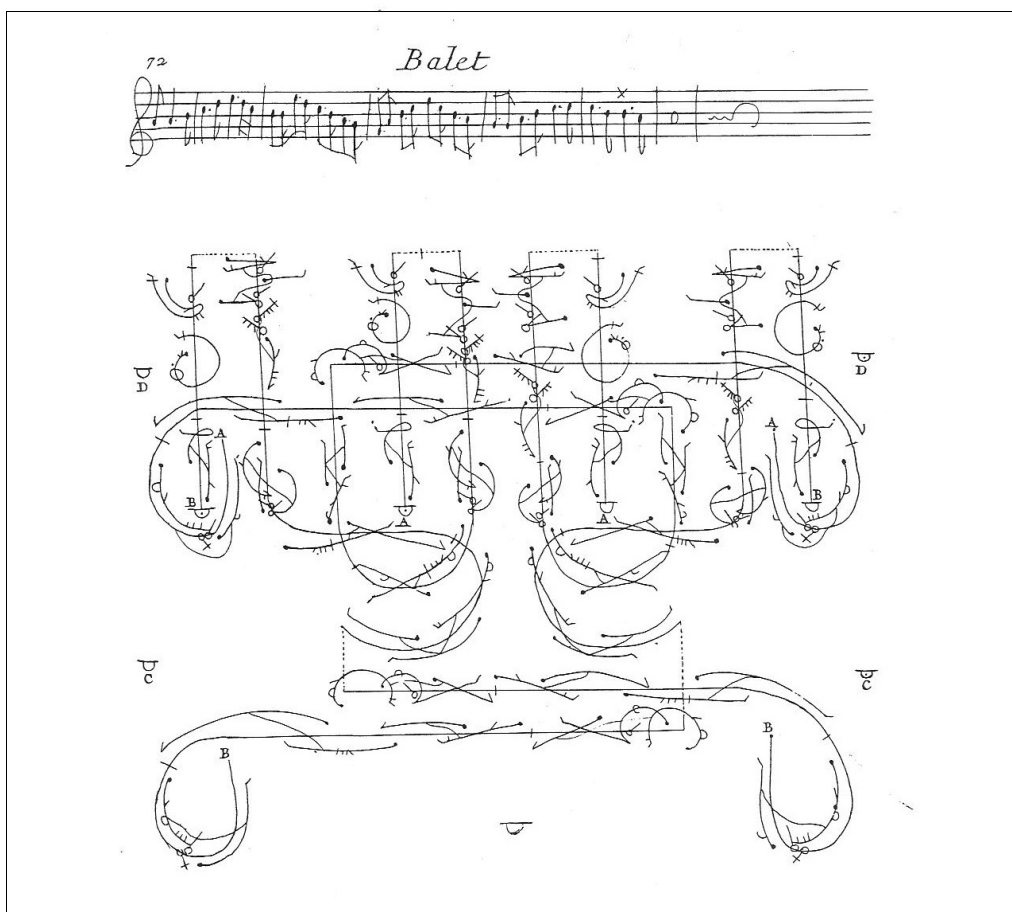


Logisch redeneren

deel 2: extra

Onderwerpen:

- Kwantoren en Venn-diagrammen
- Axiomatische systemen en grammatica's
- Keuzestof: Argumenteren



Hoofdstuk 8 Kennismaking met kwantoren en Venn-diagrammen

- 1 Zie het krantenartikel hiernaast. Neem aan dat die kop letterlijk waar is. Je bent er achtergekomen dat Nico een Amsterdammer is. Wat kun je zeggen over de eerlijkheid van Nico?

Amsterdammer niet eerlijk

Van een verslaggever

AMSTERDAM – Amsterdammers zijn geen eerlijke mensen. Slechts één op de twee zal een op straat gevonden mobieltje teruggeven aan de eigenaar.

Verslaggevers van het blad *Reader's Digest* lieten in grote steden

van 32 landen in totaal 960 mobiele telefoons achter. Van de dertig stuks die ze in Amsterdam lieten liggen, werden er veertien teruggebracht. Alleen in Hongkong en Kuala Lumpur was dat minder: dertien stuks.

Toeristen in Amsterdam waren eerlijker dan de bevolking. Tot vier keer toe pakte een buitenlandse

bezoeker de telefoon van straat op, die steeds werd geretourneerd.

Mannen gaven acht van de 21 gevonden mobieltjes terug, terwijl zes van de negen vrouwen die een telefoon vonden het apparaat inleverden.

De Sloveense stad Ljubljana is het eerlijkst: 29 van de dertig telefoons werden teruggegeven.

Als je de krantenkop letterlijk neemt, dan zeg je eigenlijk:
“Alle Amsterdammers zijn niet eerlijk.”

Zulke proposities met *alle* of synoniemen daarvan, komen veel voor. Daarom is er een speciale notatie ingevoerd:

$$\forall x[x \text{ is een Amsterdammer} \Rightarrow x \text{ is Oneerlijk}]$$

Dit kun je lezen als:

voor alle x -en (uit een bepaald domein) geldt: als x een Amsterdammer is, dan is x Oneerlijk.

Nog korter:

$$\forall x[A(x) \Rightarrow O(x)]$$

Met de voor de hand liggende afkortingen. Hierbij moet het domein bekend zijn. Bijvoorbeeld de inwoners van de randstad.

- 2 Geef nog een paar voorbeelden van bruikbare domeinen voor bovenstaande logische zin.

$\forall$ heet de **Voor-Alle-kwantor** (of ook wel de al-kwantor). Het begrip kwantor zegt iets over aantallen.

Terug naar de krantenkop. Het artikel beschrijft een experiment. In enkele Europese steden is een aantal mobieltjes neergelegd alsof iemand ze verloren is. Vervolgens telde men het aantal mobieltjes dat werd teruggebracht nadat iemand er één gevonden had. Daarbij scoorde Amsterdam het laagst. Aardig detail: onder de terugbrengers in Amsterdam bevonden zich veel buitenlanders.

- 3 a. Wat is nu je commentaar op bovenstaande krantenkop?

b. Geef ook commentaar op het experiment.

- 4 Voor de balans hiernaast een stukje over Rotterdammers.

Bij deze opdracht heb je nog geen kwantoren nodig.

Geef met behulp van enkele afkortingen de uitgangspunten in de redenering. Om de redenering compleet te krijgen moet je enkele *verzwegen premissen* boven water halen. Behandel die net zoals de andere.

Stel nu op overzichtelijke wijze de volledige redenering op.

Rotterdammer leeft korter

Van onze Rotterdamse redactie

ROTTERDAM, vrijdag
Rotterdammers leven gemiddeld anderhalf jaar korter dan andere Nederlanders.

De inwoners van de Maasstad lijden onder de concentratie fijn stof in de Rotterdamse lucht, die 13 procent hoger ligt dan in de rest van het land. Bovendien zijn er relatief meer rokers, hebben de inwoners vaker last van overgewicht en bewegen ze te weinig. Dat blijkt uit onderzoek van het Erasmus Medisch Centrum. Volgens onderzoeker Lex Burdorf zitten veel Rotterdammers in de bijstand en zijn ze laaggeschoold. Hierdoor krijgen ze te maken met slechtere huisvesting en arbeidsomstandigheden.

Kwantoren worden ook gebruikt in de taalkunde. Uit het boek *Betekenis en Taalstructuur* van de Jong, Oversteegen en Verkuyl zullen we een aantal voorbeelden gebruiken. Het boek is bestemd voor de studie taalwetenschap en verwante vakgebieden, waarin de interpretatie van taalvormen een belangrijke rol speelt. In het boek staat het volgende voorbeeld:

(25)	a.	Erica roskamt alle paarden	a'. $\forall x [P(x) \rightarrow Ro(e,x)]$
	b.	Dirk geeft alle paarden aan Erica	b'. $\forall x [P(x) \rightarrow Ge(d,x,e)]$
	c.	Iedereen zag Dirk	c'. $\forall x [Me(x) \rightarrow Zi(x,d)]$
	d.	Erica gooide alle ballen naar Dirk	d'. $\forall x [Ba(x) \rightarrow G(e,x,d)]$

In (25c) is de kwantor beperkt tot mensen. Dit houdt voor B in dat Dirk en Erica beiden Dirk zagen: Dirk zag dus zichzelf. Het gebruik van *iedereen* voor twee personen is hier wat ongewoon, maar het is wel correct.

Bekijk de zinnen a, b, c en d. De inhoud lijkt erg gekunsteld. Bedenk dat het hier gaat om de structuur van de zinnen.

5 Een puzzeltje vooraf:

- In de symbolisaties a', b', c' en d' komen een aantal afkortingen voor. Maak daarvoor een verstaalsleutel.
- Bestudeer de paren zinnen. Wat betekent $Zi(x,d)$?
- Schrijf zelf twee zinnen op die het gebruik van de al-kwantor illustreren.

6 Amsterdammers zijn niet eerlijk.

- Op de stippen kan een synoniem van alle staan. Geef enkele voorbeelden.
- Op de stippen kunnen ook andere uitdrukkingen over aantallen ingevuld worden. De betekenis van de zin verandert dan. Geef hiervan enkele voorbeelden. (Je mag de zin aanpassen.)

In de volgende opgave introduceren we nog een kwantor.

7 Een groep mensen zit in zaal 24 (niet roken). Je komt binnen en merkt op:

“Iemand heeft hier gerookt.”

- Hoeveel personen komen in aanmerking?
- Kunnen er twee personen gerookt hebben?
- Kan er één persoon gerookt hebben?
- Kan niemand van deze groep gerookt hebben?
- Kan de hele groep gerookt hebben?

De oorspronkelijke zin kan zo gelezen worden:

“Er bestaat minstens één persoon die gerookt heeft.”

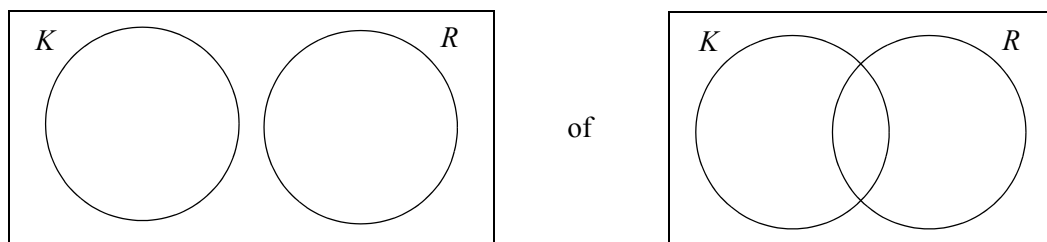
In symbolische taal schrijft men:

$$\exists x [R(x)]$$

Stel persoon a heeft gerookt. Dan geldt $x = a$, dus $R(a)$. En dat is weer een vertrouwde propositie.

$\exists$ heet de **Er-Is-kwantor** (of ook wel de existentiële-kwantor).

De mensen die zich in de kamer bevinden vormen het domein waaruit x gekozen wordt. Het domein kan, indien gewenst, in de formule worden aangeduid: $\exists x[K(x) \wedge R(x)]$. Dan is de volgende grafische voorstelling voor de hand liggend:



Deze tekeningen heten **Venn-diagrammen**.

Binnen de cirkel K bevinden zich alle in de kamer aanwezige personen. Binnen R alle rokers (bijv. in het gebouw).

8 Waarom past het tweede plaatje beter bij het verhaal?

9 a. In het plaatje hiernaast zijn een aantal elementen (personen) getekend.

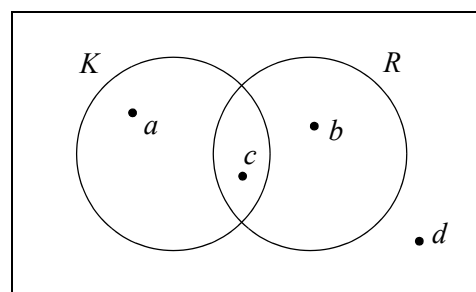
Welke eigenschappen hebben de elementen a , b , c en d ?

b. Een mogelijke notatie is $K(a) \wedge \neg R(a)$.

Of in woorden:

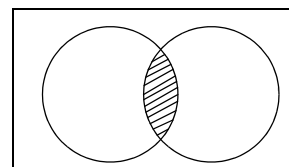
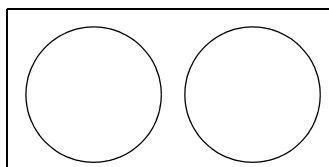
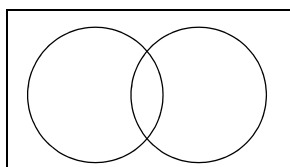
a bevindt zich in de kamer, maar is geen roker.

