



Perspectief

## Inhoudsopgave

1 Een kijkdoos	3
2 Kijken	4
3 Perspectief of niet	8
4 Tekenen in perspectief	14
5 Eenpuntsperspectief	25
6 Tweepuntsperspectief	31

Voorplaat

Het holocaust monument in Berlin, ter nagedachtenis van de in de tweede wereldoorlog vermoorde Joden

Met toestemming is gebruik gemaakt van passages uit de Epsilonuitgave Perspectief, in de serie Zebra

© 2007 cTWO

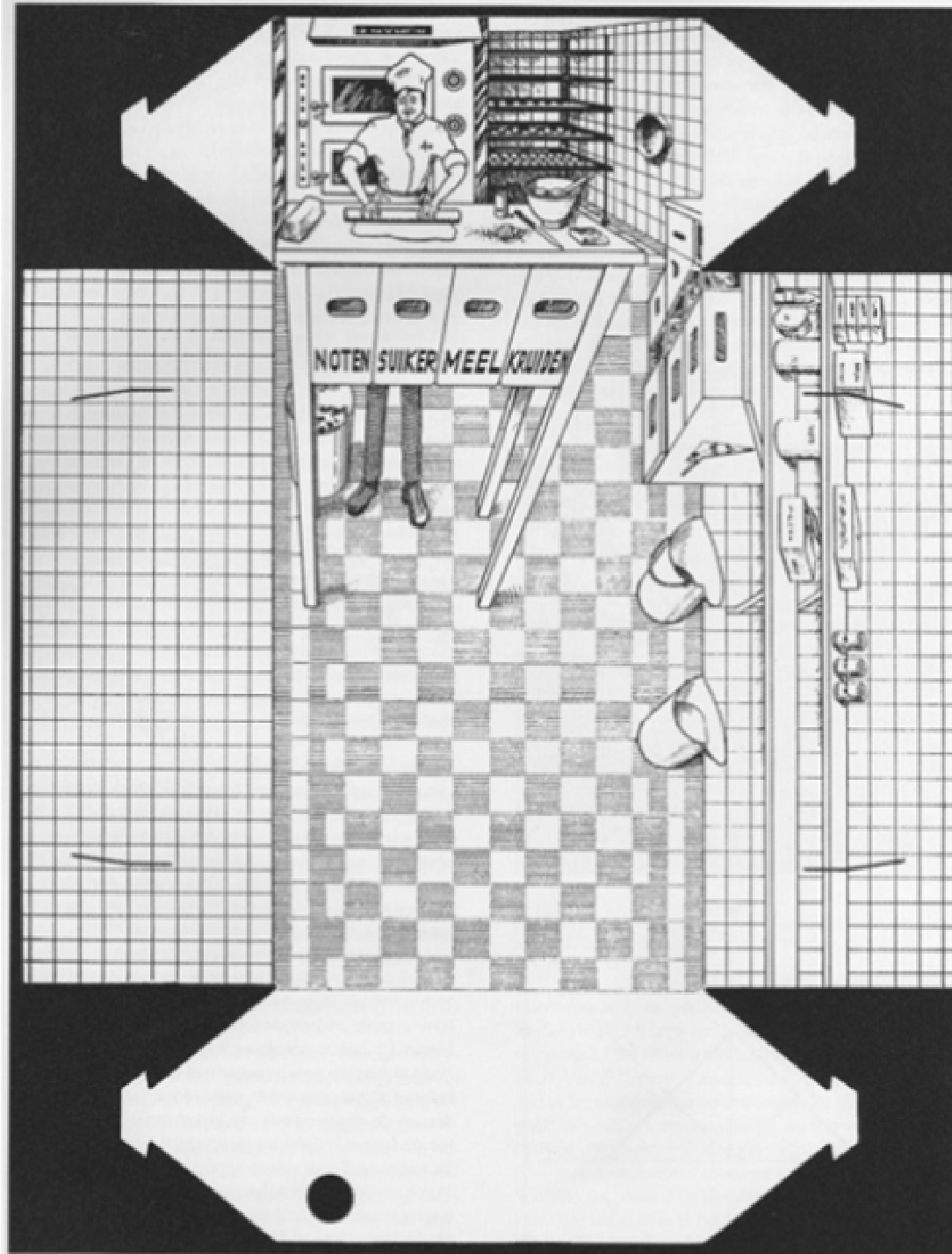
Experimentele uitgave voor Vorm en Ruimte, vwo, wiskunde C  
versie 3 (maart 2008)

auteur: Leon van den Broek

met medewerking van: Cees Garst, Nicolette van de Kuilen, Agnes Verweij

# 1 Een kijkdoos

Op het werkblad staat de uitslag van een kijkdoos, die omstreeks 1980 als doos gebruikt is om gebak bij een bakker in te pakken.

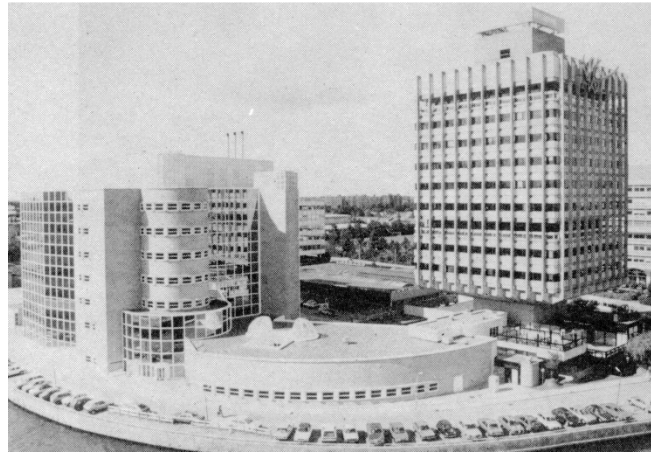


Knip de uitslag uit. Breng op de aangegeven plaatsen gleuven aan (vier stuks) en open het kijkgat. Zet de kijkdoos in elkaar en verbaas je over wat je te zien krijgt.

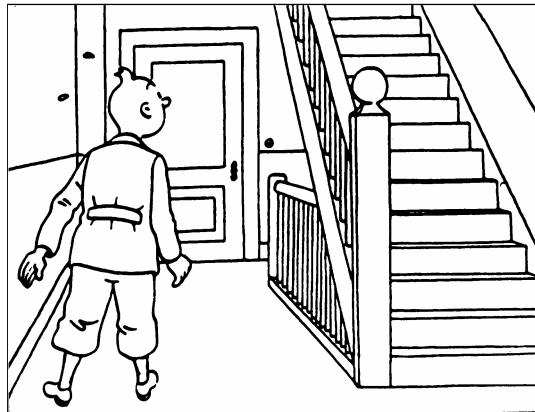
*In dit pakket leer je naar dingen te kijken, hoe je een natuurgetrouwe tekening maakt, de theorie achter perspectieftekenen, en je brengt dit alles in de praktijk.*

## 2 Kijken

- 1 Het gebouw links op de foto is het kantoor van de Postbank in Leeuwarden.
- a De fotograaf stond niet op de grond toen hij zijn foto nam. Op welke hoogte bevond hij zich dan wel, ongeveer?
  - b Maak een schatting van de hoogte van het gebouw van de Postbank. Licht je aanpak toe.
  - c Rechts op de foto staat nog een hoog gebouw. Probeer te achterhalen of het vierkant is (even lang als breed). Toelichten.
  - d Naar welke kant moet de fotograaf zich verplaatsen om een foto te maken waarop je meteen ziet dat het gebouw vierkant is?



- 2 a Op de hoogte van welke trap-trede bevond zich het oog van de tekenaar?
- b Hoe hoog ongeveer was het oog van de tekenaar boven de vloer? Toelichten.

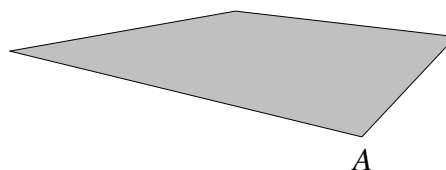
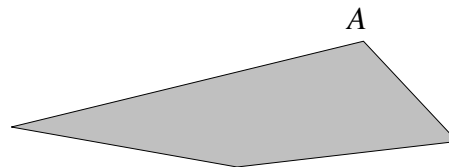


Reporter Kuifje in actie. Uit: Dagblad voor Noord-Limburg

*Iemand kijkt naar een horizontale rechthoek. A is het voorste hoekpunt van die rechthoek.*

*Er zijn drie situaties:*

- 1. het oog bevindt zich onder de rechthoek,*
- 2. het oog bevindt zich op de hoogte van de rechthoek,*
- 3. het oog bevindt zich boven de rechthoek.*



- 3** Het panorama telt drie bergtoppen.
- Het hoofd van de wandelaar komt boven de toppen uit. Hoe kan dat?
  - Welke van de drie toppen is de hoogste, denk je? Toelichten.

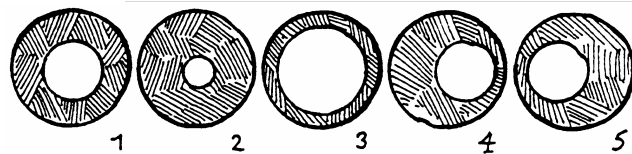
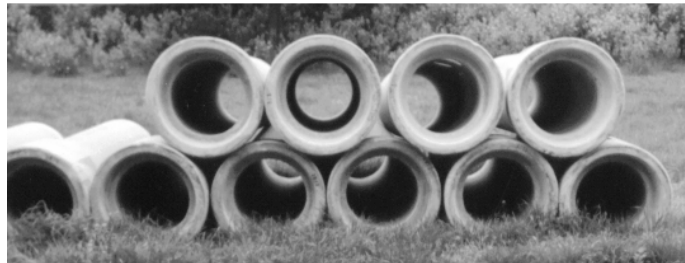


**4 Een kijkje in een rioolbuis**

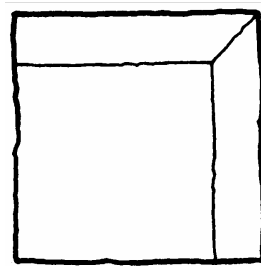
We staan precies recht voor een rioolbuis. We zien dan plaatje 1 hieronder. De binnenkant van de buis is donker en daarachter zien we een stukje van het grasveld: dat is de lichte cirkel.

Er staan nog vier plaatjes.

- Welk type plaatje zien we als we ons naar de buis toe bewegen?
- Welk van deze plaatjes zien we als we ons naar rechts bewegen?



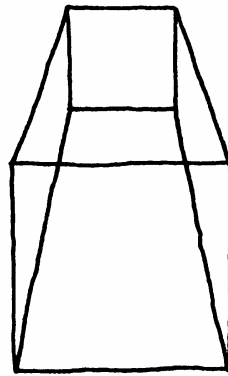
- 5** Een kubus is gemaakt van twaalf staafjes. Hiernaast staat een ongebruikelijke manier en ook niet zo'n goede manier om hem te tekenen.
- Leg uit dat je de kubus wel degelijk zo kunt zien. Waar moet je oog zich bevinden om de kubus te zien zoals in de tekening?
  - Hoe zou je de kubus tekenen als je oog precies recht voor het midden van het voorvlak is?



*In opgave 5 en in het vervolg kijken we met één oog: de kijklijnen vertrekken dus uit één punt.*

- 6 Bekijk het plaatje hiernaast. Je kunt in het plaatje twee ruimtelijke lichamen zien.

Welke? Hoe zou je het verschil tussen beide lichamen kunnen laten zien? Doe dat op het werkblad.



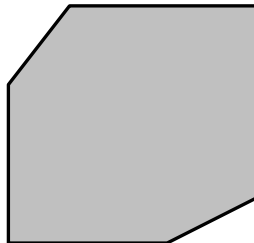
- 7 Kijkt het paard naar voren of naar achteren?



*Zonder extra gegevens zijn plaatjes vaak meerduidelijk: je kunt ze op twee (of meer) manieren opvatten. Door delen van een plaatje te accentueren kun je verschil maken tussen de mogelijkheden.*

- 8 Hiernaast staat het silhouet van een kubus in perspectief.

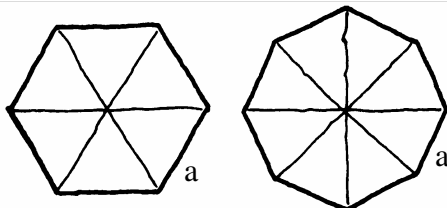
Teken op het werkblad de ontbrekende zes ribben. Stippel de ribben die aan de achterkant zitten.



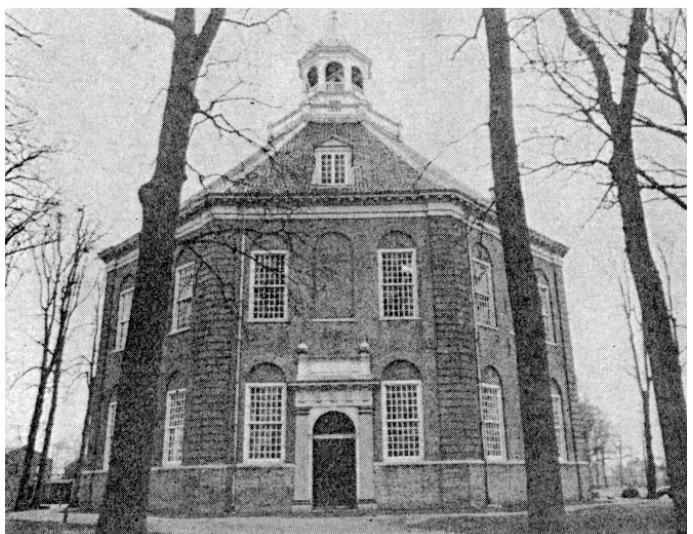
- 9 **De Nederlands Hervormde Kerk te Smilde**

- a Staan de muren wel loodrecht op de grond?

We gaan ervan uit dat de kerk regelmatig zeshoekig of regelmatig achthoekig is. Voor beide gevallen staat hieronder een plattegrond.



- b Hoeveel muren zie je hoogstens in beide gevallen?



Als je dicht bij het gebouw staat zie je maar één muur of twee muren.

- c Kleur in beide plattegronden op het werkblad het gebied waar je kunt staan, als je alleen maar muur a ziet.

