. Verlichting overstraalt vaak ook de koplampen van auto's, waardoor tegenliggers pas op het laatste moment worden opgemerkt. Bij een inhalings-maneuver of wanneer er een spookrijder op de baan rijdt kan dit nefaste gevolgen hebben. En een auto die in een ongeval dan toch van de baan gaat heeft in België dan ook nog eens het grote gevaar dat er een lantaarnpaal in de berm staat, die tegen hoge snelheden een dodelijke impact kan veroorzaken.

[Bron: <http://www.vvs.be/wg/licthinder/mensen.php>]

- 38 Onderstaande tekst komt uit het boek *Magie van het gezond verstand* door Georges Charpak en Henri Boch. Ze signaleren dat in onze samenleving het bijgeloof in opmars is, terwijl het aantal verschijnselen waarop dat geloof gebaseerd is juist afneemt. Ze benoemen deze paradox als een schijnbare tegenstrijdigheid. Waarom schijnbaar?

We verkeren nu dus in een wat paradoxale fase waarin het geloof aan het 'paranormale' in de breedste zin van de term aan een opmars bezig is, vooral in meer ontwikkelde kringen, terwijl het aantal en de intensiteit van die verschijnselen juist drastisch afnemen.

De voornaamste redenen van deze schijnbare tegenstrijdigheid zijn de volgende:

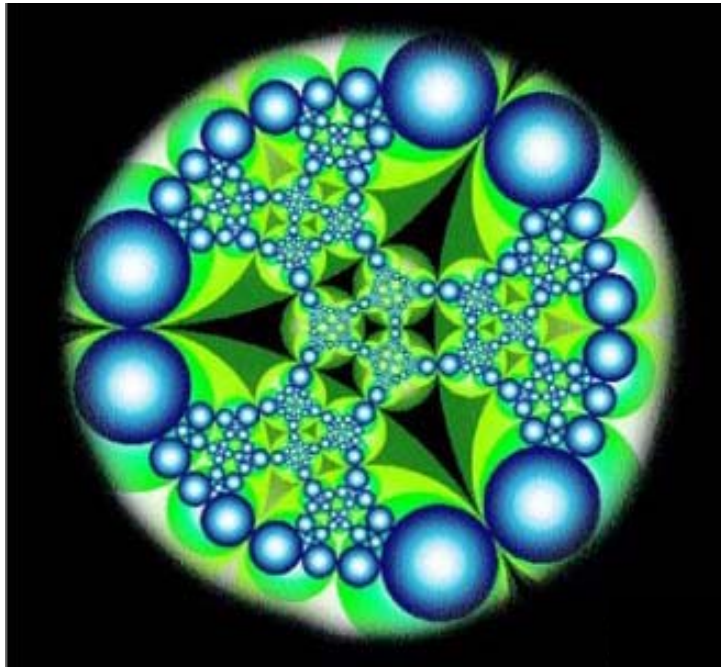
Om te beginnen zijn er de elektronische media. Het corpus van paranormale verschijnselen ondervindt hulp en steun van de elektronische media (vooral radio, tv en internet) die optreden als platform en signaalversterker en wel op een manier die in het verleden onbekend was. Was men bij het begin van de 20ste eeuw alleen in de omtrek op de hoogte als een boze geest zich manifesteerde in een dorpje, nu hoeft een nietsvermoedende klopgeest zich ook maar één keer te laten zien, of de hele planeet is via CNN op de hoogte van het verschijnsel.

Vervolgens zijn er medialeugens en inbreuken op beroepscode. De media – generaliseren is uiteraard onjuist en daarom zouden we beter spreken van 'een paar media die hun inhoud krijgen via programmamakers en journalisten' – vervullen in het geheel niet de stichtelijke Prometheus-rol waarvan hun oprichters vaak droomden. Ze presenteren lezers, luisteraars en kijkers ook niet wat ze voorgeschoteld zouden willen krijgen. Ze zijn niet de vertolkers, de bemiddelaars, de 'mediums' van een bestaande vraag, ze *creëren* die vraag zelf en doen dan alsof ze daar gewoon op inspelen. Ze zijn niet onpartijdig. Integendeel: ze accentueren en verheiligen de heropleving van navelstaren en koffiedik kijken.

Tot slot is er de onderwijswereld als doorgeefluik. In tegenstelling tot wat je zou mogen vermoeden – en ter bevestiging van het peil van het bijgeloof naar beroepsgroepen, zoals op de vorige pagina's grafisch weergegeven – is het onderwijsmilieu bepaald niet immuun voor bijgeloof. Soms zijn docenten zelfs een soort doorgeefluik voor pseudo-wetenschappen en andere bakerpraatjes. Onthutsende voorbeelden te over, of het nu gaat om miniversies van de piramide van Cheops waarin de wijn die wordt verkocht door een wijncoöperatie van leraren sneller oud wordt of om een catalogus van boeken voor docenten die groot heil verwachten van wichelroedeloperij of astrologie.

Hoofstuk 10 Kennis in kaart

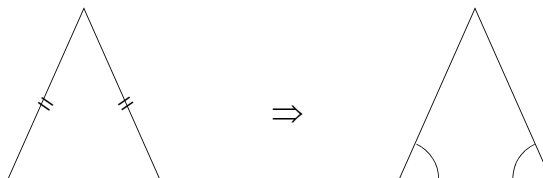
39 Bekijk onderstaande parelketting:



- a. Welke meetkundige transformaties (spiegelingen en rotaties) kun je in deze tekening zien?
- b. Hoeveel symmetrie-assen heeft de tekening?
- c. Als je een deel van de tekening hebt, dan kun je van daaruit de hele tekening construeren. Geef in de tekening een zo klein mogelijk deel aan waarmee dat lukt.

40 Deze opgave gaat over proposities uit de elementaire meetkunde.

Propositie A: In een gelijkbenigedriehoek zijn de basishoeken gelijk.

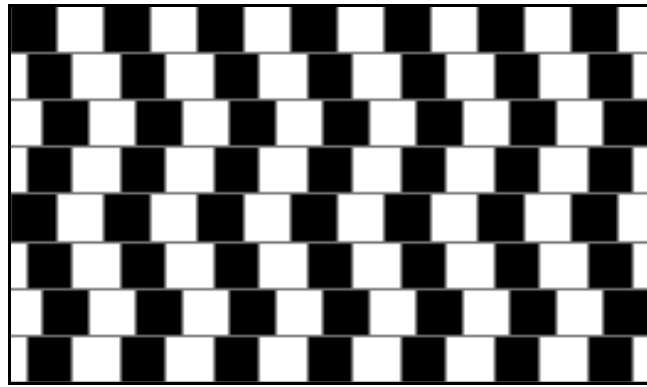


Propositie B: In een gelijkbenige driehoek staat de lijn van de top naar het midden van de overstaande zijde, loodrecht op die zijde.