Schrijf ook zo'n logisch zin voor de elementen b , c en d .



Bij het tekenen van Venn-diagrammen zijn enkele afspraken:

- De grote rechthoekige omheining laat men vaak weg (toch kan die nuttig zijn).
- Stel dat in de loop van de opgave blijkt dat K en R geen gemeenschappelijk element hebben en je hebt al het linker diagram getekend, dan kun je opnieuw beginnen met het middelste diagram, maar handiger is om aan te geven dat de doorsnede (het deel dat in beide verzamelingen zit) leeg is zoals in het rechterdiagram.



Venn-diagrammen beschrijven eigenschappen van verzamelingen elementen. In de wiskunde is verzamelingenleer een aparte tak van sport.

10 Hieronder zie je weer een kopie uit het taalkunde boek.

a. Erica roskamt een paard	c. $\exists x[P(x) \wedge Ro(e,x)]$
a'. Dirk geeft een paard aan Erica	a'. $\exists x[P(x) \wedge Ge(d,x,e)]$
b. Dirk geeft Albert aan iemand	b'. $\exists x[Me(x) \wedge Ge(d,a,x)]$
c. Erica zag sommige paarden	c'. $\exists x[P(x) \wedge Zi(e,x)]$
d. Erica gooit een bal naar Dirk	d'. $\exists x[Ba(x) \wedge G(e,x,d)]$

Bestudeer ook deze paren van zinnen. Wat betekent $G(e,x,d)$?

11 Bij het zoeken op internet kun je meestal gebruik maken van AND en OR.

Op woensdag 9 april 2008 gaf dat de volgende resultaten:

Amsterdammer:	341.000 hits.
leugenaar:	174.000 hits
Amsterdammer AND leugenaar:	39.000 hits
Amsterdammer OR leugenaar:	476.000 hits

Verklaar deze getallen.*

In een juridische handboek staat het volgende over zoeken op internet:

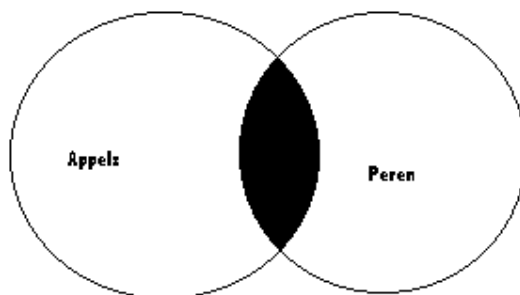
Booleaanse operatoren zijn logische zoekoperatoren, genoemd naar de Engelse wiskundige George Boole (1816-1854). Met de operatoren AND, OR en NOT kunnen relaties tussen zoektermen worden aangegeven, waardoor er preciezer gezocht kan worden.

AND = alle zoektermen gecombineerd met AND moeten in een pagina voorkomen.

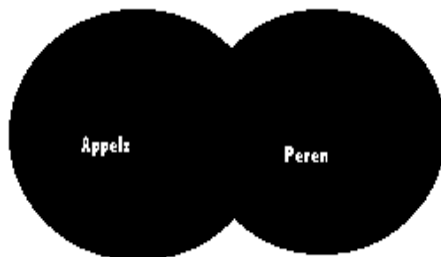
OR = bij zoektermen gecombineerd met OR hoeft maar één van de termen voor te komen.

NOT = met NOT geef je aan dat een zoekterm niet in een pagina voor mag komen.

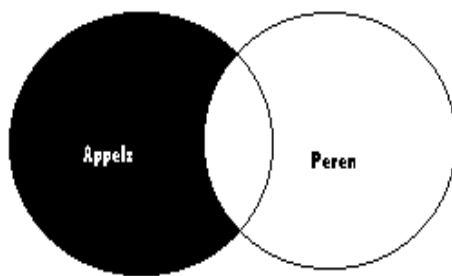
Bijvoorbeeld de zoekvraag: **appels AND peren** heeft als resultaat pagina's waarin de termen appels en peren beide voorkomen. In onderstaande figuur is dit geïllustreerd.



Zoekvraag: **appels OR peren**. Resultaat: pagina's waarin in ieder geval één van beide termen voorkomt. Pagina's waarin beide termen voorkomen behoren natuurlijk ook tot de resultaten.



Zoekvraag: **appels NOT peren**. Resultaat: pagina's waarin wel de term appels voorkomt, maar niet de term peren.



AltaVista heeft een afwijkende not-operator. Daar dien je AND NOT te gebruiken om een term uit te sluiten. Bovenstaande zoekvraag zou bij AltaVista als volgt geformuleerd moeten worden: **appels AND NOT peren**.

* Zie ook "De Google-dans" in het tijdschrift Pythagoras (nummer 1, september 2008).

12 Verderop in het juridische handboek staat:

Je kunt de verschillende operatoren ook combineren in één zoekvraag. Zoek je bijvoorbeeld informatie over campings op Terschelling of Ameland, dan zou je zoekvraag er zo uit kunnen zien:

camping AND (Ameland OR Terschelling)

Het trefwoord camping moet voorkomen, in combinatie met of Ameland, of Terschelling, of beide. Gebruik je de OR operator in combinatie met AND of NOT, plaats dan de OR-verklaring altijd tussen haakjes.

Laat met een voorbeeld zien waarom de haakjes nodig zijn.

13 In plaats van de operatoren AND en NOT maken sommige zoekmachines gebruik van het plusteken (+) en het minteken (-). Een plusteken (+) direct voor een trefwoord betekent dat dit trefwoord in een pagina voor moet komen. Een minteken (-) direct voor een trefwoord betekent dat dit trefwoord niet voor mag komen.

Schrijf de zoekvraag: **appels kiwis +peren -bananen** en gebruik AND, OR en NOT (en haakjes).

14 Logische redeneringen zijn vaak een onderdeel van intelligentie tests!

Zie bijvoorbeeld:

<http://www.123test.nl/iq-test/>

Onderstaande vragen komen uit zo'n intelligentietest.

a. Welke onderstaande conclusies kun je met *echte zekerheid* trekken bij de twee gegeven zinnen?

1. Geen van de Eskimo's is een drinker.
2. Alle dichters zijn drinkers.

Mogelijke conclusies:

- Alle dichters zijn Eskimo's.
- Sommige Eskimo's zijn geen drinkers.
- Sommige dichters zijn Eskimo's
- Sommige niet-drinkers zijn dichters
- Geen stelling is zeker.

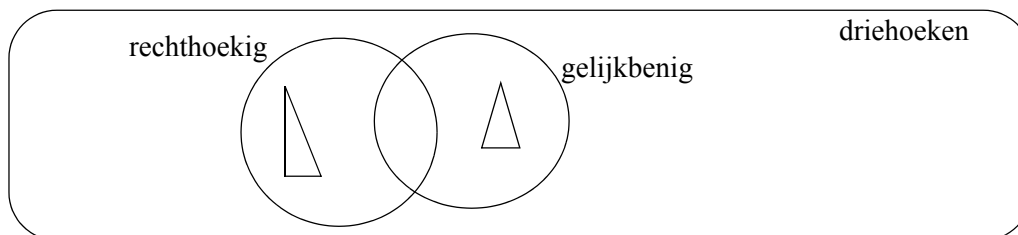
b. Welke conclusies kun je met *echte zekerheid* trekken bij de twee gegeven zinnen?

1. Alle voetballers zijn gezellige mensen.
2. Sommige voetballers zijn lang.

Mogelijke conclusies:

- Geen van de gezellige mensen is lang.
- Alle gezellige mensen zijn klein.
- Sommige gezellige mensen zijn lang.
- Geen voetballer is lang.
- Geen stelling is zeker.

- 15 Er zijn verschillende soorten driehoeken. Hieronder is een begin gemaakt van een Venn-diagram. Teken dit begin in je schrift en voeg nog een paar verzamelingen toe (in ieder geval die van de gelijkzijdige driehoeken) en teken op iedere plek in het diagram een voorbeeld.



Een terugblik op als-dan redeneringen

Met Venn-diagrammen kun je laten zien waarom je een als-dan redenering niet zomaar kunt omdraaien.

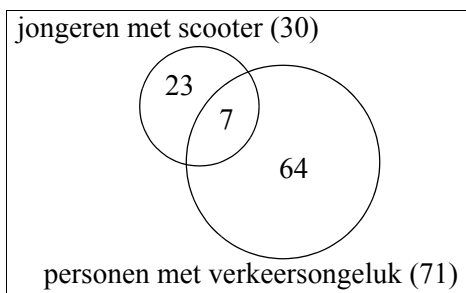
- 16 a. Laat zien dat 'als een driehoek gelijkzijdig is, dan is hij gelijkbenig' niet betekent 'als een driehoek gelijkbenig is, dan is hij gelijkzijdig'.
- b. Geef zelf nog zo'n voorbeeld met behulp van Venn-diagrammen.

- 17 In een wijk in Utrecht hebben een aantal jongeren een scooter. In die wijk waren afgelopen jaar ook een aantal verkeersongelukken. Bij sommige ongelukken waren jongeren met een scooter betrokken.

Welke uitspraak is waar:

"Ongeveer 25% van de jongeren met scooter is betrokken geweest bij een verkeersongeluk."

"Ongeveer 10% van de jongeren in de wijk is betrokken bij een verkeersongeluk."



- 18 Een veelgemaakte redenering is de volgende:

90 % van de longkanker patienten heeft gerookt.

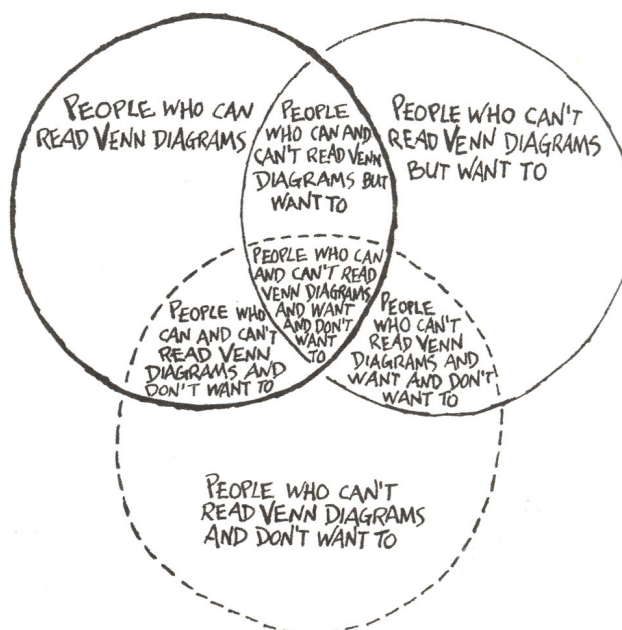
Dus: als je rookt, dan is de kans op longkanker 90%.

Laat met een Venn-diagram zien dat deze omdraaiing niet zomaar is toegestaan.

Samenvatting

Je hebt 7 soorten mensen . . .

Waar zit jij nu?



Hoofdstuk 9 Keuzestof: gemengde opdrachten en wiskundige verdiepingen

Hier komen gemengde opdrachten met kwantoren en Venn-diagrammen. Niet alle opgaven over kwantoren zijn noodzakelijk (de kennismaking is voldoende). Facultatieve opgaven staan aan het eind van dit hoofdstuk en verdiepen het gebruik van kwantoren in wiskundige contexten.

19 Bekijk de volgende uitspraak:

“Alle ongelovigen zijn honden.”

Deze uitspraak is waar zolang je met deze opgave bezig bent.

Wat kun je zeggen over de volgende uitspraken:

- a. Er zijn honden die ongelovig zijn.
- b. Alle gelovigen zijn honden.
- c. Er zijn gelovigen die geen hond zijn.
- d. Als iemand geen hond is, dan is hij niet gelovig.

20 Het domein bestaat uit de gebouwen in een stad.

De eigenschap waar het om draait is het hebben van drie woonlagen, afgekort $D(x)$.

Door de al-kwantor te gebruiken kunnen we onderstaande proposities maken.

a. Geef vertalingen van de volgende drie proposities in normaal Nederlands:

$$\neg \forall x [D(x)]$$

$$\neg \forall x [\neg D(x)]$$

$$\forall x [\neg D(x)]$$

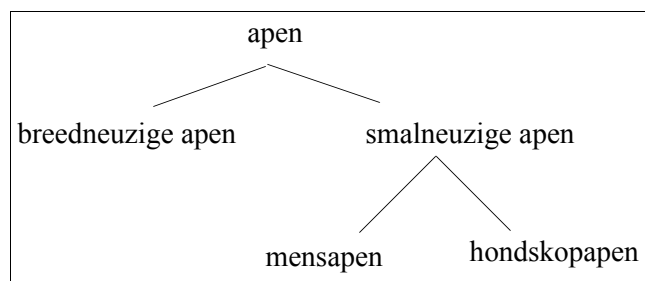
b. Bekijk nu de betekenis van $\exists x [D(x)]$.