Stel dat je niet buiten het gebied mag komen dat je bij vraag c gekleurd hebt. Dan kun je toch nog beslissen of je met een zeshoekige of met een achthoekige kerk te maken hebt.

- d Hoe?

De fotograaf heeft voor foto 2 een iets andere positie gekozen.

- e Weet je nu of het kerkje zeshoekig of achthoekig is?



### 10 Middencirkel

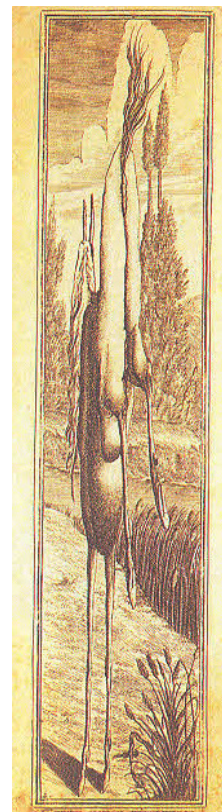
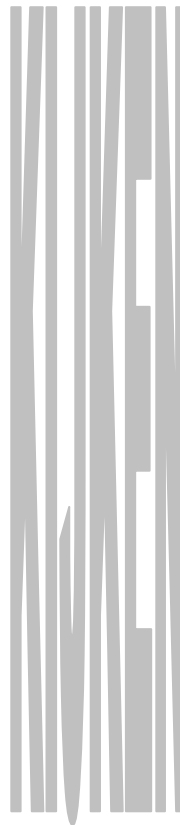
Woensdagavond, voetballen op de tv. Net voor de aftrap geeft de cameraman de toeschouwer een blik op het hele veld: In het midden zie je de "middencirkel". Alleen, die zie je helemaal niet als cirkel. Hoe komt dat?

### 11 Vijftig km/uur

Op het wegdek wordt de automobilist erop gewezen dat hij niet harder dan 50 km/uur mag rijden. De cijfers zijn veel te hoog, in vergelijking met hun breedte. Waarom zijn ze zo opgerekt op het wegdek aangebracht?

### 12 Wat staat hier?

- a Hoe kun je de tekst links het beste lezen?  
b Wat zie je in de tekening rechts?

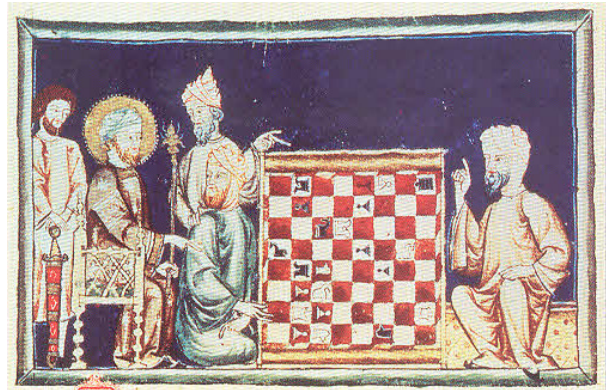


*In de voorbeelden gaat het om de plaats van het oog, Vanuit welke positie heeft de kunstenaar zijn afbeelding gemaakt? Vanuit die positie moet je de afbeelding bekijken om het goed te zien. Ook kan de stand van het vlak waarop de kunstenaar werkte variëren. Met andere woorden: in welke stand hield hij het doek waarop hij schilderde, of de camera waarmee hij fotografeerde?*

### 3 Perspectief of niet

13 Een figuur uit het boek *Libro de los juegos*, van Alfonso X de Wijze in 1283, en een schilderij van Sofonisba Anguissola (1533 – 1625). Op beide staat een schaakbord.

Wat is het opvallende verschil tussen de manieren waarop het schaakbord is afgebeeld?



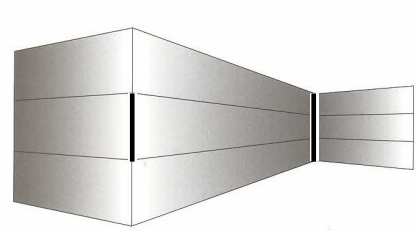
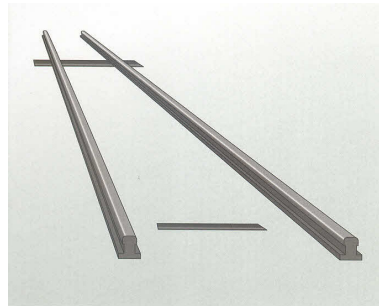
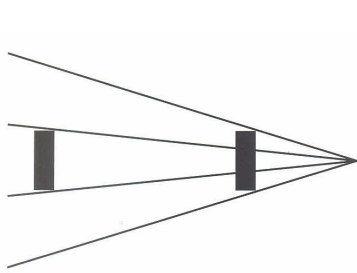
14 De Venetiaanse schilder Giovanni Battista Tiepolo (1696-1770) schiep rond 1750 het grootste bekende fresco in het trappenhuis van de Residentie in Würzburg.

Kun je geloven dat de schildering gemaakt is op een vlak plafond?



*Dat je diepte ziet in deze plafondschildering (of beter “hoogte”) komt, doordat het menselijk oog (en zijn hersenen) het schilderij automatisch interpreteren. Iets dergelijks is ook het geval met de volgende vier plaatjes.*



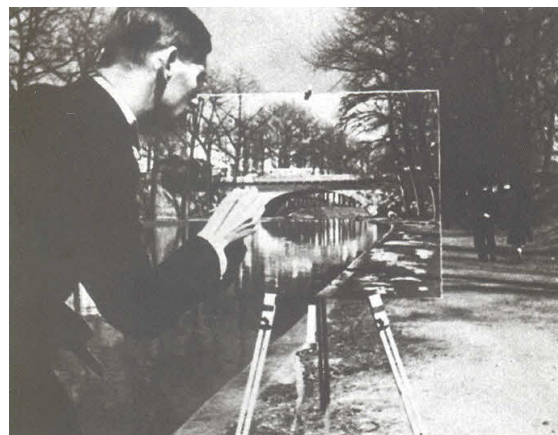
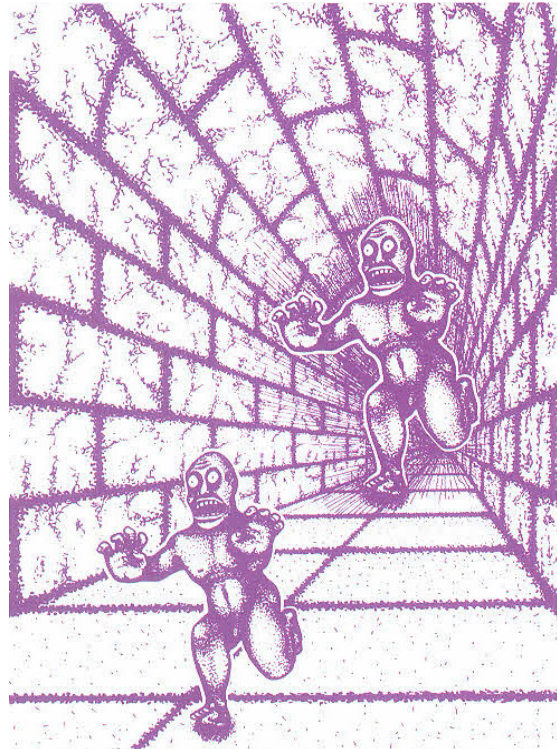


- 15a** Welke rechthoek is de grootste in het linker plaatje?
- b** Welke dwarsligger is groter in het middelste plaatje?
- c** Welke dikke verticale lijn is langer in het rechter plaatje?
- d** Welk monster is het grootst in het plaatje hiernaast? (afkomstig van Roger Shepard)

*De reden van deze zinsbegoochelingen is dat het voor onze hersenen heel natuurlijk is dat figuren die verder weg zijn kleiner gezien worden. Je weet dat een figuur die verder weg is kleiner wordt gezien. Je hersenen corrigeren het feitelijke beeld en interpreteren het op de juiste grootte. Als nu de figuur die verder weg is toch even groot wordt afgebeeld, interpreteren je hersenen deze als te groot. Dit effect wordt in het plaatje van Shepard nog versterkt door het perspectief dat gesuggereerd wordt door de naar elkaar toe lopende lijnen.*

### **Wat is een perspectieftekening?**

Een perspectieftekening is een tekening waarin een ruimtelijke object getekend wordt zoals het in werkelijkheid ook gezien kan worden. Maar dan moet je de tekening wel van de goede plaats bekijken.



Een realistisch schilderij?

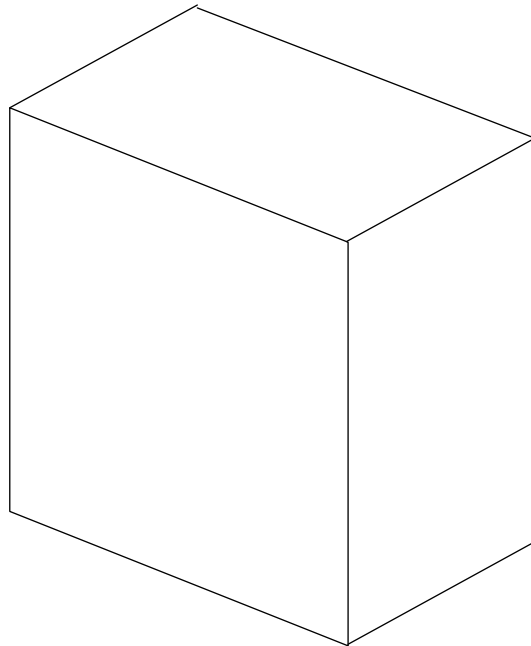
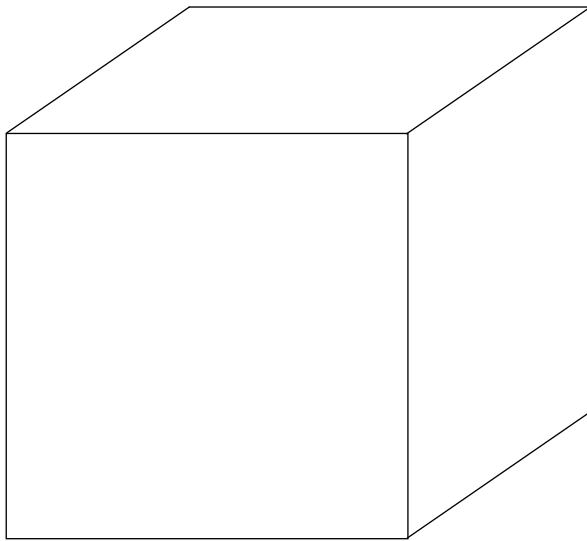
**16** Vier plaatjes van een kubus? Gebruik zonodig modellen om je antwoorden te controleren.

Vaak wordt een kubus getekend zoals in het linker plaatje.

**a** Leg uit dat een kubus zo nooit gezien kan worden.

Het rechter plaatje geeft een beter beeld van de kubus. Maar ook zo kan een kubus niet gezien worden.

**b** Weet jij waarom niet?

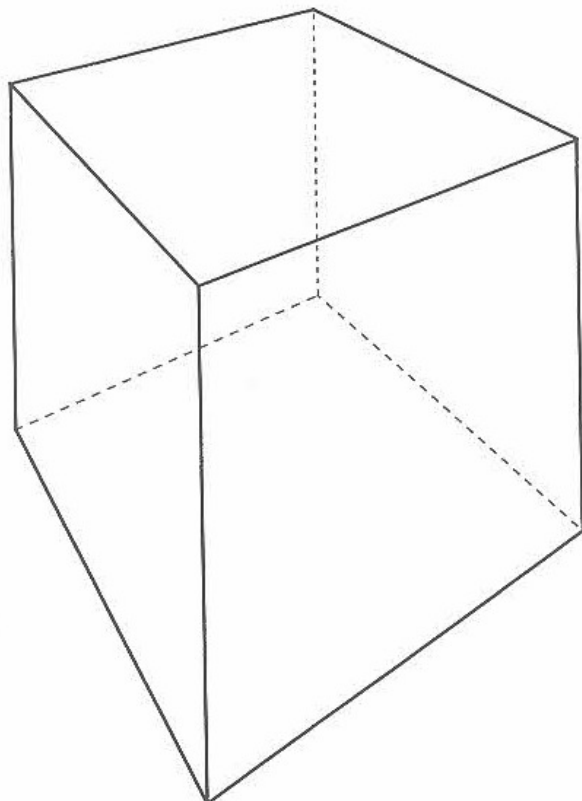
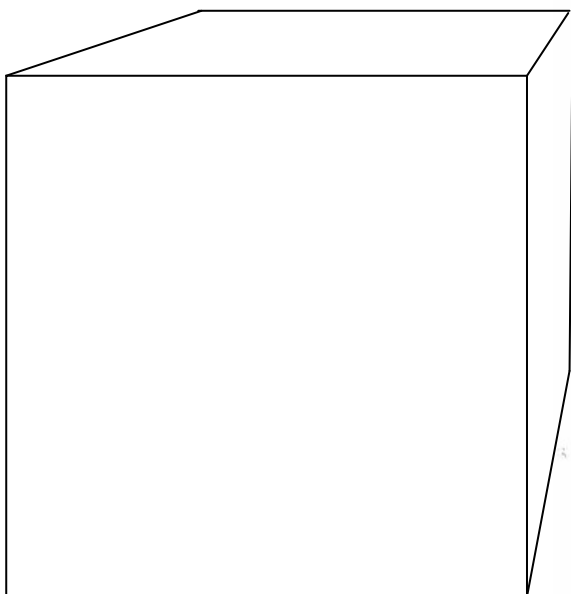


Een kubus kun je wel zien zoals in de volgende twee plaatjes.

**c** Wat is het verschil met de vorige twee plaatjes?

**d** Waar ongeveer moet je je oog houden om het linker plaatje goed als kubus te zien?

**e** En waar bij het rechter plaatje?



*Als je een perspectieftekening vanuit de juiste positie bekijkt, krijg je een levensechte indruk: alsof je werkelijk bij het schouwspel aanwezig bent.*

*Foto's zijn automatisch altijd in perspectief: de lens is het oog. Bij een foto (die niet afgesneden is) is de plaats van het oog duidelijk: dat is midden voor de foto. Alleen de afstand tot de foto moet je nog zien uit te vinden.*

*In de tijd voor de fotografie was men afhankelijk van tekenaars en schilders om een natuurgetrouwe afbeelding te krijgen. Die hebben de techniek van het tekenen in perspectief ontwikkeld, in de veertiende eeuw in Italië (Piero della Francesca, Leonardo da Vinci) en iets later in Duitsland (Albrecht Dürer). Ook oude Nederlandse schilders waren daar meesters in.*

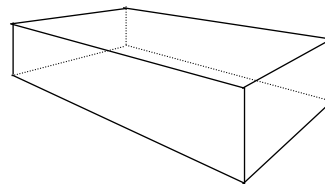


Het oude stadhuis van Amsterdam van Pieter Janszoon Saenredam (1597-1665). Merk op dat de positie van de schilder niet centraal voor het schilderij is, maar aan de linkerkant.

