Noordhoff
biedt een
complete
Alders
wiskunde-
leergang
voor het
v. h. m. o.

ALDERS — ANALYTISCHE MEETKUNDE

C. J. Alders

Inleiding tot de

# Analytische Meetkunde

P. Noordhoff n.v. / Groningen

## BIJ DE 11E DRUK

De vraagstukken 113 en 257 zijn veranderd, vr. 365 is in de theorie opgenomen; verder is voorbeeld 8 van § 37 vervangen door een pittiger vraagstuk. De antwoorden zijn ook herzien; hiervoor, en voor verschillende andere opmerkingen dank ik in het bijzonder de heer J. N. Swaan te Hilversum.

Haarlem, januari 1961. C. J. Alders.

## BIJ DE 21e DRUK

De theorie in § 23 is wat verduidelijkt; in verband hiermee is vr. 111 vervangen.
Vr. 114 en 115 (die al in § 22 voorkomen), zijn vervallen.

Haarlem, januari 1965. C. J. Alders.

*Gebruikte afkortingen*

| | | |
|---|---|---|
| r.c. | betekent | richtingscoëfficiënt; |
| m.p. | ,, | middelpunt; |
| mll. | ,, | middelloodlijn; |
| verg. | ,, | vergelijking. |

# I COORDINATEN

## § 1. Inleiding

In de algebra hebben we geleerd, dat twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden:

$$ax + by = c \text{ en } px + qy = r$$

één, nul of oneindig veel oplossingen hebben. De beide rechte lijnen, waarvan $ax + by = c$ en $px + qy = r$ de vergelijkingen zijn, hebben dan één snijpunt, geen snijpunt, of ze vallen samen.

Men kan dus de (algebraïsche) beschouwing van vergelijkingen meetkundig interpreteren; er bestaat dus een verband tussen algebraïsche en meetkundige eigenschappen. De bestudering van de meetkunde door middel van de algebra is het doel van de *analytische meetkunde*. De zuiver meetkundige beschouwing van figuren, die wij hoofdzakelijk aan de Grieken danken, heet de *synthetische meetkunde*; deze dateert al van vóór het begin van onze jaartelling (Euclides in de 3e eeuw voor Chr.). De analytische meetkunde is 2000 jaar later ontdekt; de grondleggers zijn de Franse wiskundigen DESCARTES (1596—1650) en FERMAT (1601—1665).

Het grote voordeel van de analytische meetkunde is, dat de methoden meestal algemener en systematischer zijn dan die van de synthetische meetkunde; het ,,vinden'' van een ingewikkelde gedachtengang of van een bepaalde hulplijn komt in de analytische meetkunde vrijwel niet voor.

## § 2. Plaatsbepaling op een rechte lijn

BEPALINGEN: Een **as** is een lijn[1], waarop een *richting* aangenomen is. De **vector** $\overline{OA}$ is het lijnstuk $\overline{OA}$, gerekend in de richting van O naar A. De vectoren $\overline{OA}$ en $\overline{AO}$ zijn elkaars tegengestelden: $\overline{OA} = -\overline{AO}$.

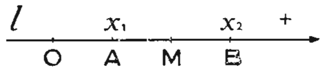

Fig. 1*a*.

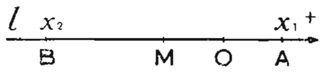

Fig. 1*b*.

We kiezen op een horizontale lijn $l$ een punt O. De positieve $l$-as noemen we de richting naar rechts; de richting naar links heet de negatieve $l$-as. Een punt A op $l$ is dan bepaald door de vector $\overline{OA}$ (fig. 1); deze noemen we positief, als A rechts van O ligt, en negatief, als A links van O ligt. We geven die vector aan met het (positieve of negatieve) getal $x_1$, waarin $|x_1|$ (dus de **absolute waarde** van $\mathbf{x_1}$) de lengte van $\overline{OA}$ is. Elk *punt* op $l$ komt dan overeen met een *getal*, en omgekeerd: elk getal bepaalt een punt op $l$.

Het punt A geven we aan met $A(x_1)$; O is het punt O (0).