Geef op dezelfde manier als bij a de drie logische zinnen met de $\exists$ -kwantor en de vertalingen.

c. Vergelijk de uitkomsten bij de twee verschillende kwantoren. Wat merk je op?

21 De verzameling zoogdieren omvat de verzameling apen.

De apen worden onderverdeeld volgens dit schema:



Schrijf in de taal van de logica (of met Venn-diagrammen):

Alle mensapen zijn apen.

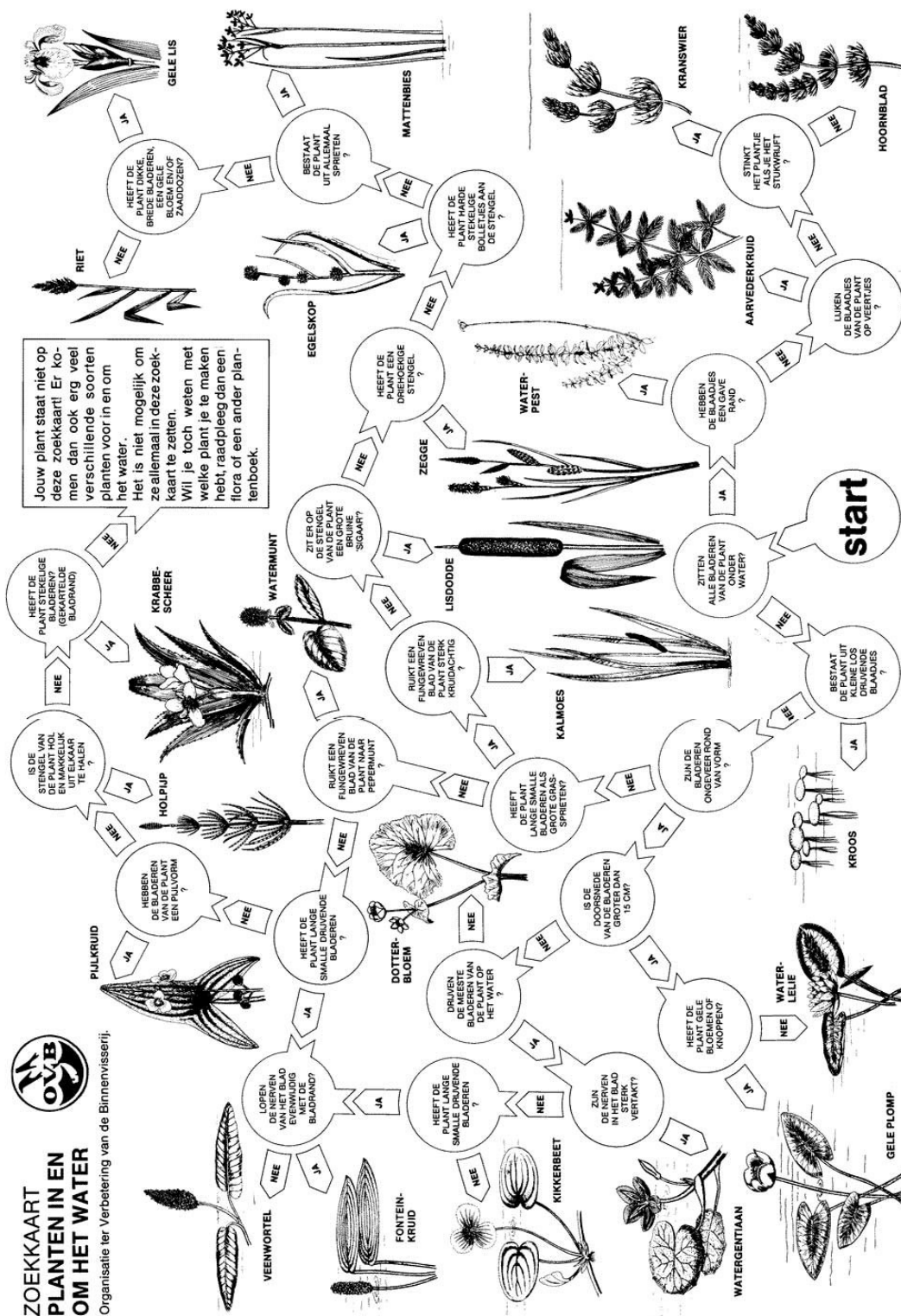
Er zijn smalneuzige mensapen.

Een breedneuzige aap is geen hondskopaap.

Niet alle apen zijn breedneuzig.

22 Hieronder zie je een zoekkaart voor waterplanten (www.natuurinformatie.nl).

Formuleer zelf drie zinnen over de verdeling van deze verzameling planten. Bedenk daarbij eventueel namen voor deelverzamelingen (zoals de breedneuzigen in bovenstaande opgave).



Zie eventueel ook: <http://www.20q.net/> (een website die binnen 20 vragen achterhaalt wat jij in gedachten hebt).

- 23** De punten A , B en C zijn de hoekpunten van een driehoek.
 x is een punt binnen deze driehoek.

a. Is deze uitspraak altijd waar?

$$\exists x[xA = xB = xC]$$

(met xA wordt bedoeld: de afstand van x tot A ; teken een driehoek en bedenk eerst waar de punten liggen met gelijke afstand tot A en B)

b. Kun je in gewone bewoordingen de uitspraak verscherpen?

c. Hoe worden de antwoorden van a en b als x zich ook in de ruimte kan bevinden?

- 24** Een partij zaden is ingedeeld naar zes eigenschappen.
 Eigenschappen W, G en Z sluiten elkaar uit.
 Dat is ook het geval voor S, B en R.

	<u>W</u> it	<u>G</u> rijs	<u>Z</u> wart
<u>S</u> tekelig	14	6	10
<u>B</u> ehaard	0	7	0
<u>R</u> impelig	12	6	8

a. Onderzoek de waarheid van de volgende beweringen.

- $\exists x[W(x) \wedge B(x)]$
- $\neg \exists x[W(x) \wedge \neg B(x)]$
- $\forall x[B(x) \Rightarrow G(x)]$
- $\exists x[B(x) \Rightarrow W(x)]$

b. Symboliseer onderstaande uitspraken in de taal van de logica.

- Alle zwarte zaden zijn rimpelig.
- Niet alle stekelige zaden zijn grijs.
- Alle stekelige zaden zijn niet wit.
- Er zijn geen behaarde zwarte zaden.
- Er zijn geen stekelige grijze zaden.

- 25** Welke kwantoren kunnen op de stippeltjes staan zodat het een ware uitspraak wordt?

a. ... $x[2x + 3 = 4x - 1]$

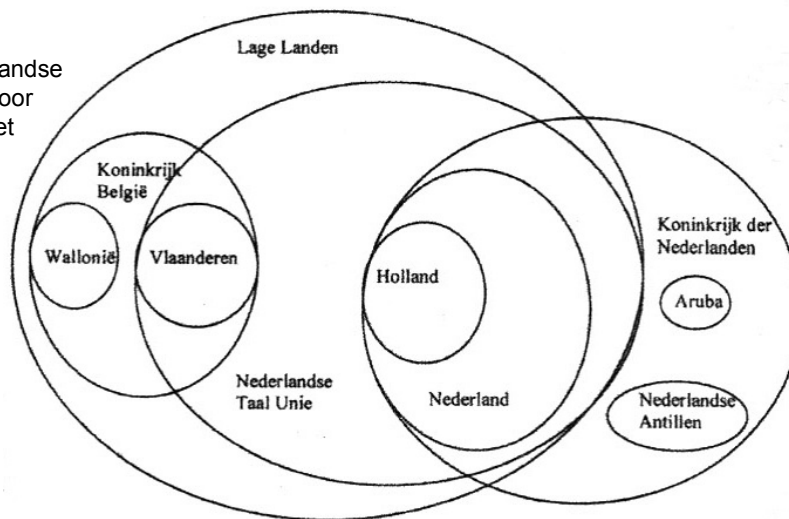
b. ... $x[2x + 3 = 2(x + 1) + 1]$

c. ... $x[(x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3)]$

26 Lees onderstaand artikel. Waar zit jij in het diagram hieronder?

Tuurlijk bestaat Nederland

Een mening inzake de Nederlandse identiteit is één ding. Helder voor het voetlicht krijgen hoe het zaakje in elkaar steekt, is iets anders. Al dat gedoe vanaf de Batavieren, zie het eens bij een buitenlander op de radar te krijgen. Die leest in de krant over 'the Aruban Joran van der Sloot, from The Netherlands', over 'Bruxelles, European capital in the Low Countries', en denkt dat Peter Stuyvesant uit Holland (hoofdstad van Kopenhagen) kwam. Daarom hierbij een plaatje met alle internationaal courante namen voor onze



gewesten, geordend en afgebakend ten opzichte van concurrerende omstreken. Niet schrikken van het dr. Clavangehalte: het is een simpel 'Venn-diagram' om hele en deelverzamelingen te illustreren. (Op verzoek verkrijgbaar in het Engels.)

Zo kunt u in de marge van een vergadering of tijdens een wandeling langs culturele hoogtepunten een buitenlander uitleggen waarom sommige politici vinden dat Arubanen of Walen niet deugen. Ze horen er niet bij, want ze vallen buiten de cultuurgrens van de Taalunie. En ook zijn de gradaties van arrogantie ineens duidelijk: hoe meer cirkels om je identiteit, hoe hoger je status. De volgorde is Hollanders, Vlamingen, Nederlanders, Belgen. Walen en Antillianen doen wat minder mee. Of u wijst op de kleine cirkels en de heel grote cirkel, die allemaal erg oud zijn. Eenheden als Holland, Vlaanderen, Aruba en de Lage Landen gaan al sinds mensenheugenis mee, al verandert de bevolking soms wat van samenstelling.

O, zegt dan de oplettende bezoeker, het zijn de nieuwe cirkels – de koninkrijken van de negentiende eeuw – waarin de problemen spelen, is het niet? Precies, zegt u, pubers zorgen altijd voor moeilijkheden. In die cirkels maken we onze wetten en dat houdt ze jong.

En, zegt dan de waakzame vreemdeling weer, zijn het niet de mensen in de binnenste cirkels die zich druk maken om het verlies van identiteit? Het is toch in Holland en Vlaanderen waar mensen willen dat de vaderlandse geschiedenis er weer toe doet? Ja logisch, zegt u, want zij hebben in hun eigen ogen het meest te verliezen. En dan kunt u zelf wat puntjes zetten in de tekening, bijvoorbeeld waar Ayaan Hirsi Ali staat of stond, en dat het vanuit het Koninkrijk der Nederlanden misschien een grote stap is naar Frankrijk, maar vanuit de Lage Landen helemaal niet.

Wanneer de vreemdeling aanhoudt en vraagt welke cirkel precies groter, kleiner of belangrijker moet worden van de mensen die trots op Nederland willen zijn, antwoordt u in alle eerlijkheid dat niet te weten. Daarna gaat u samen naar de bar.

© Menno Hurenkamp / De Groene Amsterdammer - 15-02-2008

Keuzestof: extra wiskundige opdrachten

27 Onderzoek de volgende proposities op waarheid. Het domein bestaat uit de getallenparen (x, y) .

- $\exists(x, y)[(2x - y = 7) \wedge (3x + 2y = 28)]$
- $\exists(x, y)[(2x - y = 7) \wedge (4x - 2y = 17)]$
- $\forall(x, y)[(2x - y = 7) \Rightarrow (6x - 3y = 21)]$

28 Gegeven is de functie $f(x) = 1/6 x^3 + 1/2 x^2 - 2/3 x + 1$

Er wordt beweerd dat als je voor x een geheel getal invult, $f(x)$ ook weer een geheel getal is.

Een groot aantal waarden van x wordt over de klas verdeeld.

Het blijkt waarachtig te kloppen voor al die waarden!

Een leerling zegt: “het lijkt me sterk dat de bewering onwaar is, dus ik teken ervoor.”

De docent(e): “ik ben niet overtuigd.”

a. Maak het verschil van mening duidelijk met behulp van logische zinnen met kwantoren.

b. Kun jij beslissen welke van de twee zinnen waar is?