Veronderstel dat propositie A waar is. Hoe kun je daaruit dan de waarheid van propositie B afleiden? Eenvoudiger gezegd: Als je A weet, dan krijg je B er gratis B. Nou ja, je moet er wel wat voor doen.

41 Evenwijdige lijnen?



Bewering: de horizontale lijnen lopen allemaal parallel.

- a. Stel op een paar manieren de waarheid of onwaarheid van deze bewering vast.
- b. Verdedig je oplossingen. Noem daarbij de gebruikte regels (stellingen) uit de meetkunde.

Deze drie opgaven zijn voorbeelden van het volgende idee:

Je hebt een hoeveelheid kennis.

Die kennis is beschreven met behulp van proposities of een andere duidelijke manier.

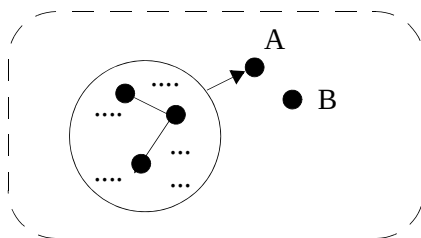
Je gebruikt logische redeneringen of andere regels om daarmee de beginkennis uit te breiden: kenniswinst.

42 Ga na of je dit principe in de opgaven herkent.

Je kunt een bepaald kennisgebied zien als een verzameling uitspraken. Voorbeelden van zulke gebieden zijn: meetkunde, planeten, planten, hersenen, muziekcomposities en sociale regels.

Maar er is meer: de onderdelen van zo'n gebied hebben een zekere samenhang. Om die samenhang zichtbaar te maken, kun je de kennis ordenen. Daarbij kun je gebruik maken van het principe van kenniswinst.

Hieronder is beschikbare kennis omcirkeld en in beeld gebracht hoe je daarmee een nieuwe propositie kunt bereiken (kenniswinst):

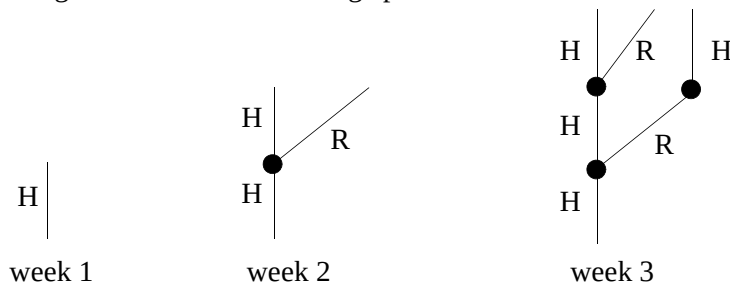


43 In hoofdstuk 1 heb je bewezen:

De som van de hoeken van een vierhoek is 360° .

Kijk nog eens naar dat bewijs en probeer het in deze figuur te plaatsen.

Het volgende voorbeeld illustreert dit principe van kenniswinst.
Bekijk de groei van een denkbeeldige plant:



Voor het schema zijn enkele definities nodig.

H is een omhooggroeiend stengeldeel en R is een naar rechtsgroeiend stengeldeel.

Je kunt de groei dan zo beschrijven:

- Start met H
- op H groeit HR
- op R groeit H

Het resultaat na week 3 kun je ook zo beschrijven: (H)(HR)(HRH)

44 a. Teken de plaatjes van de plant in week 4 en week 5.

b. Beschrijf de situaties in week 4 en 5 ook met de letters.

c. Gebruik de letters om de situatie van week 6 te beschrijven.

d. Onderzoek of in een beschrijving ook RR kan voorkomen.

e. Het aantal eindpunten van de plant is achtereenvolgens: 1, 2, 3, 5.
Onderzoek het aantal eindpunten bij nummers 4, 5, 6 en 7.

We begonnen met een model van een denkbeeldige plant. De resultaten van bovenstaande onderzoekjes leveren nieuwe kennis over die (denkbeeldige) plant. Dat is kenniswinst dankzij het spelen met definities en de regels voor de groei (zogenaamde *productieregels*). Die definities en redeneer regels noemt men een axiomatisch systeem.

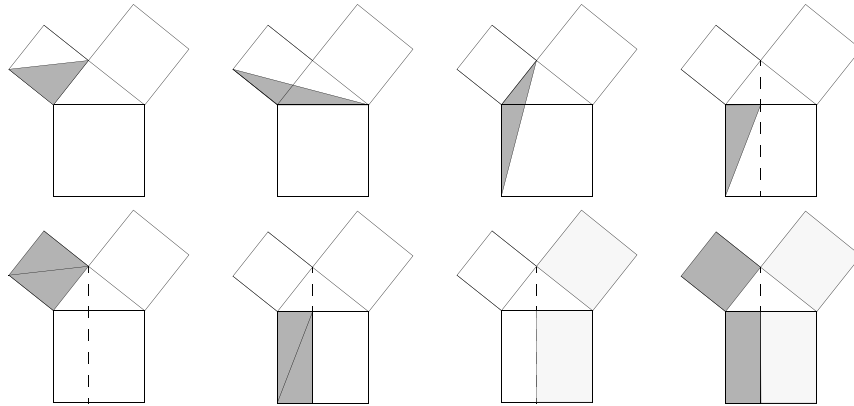
Het plaatje van kenniswinst kan op twee manieren worden opgevat:

- I Kies een doel buiten de aannamen. Kun je dat doel vanuit de aannamen bereiken?
Voorbeeld: Kan RR in het patroon van de plant voorkomen?
- II Begin met de aannamen en onderzoek wat je van daaruit kunt bereiken.
Voorbeeld: Kun je iets te weten komen over het aantal eindpunten van de plant?

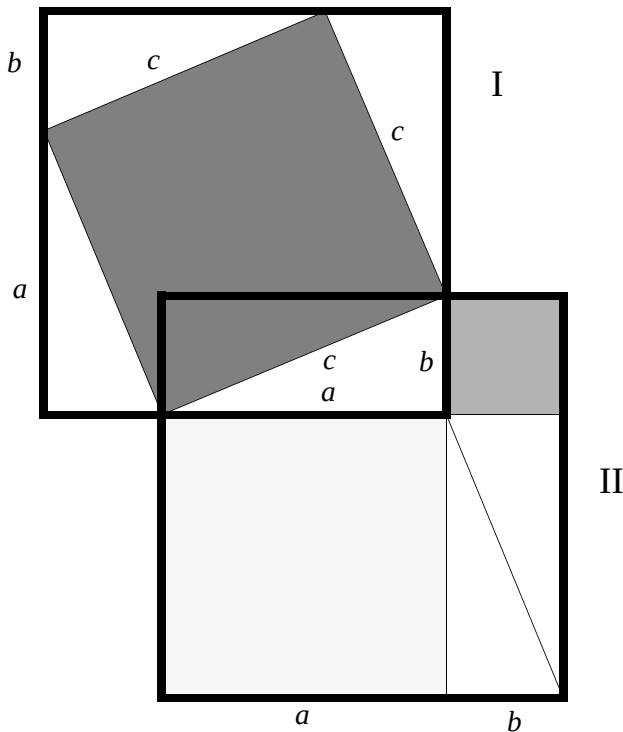
45 a. In de wiskunde is de Euclidische meetkunde het meest bekende voorbeeld van een axiomatisch systeem. Zoek op internet enkele definities, uitgangspunten (postulaten) en algemene regels van dat systeem. Bijvoorbeeld via: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>.