Voor twee punten A $(x_1)$ en $B(x_2)$ op $l$ geldt steeds:

$$\mathbf{\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}.}$$

(Zie fig. 1*a* en 1*b*, en denk aan de tekens!).

Voor de vector $\overline{AB}$ geldt dus: $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = x_2 - x_1$. De *afstand* van A en B is de *lengte* van de vector $\overline{AB}$; deze is dus de *absolute waarde* van $x_2 - x_1$, dus $|\mathbf{x_1 - x_2}|$.

Zo is in fig. 1*a*: $x_1 = 2$ en $x_2 = 6 \rightarrow \overline{AB} = |2 - 6| = 4$.

In fig. 1*b* is $x_1 = 2$; $x_2 = -6 \rightarrow \overline{AB} = |2 + 6| = 8$.

---

Is M het midden van $\overline{AB}$, dan is weer $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}$ (fig. 1*a* en 1*b*). We schrijven hiervoor:

$$\mathbf{\overline{OM}} = \overline{OA} + \tfrac{1}{2}\overline{AB} = x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) \rightarrow \mathbf{\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)}.$$

Dit is dus de (positieve of negatieve) *vector* $\overline{OM}$.

In fig. 1*a* is dus $\overline{OM} = \frac{1}{2}(2 + 6) = 4$; in fig. 1*b* is $\overline{OM} = \frac{1}{2}(2 - 6) = -2$ (M ligt *links* van O).

---

[1] Met „lijn" bedoelen we *rechte* lijn, tenzij het tegendeel blijkt.



## § 3. Plaatsbepaling in het platte vlak

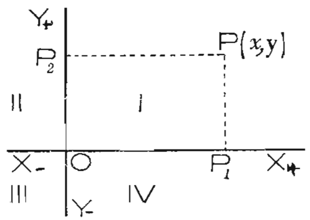

Fig. 2.

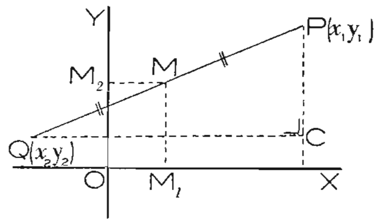

Fig. 3.

We denken ons nu door een punt O (de **oorsprong**) twee loodrecht op elkaar staande assen; de **X-as** horizontaal, en de **Y-as** verticaal. Voor de vectoren op deze assen kiezen we de teken-afspraken uit de algebra (fig. 2).

De projecties van een punt P op de X- en Y-as zijn opv. $P_1$ en $P_2$. Het punt P is dan bepaald door de vectoren $\overline{OP_1} = x$ (de **abscis**) en $\overline{OP_2} = y$ (de **ordinaat**). Deze heten de (*Cartesische*) **coördinaten** van P; we geven P aan met $P(x, y)$.

OPMERKING: De assen verdelen het vlak in vier delen; deze heten het eerste, tweede, derde en vierde **kwadrant**; we geven ze aan met I, II, III en IV (fig. 2).

---

## § 4. De afstand van twee punten

We denken ons de punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ (fig. 3). Volgens § 2 is dan: $\overline{QC} = |x_1 - x_2|$ en $\overline{PC} = |y_1 - y_2|$, dus

$$\mathbf{\overline{PQ}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.}$$

Hiermee kan men de afstand van twee punten berekenen, als hun coördinaten bekend zijn. Volgens § 2 geldt deze formule in *alle* gevallen, onverschillig in welke kwadranten P en Q liggen. Zo is voor P(3, 5) en Q(— 2, — 7):

$\overline{PQ}^2 = |3 + 2|^2 + |5 + 7|^2 = 25 + 144 = 169 \rightarrow \overline{PQ} = 13.$

## § 5. Het midden van een lijnstuk

In fig. 3 in $M(x, y)$ het midden van $\overline{PQ}$; de projecties **van** M op de X- en Y-as zijn opv. $M_1$ en $M_2$. Volgens § 2 is dan $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ en $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$; de coördinaten van M zijn dus $\mathbf{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}$ en $\mathbf{\frac{1}{2}(y_1 + y_2)}$.

Volgens § 2 geldt ook deze formule algemeen.