29 Onderzoek de volgende proposities op waarheid.

a. $\forall(x, y)[(x + y = \text{even}) \Rightarrow (x \times y = \text{oneven})]$

b. $\exists(x, y)[(x + y = \text{even}) \Rightarrow (x \times y = \text{oneven})]$

c. $\forall(x, y)[(x \times y = \text{oneven}) \Rightarrow (x + y = \text{even})]$

d. $\exists(x, y)[(x \times y = \text{oneven}) \Rightarrow (x + y = \text{even})]$

e. $\forall x[((x = a + b) \wedge \text{Priem}(a) \wedge \text{Priem}(b)) \Rightarrow (x = \text{even})]$

f. $\forall x[(x = \text{even}) \Rightarrow ((x = a + b) \wedge \text{Priem}(a) \wedge \text{Priem}(b))]$

30 De volgende logische zinnen gaan over veelhoeken die vierhoeken (V) zijn en waarvan diagonalen elkaar middendoor kunnen snijden (DM). Onderzoek de volgende uitspraken op waarheid.

a. $\forall x[V(x) \Rightarrow DM(x)]$

b. $\forall x[V(x) \wedge DM(x)]$

c. $\forall x[V(x) \vee DM(x)]$

d. $\forall x[DM(x) \vee \neg V(x)]$

31 Onderzoek de volgende uitspraken en verbeter ze als ze in deze vorm niet waar zijn.

a. “Het getal a is een drievoud mits a niet even is.”

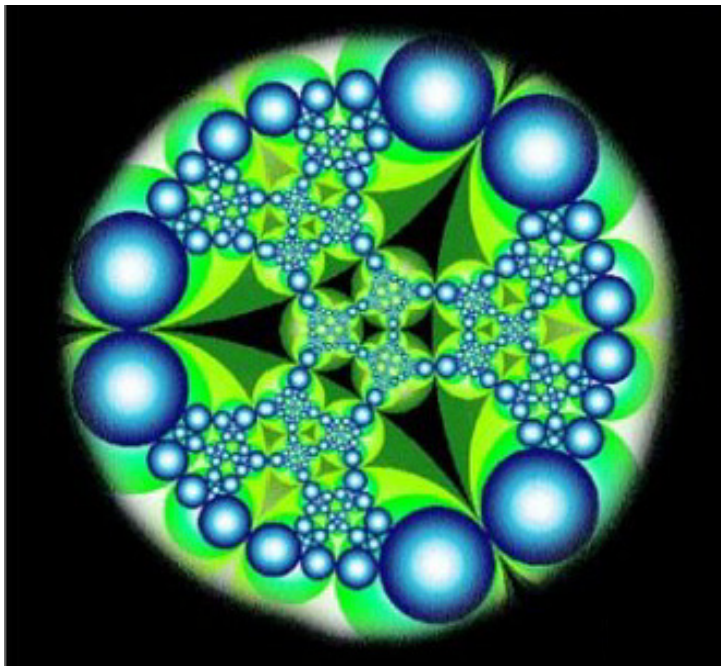
b. “Als $(x + 1) \cdot (x - 2) = 0$, dan $x = 2$.”

c. “De lengte is drie, want de lengte in het kwadraat is negen en de lengte moet groter dan nul zijn.”

d. “Stel p is even en q is oneven en p kun je delen door q en $p/q = r$. Dan is r ook oneven, want als r even zou zijn, dan zou $r \cdot q$ oneven zijn, terwijl $r \cdot q$ gelijk moet zijn aan p en die was even.”

Hoofdstuk 10 Kennis in kaart

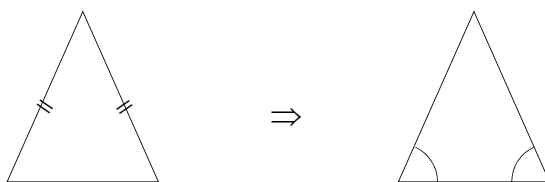
32 Bekijk onderstaande parelketting:



- a. Welke meetkundige transformaties (spiegelingen en rotaties) kun je in deze tekening zien?
- b. Hoeveel symmetrie-assen heeft de tekening?
- c. Als je een deel van de tekening hebt, dan kun je van daaruit de hele tekening construeren. Geef in de tekening een zo klein mogelijk deel aan waarmee dat lukt.

33 Deze opgave gaat over proposities uit de elementaire meetkunde.

Propositie A: In een gelijkbenigedriehoek zijn de basishoeken gelijk.

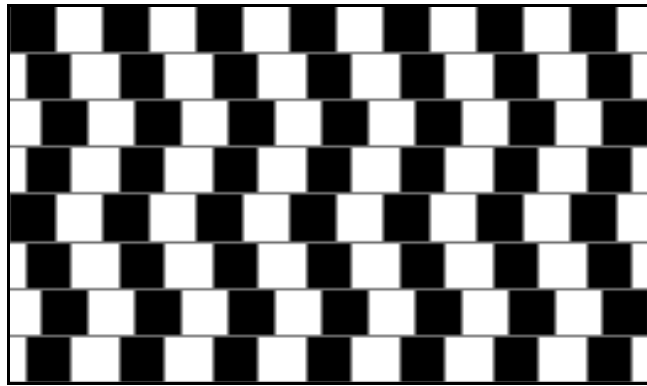


Propositie B: In een gelijkbenige driehoek staat de bissectrice (hoekdeellijn) vanuit de top naar de overstaande zijde, loodrecht op die zijde.



Veronderstel dat propositie A waar is. Hoe kun je daaruit dan de waarheid van propositie B afleiden? Eenvoudiger gezegd: Als je A weet, dan krijg je B er gratis bij. Nou ja, je moet er wel wat voor doen.

34 Evenwijdige lijnen?



Bewering: de horizontale lijnen lopen allemaal parallel.

- a. Stel op een paar manieren de waarheid of onwaarheid van deze bewering vast.
- b. Verdedig je oplossingen. Noem daarbij de gebruikte regels (stellingen) uit de meetkunde.

Deze drie opgaven zijn voorbeelden van het volgende idee:

Je hebt een hoeveelheid kennis.

Die kennis is beschreven met behulp van proposities of een andere duidelijke manier.

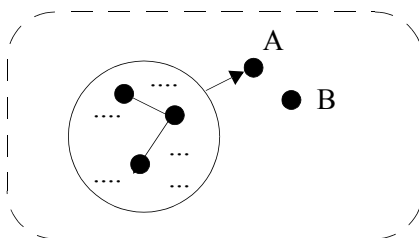
Logische redeneringen maken het mogelijk om de beginkennis uit te breiden: kenniswinst.

35 Ga na of je dit principe in de opgaven herkent.

Je kunt een bepaald kennisgebied zien als een verzameling uitspraken. Voorbeelden van zulke gebieden zijn: meetkunde, planeten, planten hersenen, muziekcomposities en sociale regels.

Maar er is meer: de onderdelen van zo'n gebied hebben een zekere samenhang. Om die samenhang zichtbaar te maken, kun je de kennis ordenen. Daarbij kun je gebruikt maken van het principe van kenniswinst.

Hieronder is beschikbare kennis omcirkeld en in beeld gebracht hoe je daarmee een nieuwe propositie kunt bereiken (kenniswinst):

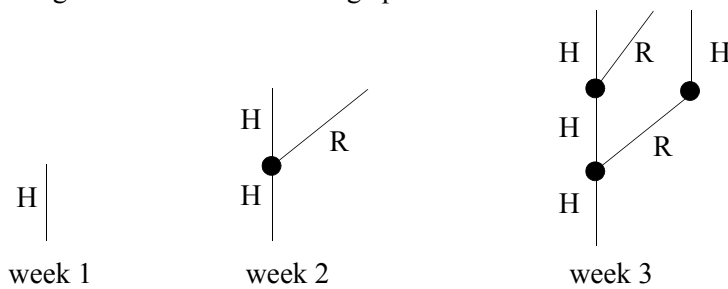


36 In hoofdstuk 1 heb je bewezen:

De som van de hoeken van een vierhoek is 360° .

Kijk nog eens naar dat bewijs en probeer het in deze figuur te plaatsen.

Het volgende voorbeeld illustreert dit principe van kenniswinst.
Bekijk de groei van een denkbeeldige plant:



Voor het schema zijn enkele definities nodig.

H is een omhooggroeiend stengeldeel en R is een naar rechtsgroeiend stengeldeel.

Je kunt de groei dan zo beschrijven:

- Start met H
- op H groeit HR
- op R groeit H

Het resultaat na week 3 kun je ook zo beschrijven: (H)(HR)(HRH)

37 a. Teken de plaatjes van de plant in week 4 en week 5.

- b.** Beschrijf de situaties in week 4 en 5 ook met de letters.
- c.** Gebruik de letters om de situatie van week 6 te beschrijven.
- d.** Onderzoek of in een beschrijving ook RR kan voorkomen.
- e.** Het aantal eindpunten van de plant is achtereenvolgens: 1, 2, 3, 5.
Onderzoek het aantal eindpunten bij week 5, 6 en 7.

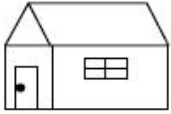
We begonnen met een model van een denkbeeldige plant. De resultaten van bovenstaande onderzoekjes leveren nieuwe kennis over die (denkbeeldige) plant. Dat is kenniswinst dankzij het spelen met definities en de regels voor de groei (zogenaamde *productieregels*). Die definities, de uitgangspunten (axioma's) en de redeneerregels noemt men een axiomatisch systeem.

Het plaatje van kenniswinst kan op twee manieren worden opgevat:

- I** Kies een doel buiten de aannamen. Kun je dat doel vanuit de aannamen bereiken?
Voorbeeld: Kan RR in het patroon van de plant voorkomen?
- II** Begin met de aannamen en onderzoek wat je van daaruit kunt bereiken.
Voorbeeld: Kun je iets te weten komen over het aantal eindpunten van de plant?

38 Hieronder zie je een taal voor het bouwen van huisjes.

Voorbeeld van een huisje:



Symbolen:



Betekenis:

$\rightarrow$ (X , Y) betekent dat X rechts van Y ligt
 $\odot$ (X , Y) betekent dat X in Y ligt
 $\ominus$ (X , Y) betekent dat X onder in Y ligt
 $\uparrow$ (X , Y) betekent dat X boven op Y ligt

Vertalingen

 $\Rightarrow$ $\uparrow$ ( , )

Het linkerdeel van het huisje:


 $\uparrow$ ( , $\ominus$ ( , ))

- Vertaal nu het rechterdeel van het huisje
- Hoe luidt een vertaling van het hele huisje, zoals afgebeeld.
- Met deze taal kun je niet een deur en een raam in een rechthoek plaatsen, leg dat uit!
- Lever een extra bouwregel, waarmee het wel mogelijk is om een deur en een raam in een rechthoek te plaatsen.
- Ontwerp een uitgebreider huis dan afgebeeld (bijvoorbeeld een huis met een garage). Het huis mag niet dezelfde basis als het afgebeelde huis bevatten, maar je mag wel nieuwe bouw-elementen en bouwregels introduceren. Ook mag je de nieuwe bouwregel van onderdeel d. gebruiken. Je levert het huisontwerp en de vertaling met bouwelementen en bouwregels.

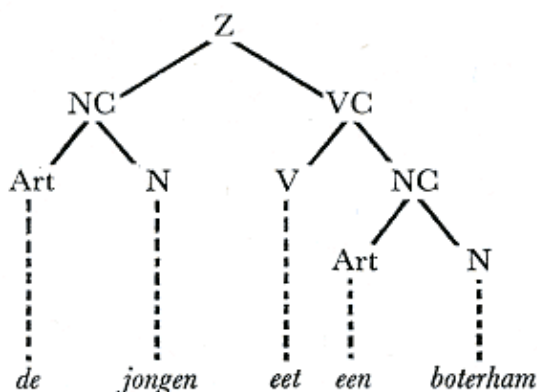
39 In de taalwetenschappen gebruikt men grammatica om de opbouw van zinnen te beschrijven. Bekijk bijvoorbeeld de zin:

“De rode keuken zal snel gemonteerd worden.”

Vertaal deze zin in twee andere talen en vergelijk de opbouw tussen de drie zinnen.
Wat zijn overeenkomsten en verschillen in de structuur?