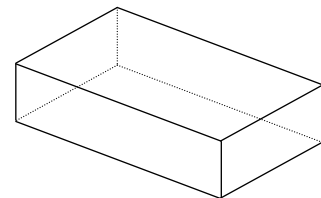
Hiernaast staan twee tekeningen van een balk:

1. een perspectieftekening en
2. een tekening in parallelprojectie.

We gaan deze laatste manier van tekenen uitleggen en hem vervolgens vergelijken met tekenen in perspectief.



perspectief

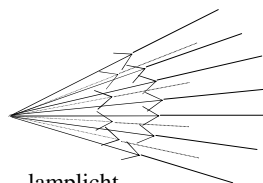


parallelprojectie

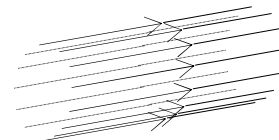
Stel je voor: met twaalf staafjes is een balk gebouwd. We beschijnen de balk en vangen de schaduw op op een scherm.

We onderscheiden twee soorten lichtbundels.

1. Lamplicht geeft een kegelbundel: de lichtstralen vertrekken uit één punt, de (puntvormige) lamp. In dat geval is de schaduw een plaatje van de balk in perspectief. Het lichtpunt heeft de positie van het oog.



lamplicht



zonlicht

2. Zonlicht geeft een parallelle bundel van stralen. De schaduw op het scherm is dan een plaatje in parallelprojectie.

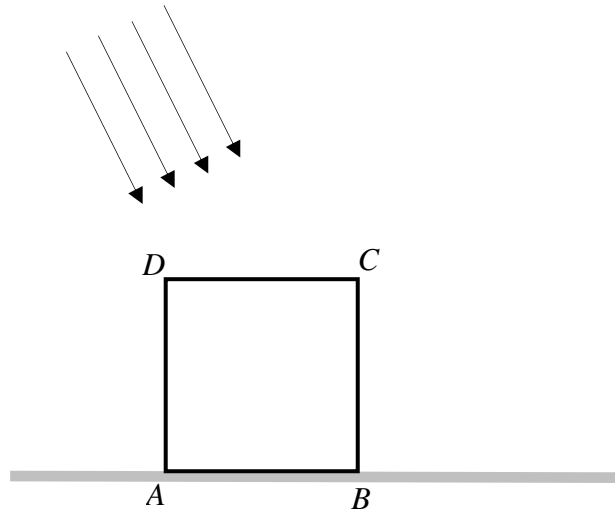
Het verschil zit hem dus in aard van de lichtbundel.

Wat ook belangrijk is, is de stand van het scherm, waarop het schaduwbeeld wordt opgevangen, ofwel de hoek die de lichtstralen maken met het scherm.

**17** Hiernaast staat het zijaanzicht van een kubus.

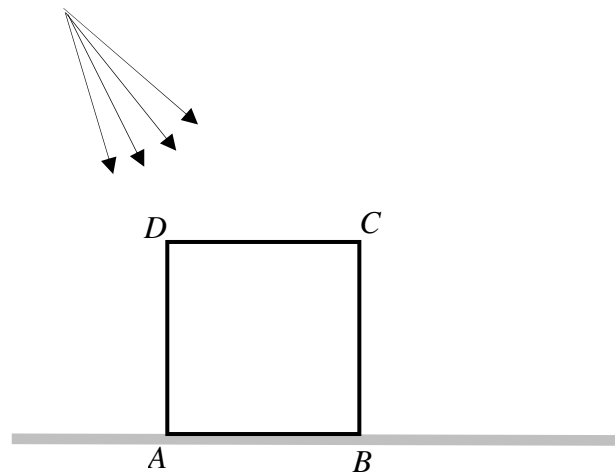
De zon staat hoog en beschijnt de kubus. De schaduw van de kubus ligt op de grond; de grond is nu het scherm.

- a** Teken op het werkblad de schaduw van de vier zijden  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  en  $DA$ .
- b** Wat gebeurt er met de lengte van de schaduwen van de vier zijden als de zon lager staat.



De lamp van een lantaarnpaal beschijnt de kubus. De schaduw van de kubus ligt weer op de grond.

- c** Teken op het werkblad de schaduw van de vier zijden  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  en  $DA$ .
- d** Wat gebeurt er met de lengte van de schaduwen van de vier zijden als de lantaarnpaal korter wordt?

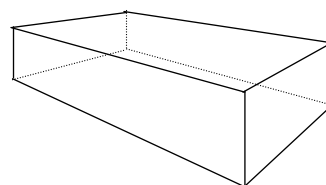


**18** We vergelijken de twee tekeningen van de balk van de vorige bladzijde: parallelprojectie en perspectief.

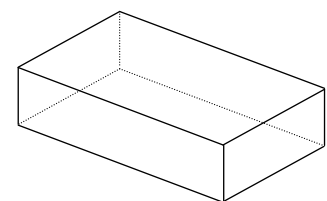
**Wat evenwijdigheid betreft**

Als lijnen in werkelijkheid evenwijdig zijn, zijn ze dat ook in parallelprojectie.

- a** Hoe zit dat bij perspectief?



perspectief



parallelprojectie

### Wat verhoudingen betreft

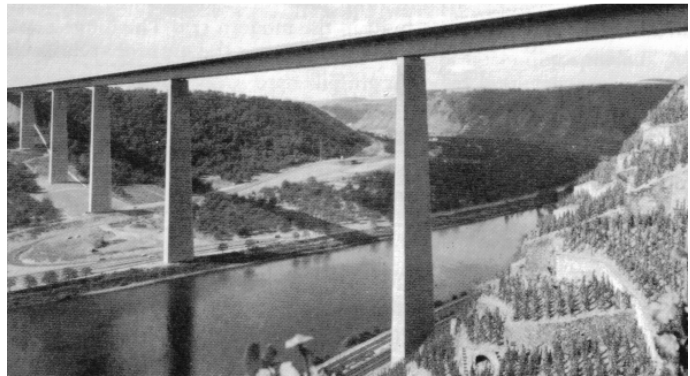
**b** Zoek op het werkblad het midden van de drie grensvlakken aan de kant vanwaar je kijkt, zowel in de perspectieftekening als in de tekening in parallelprojectie.

Tip: gebruik de diagonalen.

Het midden van een lijnstuk is in parallelprojectie altijd weer het midden.

**c** Hoe zit dat in perspectief?

Eigenlijk is tekenen in parallelprojectie een kunstmatige manier van weergeven van de werkelijkheid. Denk je maar eens in dat je in nevenstaande foto de tweede pijler even hoog zou tekenen als de voorste. Dan zou je een onwaarachtig plaatje van de brug krijgen.



Winningen Brücke over de Moezel (Duitsland). De hoogste pijlers zijn 124 m.

Maar tekenen in parallelprojectie behoudt evenwijdigheid en middens, zoals je in opgave 18 gezien hebt. En dat heeft grote voordelen. Daarom zullen we soms daarvan gebruik maken om tekenen in perspectief uit te leggen.

We vangen weer het schaduwbeeld van een object in een evenwijdige lichtbundel op een scherm op. Als de lichtbundel loodrecht op het scherm staat, spreken we van **loodrechte projectie**, anders van **scheve parallelprojectie**. Voor kleine objecten verschillen de beelden bij loodrechte projectie en bij perspectief niet zo veel. Pas als de afmetingen groot zijn, wordt de perspectivische vertekening opvallend. Daarom is tekenen in loodrechte projectie vaak heel acceptabel. Zie de tweede figuur van opgave 16.

*Er zijn verschillende manieren om dingen te tekenen. Perspectieftekeningen zijn natuurgetrouw; zo zie je het object ook echt. Teken in loodrechte projectie heeft ook voordelen. Dat is namelijk eenvoudiger. Vroeger werd daarom vaak getekend in loodrechte projectie. Maar tegenwoordig worden veel tekeningen op de computer gemaakt en er zijn programma's die geen enkele moeite hebben om een tekening in parallelprojectie om te zetten in perspectief.*

## 4 Teken in perspectief

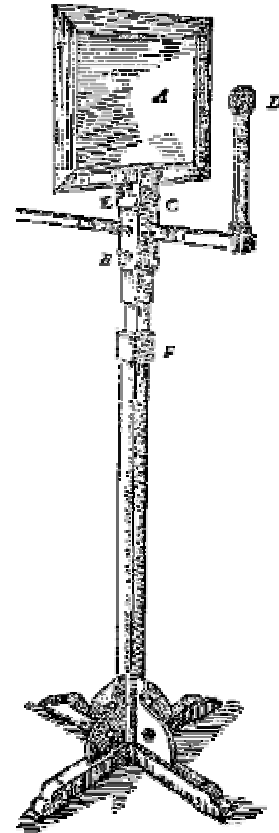
Simon Stevin was in dienst van Prins Maurits van Oranje-Nassau, onder andere als vesting-bouwer. Op verzoek van de prins heeft Stevin een apparaat ontworpen om goede perspectieftekeningen te maken.

A is de glasplaat.

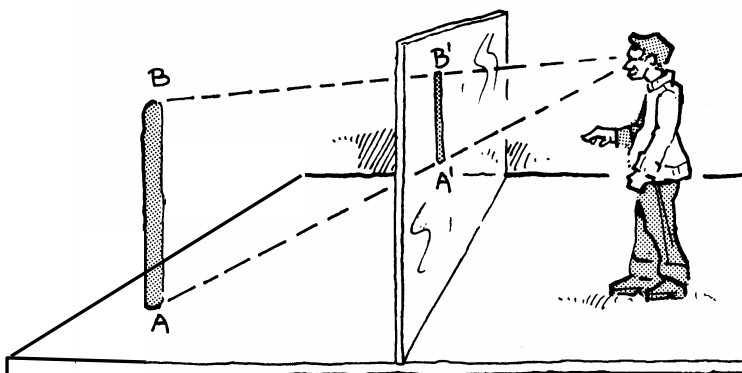
D is de plaats van het oog.

B, C, E en F zijn schroeven om het apparaat in te stellen.

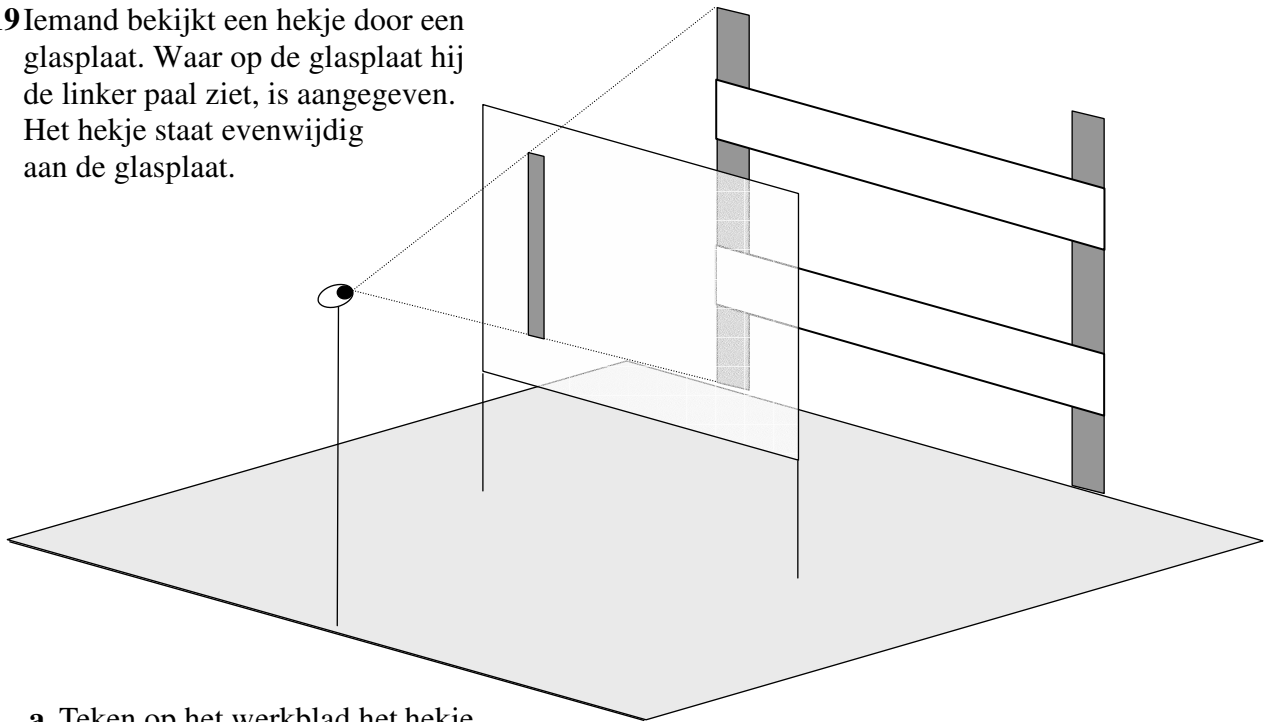
De bedoeling is dat je met één oog vanuit punt D door de glasplaat naar iets kijkt, een schouwspel, een stilleven, of een vergezicht. Vanuit het oog gaan kijklijnen naar het object dat je bekijkt. Stevin spreekt van strael: "de rechte lini die uyt het oogh comt". [Eigenlijk is het omgekeerd: er gaan lichtstralen vanuit het object dat je bekijkt en treffen het oog.] Daar waar de stralen door het glas gaan, zie je het object.



We kijken met één oog door een ruit naar een paaltje. Het onderste punt A van het paaltje zien we op plek A' op de ruit. Het bovenste punt B van het paaltje zien we op plek B' op de ruit. De punten A' en B' liggen op de kijklijnen die het oog O verbinden met A en B. Preciezer: A' en B' zijn de snijpunten van OA en OB met de ruit. Hoe je deze snijpunten kunt tekenen, leer je in de volgende opgaven.