---

## § 6. De vergelijking van een rechte of kromme lijn

Een vergelijking met twee onbekenden heeft in het algemeen oneindig veel oplossingen. Zo kan men in $x + y = 5$ aan $x$ willekeurige waarden geven, en de bijbehorende waarde van $y$ berekenen. Dit geeft o.a.:

| $x$ | —1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | —1 |

Beschouwen we elk getallenpaar van die tabel, dus (—1, 6), (0, 5), (1, 4) .... als de coördinaten van een punt, dan liggen deze punten op een (rechte of kromme) *lijn*; men zegt, dat $x + y = 5$ de *vergelijking* van die lijn is. — In hoofdstuk II wordt bewezen, dat die lijn een *rechte* lijn is (fig. 4).

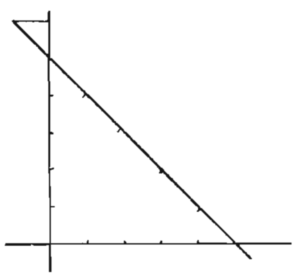

Fig. 4: $x + y = 5$.

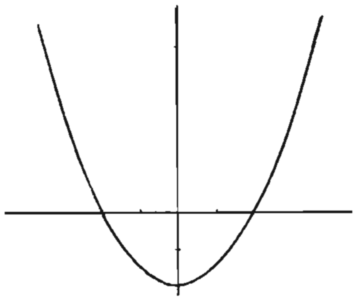

Fig. 5: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

BEPALING: *De vergelijking van een (rechte of kromme) lijn is de vergelijking, waaraan de coördinaten x en y van elk punt van die lijn voldoen* (en die van andere punten niet). Algemeen schrijven we hiervoor $f(x, y) = 0$, b.v.

$$3x - y - 2 = 0;\ x^2 + y^2 = 10;\ y^2 = 6x \text{ enz.}$$

Is dus b.v. $2a + 3b = 4$, dan ligt het punt $(a, b)$ op de lijn, waarvan $2x + 3y = 4$ de vergelijking is.

Met „de kromme $f(x, y) = 0$ bedoelen we de (rechte of kromme )lijn, waarvan $f(x, y) = 0$ de vergelijking is.



## § 7. Vraagstukken

1. Teken in één figuur de punten A(2, 3), B(4,0 ), C(0, 2), D(—2, 2), E(—1, —2), F(0, —3), G(2, —3), H(—3, 0).
2. Wat is de verzameling van de punten $(a, a)$? ($a$ willekeurig).
3. Bepaal de coördinaten van het spiegelbeeld van $P(x, y)$ a) t.o.v. de X-as; b) t.o.v. de Y-as; c) t.o.v. O.
4. Bereken de lengte van $\overline{AD}$, $\overline{DE}$ en $\overline{BF}$ in vr. 1.
5. Gegeven de punten A(2, 4), B(4, 0) en C(0, —2). Bereken de lengten der zijden van $\triangle ABC$.
6. Gegeven A(4, 2) en B(1, —2). Bereken de coördinaten van het punt P op de X-as, als a) $\overline{PA} = \overline{PB}$; b) $\overline{PA} = 2\overline{PB}$.
7. Gegeven A(—2, 0) en B(4, 0). Bereken de coördinaten van het punt C, als $\triangle ABC$ gelijkzijdig is.
8. Gegeven $A(a, 0)$ en $B(0, b)$. ($a$ en $b$ positief). Bereken de coördinaten van C en D in I, als ABCD een vierkant is. Bereken ook de coördinaten van het middelpunt.
9. Bepaal de middens der zijden van $\triangle ABC$ uit vr. 5.
10. Bereken ook de coördinaten van het zwaartepunt.
11. Bereken ook nog de lengten van de zwaartelijnen.
12. Gegeven A(—3, 0), B(3, 0) en C(0, 6). Bepaal op de Y-as het punt P, waarvoor $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ minimaal is.
13. Bereken de coördinaten van het punt P op $\overline{AB}$ voor A(—2, 2) en B(4, 5), als a) $\overline{PA} = 2\overline{PB}$; b) $\overline{PB} = 2\overline{PA}$.
14. Ook voor $A(x_1, y_1)$ en $B(x_2, y_2)$, als $\overline{AP} = m.\overline{PB}$.
15. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ en $C(x_3, y_3)$. Bewijs: het zwaartepunt van $\triangle ABC$ is het punt $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $\frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.
16. Gegeven de punten $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$. Bewijs: de oppervlakte van $\triangle OAB$ is $\frac{1}{2}\,|\,a_1b_2 - a_2b_1\,|$.