In de taalkunde worden ook definities en regels gebruikt om zinstructuren te onderzoeken. Hier spreekt dan over generatieve grammatica's. Zo'n grammatica beschrijft een beperkt aantal (herschrijf) regels waarmee zinnen geproduceerd kunnen worden. Een beperkte reeks regels kan er bijvoorbeeld als volgt uit zien (met Z = zin; NC = naamwoordelijk deel, VC = werkwoordelijk deel, V = werkwoord, N = zelfstandig naamwoord):

Z » NC + VC
VC » V + NC
NC » Art + N
V » eet
Art » de, een
N » jongen, boterham



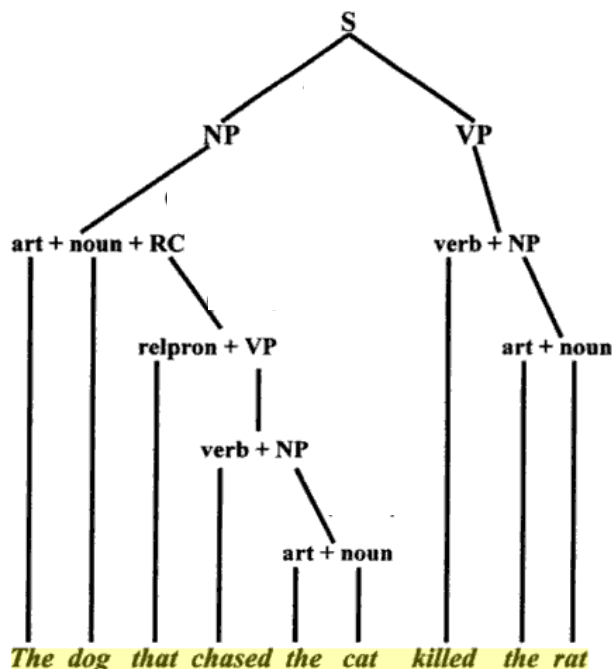
Deze regels genereren de zin “de jongen eet een boterham”. Dat proces wordt geïllustreerd met bovenstaand boomdiagram (zie *bijvoorbeeld* <http://www.let.rug.nl/~kleiweg/alpino/index1.html>). Voor een beschrijving van alle mogelijke zinnen in onze taal zijn natuurlijk veel meer regels nodig. Deze methode biedt echter mogelijkheden om taalstructuren te onderzoeken en te vergelijken.

40 Dit kan lastig worden. Zie bijvoorbeeld de Engelstalige zin:

“The dog that chased the cat killed the rat”

In de figuur hiernaast wordt de structuur van de zin met een boomdiagram beschreven.

- Zoek enkele definities en regels die een rol spelen bij het aanbrengen van deze boom-structuur.
- Vertaal de zin in het Nederlands en beschrijf de structuur met de Nederlandse variant van deze boom.
Hoe verschillen de definities en regels tussen de Nederlandse en de Engelse taal?



Het analyseren van taalstructuren gebeurt ook om talen te vergelijken. Er zijn bijvoorbeeld wetenschappers die beweren dat er sprake is van een universele grammatica die je in alle talen terug vindt.

- 41 In het boek “Gödel, Escher, Bach” van Douglas Hofstadter worden structuren van taal en kunst onderzocht en vergeleken. Daarbij spelen ‘kunsttalen’ een rol.

Bekijk bijvoorbeeld de taal MIU:

De taal bevat drie karakters: M, U en I.

De taal kent het woord (axioma of uitgangspunt): MI

Er zijn de volgende vier regels om nieuwe woorden (zinnen) te maken.

De letters x en y staan voor willekeurige zinsdelen (een reeks van één of meer karakters).



1. $xI \rightarrow xIU$

2. $Mx \rightarrow Mxx$

3. $xIIIy \rightarrow xUy$

4. $xUUy \rightarrow xy$

- Uit de eerste regel volgt dat je de zin MIU kunt afleiden uit MI. Ga dit na.
- Welke regels moet je toepassen om MIUIU te maken?
- (een uitdaging!) Bewijs dat in een zin het aantal I's nooit een drievoud is.
- Is het mogelijk om MU af te leiden?

Samenvatting

Een grammatica (of axiomatisch systeem) beschrijft de systematiek en structuur van woorden en zinnen van een taal. De taal kan ook een volledig formeel-wiskundige beschrijving zijn of bijvoorbeeld een beschrijving van de structuur van een bepaald type muziek- of danscomposities of van de regels in het verkeer.

Definities en redeneerregels (of productieregels) vormen de basis van een axiomatisch systeem. Binnen het systeem kun je nagaan of een zin (of bewering) ‘klopt’, dan moet je die kunnen afleiden met de regels van het systeem. Je kunt ook nieuwe zinnen (bijvoorbeeld composities) produceren door de de regels toe te passen op dat wat je al weet (kenniswinst).

De keuze van definities en redeneerregels is vaak lastig. Je wilt er zo min mogelijk om het systeem overzichtelijk te houden, maar de complexiteit van een systeem vraagt vaak meer detail. Zie bijvoorbeeld de definitie van de fiets voor ons verkeerssysteem. Met die definitie beschrijf je de fiets, maar ook gebruikers van het fietspad. Wil je nu dat een elektrische fiets onder de ‘fietsen’ valt, dan moet je de definitie aanpassen en hoeft je verder niets aan de regels te doen. Maar als in sommige gevallen aparte regels zouden moeten gelden, dan kan het beter zijn om een nieuwe definitie aan je systeem toe te voegen en bij de regels aan te geven of die ook voor de ‘elektrische fiets’ van toepassing is.

- 42 Hierna volgen twee citaten en een plaatje. Een citaat over taalkunde en twee beschrijvingen uit de danswereld. Dit zijn voorbeelden van de rol van structuur en systematische afspraken in beide kunstvormen. Kies een onderwerp (taal, dans, muziek, beeldende kunst, rechtspraak, verkeer, ...) en onderzoek hoe daar een systematische benadering functioneert.

Schrijf een verslag over je bevindingen. Ga daarbij in op de rol van de definities en de redeneerregels voor de beschrijving van het hele systeem (is het overzichtelijk?) en voor het functioneren van het systeem (hoe werk je ermee?).

Een citaat over taal en grammatica

Taal als parasiet

IN DE EVOLUTIONAIRE TAALWETENSCHAP DRAAIT ALLES OM BETEKENIS

Hoe is menselijke taal ontstaan? Volgens de Leidse school van de evolutionaire taalwetenschap is betekenis de drijvende kracht. 'Betekenissen verrijken de mens maar kapselen hem ook in.'

Van Driem ziet de ontwikkeling van taal als een geleidelijk proces, gestuurd door natuurlijke selectie. Met kracht verwerpt hij de visie van generatieve taalkundigen à la Noam Chomsky, die stellen dat taal zich ergens in de afgelopen 200.000 jaar plotseling aandiende, toen de mens syntaxis (grammatica) leerde hanteren. Van Driem: "Generativisten doen heel ingewikkeld over syntaxis. Maar in vergelijking met zoiets ingewikkelds als betekenis is het Spielerei, ook al omdat het wiskundig zo eenvoudig is. Ze negeren dat de cognitieve voorwaarden voor het ontstaan van taal bij primaten allang aanwezig waren. Ook chimpansees en bonobo's kunnen betekenisvol met woordvolgordes omgaan."

De oorsprong van taal heeft volgens Van Driem dus niets te maken met het verwerven van het vermogen om grammatica te hanteren. Voor de evolutie van de menselijke spraakorganen geldt hetzelfde. Het gaat dan om de positie van het strottenhoofd. Waar mensapen door hun neus 'praten' en vooral de toonhoogte van hun klanken kunnen variëren, is de mens tot veel meer in staat. De relatief diepe ligging van het strottenhoofd in onze keel - met het risico van verslikken - verschaft ons een lang spraakkanaal dat lucht via de mond voert, waardoor een veelheid aan spraakklanken kan worden geproduceerd. "Maar", zegt Van Driem, "eerst kwam de taal om vervolgens via natuurlijke selectie de ontwikkeling van het spraakkanaal verder te sturen."

(...)

Onder welke condities kon taal gedijen? Mentale voorlopers zijn volgens Van Driem herinneringen en categorisch denken, met zijn indeling in bijvoorbeeld 'giftige' en 'niet giftige' bladeren. Ook het vermogen te bedriegen speelde een rol. Dat Homo ergaster en zijn opvolger erectus gereedschap hanteerden is op zichzelf geen voorwaarde, eerder een indicatie dat intellectueel het niveau in zicht kwam waarop taal kon ontstaan. Het zijn cognitieve vaardigheden die ook aanwezig zijn bij andere primaten. Dat die geen taal ontwikkelden komt volgens Van Driem omdat alleen de mens op een zeker moment in zijn evolutie over zulke grote hersenen beschikte dat zoiets complex als taal tot de mogelijkheden ging behoren.

"Waar het om gaat is de vergroting van de hersenschors, gepaard gaande met een enorme toename van het aantal mogelijke neuronale verbindingen. Dat graduele proces van natuurlijke selectie in de prehistorie van de hominiden mondde uit in een brein dat rijp was om door taal gekoloniseerd te worden. Vervolgens werd taal, door het voordeel dat zij bood, de dominante factor in de evolutie van het brein. De enorme verdere ontwikkeling van de prefrontale hersenschors is aan taal te danken, niet andersom."

Een citaat over dans, structuur en algoritme

structuurdenken

Forsythe beschikt over systeemkaarten ter ondersteuning van de choreografie, koestert een grote interesse in de grammatica en het functioneren van beweging, beeld en geluid. Beweging en geluid worden gegeneerd in een voortdurend proces van transformatie. Op zich elementair ('simpel') materiaal wordt onder hun handen en in de lijven van de dansers, via betrekkelijk eenvoudige operaties tot complexe, gelaagde, polyvalente constructies in tijd.

Dans is een taal van gecodeerde bewegingen. De academische techniek definieert basisbewegingen aan de hand van horizontale, verticale en transversale assen en vlakken ten opzichte van de (rechtopstaande) rug. De benen worden het liefst uitgedraaid, en de danser presenteert zich bij voorkeur diagonaal of frontaal aan het publiek. Deze drie punten vormen de basis voor een gedetailleerd vocabulaire van gecodeerde bewegingen.

Eén enkele beweging of combinatie van bewegingen kan naar believen de bouwsteen vormen voor een choreografie volgens simpele compositie-regels. Een van Forsythe's geliefde choreografische methodes is de contrapuntische: een aan de muziek ontleend compositieprincipe voor het creëren en fraseren van melodieën bovenop een basismelodie. Het contrapuntisch instrumentarium steunt daarbij vooral op variaties in timing, frasering van het materiaal en elementaire richtingswisselingen (links-rechts, voor-achter, diagonalen), ruimtelijke spiegelingen, canonstructuren, ingebouwde herhalingen. Een choreograaf kan aldus asymmetrieën tevoorschijn toveren uit een perfecte harmonie, en vice versa.