b. Met behulp van de postulaten en redeneerregels is Euclides in staat om een meetkundig systeem van allerlei stellingen (proposities) op te bouwen. Propositie 45 behandelt het construeren van vierkanten op een gegeven lijnstuk. Dit wordt gebruikt bij propositie 47, die bij ons bekend staat als de stelling van Pythagoras. Plutarchus (rond 100 na Christus) vertelt dat Pythagoras een os offerde toen hij de bewuste propositie gevonden had, maar de toeschrijving van propositie 47 aan Pythagoras blijft toch tamelijk onzeker.

De kern van Euclides' bewijs is hieronder in visueel steno vertoond. Geef bij ieder stapje aan waarom de oppervlakte van de gearceerde delen gelijk blijft.



c. Een ander bewijs van de stelling van Pythagoras gaat met algebra:



In het midden van deze figuur zie je een a - b - c -driehoek. De twee grote vierkanten hebben allebei zijden met lengte $a+b$. De oppervlakten zijn dus ook gelijk: $(a+b)^2$. Als je delen van ieder vierkant optelt moet je dus ook op iets identieks komen. Bedenk hierbij dat de oppervlakte van een driehoekje gelijk is aan $a \cdot b / 2$.

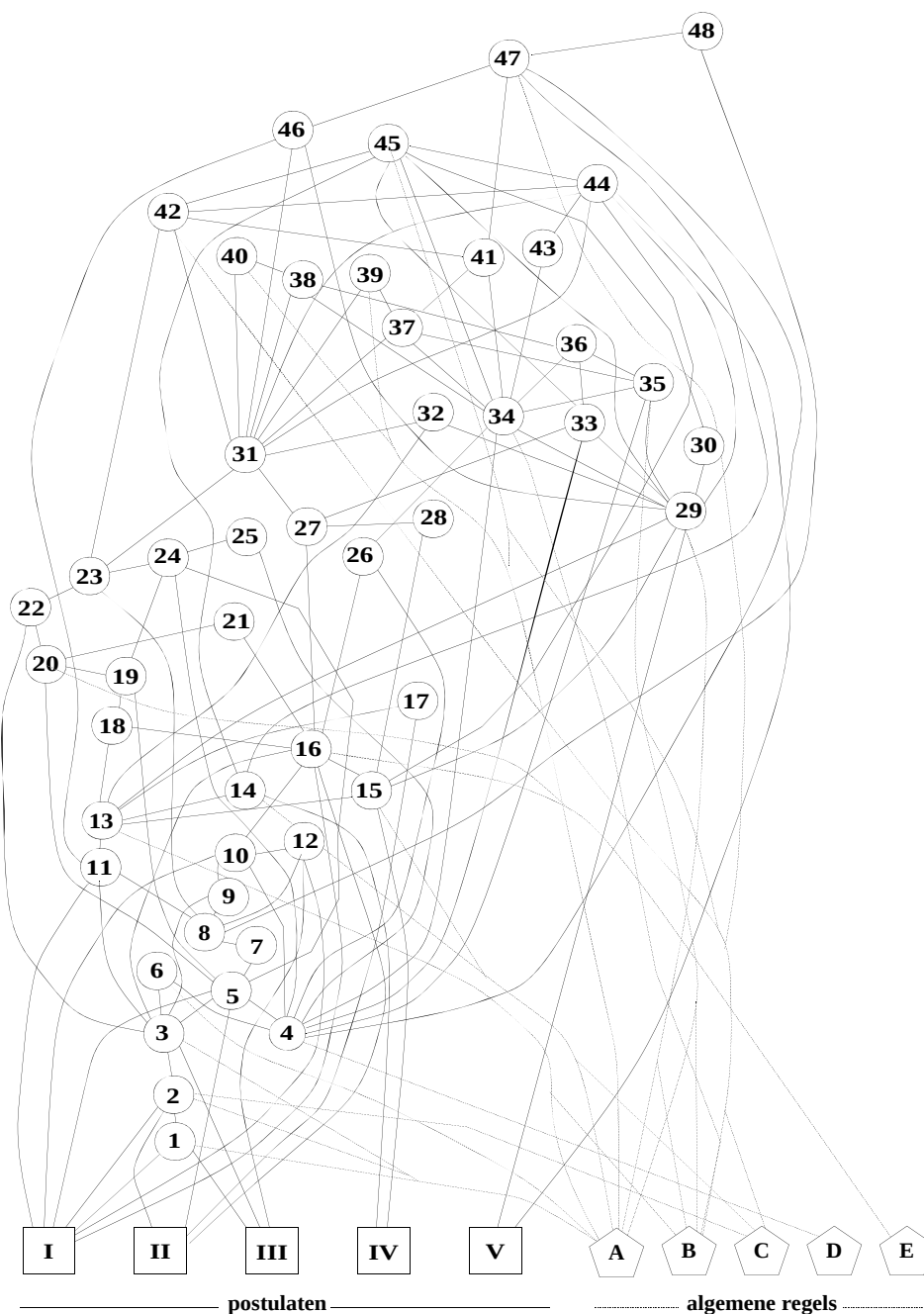
De oppervlakte van vierkant I is: $a^2 + b^2 + 2ab$.

De oppervlakte van vierkant II is: $c^2 + 2ab$.

Ga dit na en laat zien dat hiermee de stelling van Pythagoras bewezen is.

46 Een nieuwe vraag bij deze beschrijvingen van een kennisgebied is: wat gebeurt er met mijn systeem als je een uitgangspunt verwijdert? Die vraag heeft een belangrijke rol gespeeld binnen de Euclidische meetkunde, met name rond het zogenaamde parallellenaxioma (postulaat 5).

In de volgende figuur* worden de proposities weergegeven door hun nummer in een cirkeltje. Onderaan staan de postulaten en algemene regels. De verbindingslijnen geven aan dat hoger genummerde propositie naar de lager genummerde propositie of naar een postulaat of algemene regel verwijst. Omcirkel de proposities die van postulaat 5 afhankelijk zijn.



Het voert te ver om dieper in te gaan op de betekenis van je antwoorden bij de vorige opgave. Er is veel over dit onderwerp geschreven en het heeft geleid tot veel nieuwe meetkunde en tot reflecties over de opbouw van de wiskunde. Hier is vooral dit plaatje van belang als illustratie voor het principe van het in kaart brengen van kennis. De aard van het vak maakt dat er zo'n structuur kan worden getoond. Bij andere disciplines is vaak ook sprake van dergelijke structuren, maar die zullen zich minder makkelijk in zo'n figuur laten weergeven.