**19** Iemand bekijkt een hekje door een glasplaat. Waar op de glasplaat hij de linker paal ziet, is aangegeven. Het hekje staat evenwijdig aan de glasplaat.

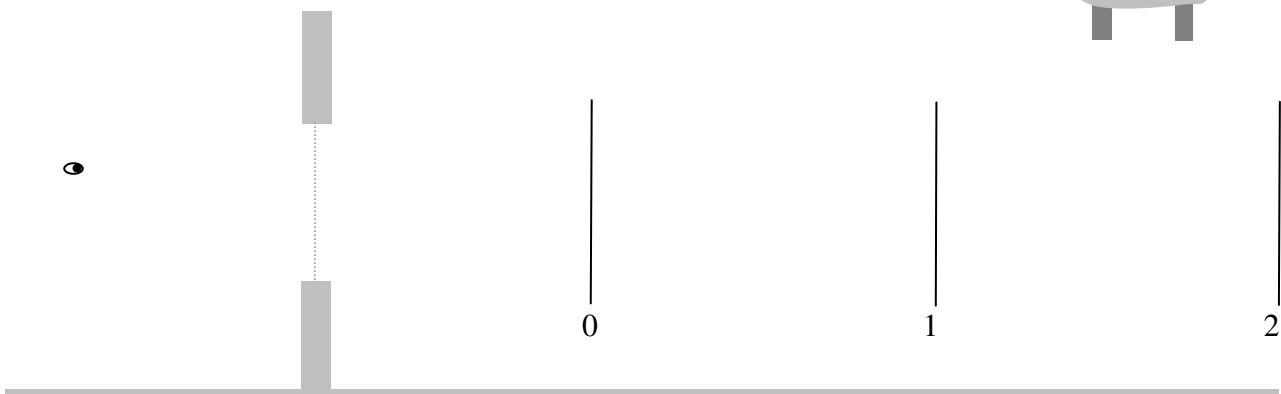
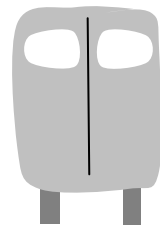


- a** Teken op het werkblad het hekje zoals hij dat op de glasplaat ziet.  
 Tip: gebruik kleur om een overzichtelijke tekening te krijgen.

Het object (het hekje) is hier parallel aan de glasplaat. Daarom is de tekening op de glasplaat *gelijkvormig* met het object zelf. Dat wil zeggen dat tekening en object er precies hetzelfde uitzien; alleen is de tekening een verkleining van het werkelijke hekje.

- b** Hoe groot is de verkleiningsfactor in dit geval?

**20** Ad kijkt door het raam naar buiten en ziet een bestelbusje wegrijden. Het is duidelijk dat het busje steeds kleiner wordt, dat wil zeggen, zo ziet Ad dat. Hieronder staat een zijaanzicht van de situatie



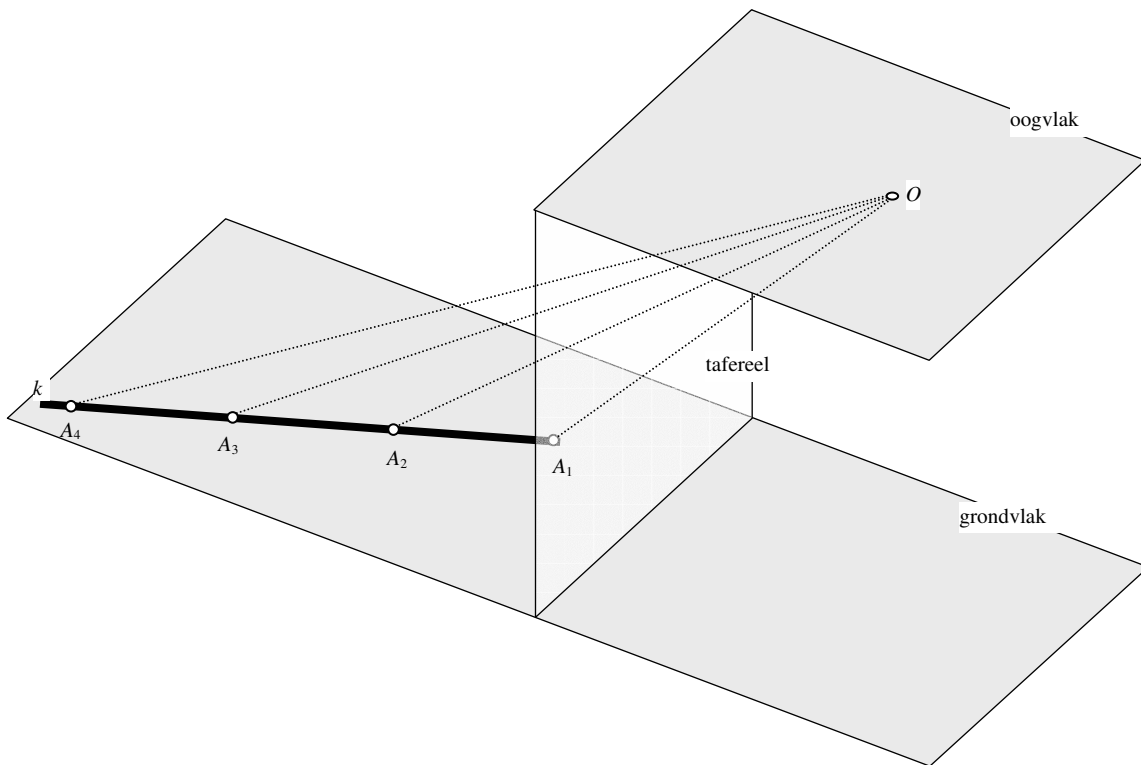
Waar de achterkant van het bestelbusje zich bevindt na 0, 1 en 2 seconden is aangegeven.

- a** Geef op het werkblad op het raam het busje aan zoals Ad dat ziet op de tijdstippen 0, 1 en 2.  
**b** Ad ziet de achterkant steeds minder hoog. Neemt de hoogte op het raam gedurende de eerste, en gedurende de tweede seconde evenveel af?

Veronderstel dat de weg waarover het busje rijdt lang en recht is, zonder obstakels. Op den duur ziet Ad het busje nauwelijks nog: het is niet groter dan een stip.

c Waar op het raam ziet hij die stip?

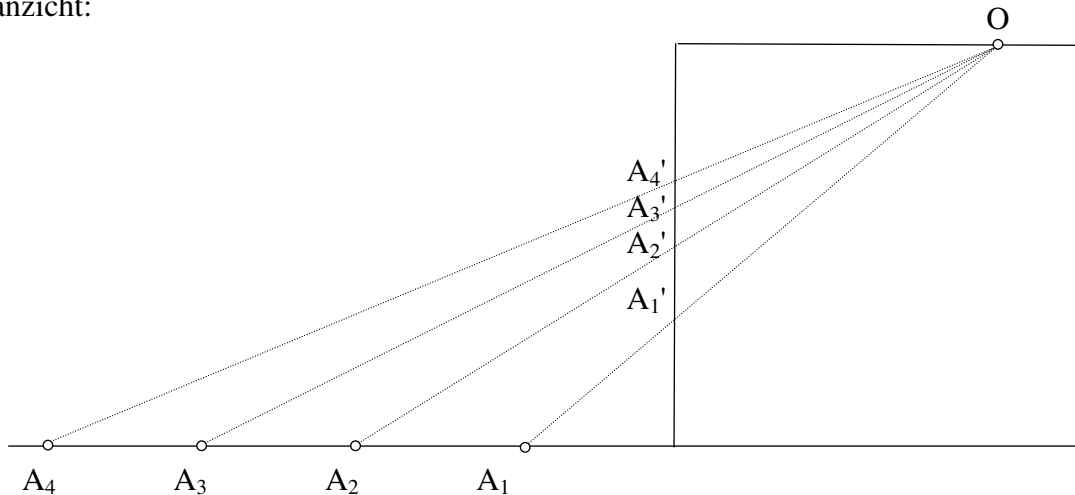
21 Door een verticale glasplaat ziet een oog een horizontale lijn  $k$  met daarop vier punten:  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  en  $A_4$ . Het horizontale vlak waarin de lijn ligt heet *grondvlak*, het horizontale vlak waarin het oog ligt heet *oogvlak* en het vlak van de verticale glasplaat heet *tafereel*. Hieronder staat een loodrechte parallelprojectie van de situatie.



Waar zie je  $A_1$  op het tafereel? Die plek is het punt waar de kijklijn van  $O$  naar  $A_1$  door het tafereel heen gaat; noem dat punt  $A_1'$ . Evenzo  $A_2'$ ,  $A_3'$  en  $A_4'$ .

a Het je enig idee waar de beeldpunten  $A_1'$ ,  $A_2'$ ,  $A_3'$  en  $A_4'$  liggen? Het gaat nu nog niet om de precieze plaats; als het een beetje in de buurt is, zijn we al tevreden.

De vier punten zijn met opzet op mooie afstanden van het tafereel gekozen. We gebruiken het zijaanzicht:





$A_2$  ligt even ver van het tafereel als  $O$ . Dus ligt zijn beeldpunt  $A_2'$  halverwege  $O$  en  $A_2$ .  
 $A_1$  ligt half zo ver van het tafereel als  $O$ . Dus ligt zijn beeldpunt  $A_1'$  half zo ver van  $A_1$  als van  $O$ .

**b** Teken op het werkblad nauwkeurig  $A_2'$  en  $A_1'$ .

Door de afstanden van  $A_3$  en  $A_4$  tot het tafereel te meten, kun je net zo beredeneren waar de beeldpunten  $A_3'$  en  $A_4'$  liggen.

**c** Doe dat en teken deze beeldpunten op het werkblad. [Omdat de figuur in loodrechte projectie is, zijn werkelijke middens ook in de figuur middens en net zo gaat het met andere verhoudingen.]

Als je het goed gedaan hebt, liggen de vier beeldpunten precies op een rechte lijn. Die rechte lijn is de beeldlijn  $k'$  van  $k$ .

Dat kun je goed als volgt begrijpen. Alle kijklijnen  $OA_1$ ,  $OA_2$ ,  $OA_3$  en  $OA_4$  liggen in één vlak, namelijk het vlak waar  $O$  en  $k$  in liggen. De beeldlijn  $k'$  is de snijlijn van dat vlak met het tafereel. En als twee vlakken elkaar snijden is de snijlijn een *rechte* lijn.

**d** Een punt  $A$  wordt over lijn  $k$  naar achteren geschoven, steeds verder weg van het tafereel. Wat gebeurt er dan met de kijklijn  $OA$ ? En met het beeldpunt  $A'$ ?

Door  $A$  over  $k$  steeds verder weg te schuiven (lijn  $k$  is oneindig lang), gaat  $A'$  naar een zeker grenspunt.  $A'$  komt steeds dichterbij dat grenspunt, maar zal het nooit helemaal bereiken.

**e** Teken op het werkblad waar dat grenspunt ligt.

Waarschijnlijk ken je het begrip *verdwijnpunt* of *vluchtpunt* van de tekenlessen. Het grenspunt waarvan sprake is in onderdeel **e** is het verdwijnpunt van de lijn  $k$ .



*Door kijklijnen breng je alle punten van een werkelijke situatie een voor een over op het tafereel. Op dat tafereel ontstaat zodoende een tekening hoe je de werkelijkheid ziet: een perspectieftekening.*

We hebben de beeldlijn van  $k$  gevonden. Maar de manier waarop dat gebeurde is nogal omslachtig. Bovendien hadden we geluk dat de punten  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  en  $A_4$  op mooie afstanden van het tafereel lagen.

Nu we weten dat de beeldfiguur  $k'$  een rechte lijn is, is er een snellere manier.

Als we twee punten van de beeldlijn weten, kennen we de beeldlijn helemaal. En twee speciale punten kennen we!

- 1 Verleng lijn  $k$  totdat hij het tafereel snijdt, zeg in punt  $G$ , het zogenaamde *grondpunt*. Het grondpunt ligt op de grondlijn van het tafereel en is zijn eigen beeld.
- 2 Verleng lijn  $k$  aan de andere kant tot in het oneindige. Het beeld van het "oneindig verre punt" van  $k$  kennen we ook. We vinden dat door in het oogvlak een lijn te trekken, evenwijdig aan  $k$  en deze te snijden met het tafereel. Dat is het vluchtpunt  $V$  van  $k$ .

De beeldlijn  $k'$  is de lijn  $GV$ .

22 Teken op deze manier op het werkblad bij de vorige opgave de beeldlijn  $k'$ . Liggen de punten  $A_1'$ ,  $A_2'$ ,  $A_3'$  en  $A_4'$  op  $k'$ ?

23 Op het werkblad zijn drie lijnen  $m$ ,  $n$  en  $p$  in het grondvlak getekend.  $m$  en  $n$  zijn evenwijdig aan elkaar. Omdat het lijnen zijn, lopen ze naar beide kanten oneindig ver door (ze zijn dus niet helemaal getekend).

Teken de beeldlijnen van  $m$ ,  $n$  en  $p$ .

24 Op het werkblad is een punt  $V$  aangegeven.

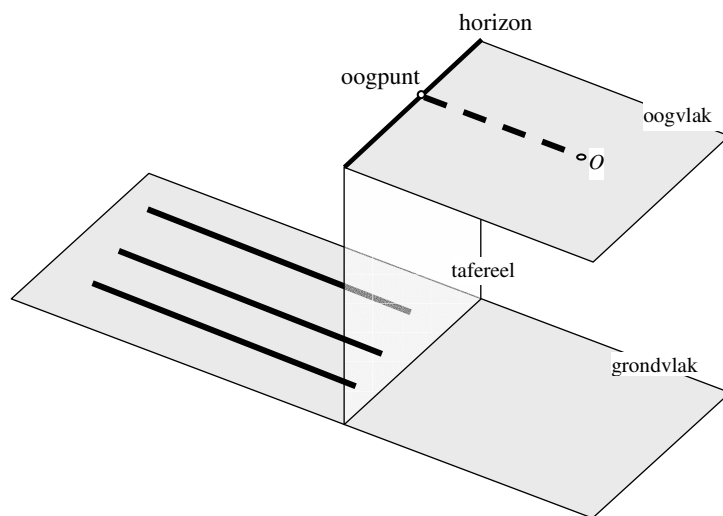
a Teken enkele lijnen in het grondvlak met  $V$  als vluchtpunt.

b Geef het vluchtpunt aan van een lijn in het grondvlak die loodrecht staat op het tafereel.