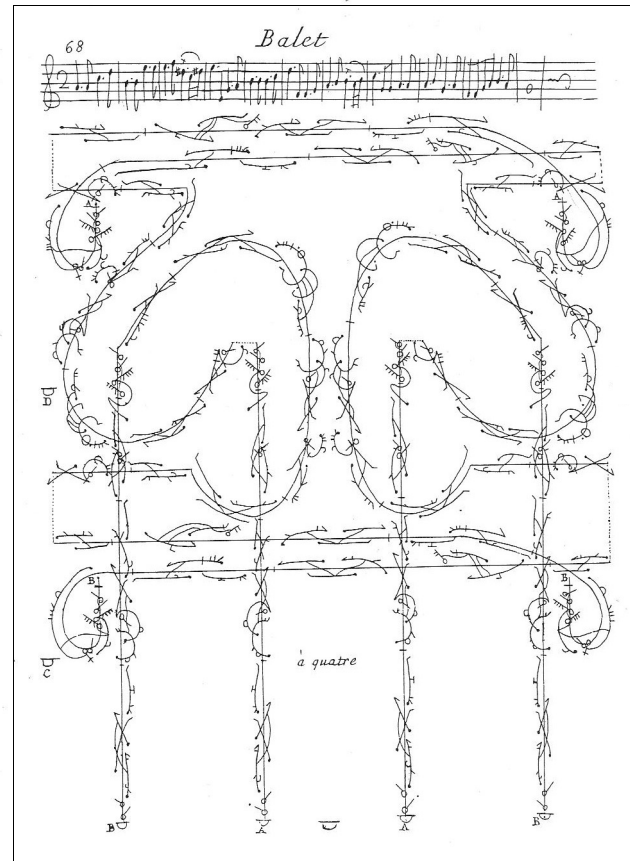
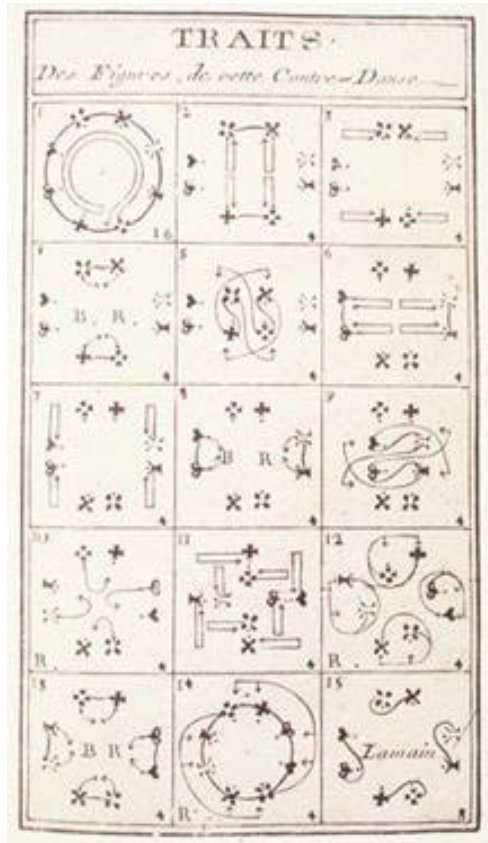
Ieder lichaamsdeel kan ieder waargenomen of denkbeeldig punt, lijn of vorm traceren. Dit punt-punt-lijn principe borduurt verder op Rudolf von Laban's notie van trace-forms. Stel je twee punten in de ruimte voor. Je neemt een lichaamsdeel en verbindt de twee punten: de voet veegt een lijn achterwaarts over de vloer, de atlaswervel traceert de contouren van het plafond. Je kunt ook letters of woorden met een lichaamsdeel beschrijven. Nadere specificaties of inperkingen kunnen gegeven worden in termen van het aantal lichaamsdelen dat opeenvolgend of simultaan in actie komt, de ruimtelijke vlakken waarin bewogen wordt, het behouden van een bepaald volume. Bijvoorbeeld 9-point deployment of de kubus: een danser stelt zich een kubusvormige figuur voor rond het lichaam, met de ruggengraat als verticale as. Ieder van de zes vlakken heeft negen punten: op de uiteinden en midden op iedere lijn. Handen, voeten, of willekeurig welk lichaamsdeel kunnen van punt naar punt bewegen.

Een methode die Forsythe soms hanteert voor het creëren van materiaal. Een bewegingsalfabet wordt gevormd door een verzameling van 26 reeksen geabstraheerde gebaren, manipulaties en andere ('denkbeeldige') handelingen. Voor iedere letter van het alfabet kan een woord worden verzonnen - overwegend namen, werkwoorden, zelfstandige en bijvoeglijke naamwoorden. Daarbij komt een beweging. Bijvoorbeeld: s = scratch: krab-bewegingen. Het eerste woord of beweging in een reeks roept een andere beweging of een volgend woord op. Bijvoorbeeld: scratch = dj > d = disk: van krabben naar platen draaien naar knieschijf, en/of j = jockey: paardenrace. Reeds spoedig ontstaat een associatief verbonden familie van 26 'gedanste woorden'.

De regels voor het genereren van in de tijd opeenvolgende configuraties schrijven onder meer het aantal herhalingen voor, de lengte, de aard van de variaties en ruimte voor eventuele externe ingrepen. Elementaire formeel-geometrische operaties zijn bijvoorbeeld: iedere frase 'vermenigvuldigt' (herhaalt) zichzelf; iedere frase wordt, gelijk een anagram, verlengd met een in de tijd omgekeerde versie van zichzelf; iedere frase wordt verlengd met het eigen ruimtelijk spiegelbeeld achter het origineel; iedere frase 'vermenigvuldigt zichzelf' bij een volgende danser met vaste vertraging.

Een notatie voor ballet

Hieronder zie je een beschrijving van danspassen voor een ouderwetse barokdans in de zogenaamde feuilletnotatie*. Daarsnaast staat een choreografie voor 4 dansers (à quatre). De ononderbroken lijnen stellen verplaatsingen in het platte vlak voor. De symbolen naast de lijnen beschrijven verticale bewegingen, rotaties, ritme, richting en overige bewegingskenmerken.



Vragen die je onderzoek kunnen leiden zijn bijvoorbeeld:

Is de beschrijving links van de mogelijke bewegingen voldoende voor de dans rechts?

Heb je meer informatie nodig om een dans te beschrijven?

Zijn er andere, meer moderne notatiesystemen? Hoe verschillen die van de feuilletnotatie?

Voor meer informatie over de feuilletnotatie, zie:

<http://www.baroque-dance.com/research/dancenotation.htm>

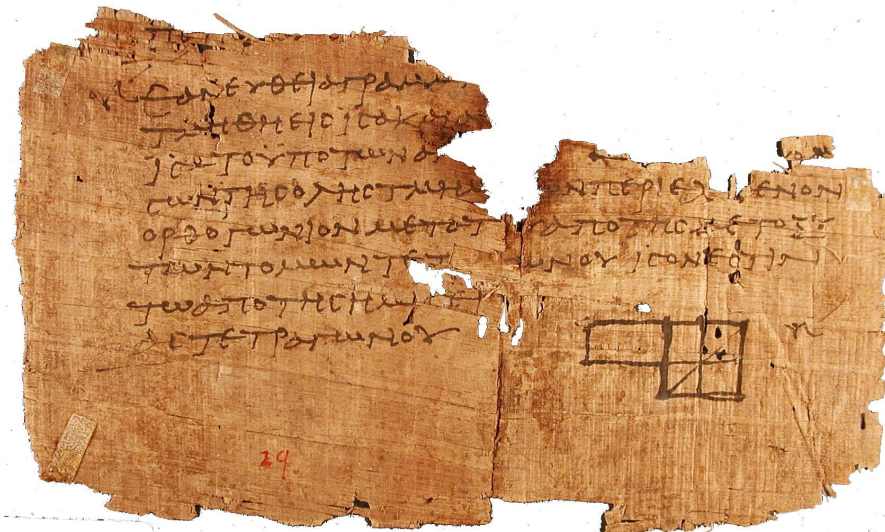
* Het plaatje komt van: <http://www.earlydancecircle.co.uk/>

Keuzestof: Een axiomatische opbouw van de wiskunde

In geen ander vak dan in de wiskunde wordt zoveel aandacht besteed aan het structureren van kennisgebieden met behulp van definities en axioma's. Eigenlijk kun je die activiteit van het structureren wel een typisch wiskundige vaardigheid noemen. Een vaardigheid die in ook in andere vakgebieden, zoals taalwetenschappen, benut wordt.

In deze paragraaf worden twee wiskundige gebieden besproken. De eerste, de elementen van de meetkunde door Euclides, is een beroemd voorbeeld van een axiomatisch systeem.

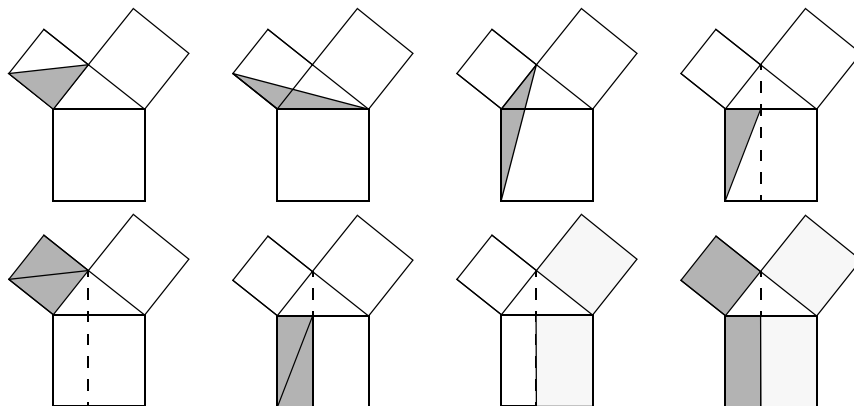
- 43 a.** De Euclidische meetkunde (ca 200 v. Chr.) is het meest bekende voorbeeld van een axiomatisch systeem. Zoek op internet enkele definities, uitgangspunten (postulaten) en algemene regels van dat systeem. Bijvoorbeeld via: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>.



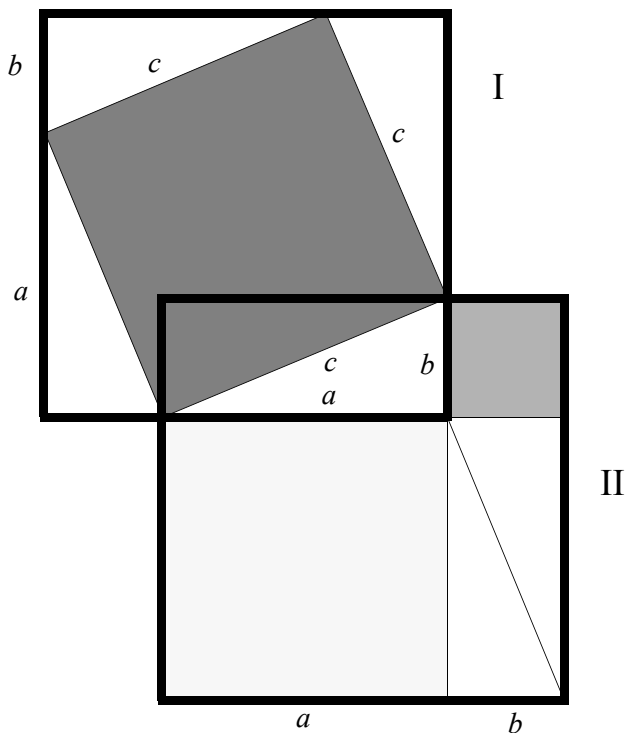
Het Oxyrhynchus-papyrus-fragment van een van de oudste overgeleverde uitgaven van de Elementen, gedateerd op 75-125. Het diagram hoort bij Stelling 5, Boek II.

- b.** Met behulp van de postulaten en redeneerregels is Euclides in staat om een meetkundig systeem van allerlei stellingen (proposities) op te bouwen. Stelling 45 behandelt het construeren van vierkanten op een gegeven lijnstuk. Dit wordt gebruikt bij stelling 47, die bij ons bekend staat als de stelling van Pythagoras. Plutarchus (rond 100 na Christus) vertelt dat Pythagoras een os offerde toen hij de bewuste stelling gevonden had, maar de toeschrijving van stelling 47 aan Pythagoras blijft toch tamelijk onzeker.

De kern van Euclides' bewijs is hieronder in visueel steno vertoond. Geef bij ieder stapje aan waarom de oppervlakte van de gearceerde delen gelijk blijft.



c. Een ander bewijs van de stelling van Pythagoras gaat met algebra:



In het midden van deze figuur zie je een a - b - c -driehoek. De twee grote vierkanten hebben allebei zijden met lengte $a+b$. De oppervlakten zijn dus ook gelijk: $(a+b)^2$. Als je delen van ieder vierkant optelt moet je dus ook op iets identieks komen. Bedenk hierbij dat de oppervlakte van een driehoekje gelijk is aan $a \cdot b/2$.

De oppervlakte van vierkant **I** is: $c^2 + 4 \cdot a \cdot b/2 = c^2 + 2 \cdot a \cdot b$.