* Deze opgave is geïnspireerd door werk van Aad Goddijn en de figuur is van zijn hand

47 In de taalwetenschappen gebruikt men grammatica om de opbouw van zinnen te beschrijven. Bekijk bijvoorbeeld de zin:

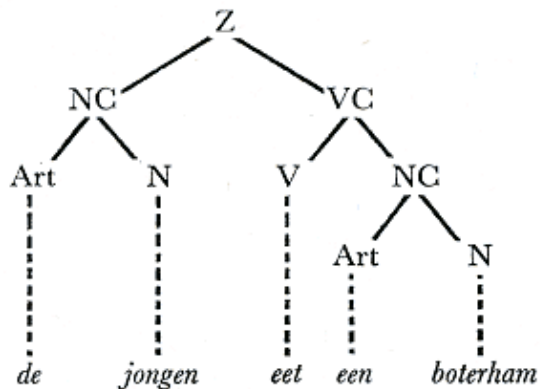
“De rode keuken zal snel gemonteerd worden.”

Vertaal deze zin in twee andere talen en vergelijk de opbouw tussen de drie zinnen.

Wat zijn overeenkomsten en verschillen in de structuur?

In de taalkunde worden ook definities en regels gebruikt om zinstructuren te onderzoeken. Hier spreekt dan over generatieve grammatica's. Zo'n grammatica beschrijft een beperkt aantal (herschrijf) regels waarmee zinnen geproduceerd kunnen worden. Een beperkte reeks regels kan er bijvoorbeeld als volgt uit zien (met Z = zin; NC = naamwoordelijk deel, VC = werkwoordelijk deel, V = werkwoord, N = zelfstandig naamwoord):

Z » NC + VC
 VC » V + NC
 NC » Art + N
 V » eet
 Art » de, een
 N » jongen, boterham



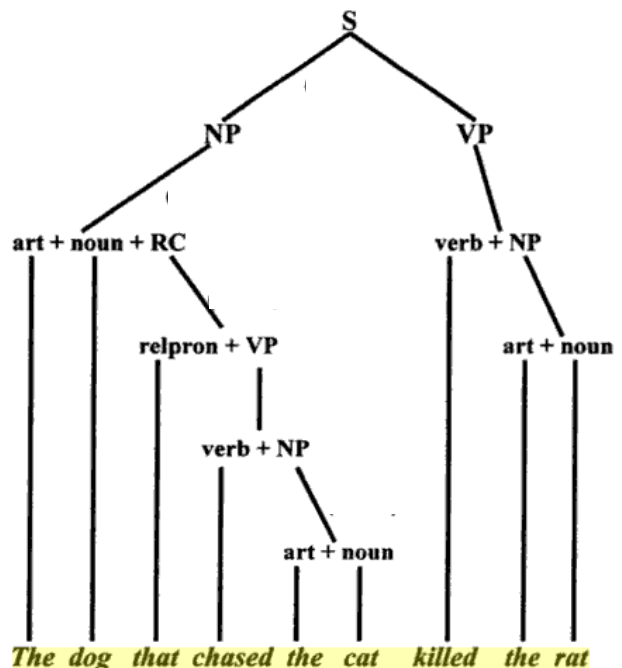
Deze regels genereren de zin “de jongen eet een boterham”. Dat proces wordt geïllustreerd met bovenstaand boomdiagram. Voor een beschrijving van alle mogelijke zinnen in onze taal zijn natuurlijk veel meer regels nodig. Deze methode biedt echter mogelijkheden om taalstructuren te onderzoeken en te vergelijken.

48 Dit kan lastig worden. Zie bijvoorbeeld de Engelstalige zin:

“The dog that chased the cat killed the rat”

In de figuur hiernaast wordt de structuur van de zin met een boomdiagram beschreven.

- Welke definities en regels spelen een rol bij het aanbrengen van deze boomstructuur?
- Vertaal de zin in het Nederlands en beschrijf de structuur met de Nederlandse variant van deze boom. Wat valt je op met betrekking tot de definities en de regels?



49 In het boek “Gödel, Escher, Bach” van Douglas Hofstadter worden structuren van taal en kunst onderzocht en vergeleken. Daarbij spelen ‘kunsttalen’ een rol.

Bekijk bijvoorbeeld de taal MIU:

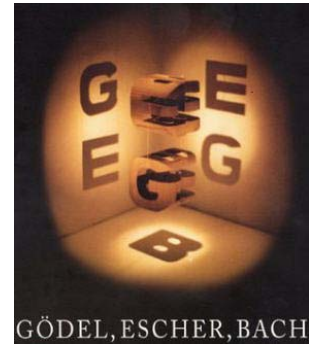
De taal bevat drie karakters: M, U en I.

De taal kent het woord (axioma of uitgangspunt): MI

Er zijn de volgende vier regels om nieuwe woorden (zinnen) te maken (de letters x en y staan voor willekeurige zinsdelen):

1. $xI \rightarrow xIU$
2. $Mx \rightarrow Mxx$
3. $xIIIy \rightarrow xUy$
4. $xUUy \rightarrow xy$

- a. Uit de eerste regel volgt dat je de zin MIU kunt afleiden uit MI.
- b. Welke regels moet je toepassen om MIUIU te maken?
- c. (moeilijk!) Bewijs dat in een zin het aantal I's nooit een 3-voud is.
- d. Is het mogelijk om MU af te leiden?



Een grammatica beschrijft van de systematiek en structuur van woorden en zinnen van een taal. De taal kan ook een volledig formeel-wiskundige beschrijving zijn of bijvoorbeeld een beschrijving van de structuur van een bepaald type muziek- of danscomposities.

50 Hierna volgen twee citaten. Een over taalkunde en een over dans. Beide teksten zijn voorbeelden van de rol van structuur en systematische afspraken in beide kunstvormen. Kies een onderwerp (taal, dans, muziek, beeldende kunst, rechtspraak, ...) en onderzoek hoe daar zo'n systematische benadering functioneert. Schrijf een verslag over je bevindingen (ca 2 A4-tjes).

Een citaat over taal en grammatica

Taal als parasiet

IN DE EVOLUTIONAIRE TAALWETENSCHAP DRAAIT ALLES OM BETEKENIS

Hoe is menselijke taal ontstaan? Volgens de Leidse school van de evolutionaire taalwetenschap is betekenis de drijvende kracht. 'Betekenissen verrijken de mens maar kapselen hem ook in.'