De constructie via vluchtpunt en grondpunt gaat niet goed voor een lijn in het grondvlak die evenwijdig is aan het tafereel, want zo'n lijn heeft geen vluchtpunt en ook geen grondpunt.

Voor alle andere lijnen in het grondvlak liggen de vluchtpunten op de lijn waar het oogvlak het tafereel snijdt: de zogenaamde *horizon*.

Het vluchtpunt van lijnen in het grondvlak die loodrecht staan op het tafereel, is het *oogpunt*: de loodrechte projectie van het oog op het tafereel.



25 Op het werkblad zijn in het grondvlak twee lijnen getekend,  $k$  en  $l$ , beide evenwijdig aan het tafereel. Hun beeldlijnen kun je vinden met behulp van de lijn in het oogvlak die door het oog gaat en die evenwijdig is aan het tafereel.

Verzin een manier om de beeldlijnen  $k'$  en  $l'$  te vinden.

### Samenvatting

Over lijnen in het grondvlak:

- \* Het beeld van een rechte lijn is een rechte lijn.
- \* Als een lijn evenwijdig is aan het tafereel, is zijn beeldlijn horizontaal.
- \* Als een lijn niet evenwijdig is aan het tafereel, heeft zijn beeld een vluchtpunt op de horizon (het beeld van het oneindig verre punt.)
- \* Evenwijdige lijnen die niet evenwijdig zijn aan het tafereel hebben hetzelfde vluchtpunt.
- \* Het oogpunt is het vluchtpunt van lijnen in het grondvlak die loodrecht staan op het tafereel.

We kunnen nu in principe van elk punt in het grondvlak zijn beeld bepalen. En dus van elke figuur in het grondvlak.

26 Op het werkblad is een punt  $P$  in het grondvlak aangegeven.

Bepaal zijn beeldpunt in het tafereel.

Tip: kies een lijn waar  $P$  op ligt.

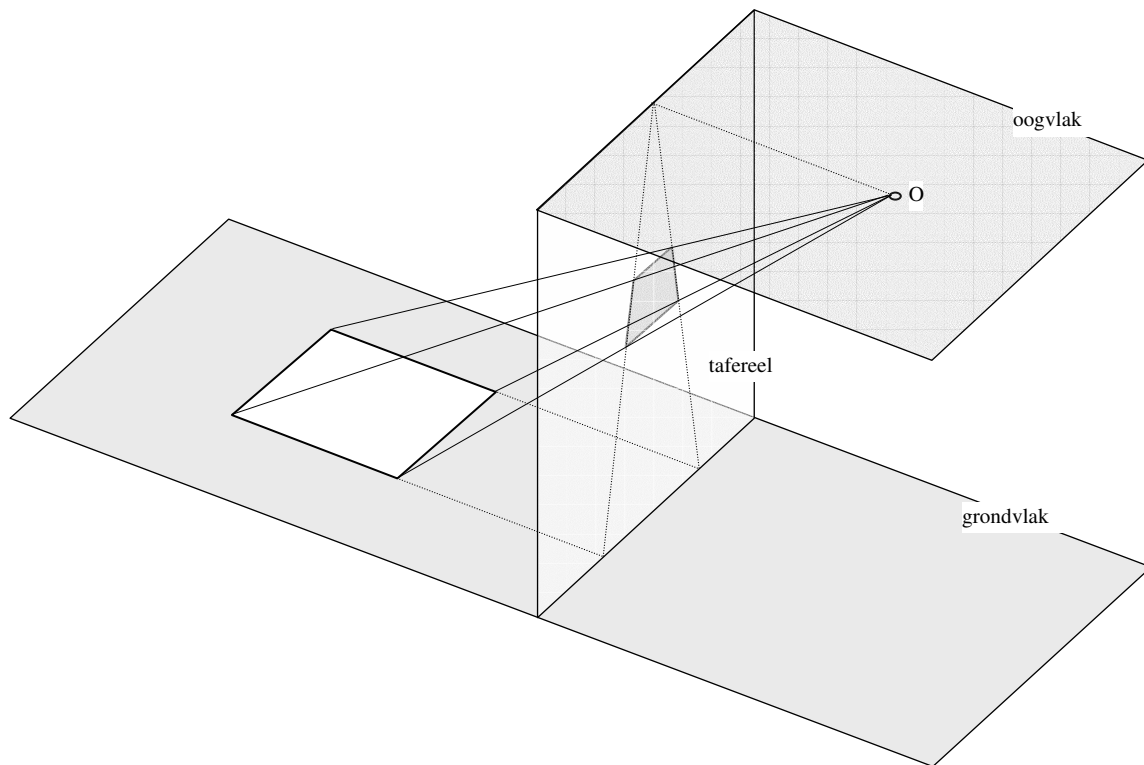
27 Op het werkblad is een  $2 \times 2$ -tegelvloertje in het grondvlak getekend.

a Teken het beeld daarvan op het tafereel.

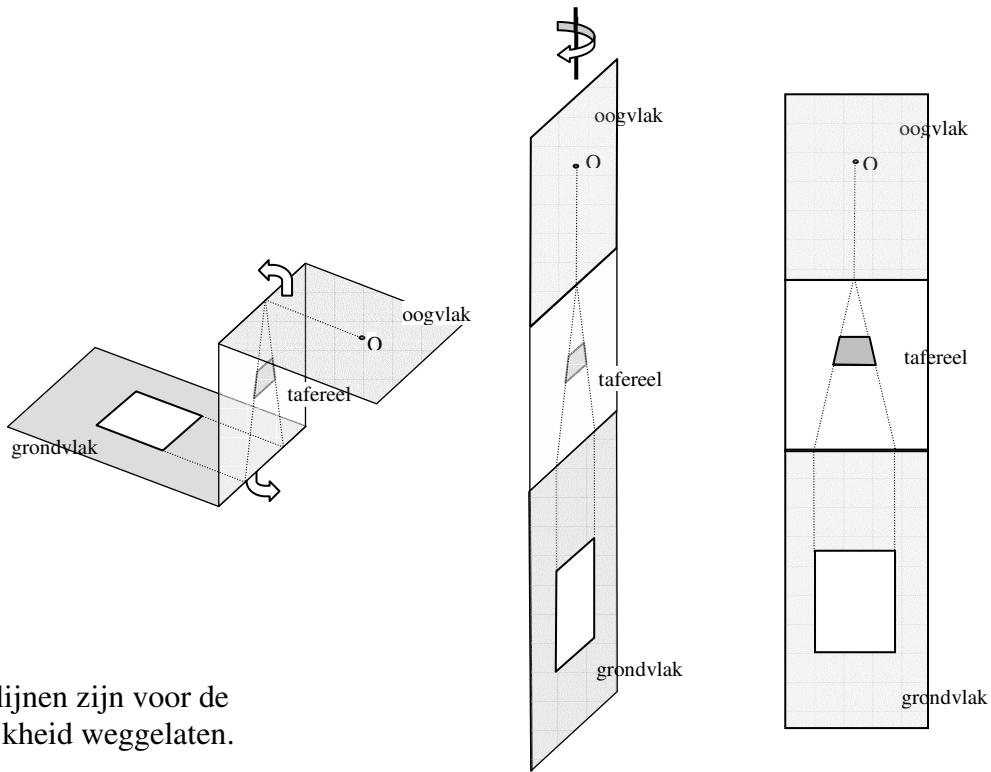
De diagonalen van het tegelvloertje hebben ook vluchtpunten.

b Gaan de diagonalen van het beeld door die vluchtpunten?

We weten nu hoe we een figuur in het grondvlak kunnen overbrengen naar het tafereel. Hieronder is dat uitgevoerd voor een rechthoek.

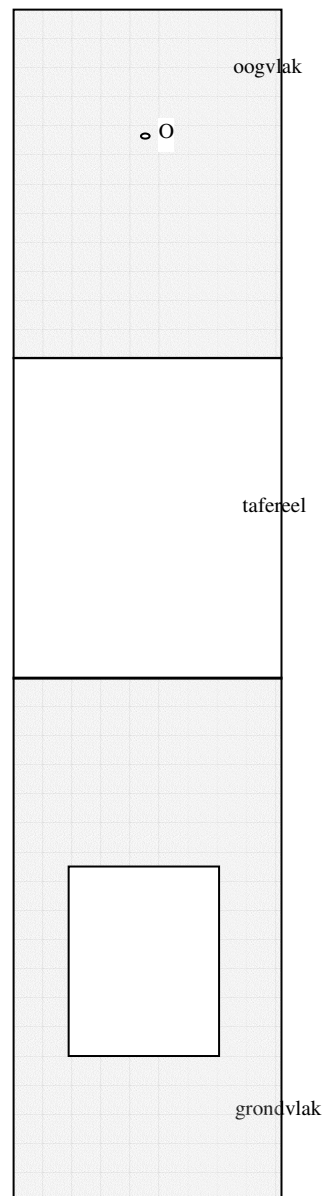


De tekening is gemaakt in scheve projectie. We bekijken de situatie als het ware schuin van boven. We weten dus nog niet hoe de rechthoek er in werkelijkheid uitziet, dat wil zeggen als we *recht* op het tafereel kijken. Daartoe klappen we het oogvlak naar boven en het grondvlak naar beneden, zodat alles in één verticaal vlak komt te liggen. Vervolgens draaien we om een verticale as, zo dat we recht op de figuur kijken. Nu zie je hoe de perspectief tekening van de rechthoek er in werkelijkheid uitziet. Op de volgende bladzijde is dit uitgevoerd.

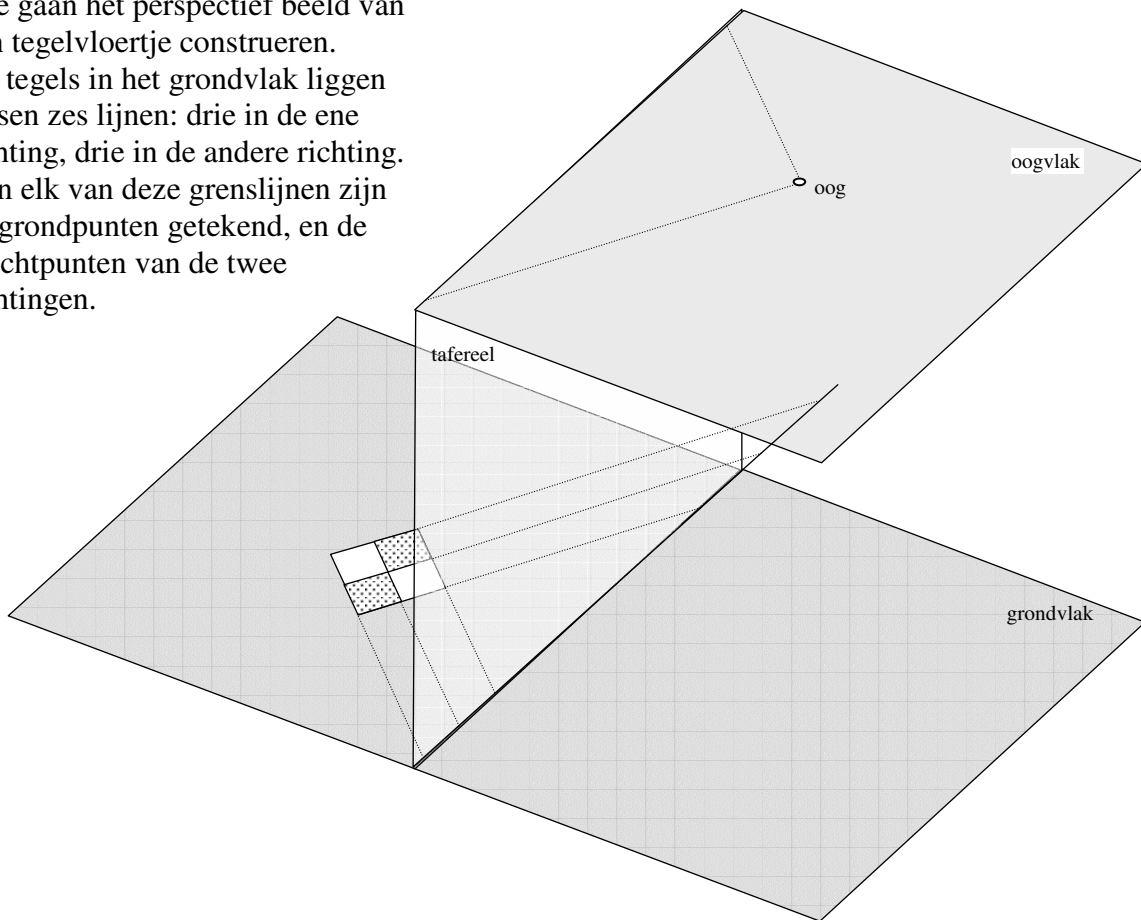


De kijklijnen zijn voor de duidelijkheid weggelaten.