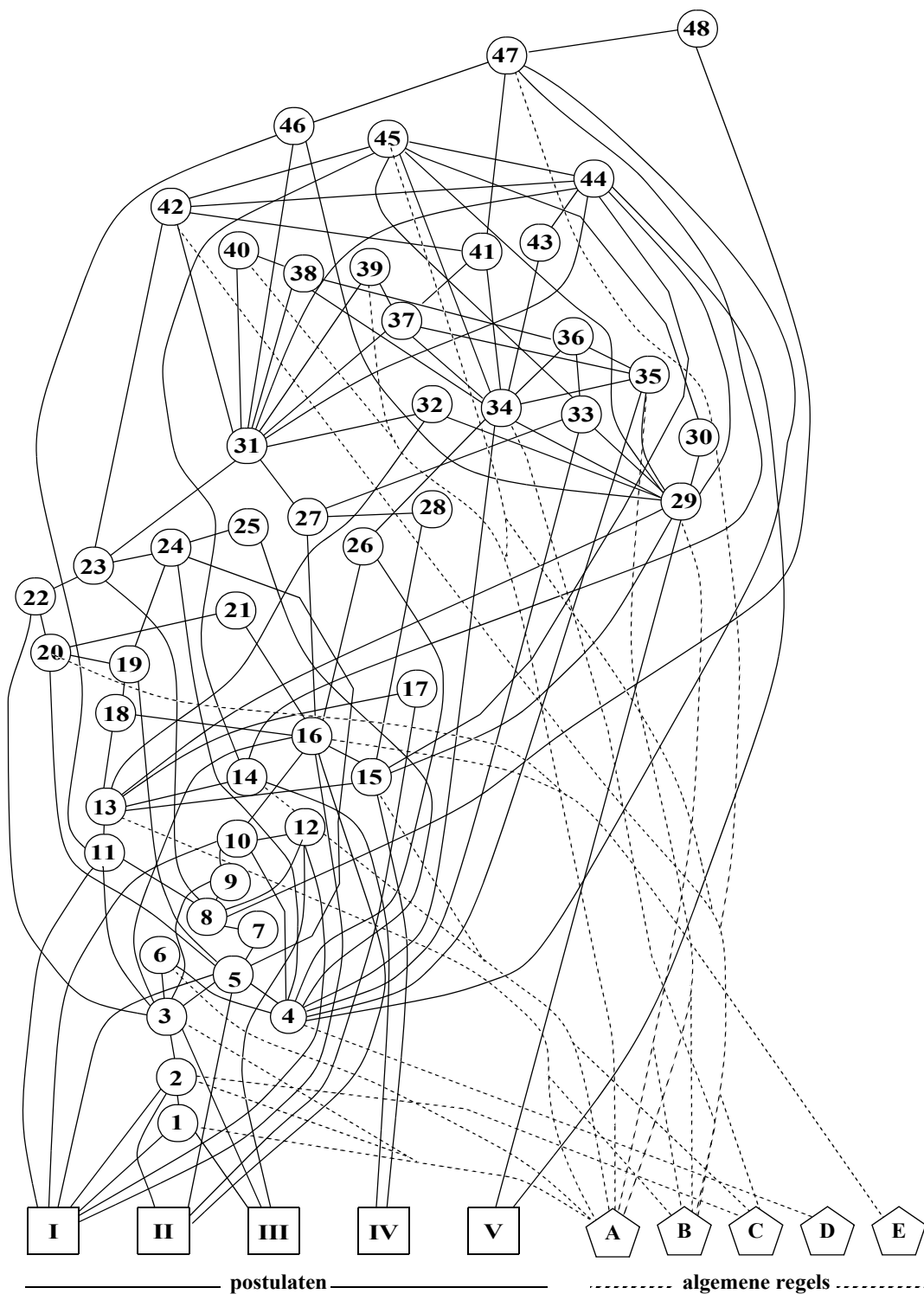
De oppervlakte van vierkant **II** is: $a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$.

Ga dit na en laat zien dat hiermee de stelling van Pythagoras bewezen is.

Een nieuwe vraag bij deze beschrijvingen van een kennisgebied is: wat gebeurt er met mijn systeem als je een uitgangspunt verwijdert? Die vraag heeft een belangrijke rol gespeeld binnen de Euclidische meetkunde, met name rond het zogenaamde parallellenaxioma (postulaat 5).

44 In de volgende figuur* worden de proposities weergegeven door hun nummer in een cirkeltje. Onderaan staan de postulaten en algemene regels. De verbindingslijnen geven aan dat hoger genummerde propositie naar de lager genummerde propositie of naar een postulaat of algemene regel verwijst. Omcirkel de proposities die van postulaat 5 afhankelijk zijn.

* Deze opgave is geïnspireerd door werk van Aad Goddijn en de figuur is van zijn hand



Het voert te ver om dieper in te gaan op de betekenis van je antwoorden bij de vorige opgave. Er is veel over dit onderwerp geschreven en het heeft geleid tot veel nieuwe meetkunde en tot reflecties over de opbouw van de wiskunde. Hier is vooral dit plaatje van belang als illustratie voor het principe van het in kaart brengen van kennis. De aard van het vak maakt dat er zo'n structuur kan worden getoond. Bij andere disciplines is vaak ook sprake van dergelijke structuren, maar die zullen zich minder makkelijk in zo'n figuur laten weergeven.

De verzameling $\mathbb{N}$ van de natuurlijke getallen is ook beschreven met een axiomatisch systeem. Dit gebeurde veel later dan bij de meetkunde: in 1889 door de Italiaan Peano. Peano gebruikte daarbij de opvolger functie S die het getal geeft dat volgt op het gegeven getal. In onze functie taal: $S(n) = n+1$.

Definitie van de natuurlijke getallen

- Er is een natuurlijk getal 0: 0 is een element van $\mathbb{N}$.
- Elk natuurlijk getal heeft een opvolger: als n een element van $\mathbb{N}$ is, dan is $S(n)$ dat ook.
- 0 is niet de opvolger van enig natuurlijk getal: $0 \neq S(n)$.
- Verschillende natuurlijke getallen hebben verschillende opvolgers: als $S(n) = S(m)$, dan $n = m$.
- Een verzameling getallen die 0 bevat en met elk getal ook diens opvolger, is identiek aan de verzameling van alle natuurlijke getallen.

Het enige cijfer dat gedefinieerd wordt is 0. Alle andere cijfers zijn dus eigenlijk niet nodig.

Vervolgens kan de ‘+’ geïntroduceerd worden en gaat optellen als volgt:

$$n + 0 = n$$

$$n + S(m) = S(n + m)$$

Voorbeeld:

$$1 + 1 = S(0) + S(0) = S(S(0) + 0) = S(S(0))$$

En de opvolger van de opvolger van 0 is 2, dus het klopt.

45 Bereken zelf op deze manier $1+2$.

En vermenigvuldigen gaat als volgt:

$$n \cdot 0 = 0$$

$$n \cdot S(m) = n + n \cdot m$$

Voorbeeld:

$$n \cdot 1 = n \cdot S(0) = n + (n \cdot 0) = n + 0 = n$$

46 Laat zien dat uit deze definitie van vermenigvuldigen volgt dat $n \cdot 2 = n + n$.

Is dit handig? Nee. Geeft het inzicht in de natuurlijke getallen? Nauwelijks. Toch bleek deze beschrijving van de natuurlijke getallen een doorbraak binnen de wiskunde. Hiermee kon men eindelijk stellingen over de hele verzameling van de natuurlijke getallen bewijzen.



Giuseppe Peano (1858 - 1932)

Keuzestof: Argumenteren



Argumentatie, ook wel argumentatieleer genoemd, is een groot vakgebied. In het examenprogramma Nederlands is het een apart onderwerp. Daar wordt ook aandacht besteed aan logische vormen en de hoofdtypen van een opbouw van een redenering (bijvoorbeeld de *dus-vorm* en de *want-vorm*) en kenmerken van argumenten (bijvoorbeeld *ondergeschikt* of *nevengeschikt*).

De volgende opdrachten zijn eerst aanzetten voor mogelijke analyses van langere teksten in samenhang met het onderwerp argumenteren bij Nederlands.

Meer zwijnen, meer ongevallen

Door onze redacteur
ARJEN SCHREUDER
ROTTERDAM, 5 JAN. Op de Veluwe hebben zich het afgelopen jaar 543 verkeersongevallen met wilde zwijnen voorgedaan. Dat is meer dan een verdubbeling ten opzichte van 2006, toen er 264 ongevallen gebeurden. Dit blijkt uit nog ongepubliceerde cijfers van de provincie Gelderland.

Oorzaak van de sterke stijging is het grote aantal zwijnen op de Veluwe. Na een aantal jaren waarin veel eikels en beukennoten zijn gevallen, is het voedselaanbod zo groot dat de populatie wilde zwijnen snel is gegroeid tot naar schatting zesduizend. Het streefcijfer is achthonderd zwijnen. Vanaf begin juli zijn er op de Veluwe 3.200 zwijnen afgeschoten, een historisch hoog aantal.

Bij de provincie Gelderland hebben in totaal ongeveer veertig particulieren en bedrijven melding gemaakt van schade door wilde zwijnen. Meldingen konden vanaf november vorig jaar worden gedaan. Het gaat veelal om het vernielen van weilanden, tuinen, bermen en grasvelden. Er wordt melding gemaakt van schade aan hekwerken en afrasteringen. Ook is tweemaal melding gemaakt van een aanval door zwijnen toen wandelaars met een hond door het bos liepen. Uit cijfers van het ministerie van LNV blijkt verder dat het aantal boeren dat schade heeft geleden ook groter is dan vorig jaar.

De beheerders van de Veluwe hadden de provincie Gelderland toestemming gevraagd voor de zogenoemde drukjacht, waarbij de jager hulp krijgt van een tweede man die het wild verstoort en opjaagt. Het besluit om de drukjacht toe te staan is echter door de rechter voorlopig geschorst.

- 47 De titel kan gezien worden als een simpele implicatie: als [*meer zijnen*] dan [*meer ongevallen*]. De tekst geeft een verfijning van de verklaring. Er ontstaat dan een keten van gebeurtenissen. Het startpunt lijkt te zijn: [*meer eikels en beukennoten*]. Verder worden een aantal als-dan argumenten gegeven. Laat zien hoe de aanname en de als-dan constructies leiden tot de conclusie [*meer ongevallen*].

48 Hiernaast staat een oud artikel over de doodstraf.

- a. Bekijk het gedeelte *a* als een stelling.
Gebruik onder andere het gedeelte *b* om een motivatie van de stelling te geven.
- b. Is het gedeelte *c* een logisch gevolg van de stelling uit *a* ? Welke redeneervorm is gebruikt?
- c. In het gedeelte *d* wordt eigenlijk gezegd dat ondanks de doodstraf de gijzelingen zullen doorgaan. Maak de argumentatie duidelijk.
- d. Wat is het 'principe' uit het gedeelte *e* en hoe wordt het in de argumentatie gebruikt?
- e. Welk 'verzwegen' uitgangspunt speelt in gedeelte *f* een rol?

Soms worden uitgangspunten verzwegen omdat ze vanzelfsprekend zijn. Maar er kan ook sprake zijn van boze opzet.

- f. Is het verzwijgen van uitgangspunten in dit geval erg?

Doodstraf

Premier Rabin van Israël heeft een pleidooi gevoerd voor het invoeren van de doodstraf als middel om het kaperen van vliegtuigen en het gijzelen van passagiers tegen te gaan.

Als je vliegtuigkapers (of guerrillastrijders en dergelijke) gevangen houdt, zo is zijn redenering, dan loop je het gevaar nieuwe kapingen en gijzelingen uit te lokken. Collega-terroristen zullen zich allicht groepen voelen een nieuwe actie op touw te zetten om hun vrienden uit het gevang los te krijgen. Dat risico loop je niet als je niet met de gevangenis, maar met de dood straft, aldus Rabin.

De redenering heeft het voordeel van een grote eenvoud, maar desondanks is zij naar onze mening onjuist en dat zowel om praktische als principiële redenen.

Wat de praktische kant aangaat: het is waar dat bij zo'n gijzelingsactie meestal gevraagd wordt om vrijlating van een aantal met name genoemde gevangenen. Maar het getuigt van te weinig inzicht in wat terroristen en consorten beweegt om te menen, dat deze acties slechts worden ondernomen uit vriendschap; ter bevrijding van gevangene collega's.

Maar afgezien van de praktische ontoereikendheid; de redenering van Rabin is ook principieel gezien onjuist. In zijn opzet worden zijn tegenstanders niet gedood om wat zij gedaan hebben, om datgene waarvoor zij persoonlijk en individueel verantwoordelijk en aansprakelijk zijn, maar voor iets wat a n d e r e n eventueel wel eens zouden kunnen doen. Een uiterst hachelijke redenering om daaraan zo ingrijpende beslissing over leven en dood mee te rechtvaardigen en eigenlijk alleen maar bruikbaar om er de gevaren van een pragmatisch redeneren mee te illustreren.

49 In het begin van dit boekje stond een opgave over verschillen in strafmaat (opgave 22 op pagina 49).

We hebben het commentaar van een jurist gevraagd. Zijn reactie is:

'De strafmaat wordt o.a. bepaald door het wettelijk strafmaximum (de bovengrens) en de beleidsregels van het OM. Een ondergrens/strafminimum is er (nog) niet. Desalniettemin bestaat er voor de strafrechter veel ruimte om in een individueel geval een strafmaat vast te stellen. De rechter kijkt naar de ernst van het feit, de omstandigheden waaronder het feit is begaan, de persoon van de verdachte en zijn of haar persoonlijke omstandigheden.