Van Driem ziet de ontwikkeling van taal als een geleidelijk proces, gestuurd door natuurlijke selectie. Met kracht verwerpt hij de visie van generatieve taalkundigen à la Noam Chomsky, die stellen dat taal zich ergens in de afgelopen 200.000 jaar plotseling aandiende, toen de mens syntaxis (grammatica) leerde hanteren. Van Driem: "Generativisten doen heel ingewikkeld over syntaxis. Maar in vergelijking met zoiets ingewikkelds als betekenis is het Spielerei, ook al omdat het wiskundig zo eenvoudig is. Ze negeren dat de cognitieve voorwaarden voor het ontstaan van taal bij primaten allang aanwezig waren. Ook chimpansees en bonobo's kunnen betekenisvol met woordvolgordes omgaan."

De oorsprong van taal heeft volgens Van Driem dus niets te maken met het verwerven van het vermogen om grammatica te hanteren. Voor de evolutie van de menselijke spraakorganen geldt hetzelfde. Het gaat dan om de positie van het strottenhoofd. Waar mensapen door hun neus 'praten' en vooral de toonhoogte van hun klanken kunnen variëren, is de mens tot veel meer in staat. De relatief diepe ligging van het strottenhoofd in onze keel - met het risico van verslikken - verschaft ons een lang spraakkanaal dat lucht via de mond voert, waardoor een veelheid aan spraakklanken kan worden geproduceerd. "Maar", zegt Van Driem, "eerst kwam de taal om vervolgens via natuurlijke selectie de ontwikkeling van het spraakkanaal verder te sturen."

(...)

Onder welke condities kon taal gedijen? Mentale voorlopers zijn volgens Van Driem herinneringen en categorisch denken, met zijn indeling in bijvoorbeeld 'giftige' en 'niet giftige' bladeren. Ook het vermogen te bedriegen speelde een rol. Dat Homo ergaster en zijn opvolger erectus gereedschap hanteerden is op zichzelf geen voorwaarde, eerder een indicatie dat intellectueel het niveau in zicht kwam waarop taal kon ontstaan. Het zijn cognitieve vaardigheden die ook aanwezig zijn bij andere primaten. Dat die geen taal ontwikkelden komt volgens Van Driem omdat alleen de mens op een zeker moment in zijn evolutie over zulke grote hersenen beschikte dat zoiets complex als taal tot de mogelijkheden ging behoren.

"Waar het om gaat is de vergroting van de hersenschors, gepaard gaande met een enorme toename van het aantal mogelijke neuronale verbindingen. Dat graduele proces van natuurlijke selectie in de prehistorie van de hominiden mondde uit in een brein dat rijp was om door taal gekoloniseerd te worden. Vervolgens werd taal, door het voordeel dat zij bood, de dominante factor in de evolutie van het brein. De enorme verdere ontwikkeling van de prefrontale hersenschors is aan taal te danken, niet andersom."

structuurdenken

Forsythe beschikt over systeemkaarten ter ondersteuning van de choreografie, koestert een grote interesse in de grammatica en het functioneren van beweging, beeld en geluid. Beweging en geluid worden gegeneerd in een voortdurend proces van transformatie. Op zich elementair ('simpel') materiaal wordt onder hun handen en in de lijven van de dansers, via betrekkelijk eenvoudige operaties tot complexe, gelaagde, polyvalente constructies in tijd.

Dans is een taal van gecodeerde bewegingen. De academische techniek definieert basisbewegingen aan de hand van horizontale, verticale en transversale assen en vlakken ten opzichte van de (rechtopstaande) rug. De benen worden het liefst uitgedraaid, en de danser presenteert zich bij voorkeur diagonaal of frontaal aan het publiek. Deze drie punten vormen de basis voor een gedetailleerd vocabulaire van gecodeerde bewegingen.

Eén enkele beweging of combinatie van bewegingen kan naar believen de bouwsteen vormen voor een choreografie volgens simpele compositie-regels. Een van Forsythe's geliefde choreografische methodes is de contrapuntische: een aan de muziek ontleend compositieprincipe voor het creëren en fraseren van melodieën bovenop een basismelodie. Het contrapuntisch instrumentarium steunt daarbij vooral op variaties in timing, frasering van het materiaal en elementaire richtingswisselingen (links-rechts, voor-achter, diagonalen), ruimtelijke spiegelingen, canonstructuren, ingebouwde herhalingen. Een choreograaf kan aldus asymmetrieën tevoorschijn toveren uit een perfecte harmonie, en vice versa.

Ieder lichaamsdeel kan ieder waargenomen of denkbeeldig punt, lijn of vorm traceren. Dit punt-punt-lijn principe borduurt verder op Rudolf von Laban's notie van trace-forms. Stel je twee punten in de ruimte voor. Je neemt een lichaamsdeel en verbindt de twee punten: de voet veegt een lijn achterwaarts over de vloer, de atlaswervel traceert de contouren van het plafond. Je kunt ook letters of woorden met een lichaamsdeel beschrijven. Nadere specificaties of inperkingen kunnen gegeven worden in termen van het aantal lichaamsdelen dat opeenvolgend of simultaan in actie komt, de ruimtelijke vlakken waarin bewogen wordt, het behouden van een bepaald volume. Bijvoorbeeld 9-point deployment of de kubus: een danser stelt zich een kubusvormige figuur voor rond het lichaam, met de ruggengraat als verticale as. Ieder van de zes vlakken heeft negen punten: op de uiteinden en midden op iedere lijn. Handen, voeten, of willekeurig welk lichaamsdeel kunnen van punt naar punt bewegen.

Een methode die Forsythe soms hanteert voor het creëren van materiaal. Een bewegingsalfabet wordt gevormd door een verzameling van 26 reeksen geabstraheerde gebaren, manipulaties en andere ('denkbeeldige') handelingen. Voor iedere letter van het alfabet kan een woord worden verzonnen - overwegend namen, werkwoorden, zelfstandige en bijvoeglijke naamwoorden. Daarbij komt een beweging. Bijvoorbeeld: s = scratch: krab-bewegingen. Het eerste woord of beweging in een reeks roept een andere beweging of een volgend woord op. Bijvoorbeeld: scratch = dj > d = disk: van krabben naar platen draaien naar knieschijf, en/of j = jockey: paardenrace. Reeds spoedig ontstaat een associatief verbonden familie van 26 'gedanste woorden'.

De regels voor het genereren van in de tijd opeenvolgende configuraties schrijven onder meer het aantal herhalingen voor, de lengte, de aard van de variaties en ruimte voor eventuele externe ingrepen. Elementaire formeel-geometrische operaties zijn bijvoorbeeld: iedere frase 'vermenigvuldigt' (herhaalt) zichzelf; iedere frase wordt, gelijk een anagram, verlengd met een in de tijd omgekeerde versie van zichzelf; iedere frase wordt verlengd met het eigen ruimtelijk spiegelbeeld achter het origineel; iedere frase 'vermenigvuldigt zichzelf' bij een volgende danser met vaste vertraging.

Tot slot

51 "Als de brug open is, dan staat het sein op onveilig."