Bewijs, dat de volgende krommen symmetrisch zijn:

17. $y = x^4 - 3x^2 + 2$ t.o.v. de Y-as.
18. $x^2 - 2y^2 = 6$ t.o.v. beide assen.
19. $x^2 + xy + y^2 = 8$ t.o.v. O.

Teken de kromme, waarvan de vergelijking is:

20. $y = x - 2$.
21. $y = \frac{1}{2}x^2$.
22. $y = \frac{1}{8}x^3$.
23. $x^2 + y^2 = 4$.
24. $x^2 + 4y^2 = 16$.
25. $y^2 = 2x$.

## II | DE RECHTE LIJN

### § 8. De vergelijking van een lijn door O

Als een lijn $l$ op een afstand $a$ evenwijdig is met de X-as, dan heeft elk punt van $l$ de ordinaat $a$. Daarom zeggen we:

1) de vergelijking van een lijn // de X-as is $y = a$;
   (ligt $l$ onder de X-as, dan is $a$ negatief).
2) de vergelijking van een lijn // de Y-as is $x = b$;
3) de vergelijking van de X-as is $y = 0$;
4) de vergelijking van de Y-as is $x = 0$.

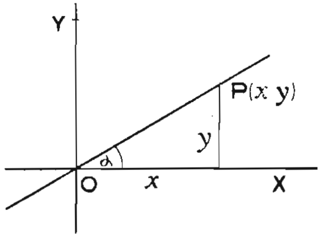


Fig. 6.

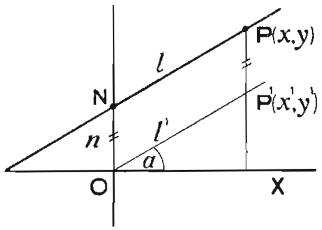


Fig. 7.

In fig. 6 is $l$ een lijn door O, die met de X-as een hoek $\alpha$ maakt [1], en niet met een van de assen samenvalt.

Is P($x$, $y$) een punt van $l$, dan is $y = x \operatorname{tg} \alpha$. Deze betrekking is onafhankelijk van de ligging van P op $l$; het is dus de *vergelijking* van $l$. Stellen we $\operatorname{tg} \alpha = m$, dan geldt dus: **$y = mx$ is de vergelijking van een lijn door O.**

OPMERKING **1.** $m = \operatorname{tg} \alpha$ geeft de richting van $l$ aan; daarom heet $m$ de *richtings-coëfficiënt* (r.c.) van $l$.

**2.** Als $l$ met de X-as samenvalt is $\alpha = 0$, dus $\operatorname{tg} \alpha = m = 0$. De verg. van de X-as is $y = 0$; dit klopt dus met $y = mx$. Valt $l$ samen met de Y-as, dan is $\alpha = 90°$, dus $\operatorname{tg} \alpha$ is dan ongedefinieerd; $y = mx$ stelt dus voor geen enkele (eindige) waarde van $m$ de Y-as voor.

[1] Dit is de hoek tussen $l$ en de positieve X-as, gemeten tussen 0° en 180°, en tegen de wijzers van de klok.

### § 9. De algemene vergelijking van de rechte lijn

In fig. 7 is $l$ een lijn, die de Y-as snijdt in N(0, $n$)[1], en niet door O gaat; $l'$ is de lijn door O, die // $l$ is. Het punt P($x$, $y$) van $l$ heeft dezelfde abscis als het punt P'($x'$, $y'$) van $l'$.