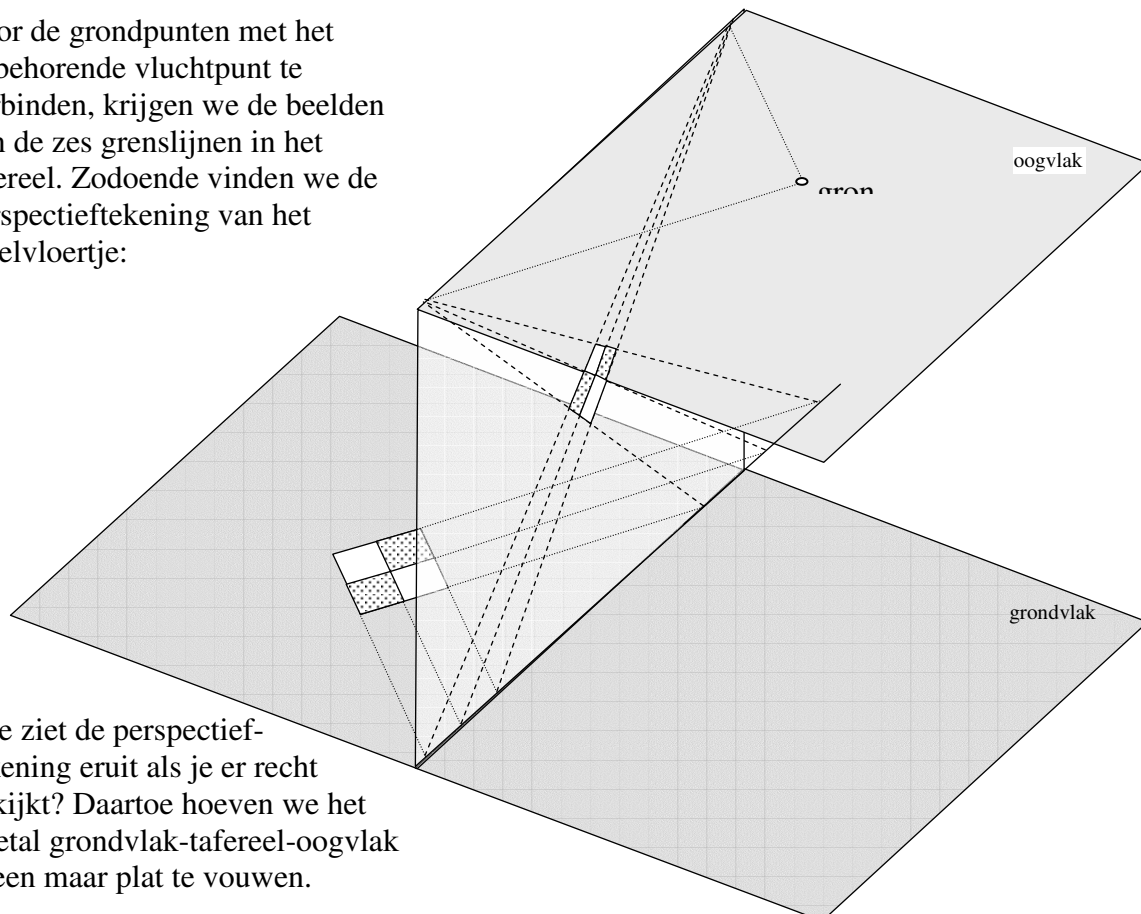
**28** Hiernaast staat de uitgeklapte situatie, waar we recht opkijken nog een keer. De originele rechthoek en het oog zijn aangegeven. Ga op het werkblad na hoe je perspectief tekening in het tafereel stapsgewijs vindt.



**29** We gaan het perspectief beeld van een tegelvloertje construeren. De tegels in het grondvlak liggen tussen zes lijnen: drie in de ene richting, drie in de andere richting. Van elk van deze grenslijnen zijn de grondpunten getekend, en de vluchtpunten van de twee richtingen.

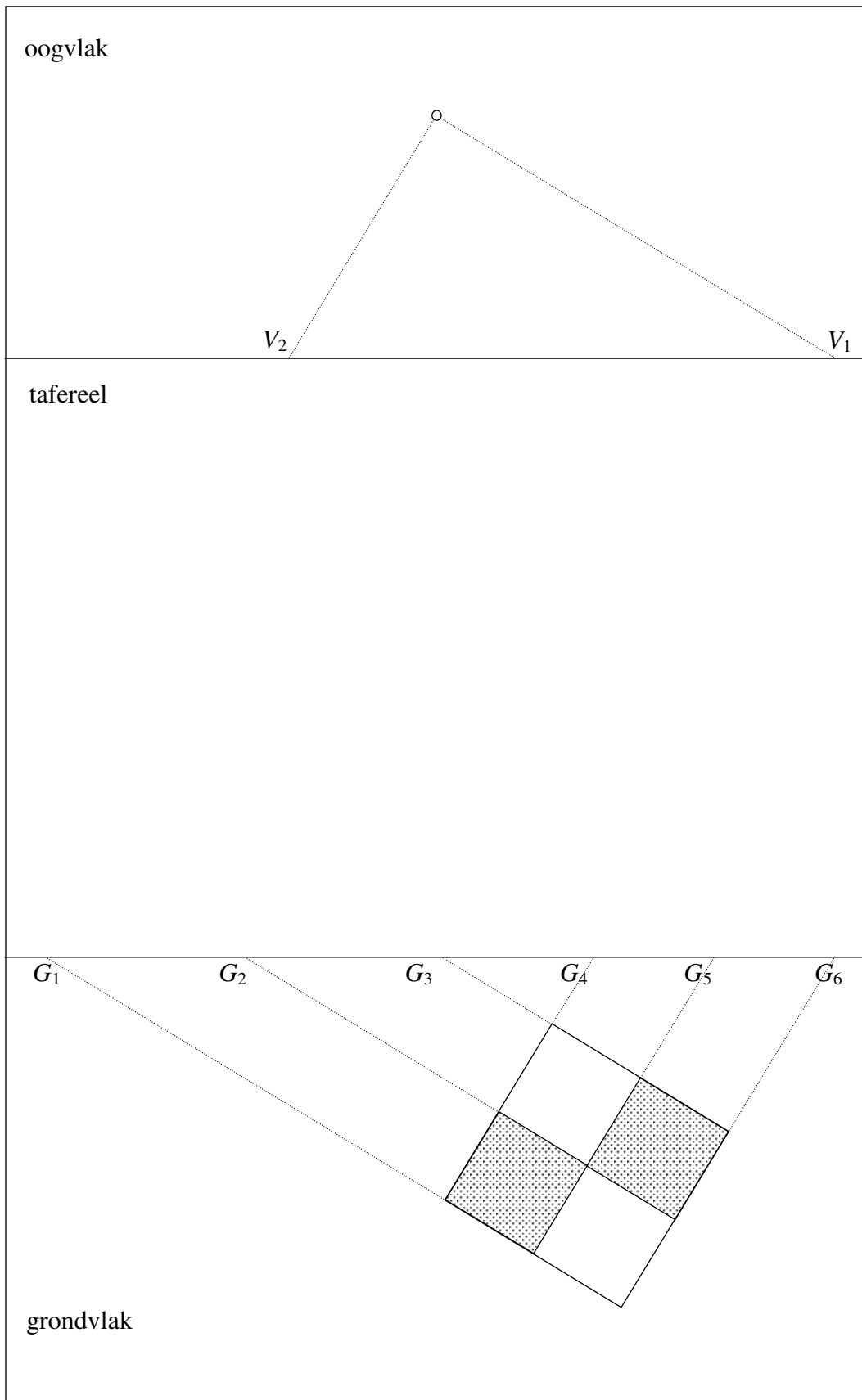


Door de grondpunten met het bijbehorende vluchtpunt te verbinden, krijgen we de beelden van de zes grenslijnen in het tafereel. Zodoende vinden we de perspectieftekening van het tegelvloertje:

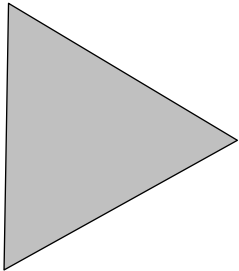


Hoe ziet de perspectieftekening eruit als je er recht opkijkt? Daartoe hoeven we het drietal grondvlak-tafereel-oogvlak alleen maar plat te vouwen.

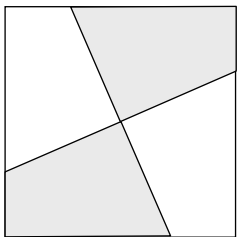
In het grondvlak zijn de grondpunten van de lijnen van het tegelvloertjes getekend. En in het oogvlak de verdwijnpunten van die lijnen.  
Teken in het tafereel het perspectiefbeeld van het tegelvloertje.



30 Teken op het werkblad het perspectiefplaatje van de gelijkzijdige driehoek, zoals die vanuit plaats  $O$  gezien wordt. Teken eerst de grondpunten en de vluchtpunten van de zijden.

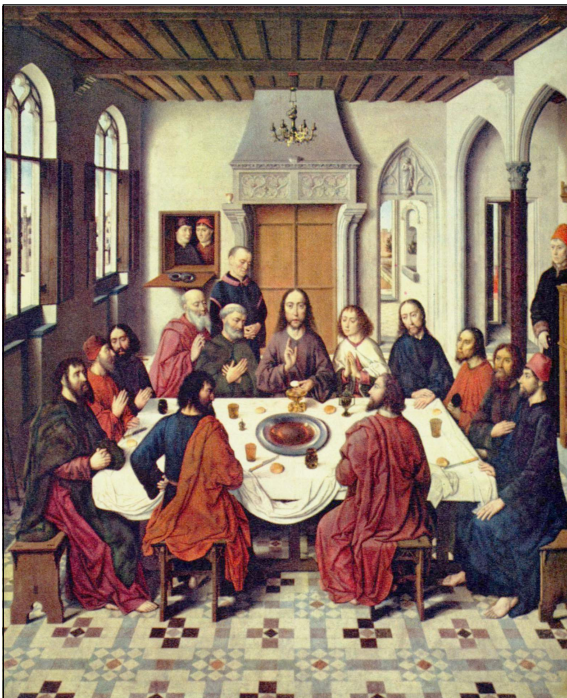
<p>oogvlak</p> <p style="text-align: center;"><math>\circ O</math></p>
<p>tafereel</p>
 <p>grondvlak</p>

**31** Teken op het werkblad het perspectiefplaatje van het vierkant dat verdeeld is in vier gelijke stukken, zoals die vanuit plaats O gezien wordt.

<p>oogvlak</p> <p style="text-align: center;"><math>\circ O</math></p>
<p>tafereel</p>




## 5 Eenpuntperspectief



32 Vergelijk de twee schilderijen:

links: Dirk Bouts, *Het Laatste Avondmaal* (ca 1465; St. Pieterskerk, Leuven),  
rechts: Gerard David, *Het Oordeel van Cambyses* (14,98; Groeningemuseum, Brugge).

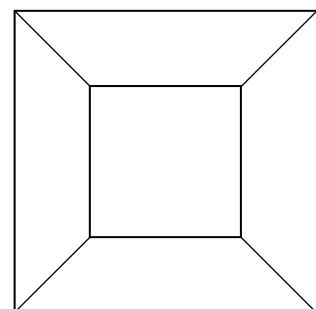
- Bespreek opvallende verschillen tussen de twee schilderijen.
- Welk van de twee vind jij het mooist? Waarom?

*Het Laatste Avondmaal* is een schilderij in eenpuntperspectief. De tegels liggen zó, dat een van de hoofdrichtingen evenwijdig is aan het tafereel. Ook is een van de hoofdrichtingen van de tafel en van het plafond evenwijdig aan het tafereel. De andere hoofdrichtingen van de tegels, tafel en plafond hebben één verdwijnpunt.

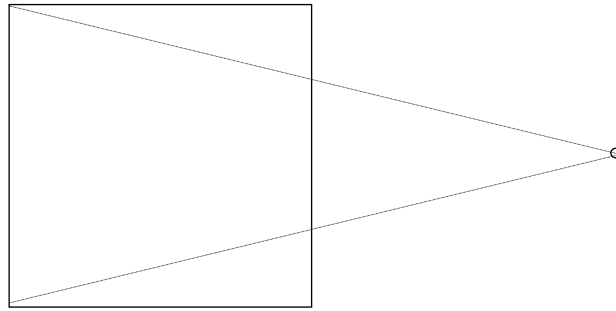
Bij *Het Oordeel van Cambyses* is dat niet het geval; dat schilderij heeft tweepuntperspectief. Eenpuntperspectief is eenvoudiger en werd door de Nederlandse schilders in de Nederlanden van de vijftiende eeuw toegepast. *Het Oordeel van Cambyses* is een van de eerste schilderijen in tweepuntperspectief.

- Waar ongeveer bevindt zich het ene vluchtpunt op het schilderij van Bouts.
- Ga na dat bij eenpuntperspectief het vluchtpunt precies het oogpunt is.

We kijken recht in een kubusvormige kamer. Dan krijg je een plaatje zoals hiernaast. Het is duidelijk dat het vluchtpunt zich in het midden bevindt. Het is de vraag hoe groot je de achterkant moet tekenen, in vergelijking met de voorkant. Met andere woorden: bij welke verhouding van voor- en achterkant is de kubus goed afgebeeld? Dat hangt helemaal af van de afstand van het oog voor de kubus.



34 Bekijk maar een zijaanzicht van de situatie.



Hierboven is de afstand oog-kubus gelijk aan de ribbe van de kubus.

- a Leg uit dat het oog de achterkant dan twee keer zo klein ziet als de voorkant.
- b Wat gebeurt er met de verhouding *achterkant* : *voorkant* als het oog dichterbij de kubus komt?
- c Stel dat de kubus ribbe 4 heeft en dat het oog zich op afstand 2 van de voorkant van de kubus bevindt, wat is dan die verhouding? Hoe breed ziet het oog dan de zijvlakken?
- d Dezelfde vraag als de ribbe van de kubus 4 is en het oog zich op afstand 12 voor de kubus bevindt.

35 We bekijken een kubus nog eens op de manier van opgave 33. Op het werkblad staat het plaatje vergroot: de ribben aan de voorkant zijn 16 cm, de ribben aan de achterkant zijn half zo groot.

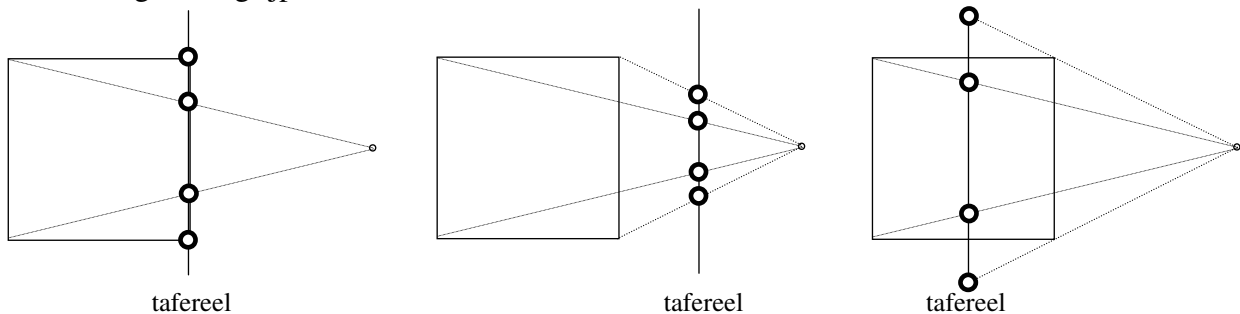
In opgave 34b heb je gezien dat het oog zich dan op afstand 16 cm voor de kubus bevindt. Dat betekent dat je de figuur het best ziet als de kubus als je oog 16 cm midden voor de kubus is.