De tekst hieronder komt uit het boekje *Exacte Logica* van de wiskundige Hans Freudenthal. Wat is je commentaar op zijn voorbeeld voor de motivatie van de waarheidswaarden van de als-dan-vorm.

Om te weten te komen, of een samengestelde propositie „ p en q ” waar is, behoef ik alleen te weten, of de twee onderdelen p , q waar zijn. Is dat het geval, dan is „ p en q ” waar. Enige nadere kennis omtrent de inhoud van p of van q is hiervoor niet vereist. Evenzo kan ik tot de waarheid van „ p of q ” besluiten, zodra ik weet dat tenminste een der samenstellende proposities waar is; de inhoud van p en van q doet er niet toe.

(Merk op: „ p of q ” wordt ook dan als waar beschouwd, wanneer zowel p als ook q waar is.)

Iets dergelijks geldt ten aanzien van „als p , dan q ”. Wanneer is zulk een propositie waar? Laten we het voorbeeld van daarstraks beschouwen. Er zijn op zichzelf vier mogelijkheden, die we door de vier hokjes in het schema

		brug	open	dicht
sein	onveilig			
	veilig			

willen weergeven. Welke van deze vier gebeurlijkheden bevestigen nu de uitspraak

„als de brug open is, dan staat het sein op onveilig”, en welke zijn er mee in strijd? Als ik de brug open vind en het sein op „onveilig” (hokje links boven), wordt de uitspraak bevestigd;

evenzo als ik de brug dicht vind en het sein op „veilig” (hokje rechts onderaan). En dit geldt ook nog, als de brug dicht is en het sein op „onveilig” (hokje rechts boven), want de uitspraak zegt in 't geheel niets over wat zich voordoet, indien de brug dicht is; het sein mag dan op „veilig” of „onveilig” staan. Maar als ik eens een keer de brug open en desondanks het sein op „veilig” vind (hokje links onderaan), is de uitspraak weerlegd.

Ik constateer dus: Een propositie „als p dan q ” is alleen onwaar, als p waar en desondanks q onwaar is; in alle andere gevallen is zij waar — dus zij is waar, zowel indien p onwaar is en q willekeurig, als ook indien q waar is en p willekeurig.

We schrijven in het vervolg:

$p \wedge q$ in plaats van „ p en q ”,
 $p \vee q$ „ „ „ „ „ p of q ”,
 $p \rightarrow q$ „ „ „ „ „als p , dan q ”,
 $p \leftrightarrow q$ „ „ „ „ „ p dan en slechts dan, als q ”.

Het teken $\vee$ is ontstaan uit de v van Latijns vel (= of); de $\wedge$ is de v op zijn kop. De tekens $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$ spreken voor zichzelf.

Voor de diverse verbindingen heeft men ook de namen:

$p \wedge q$ conjunctie (van p en q),
 $p \vee q$ disjunctie (van p en q),
 $p \rightarrow q$ implicatie (van p naar q),
 $p \leftrightarrow q$ wederzijdse implicatie.

52 In het begin van dit boekje stond een opgave over verschillen in strafmaat (opgave 18 op pagina 40).

We hebben het commentaar van een jurist gevraagd. Zijn reactie is:

“De strafmaat wordt bepaald door o.a. het wettelijk strafmaximum (de bovengrens) en de beleidsregels van het OM. Een ondergrens/strafminimum is er (nog) niet. Desalniettemin bestaat er voor de strafrechter veel ruimte om in een individueel geval een strafmaat vast te stellen. De rechter kijkt naar de ernst van het feit, de omstandigheden waaronder het feit is begaan, de persoon van de verdachte en persoonlijke omstandigheden van de dader.

De penningmeester uit Kessel lijkt erg mild bestraft te zijn, terwijl de vrouw die collectegeld stal zwaar werd bestraft. Ik heb echter de indruk, dat penningmeester is veroordeeld voor verduistering (321 WvSr) en de vrouw wegens diefstal (310 WvSr). Diefstal kent een zwaarder wettelijk strafmaximum dan verduistering. Bovendien geven de krantenartikelen weinig informatie over de persoonlijke omstandigheden van de daders. Misschien is de vrouw al eerder veroordeeld en de penningmeester niet eerder. Het kan m.i. dus best zo zijn, dat de verschillen in strafmaat – als kennis wordt genomen van het gehele strafdossier – verklaarbaar zijn. Toch denk ik ook dat er verschillen in strafmaat zijn in goed vergelijkbare gevallen, die waarschijnlijk verklaard worden door de persoon van de rechter.”

Is de strafmaat dus een kwestie van logisch redeneren?

achtergronden en lessuggesties

voor

Logisch redeneren

Toelichting op hfdst. 1

Dit hoofdstuk wijkt af van de gebruikelijke inleidingen tot de logica:

De hoofdrekenen zijn:

- *Dit is voor de leerlingen een onbekend vak en hun achtergrond is vaak niet erg wiskundig. Door met serieuze contexten te beginnen lijkt me een minder formele en een meer zinvoller introductie het proberen waard.*
- *De leerlingen komen situaties tegen die niet gladjes volgens het geleerde kunnen worden aangepakt. Zo kan misschien de behoefte aan meer precisie gewekt worden. In de volgende hoofdstukken zal dat ook echt wel gedaan worden.*
- *Door het bestrijken van allerlei gebieden wordt de suggestie gewekt dat de wereld vol zit met logica en onlogica.*
- *Het benoemen van onderdelen in een tekst (uitgangspunten & conclusie) werkt wel, maar is veel werk en levert weinig op. Daar bezuinigen. Slechts één of twee laten maken en klassikaal bespreken? Daarmee duidelijk maken welke dilemma's en vragen spelen en wat van hen verwacht wordt als ze in groepjes eraan werken.*
- *Teksten met "het is logisch dat ..." en onvolledige redeneringen zouden we eerst in bekende contexten kunnen introduceren. Nu is voor de leerlingen lastig te beoordelen wat er verlangd wordt. Enkele opgaven leveren wel aardige discussies in de groepjes*

Bij de opgaven.

1 t/m 5. Bespreek de oplossingen en redeneringen van de leerlingen. Vraag naar gemeenschappelijke kenmerken in de oplossingen. Indien mogelijk, maak het type als-dan-redenering expliciet (en de omkering bij vader en zoon).

De opgave met de petjes is voor een paar groepjes te hoog gegrepen. Tenminste, als we willen dat ze binnen 10 minuten tot een redelijk antwoord komen. Jos en ik geven bij enkele groepjes een hint. Het aardige is dat je alleen een extra vraag hoeft te benadrukken (wat weet de achterste dus zeker....wat kan hij niet voor zich zien?) en in ieder groepje blijkt er één die het vanaf dan kan oppakken en het hele groepje meeneemt.

Bij de opgave over even/oneven (2) vinden de meesten het juiste antwoord, maar alleen gemotiveerd met getallenvoorbeelden. Ik vraag nog of het ook geldt voor getallen boven de 100, maar met nog een voorbeeldje is voor hen geen twijfel meer.