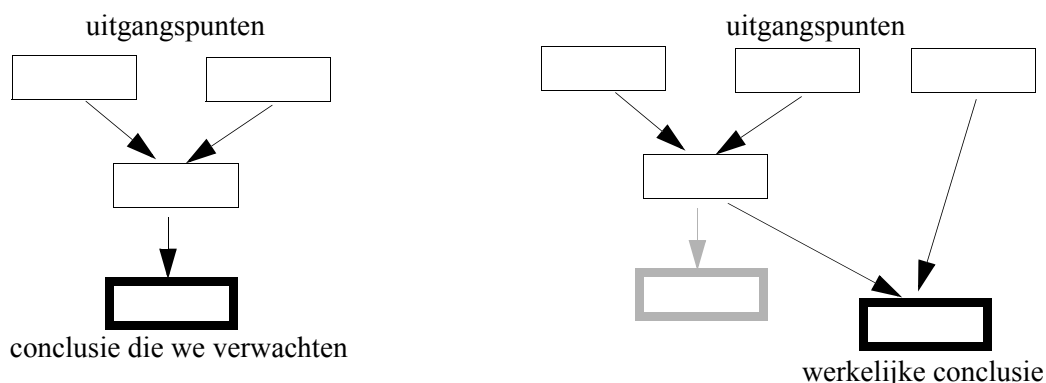
De penningmeester uit Kessel lijkt erg mild bestraft te zijn, terwijl de vrouw die collectegeld stal zwaar werd bestraft. Ik heb echter de indruk, dat de penningmeester is veroordeeld voor verduistering (321 WvSr) en de vrouw wegens diefstal (310 WvSr). Diefstal kent een zwaarder wettelijk strafmaximum dan verduistering. Bovendien geven de krantenartikelen weinig informatie over de persoonlijke omstandigheden van de daders. Misschien is de vrouw al eerder veroordeeld en de penningmeester niet eerder. Het kan m.i. dus best zo zijn, dat de verschillen in strafmaat, als kennis wordt genomen van het gehele strafdossier, verklaarbaar zijn.'

Is de strafmaat dus een kwestie van logisch redeneren?

Complicaties

In de redeneringen die we tot nu toe hebben gezien leidden een aantal uitgangspunten tot een conclusie. De vraag was of die conclusie gerechtvaardigd is op grond van de uitgangspunten. In dat geval kun je zeggen dat de conclusie waar is als de uitgangspunten waar zijn. Voor het beantwoorden van die vraag gebruik je redeneerregels (zoals de modus ponens) en waarheidstafels.

Het toepassen van logica kan niet altijd recht-toe-recht-aan. In het voorgaande staan voorbeelden waarbij zinnen soms een beetje moesten worden aangepast om duidelijke beweringen (proposities) te krijgen. Maar er kunnen zich ook nog andere complicaties voordoen. Als je een situatie met behulp van logica bestudeert, dan is één van de taken om uitgangspunten en conclusie in de tekst te identificeren. En daar kan het mis gaan. We laten eerst de structuur van het probleem zien, daarna volgt een voorbeeld.



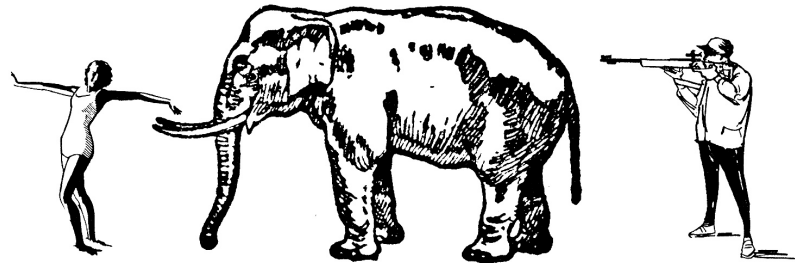
Het blijkt dat een verwaarloosd uitgangspunt een onverwacht zij-effect heeft en daarmee de redenering naar een andere conclusie leidt. Er is dan sprake van een zogenaamde vork in de redenering. Een vork kan twee, drie of meer tanden hebben.

Dierenbescherming

werkt averechts

Een plan om wilde dieren te beschermen, stuwt de jacht en handel in die dieren op.

Als een wilde diersoort in aantal achteruit kachelt, omdat de soort bejaagd wordt voor de handel, kan de handel in (delen van) zo'n dier verboden worden. De diersoort komt dan op de lijst van CITES, de conventie over internationale handel in bedreigde wilde dieren en planten. Maar achttopzieners en douaniers moeten eerst weten om welke soort het gaat en waar ze op moeten letten. Tussen nominatie voor die lijst en controle in de praktijk verstrijken acht tot vijftien maanden. De jagers en handelaars reageren veel



sneller op de nominatie en voeren hun inspanningen op. Zij halen de buit binnen nu het nog kan. Daarom neemt de jacht op en handel in binnenkort beschermde dieren ineens fors toe, zo ontdekten Philippe Rivalan en collega's van de

Universiteit van Zuid-Parijs (*Nature*, 31 mei). Als het verbod in werking is, kan de handel illegaal verder gaan. Rivalan pleit ervoor dat autoriteiten tegelijk met een nominatie de quota invoeren en die veel strenger controleren.

50 Wat is 'het onverwachte zij-effect' in de volgende tekst over dierenbescherming.

Terugredeneren

De logica die je tot nu toe hebt gehad is het begin van een vak met uitlopers in allerlei probleemgebieden. Eén van die gebieden is de geneeskunde. Wat je dan weet van oorzaak (diagnose) en gevolg (symptoom) maakt dat je met als-dan vormen terug moet redeneren. Een voorbeeld stond in deel 1:

De ziekte van Lyme wordt overgedragen door de teek. Hoewel het diertje onschuldig lijkt, is het in staat om de bacterie die de ziekte van Lyme veroorzaakt - de bacterie *Borrelia burgdorferi* - op mensen over te dragen. Zeker in de zomer en het najaar is het oppassen geblazen. Dan kan een gezellige wandeling door het bos, uitlopen op een regelrechte ramp. Je kunt er behoorlijk ziek van worden.

In een folder over tekenbeten staat dat je het beste contact met je huisarts kunt opnemen als:

- een rode vlek op de huid ontstaat die steeds groter wordt (S_1);
- een grieperig gevoel ontstaat met koorts of spierpijn (S_2);
- u dubbel gaat zien of een scheef aangezicht krijgt (S_3);
- u pijn, krachtverlies of tintelingen in uw ledematen krijgt (S_4);
- er gewrichtsklachten ontstaan (S_5).

De diagnose (D) ziekte van Lyme volgt niet uit symptoom S_2 , maar de dokter moet wel rekening houden met de mogelijkheid.

De volgende opgave gaat over de werkwijze van een huidarts. Hij heeft een soort 'instructieproefwerk' opgesteld. Je hoeft de medische termen niet allemaal te kennen. Het gaat erom enige greep op de werkwijze te krijgen.

Bij een arts komen twee patiënten met dezelfde klacht:

Een oude man komt bij de dokter met de vraag wat hij moet doen aan zijn 'dikke been'. Hij heeft moeite met plassen. In de loop van de dag nemen de klachten toe.

Een pas bevallen patiënte heeft ook last van een dik been. De bevalling vond een week geleden plaats en was zwaar.

Vragen voor de arts zijn:

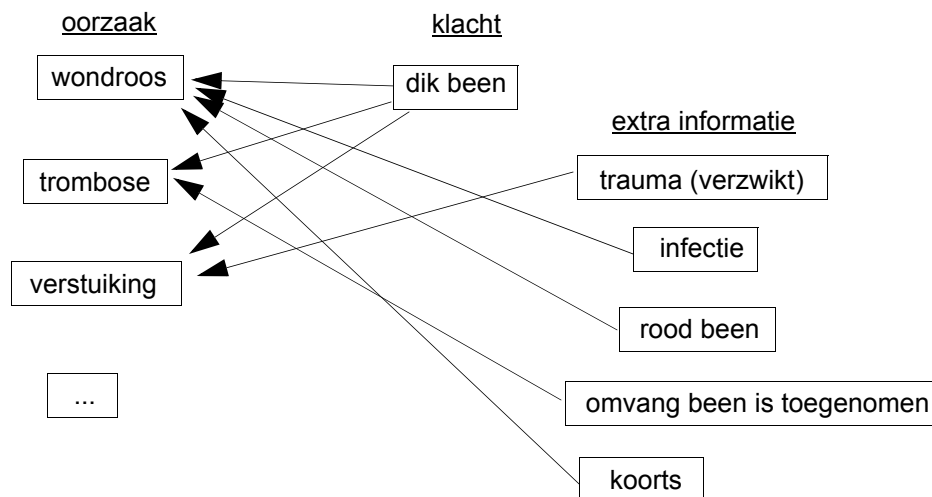
- wat wil ik verder weten van de patiënt?
- wat wil ik onderzoeken?
- wat is de (differentiaal) diagnose?
- hoe ga ik behandelen?

In beide gevallen zijn de antwoorden verschillend:

Is er een trauma geweest? (verstuiking)
Is er sprake van infectie? (wondroos)
Hoe snel zijn de klachten ontstaan?
Kleur van het been veranderd? (rood->ontsteking)
Drinkt patiënt voldoende?
Moet patiënt 's nachts uit het bed om te plassen?
Heeft hij last van nadruppelen?
Heeft de patiënt koorts?
Bij twijfel over trombose en/of kanker echo maken.

Komt trombose in de familie voor?
Heeft ze koorts?
Wat is de kleur van het been?
Is de omvang toegenomen?
Echo maken om trombose uit te sluiten.

De werkwijze van de huisarts is als volgt samen te vatten.



51 a. Wat is de betekenis van de pijlen in deze figuur?

b. Wat betekent het als meerder pijlen vertrekken en wat als meerdere ergens aankomen?

c. De twee patiënten hebben last van hetzelfde symptoom, maar krijgen verschillende vragen voor het stellen van de diagnose. Geef aan hoe beide redeneringen van de arts, terug naar de mogelijke oorzaak, verschillen.

Retorica

Er kan ook een uitgangspunt teveel zijn.

Zo'n extra uitgangspunt kan voor verwarring zorgen als je de logische structuur wilt reconstrueren. Zie bijvoorbeeld de tekst hiernaast. Het is een tekst van Sarah Palin over Obama. Palin was de republikeinse kandidaat voor het vice-presidentschap van de Verenigde Staten. Obama was kandidaat voor de andere, democratische partij. Het eerste stukje van de tekst is positief over Obama, maar in de volgende argumentatie voor het doel (Obama negatief neerzetten) speelt het geen rol.

52 Waarom gebruikt ze deze tactiek?

Een spreker of schrijver wil een ander overtuigen van een standpunt. Dat kan op veel manieren gebeuren, bijvoorbeeld in een betoog, bewijs, discussie, debat, recensie of een polemiek. In deze situaties kan logica worden gebruikt. De moeilijkheid bestaat uit het scheiden van de logische kern van alles wat daar omheen gebeurt. We staan dan voor de vraag:

Hoe probeert de spreker of schrijver te overtuigen?

Dan komen we terecht bij de retorica (welsprekendheid). De oude Grieken en Romeinen leerden dat al als vak. Het was belangrijk in de politiek en in de rechtspraak. Naast de logische middelen waren er technieken om de toehoorder of lezer mee te krijgen.

Een voorbeeld is onderstaand citaat uit een leerboek voor advocaten.

(Over Obama)

I've noticed a pattern with our opponent. Maybe you have, too.

We've all heard his dramatic speeches before devoted followers. And there is much to like and admire about our opponent.

But listening to him speak, it's easy to forget that this is a man who has authored two memoirs but not a single major law or reform – not even in the state senate.

This is a man who can give an entire speech about the wars America is fighting, and never use the word 'victory' except when he's talking about his own campaign. But when the cloud of rhetoric has passed... when the roar of the crowd fades away... when the stadium lights go out, and those Styrofoam Greek columns are hauled back to some studio lot – what exactly is our opponent's plan?

What does he actually seek to accomplish, after he's done turning back the waters and healing the planet? The answer is to make government bigger... take more of your money... give you more orders from Washington... and to reduce the strength of America in a dangerous world. America needs more energy... our opponent is against producing it.

Victory in Iraq is finally in sight... he wants to forfeit.

Terrorist states are seeking nuclear weapons without delay... he wants to meet them without preconditions.

Hij kan ontkennen dat hij de daad gepleegd heeft.

Hij kan toegeven dat hij het gedaan heeft, maar de daad *anders*, als een lichter vergrijp, omschrijven; bijvoorbeeld niet als 'moord' maar als 'doodslag'.

Hij kan de toegegeven daad rechtvaardigen of zich ervoor verontschuldigen (op grond van verzachtende omstandigheden).

Hij kan zich op een *procedurefout* beroepen, zoals een onbevoegde rechter.

Retoriek is onderdeel van het examenprogramma Nederlands. Je moet van het bestaan weten om een logisch oordeel te kunnen vellen.