Ga op het werkblad na of dat ongeveer klopt.

**Opmerking**

Je kijkt naar een kubus op de manier van opgave 33, dus recht van voren, met het oog precies voor het midden van het voorvlak. Waar moet je dan het tafereel denken? Op de plaats van het voorvlak? Midden tussen je oog en het voorvlak? Halverwege de kubus?

Voor de *vorm* van de perspectieftekening doet dat er helemaal niet toe. Dat komt omdat de verhoudingen altijd hetzelfde zijn, waar je het tafereel ook plaatst. Dat kun je met de plaatjes hieronder goed begrijpen.



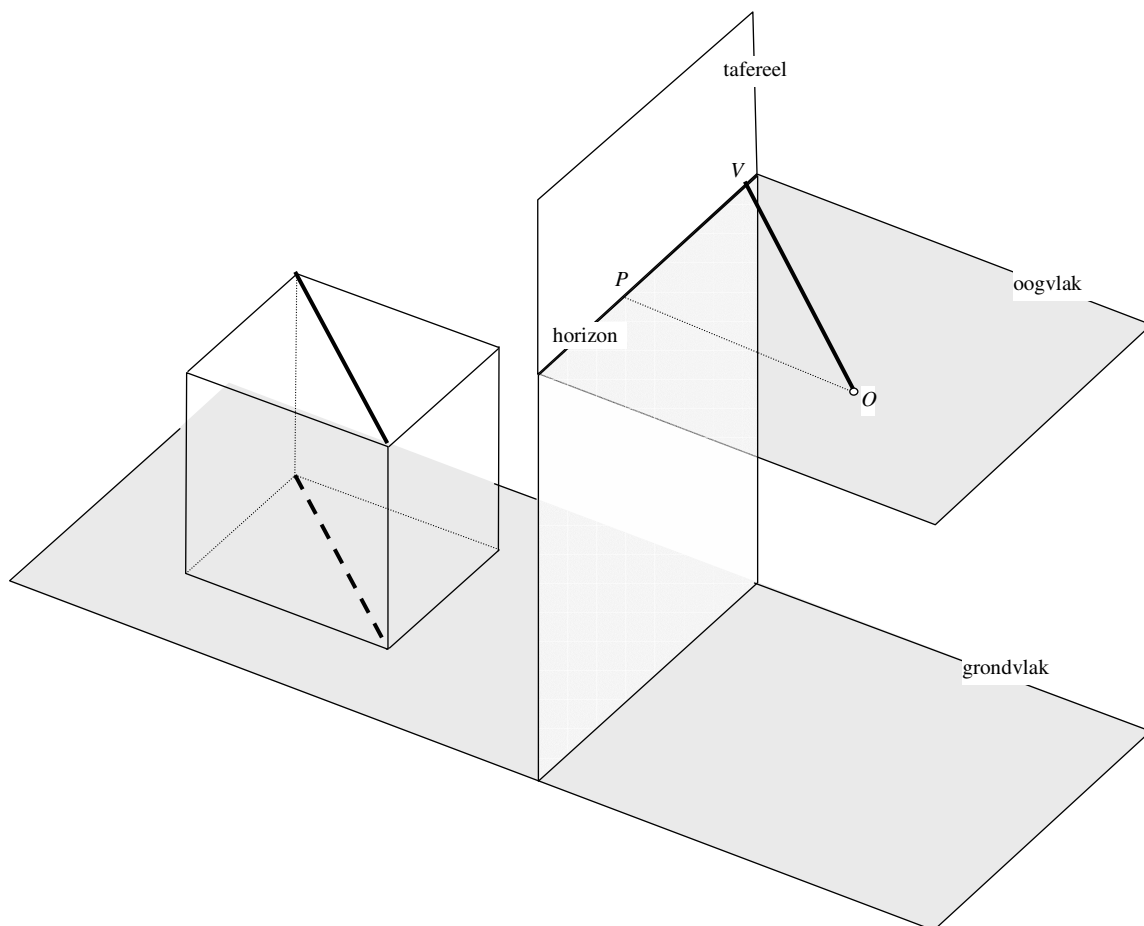
36 Je kijkt recht in de laadruimte van een vrachtwagen van  $9 \times 3 \times 3$  meter. Je staat 3 meter achter de vrachtwagen, je oog is 1 meter boven de bodem van de laadruimte.

Maak een tekening van de laadruimte zoals je die ziet. Dat is een tekening in eenpuntperspectief.

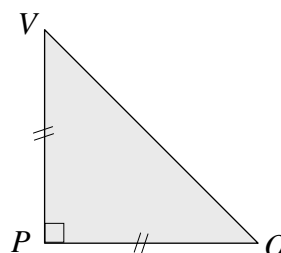
*Bij eenpuntperspectief is een van de hoofdrichtingen evenwijdig aan het tafereel, de andere hoofdrichting – daar loodrecht op – heeft wél een verdwijnpunt (en wel op de horizon). Bij tweepuntperspectief hebben beide hoofdrichtingen een verdwijnpunt op de horizon. Bij beide vormen van perspectief is het interessant te weten vanuit welke positie de tekening/schilderij gemaakt is. In deze paragraaf zoeken we die positie bij eenpuntperspectief, in de volgende paragraaf bij tweepuntperspectief.*

Door in het zijaanzicht met verhoudingen te rekenen kun je bepalen hoe ver het oog van de kubus af is (zie opgave 34). Er is nog een andere manier om dat te bepalen. Die gaan we nu behandelen.

Hieronder staat een kubus met het voorvlak evenwijdig aan het tafereel. Er zijn twee zijvlaksdiagonalen van de kubus getekend: een in het grondvlak en een in het bovenvlak. Die hebben hetzelfde vluchtpunt; ze zijn immers in werkelijkheid evenwijdig. We vinden dat vluchtpunt  $V$  door een lijn vanuit het oog te trekken, evenwijdig aan die diagonalen. Omdat de diagonalen in werkelijkheid hoeken van  $45^\circ$  maken met het tafereel, doet dat de lijn  $OV$  ook.  $P$  is het oogpunt: de loodrechte projectie van  $O$  op het tafereel.

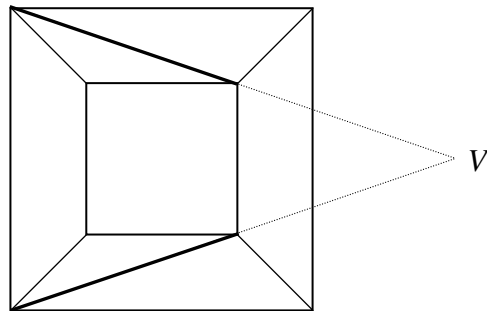


Driehoek  $OPV$  is dus een gelijkbenige rechthoekige driehoek (een "geodriehoek"). De afstand oog-tafereel, dat is  $OP$ , is dus gelijk aan  $PV$ .



Het vluchtpunt  $V$  van de diagonalen heet wel **distantiepunt**, omdat je daarmee kunt vinden wat de afstand (distantie) van het oog tot het tafereel is.

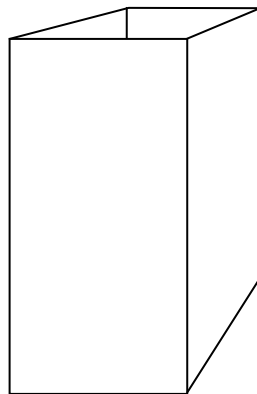
- 37 Hiernaast staat nog eens het perspectiefplaatje van een kubus. De ribben van het voorvlak zijn 4 cm. In opgave 34b heb je gezien dat het oog  $O$  zich dan op afstand 4 cm van het tafereel bevindt.
- a Waar ligt het oogpunt  $P$ ?



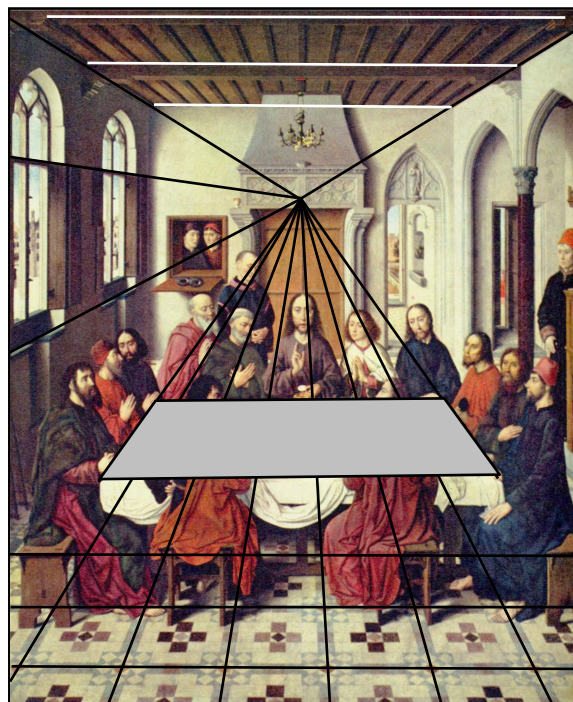
In het plaatje is ook het distantiepunt  $V$  aangegeven: het vluchtpunt van de twee diagonalen in grond- en bovenzvlak. Volgens de theorie moet  $PV = 4$  cm.

- b Ga in de figuur na dat dat klopt.

- 38 Bekijk de eenpuntperspectief-tekening hiernaast van een kist met vierkant grond- en bovenzvlak. De tekening staat ook op het werkblad.
- a Bepaal de horizon, het oogpunt en een horizon-taal distantiepunt.
- b Hoever voor het papier bevond het oog zich? Bekijk de kist vanuit de juiste plek.



- 39 Bekijk nog eens het schilderij van Dirk Bouts van het begin van deze paragraaf. De hoofdrichtingen zijn hiernaast op het schilderij aangegeven.
- a Waar ligt het oogpunt? Teken de horizon op het werkblad.
- b Bepaal de horizontale distantiepunten. Dat zijn de vluchtpunten van de diagonalen van de tegels.
- c Welke hoek maken die in werkelijkheid met het tafereel? Hoever liggen die vluchtpunten in het schilderij van het oogpunt af? Vanaf welke afstand moet je het plaatje bekijken om het op zijn best te zien?

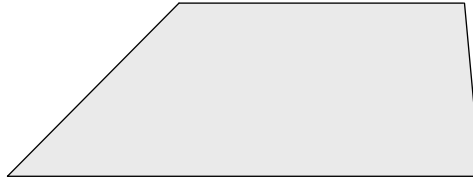


We mogen aannemen dat de tegels vierkant zijn. Veronderstel dat de tafel ook vierkant is. Dan moeten de diagonale lijnen van het tafel-blad door de vluchtpunten van de diagonale lijnen van de tegels gaan.

**d** Klopt dat ongeveer? Wat is je conclusie?

**40** Hiernaast en op het werkblad staat een trapezium. Dit is een perspectieftekening van een vierkant.

- a** Hoe weet je zeker dat het eenpuntperspectief is?
- b** Teken het oogpunt en de vluchtpunten van de diagonalen van het vierkant.
- c** Bekijk het trapezium vanaf de juiste positie om het als vierkant te zien.



### Stelling

Elk trapezium dat geen parallellogram is, is op te vatten als een perspectieftekening van een vierkant, namelijk in eenpuntperspectief.

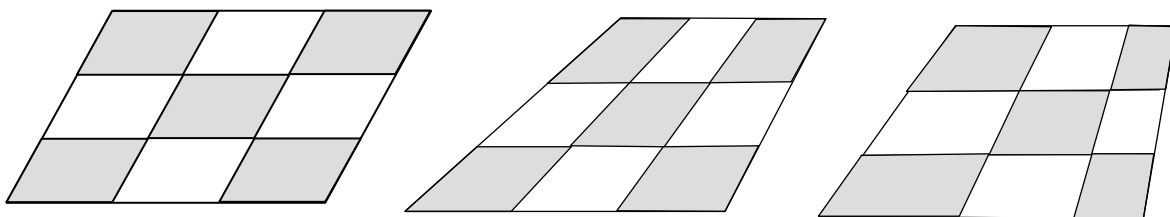
Het oogpunt is het vluchtpunt van de niet-evenwijdige zijden.

De vluchtpunten van de diagonalen van het vierkant liggen altijd even ver van het oogpunt.

Die afstand is de distantie: de afstand vanwaar je moet kijken om het trapezium als vierkant te zien.

**41** Waarom staat in de stelling "dat geen parallellogram is"?

**42** Iemand heeft van vier tegelvloeren met vierkante tegels een perspectieftekening gemaakt. Heeft hij het goed gedaan? Licht je antwoorden toe.



**43** Nog eens de perspectieftekening van het vierkant van opgave 40.

Veronderstel dat het vierkant uit vier even grote vierkante tegeltjes bestaat.

**a** Teken die in de perspectieftekening op het werkblad.

Tip: gebruik de diagonalen.

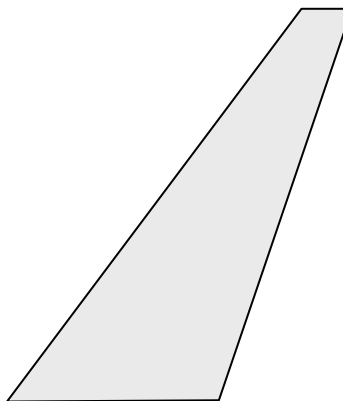
Het vierkant maakt deel uit van een rij even grote vierkanten.

**b** Teken op het werkblad de rechterbuur erbij.

Ook achter het getekende vierkant ligt een buur.

**c** Teken ook die erbij.

**44** Hiernaast en op het werkblad is een trapezium getekend. Het is een perspectieftekening van een rij van acht vierkante tegels, achter elkaar. Geef de acht tegels binnen het trapezium aan.