Jos komt de volgende les hierop terug met de formules $y = x^3$ en $y = x$. Ze zijn gelijk voor $x = 0$, $x = 1$ en $x = -1$. Maar toch zijn ze niet gelijk! Je moet oppassen met een paar kloppende voorbeelden.

Vraag 9 levert goede discussies. Hoewel het gegeven voor onderdeel b (punt D ligt rechts van AC) verwarrend is. Wij begrijpen direct dat bedoeld wordt binnen driehoek ABC, maar rechts van AC is veel ruimer.

Een groepje is overtuigd van de juistheid van de stelling. Ze passen het bewijs aan: er is altijd een diagonaal die de vierhoek in tweeën deelt. Een leerling: "Of moeten we dat nu ook eerst bewijzen?"

Een ander groepje is ook overtuigd van de stelling. Een van de leerlingen: "we moeten een andere manier van bewijzen vinden dan door hier een lijn te trekken."

Leerling: "je hoeft geen lijn te trekken. Je kunt ook zeggen dat de vierhoek uit 2 driehoeken bestaat."

De ene weer: "maar in het bewijs kun je dan niet uitgaan van A1, A2, ..."

Weer een ander groepje twijfelt ook over de stelling. Er ontstaat binnen de groep discussie over het kunnen verdelen van de vierhoek in twee driehoeken. Een van de leerlingen vindt dat daarmee de stelling moet worden aangepast, de anderen willen het gebruiken in het bewijs van de oorspronkelijke stelling. Het mooie van de discussies is dat goed naar voren komt welk type vragen je bij redeneringen kunt stellen en je kunt afvragen wat nu eigenlijk uitgangspunten (aannames) zijn en hoe je die in een redenering gebruikt. Bij dit hoofdstuk zou ik liever zien dat leerlingen in een groepje over 3 of 4 opgaven flink doorredeneren, dan dat ze bij alle opgaven een kort antwoord hebben.

Dat is direct ook het lastige van deze fase in het materiaal. Voor de leerlingen is natuurlijk het primaire doel van de opgaven om het antwoord te vinden. "Is dit goed meneer?" Eigenlijk moeten ze leren over welke dilemma's dit materiaal gaat en welke vragen je daarbij stelt (op welk type vragen we een antwoord aan het zoeken zijn). Met als conclusies:

- *type vragen die je elkaar stelt (hoe weet je dat? weet je dat wel zeker?)*
- *rol van uitgangspunten als aannames (en die eigenlijk ook weer een bewijs/redenering vragen)*
- *volledigheid van redeneringen en redeneerstappen (welke extra informatie speelt eigenlijk een rol, hebben we voldoende informatie?)*
- *rol van voorbeelden*

Mooie opmerking van een leerling: "net als mijn biologieleeraar, die zegt ook altijd dat iets logisch is, maar heeft dan kennelijk een heel andere redenering voor ogen dan ik kan bedenken."

6. a, b, c Proberen komen tot b.v.

"Als de voorgaande uitspraken waar zijn dan mag je besluiten tot de waarheid van de "conclusie"

d. Nog geen definitie van "correct". Kijken wat de ll. Met hun intuïtieve kennis kunnen doen.

Er kan al een probleem optreden als het verschil tussen waarheid en afleidbaarheid of het ontbreken van premissen.

d. Voor later kunnen herkennen van redeneringen in tekst misschien "die dezelfde rol spelen"

7. a. Bijvoorbeeld...Nederlanders reizen veel minder met bus of trein dan gemiddelde Europeanen. Verklaring: De Nederlander is veel duurder uit.

b. Er moet iets bij over de zuinigheid o.i.d.

9 t/m 13. Het zorgvuldig nagaan van redeneringen in een wiskundige context. Niet alleen redeneren speelt een rol, maar ook definiëren. Opmerking: gebruik eventueel ook voorbeelden uit de historische context. Zie bijvoorbeeld het boekje van Ahmes tot Euclides over de trisectie van de hoek.

13. Er is gebruik gemaakt van de stelling over gelijkheid van verwisselende binnenhoeken.

De teksten zijn vooral gekozen om de volgende mogelijkheden:

- *gemakkelijke toegang voor leerlingen*
- *suggestie van zelf verzamelen door leraar en leerling. En mogelijkheid om in volgende hoofdstukken hierop terug te komen.*
- *Het zou mooi zijn als de leraar in de loop der tijd een aantal oude teksten vervangt door verse ideeën om op internet te plaatsen voor collega's.*

Als later vragen aan bod komen over de strips van Peter van Straten (opdracht 25 over wat er mis is met de redenering van Vader m.b.t. de vermeende terrorist en het al dan niet thuis zijn van de zoon) is het belangrijk om de door Vader gevolgde redeneerstappen precies op papier te krijgen, en in te passen in het op bladzijde 12 aangegeven kader waarbinnen de implicatie $A \rightarrow B$ (on)waar is. Pas dan zie je precies wat hier gebeurt.

Een globale invulling van zes lessen (van elk 50 minuten):

les 1: opgaven 1 t/m 7

les 2: opgaven 8 t/m 14

les 3: opgaven 15 t/m 21

les 4: opgaven 22 t/m 27

les 5: opgaven 28 t/m 32

les 6: opgaven 33 t/m 37

les 7: opgaven 38 t/m 43

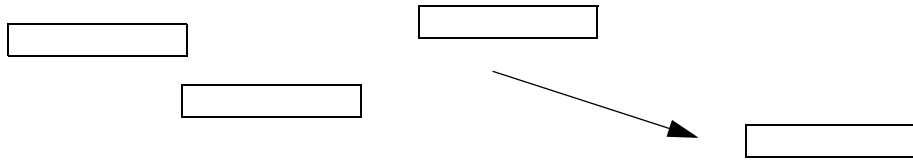
Opmerkingen tijdens de bijeenkomst (17-10-2007)

- *"Als jij je spullen niet bij je hebt, dan ben je te laat." Je moet namelijk naar je kluisje om ze te halen.*
- *"Wat vind je van deze redenering?" Vraag je dan naar een opinie of naar de structuur van de redenering?*

- “De hele klas vindt ...” “It is generally believed that ...” “Dit mag bij alle docenten ...”
- Oneindig: Achilles en de schildpad; Hilbert’s hotel; ... (zie ook van Ahmes tot Euclides; trisectie...)
- Het verkeer als axiomatisch systeem (zie ook het hoofdstuk over conflictlijnen: definitie, criterium en methode).
- Ziekte -> symptoom. Dokter signaleert symptoom en concludeert ziekte

Achtergrond bij Hoofdstuk 2

Wat zijn de bouwstenen van een redenering? Structuren van teksten en weergaven daarvan in (boom)schema's. In een tekst aangeven door onderstrepen of inkaderen. Plaatsen van:

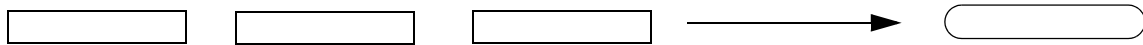


Wat staat in het blok-propositie definiëren.

Haken en ogen die hieraan kleven.

Teksten onderzoeken

Redenering structureren met uitgangspunten of aannames en conclusie:



Van verbindingswoorden naar het invoegen van logische connectieven tussen de blokken
 $\vee$ $\wedge$ $\rightarrow$ $\supset$ $\neg$ en ook met waarheidstafels.

Dan komt de kern: wat doen we bij het redeneren?

Gebruikmaken van de uitgangspunten + andere kennis.

Er bestaan handige apparaatjes die vaak van pas komen: redeneerregels o.a. *modus ponens* en *modus tollens*. Die kunnen verscherpt worden (of zelfs ontwikkeld worden: "schrijf in een zin op hoe je tot een conclusie gekomen bent") met puzzels waar ze functioneren om strategieën te expliciteren (vergelijk rol van ziektes en symptomen bij het stellen van diagnoses).

Een van de centrale vragen: Hoe noteer je een complex verhaal?

Er is uiteindelijk aandacht voor zinnen met behulp van notaties voor proposities en logische connectieven. Eenvoudige afleidingen, redeneerstappen, tautologie en contradictie. Dus wel kennismaken met de geïdealiseerde wereld van de propositiologica, maar geen volledige verwerking daarvan.

Verder wordt in deze opgave het verschil tussen 'want' en 'dus' aangestipt, maar dat mag wel explicieter worden afgesloten.

Een observatie:

Bij vraag 23 (met de stenen die aan beide kant een plaatje hebben) ontstaan leuke discussies. De zin is "als aan de ene kant een maan staat dan staat aan de andere kant een vis." De eerste steen met een maan geeft geen problemen, maar bij de volgende steen met een vlinder ontstaat onenigheid.

Antwoorden zijn: "nee, achter 2 kan geen maan staan."

"Zon."

"Ieder hemellichaam buiten de maan."

Een buurman reageert op het laatste antwoord: "maar dan wordt het toch een andere bewering?"

Uitgangspunten voor het hele boekje

Dit onderwerp is zinvol voor de leerling nu en later. Laten zien waarom dit onderwerp bij wiskunde is geplaatst.

Logica in de praktijk: er zijn vaak storende invloeden. Die schakelen we in hoofdstuk 2 uit. We gaan dan naar een laboratoriumsituatie.

Middelen: internet, video (bijv. van betogen en debatten: Hoogeveen bij Netwerk van 6-11-2007). Ook gaan we werken aan een interactieve site met ideeën, spellen, puzzels, humor, ...

De grondbeginselen moeten goed gekend worden (ook enkele trainingsopgaven). Dan kan later over de rand gekeken worden (dat is geen 'leerstof'). Voorbeeld: systemen met meer waarheidswaarden dan alleen 0 en 1 (dit is ook iets waar de opgaven met waarheidstafels op voorbereidt).

Toepassingsgebieden (o.a.): betogen, dialogen, discussies en debat bij wiskunde, filosofie, sociale wetenschappen, politiek, journalistiek, conflictoplossing, rechten.

Verschillen tussen discussie en debat (waarheidsvinding versus winnen), brainstormen, argumentatie-leer, invloed van reclame en propaganda (mensen maken niet alleen keuzes op grond van een redenering). Betogen die niet zuiver zijn (bijv. retoriek en gevoelsargumenten). Rotsvaste overtuigingen die discussies vruchteloos maken.

Welke type vragen kun je stellen bij een redenering?

Nietvolmaakte redenering zo goed mogelijk aanvullen.

Met de experimenten met dit materiaal proberen we de grenzen van de mogelijkheden te verkennen (opgaven zullen variëren van makkelijk tot moeilijk).

Lijst met begrippen die (vermoedelijk) aan bod zullen komen

- *propositie, gegeven, hypothese*
- *model (rekenmodel bij geluidmetingen rond schiphol)*
- *definities (wat? hoe ontstaan? weet waarover je praat)*
- *verzwegen premissen, achteloosheid, vanzelfsprekendheid, opzet*
- *axiomatische opbouw*
- *beslissingscriterium (is de beslissingsregel redelijk; denk aan weging van factoren)*
- *cirkelredenering, visieuze cirkel*
- *contradictie (is ook een stijlelement in poëzie: "ik verga en duur"), tautologie*
- *causaliteit (zoekstrategie: $A \rightarrow B$ en je ziet B dus concludeert A . Logisch is dit fout, maar het kan soms helpen (ziekte $\rightarrow$ symptoom en omgekeerd van symptoom $\rightarrow$ ziekte)).*
- *redenering naar analogie*
- *het risico van 'niet niet A ' (voorbeeld: "geen onoverkomelijke", "niet ongewoon").*
- *de niet verwachte consequentie (onverwacht zij-effect)*
- *recursiviteit, productieregels, grammatica (met toepassingen in dans, muziek, ...)*
- *nodige en voldoende voorwaarden*

Relatie met domeinen A en B voor wiskunde C (algemene vaardigheden en reflectie op de rol van wiskunde)

Reken- en algebraïsche-vaardigheden: In de diverse hoofdstukken staan opgaven waarmee extra aandacht aan rekenen en algebra kan worden besteed. De docent wordt aangemoedigd om dergelijke momenten te benutten voor een herhaling, oefening en verdieping van de gewenste vaardigheden. Uit de eerste experimenten bleek dat de som over even en oneven getallen in hoofdstuk 0 zich al uitstekend leent om langer bij stil te staan en algebraïsch te benaderen.

Geschiedenis: Boole, Klassieke paradoxen.

Maatschappelijke functie en relatie met andere vakken: Krantenartikelen, rechtspraak, taalwetenschap, kunst.

Rol binnen de wiskunde: Het materiaal bevat veel wiskundige contexten (zowel meetkundig als uit getaltheorie en analyse) waarbinnen het nut en de werking van logisch redeneringen worden uitgewerkt.

Index

Achilles	48
axiomatisch systeem	52
bewijs uit het ongerijmde	31
Boole	37
contradictie	46
EN	12
equivalent	23
Er-Is-kwantor	35
Euclides	52
Euclidische meetkunde	52
exclusieve of	13
Goldbach	28
grammatica	17, 56
implicatie	15
inclusieve of	13
kwantoren	34
model	52
Modus Ponens	20
Modus Tollens	20
nodige voorwaarde	27
OF	13
ongერიjmde	31
paradox	46
productieregels	52
propositie	11
Pythagoras	52
retorica	14
Stevin	31
tautologie	46
tegenvoorbeeld	28
Venn-diagram	36
verzwegen premissen	34
voldoende voorwaarde	27
Voor-Alle-kwantor	34
voorwaarde	27
waarheidstafel	12, 26
Zeno	47