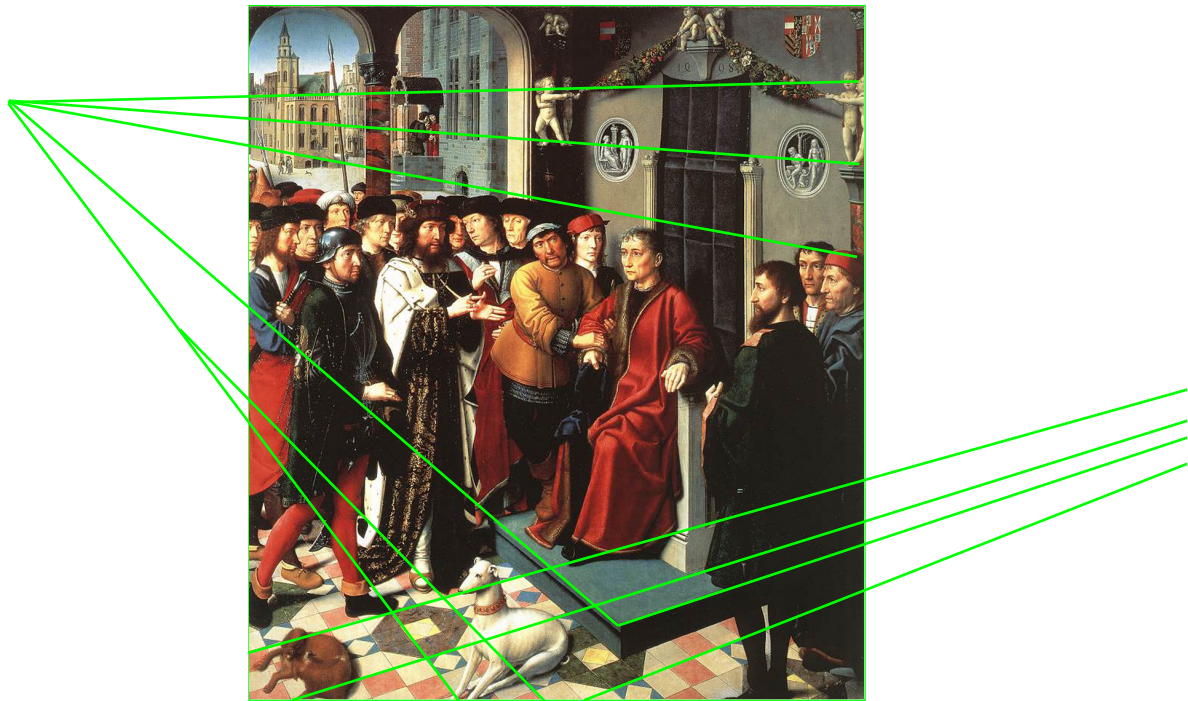


## 6 Tweepuntsperspectief

Het schilderij *Het Oordeel van Cambyses* van Gerard David uit 1498 is een van de eerste in de Nederlanden waar tweepuntsperspectief werd gebruikt. Dat was voor de kunstenaar moeilijker om te maken, en voor ons blijkt het moeilijker te zijn om de juiste plek te vinden van waaruit het moet worden bekeken.

In tweepuntsperspectief hebben de hoofdrichtingen twee verdwijnpunten. Daarmee is de horizon bepaald en dus ook hoe hoog de positie van het oog moet zijn boven de grond om het schilderij optimaal te kunnen bekijken. Maar hoe vind je de plek voor de horizon waar de toeschouwer moet gaan staan?

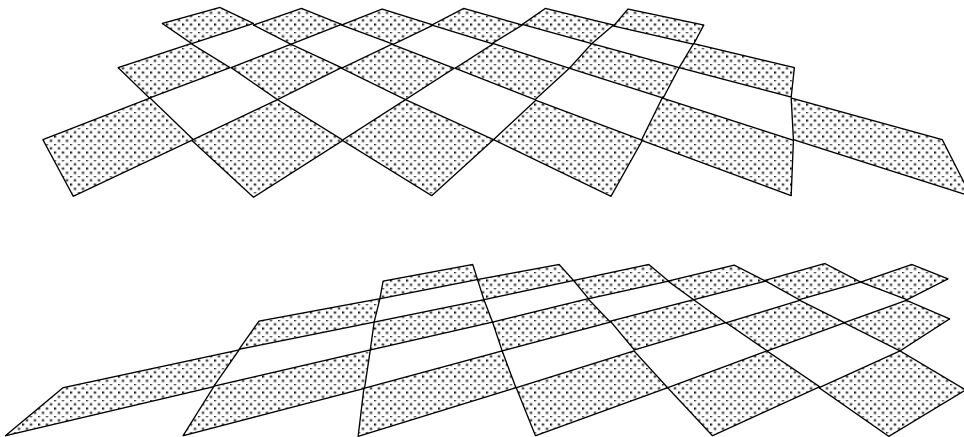
45 Bekijk het schilderij *Het Oordeel van Cambyses*. Het ene vluchtpunt  $V_1$  is getekend, het andere  $V_2$  ligt buiten het papier. De werkelijke positie van het oog  $O$  voor de horizon is zodanig dat de lijnen  $OV_1$  en  $OV_2$  loodrecht op elkaar staan.



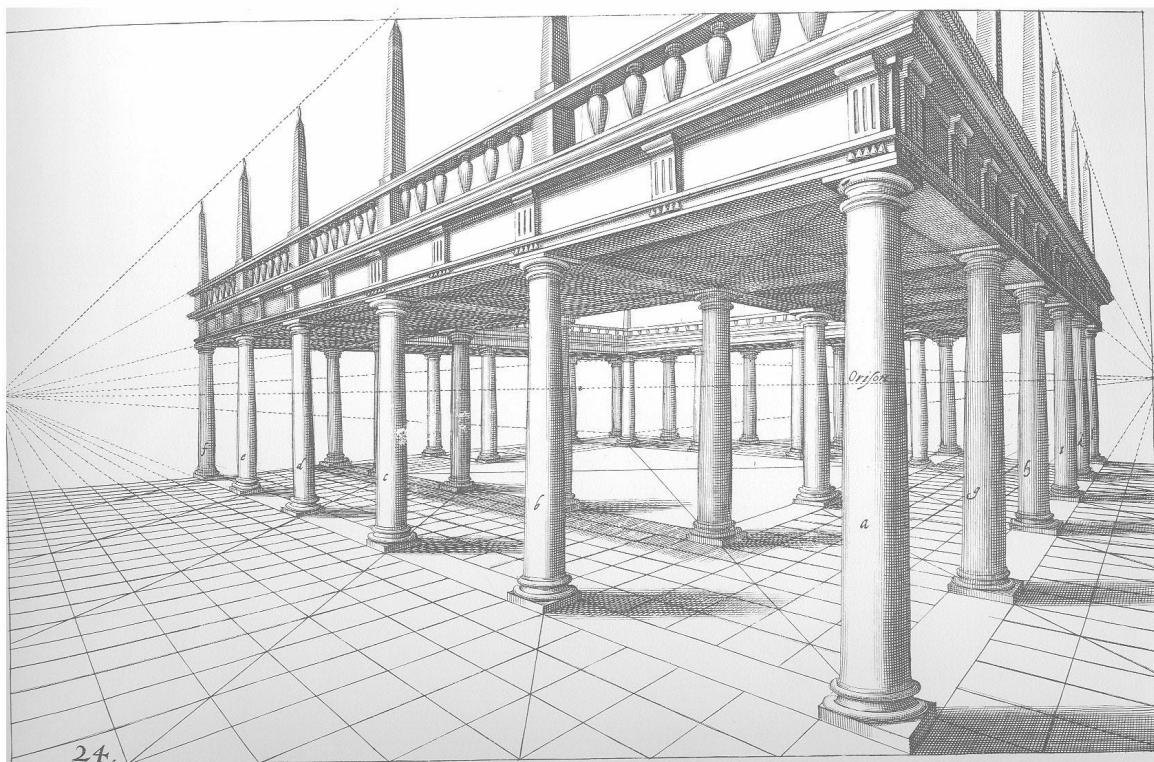
Waar ongeveer denk je dat het oogpunt is?

Stel we hebben een vloer van vierkante tegels in tweepuntsperspectief. Bekijk nu ook de twee richtingen van de diagonalen van de tegels. Als we geluk hebben, is een van die richtingen evenwijdig aan de horizon. Als we de diagonalen als hoofdrichtingen kiezen – in plaats van de zijden van de tegels - hebben we dus een tekening in eenpuntsperspectief, en daarvan kunnen we het oogpunt gemakkelijk bepalen. De andere diagonalen staan loodrecht op de horizon, dus het vluchtpunt daarvan is het oogpunt.

46 Geef op het werkblad het oogpunt aan in elk van de volgende twee gevallen.



Deze vorm van tweepuntsperspectief vinden we bijvoorbeeld in het leerboek voor perspectief van Hans Vredeman de Vries (1527 – ca 1607). We gaan ervan uit dat in de volgende tekening de tegels vierkant zijn.



- 47 a Zoek de vluchtpunten  $V_1$  en  $V_2$  van de twee hoofdrichtingen van de pilarengalerij.  
Hoe zit het met de vluchtpunten van de diagonalen?
- b Leg uit dat het ene vluchtpunt van de diagonalen midden tussen  $V_1$  en  $V_2$  ligt.
- c Vanuit welke plaats moet je de tekening van Hans Vredeman de Vries bekijken om hem goed te zien. Hoe ver moet je oog van het papier zijn?



Hiermee hebben we het geval behandeld van tweepuntspectief, waarbij van vierkanten een diagonaal evenwijdig is aan de horizon. Wat nu als geen van de diagonalen van de tegels evenwijdig is aan de horizon? (En de zijden van de tegels ook niet.)

In dat geval is de plaats van het oogpunt en de distantie veel lastiger te bepalen. Op schilderijen komt dit zelden voor. Voor schilders in vroeger eeuwen was deze vorm van perspectief te moeilijk.

In opdracht G en H komen twee technieken aan de orde om in dat geval het oogpunt en de distantie te vinden.

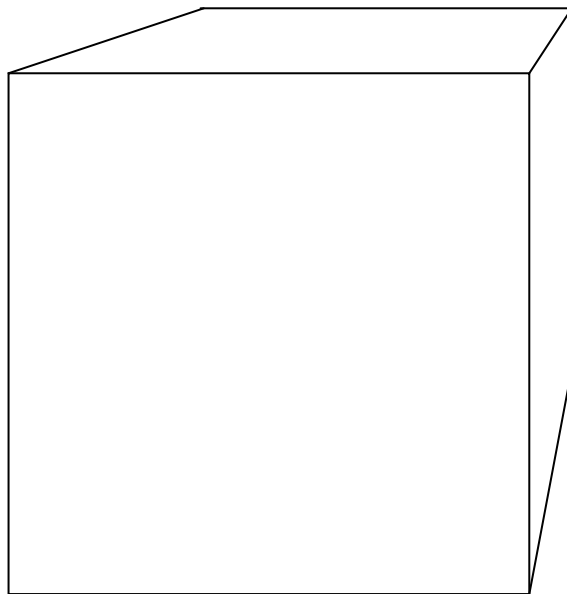
### **Stelling**

Elke vierhoek zonder evenwijdige zijden, is op te vatten als een perspectieftekening van een vierkant, namelijk in tweepuntspectief.

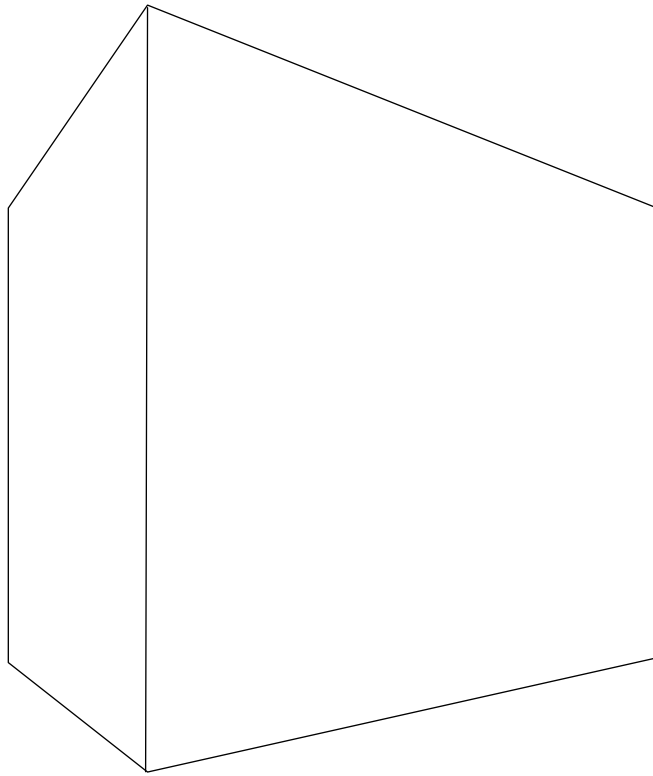
Met andere woorden:

er is een punt aan te wijzen (het oogpunt) van waaruit je de vierhoek als vierkant ziet.

- 48** We kijken nog eens naar de derde figuur van opgave 16. De figuur staat ook op het werkblad.  
**a** Bepaal de plaats van het oog, van waaruit je de figuur het best als kubus ziet.



**b** Dezelfde opdracht voor deze kubus.

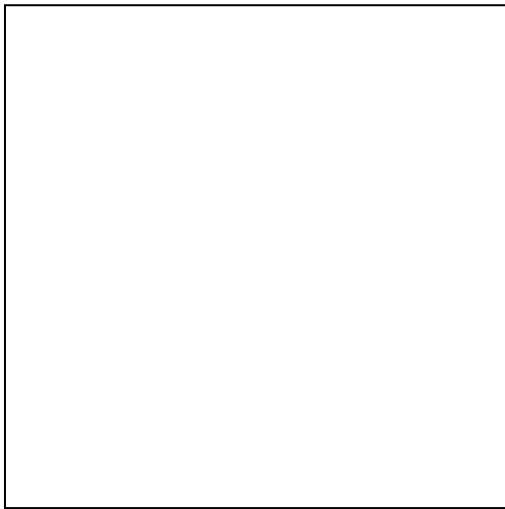


We draaien het nu om. De plaats voor het oog geven we, en jij moet de kubus afmaken.

**49**

Het vierkant hieronder is het voorvlak van een kubus. Bovendien is het oogpunt O gegeven. De figuur staat vergroot op het werkblad. Daar is de afstand 20 cm.

•O



**a** Teken de kubus.

**b** Hoe verandert de perspectieftekening als O op dezelfde plaats blijft, maar de afstand groter wordt?