Is $y = mx$ de vergelijking van $l'$, dan is dus $y' = mx'$. Nu is

$$y = y' + n = mx' + n = mx + n.$$

Dit is een betrekking tussen de coördinaten van *elk* punt van $l$; de vergelijking van $l$ is dus **$y = mx + n$.**

Voor $m = 0$ gaat de vergelijking over in $y = n$; deze stelt een lijn // de X-as voor.
Voor $n = 0$ is de vergelijking $y = mx$; de lijn gaat dan door O.
Voor $m = n = 0$ krijgen we $y = 0$, dus de X-as.

Lijnen, die evenwijdig zijn met de Y-as ($x = a$) kan men *niet* voorstellen door de vergelijking $y = mx + n$; alle andere blijkbaar wel. Dus: **$y = mx + n$ is de algemene vergelijking van een lijn, die niet evenwijdig is met de Y-as.**

De *algemene* lineaire vergelijking in $x$ en $y$ is $ax + by + c = 0$. Deze gaat voor $b = 0$ over in $ax + c = 0$, dus een lijn // de Y-as. Voor $b = c = 0$ is het de Y-as zelf.

Is $b \neq 0$, dan delen we de leden van de vergelijking door $b$; dit geeft een vergelijking van de vorm $y = mx + n$, die een lijn voorstelt, die niet // de Y-as is. Dus: **$ax + by + c = 0$ is de algemene vergelijking van een rechte lijn.**

Toch kiezen we voor de vergelijking van een willekeurige lijn dikwijls $y = mx + n$, omdat die maar *twee* coëfficiënten bevat. Dit kàn echter tot onvolledigheden leiden, die men dan natuurlijk moet onderzoeken.

OPMERKING **1.** In $ax + by + c = 0$ gaat het alleen om de *verhouding* van $a$, $b$ en $c$; de lijnen $ax + by + c = 0$ en $px + qy + r = 0$ vallen samen als $a : p = b : q = c : r$.

Zo stellen $3x - y = 2$ en $6x - 2y = 4$ dezelfde lijn voor.

**2.** $y = \pm x$ of $y^2 = x^2$ stelt de beide lijnen $y = x$ en $y = -x$ voor; dit heet een *lijnenpaar*.

Zo is $(y - x)(x + y - 4) = 0$ de vergelijking van het lijnenpaar $y - x = 0$ en $x + y - 4 = 0$.

[1] Als N onder O ligt, dan is $n$ natuurlijk negatief.

## § 10. Lijn door een punt $(x_1, y_1)$

Als het punt $(x_1, y_1)$ op de lijn $y = mx + n$ ligt, dan is

$$y_1 = mx_1 + n \rightarrow n = y_1 - mx_1.$$

De vergelijking gaat daardoor over in:

$$y = mx + y_1 - mx_1, \text{ of } \mathbf{y - y_1 = m(x - x_1).}$$

Dit is dus de verg. van de lijn door $(x_1, y_1)$ met r.c. $m$. (De verg. van de lijn door $P(x_1, y_1)$ // de Y-as is $x = x_1$).

**Toepassing 1.** Bepaal de vergelijking van de lijn door $A(4, -3)$, die een hoek van 135° met de X-as maakt.

OPL.: De r.c. van de gevraagde lijn is tg 135° $= -1$; de verg. is dus $y + 3 = -1(x - 4)$, of $x + y = 1$.

**2.** Bepaal de verg. van de lijn door $A(x_1, y_1)$ en $B(x_2, y_2)$.

OPL.: De algemene verg. van een lijn door $A(x_1, y_1)$ is

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Deze lijn gaat door het punt $B(x_2, y_2)$, als

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1).$$

De waarde van $m$, die hieruit volgt, substitueren we in (1); de verg. van AB is dan

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \text{ (als } x_1 \neq x_2).$$

**N.B.** Drie punten A, B en C liggen op één lijn, als de coördinaten van C aan de vergelijking van AB voldoen.

## § 11. Snijpunt van twee lijnen, evenwijdigheid

Het snijpunt S van de lijnen $\begin{cases} y = m_1x + n_1 & \ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ y = m_2x + n_2 & \ldots\ldots\ldots \quad (2) \end{cases}$

is het punt, waarvan de coördinaten aan (1) en (2) voldoen. Aftrekking van de overeenkomstige leden geeft:

$$(m_1 - m_2)x + (n_1 - n_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nu kunnen zich drie gevallen voordoen:

I. $m_1 \neq m_2$. — Uit (3) volgt dan één waarde voor $x$; de lijnen hebben één snijpunt.

II. $m_1 = m_2$ en $n_1 = n_2$. — Dan is verg. (3) identiek; *elke* waarde van $x$ voldoet. De lijnen vallen dan samen.

III. $m_1 = m_2$ en $n_1 \neq n_2$. — Dan is verg. (3) vals; de lijnen hebben dan geen snijpunt, en zijn dus evenwijdig.



Deze voorwaarden zijn niet alleen voldoende, maar ook nodig. Want als de lijnen evenwijdig zijn, dan is verg. (3) vals, dus $m_1 = m_2$ en $n_1 \neq n_2$. Hieruit blijkt:

**Twee lijnen zijn alleen dan evenwijdig, als zij dezelfde r.c. hebben, en niet samenvallen.**

**Vraagstuk.** Bepaal de verg. van de lijn door P(2, 5), die evenwijdig is met de lijn $2x + y = 3$.

OPL.: De algemene verg. van een lijn, die evenwijdig is met de lijn $2x + y = 3$, is $2x + y = a$.

Hieraan moeten nu de coördinaten van P(2, 5) voldoen; substitutie van $x = 2$ en $y = 5$ geeft: $4 + 5 = a \rightarrow a = 9$. De verg. van de gevraagde lijn is dus $2x + y = 9$.

## § 12. De functie $ax + by + c$

Is $P(x, y)$ een punt van de lijn $l$, met verg. $x + y = 5$, dan is dus $x + y - 5 = 0$.

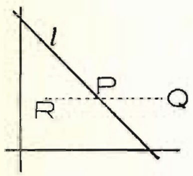


Fig. 8.

Is verder Q een punt van het vlak met dezelfde ordinaat als P, maar met een *grotere* abscis (fig. 8), dan is dus voor de coördinaten van Q de vorm $x+y-5$ positief. Voor een punt R met de ordinaat van P, maar met een *kleinere* abscis is de functie $x + y - 5$ negatief.

Wat voor het punt Q gezegd is, geldt blijkbaar voor *elk* punt van het vlak, dat aan dezelfde kant van $l$ ligt als Q. De lijn $l$ verdeelt dus het vlak in twee delen; voor alle punten $(x, y)$, die rechts van $l$ liggen, is de functie $x + y - 5$ positief; voor de punten links van $l$, is die functie negatief. Voor de punten, die *op* $l$ liggen, is $x + y - 5 = 0$.

Algemeen geldt: voor de punten aan de ene kant van de lijn $ax + by + c = 0$ is de functie $ax + by + c$ positief; voor de punten aan de andere kant is die functie negatief.

Zo liggen de punten (2, 5) en (3, —1) niet aan dezelfde kant van de lijn $y = 2x - 6$, want

voor $x = 2$ en $y = 5$ is $y - 2x + 6$ positief;
voor $x = 3$ en $y = -1$ is $y - 2x + 6$ negatief.

## § 13. Vraagstukken

26. Bepaal de verg. van de lijn door O, die met de X-as een hoek van 45° (120°, 150°) maakt.
27. Wat stelt de verg. $y^2 = 4x^2$ voor? En $x^2 = a^2$?
28. Wat is de r.c. van de volgende lijnen: $2x - y = 0$; $x + 2y = 1$; $3x - 2y + 4 = 0$; $y = 5$; $a^2x - ay = b$.

Bepaal de verg. van de lijn door het punt P, die een hoek $\alpha$ maakt met de X-as, als gegeven is:

29. $P(3, -2)$ en $\alpha = 45°$.
30. $P(0, 5)$ en $\alpha = 60°$.
31. $P(\sqrt{3}, 1)$ en $\alpha = 120°$.
32. $P(-2, 1)$ en $\alpha = 135°$.
33. $P(-4, 0)$ en $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{1}{2}$.
34. $P(2, -3)$ en $\cos \alpha = -0,8$.

Stel de verg. op van de lijn AB, als gegeven is:

35. $A(4, 2)$ en $B(2, 6)$.
36. $A(5, 3)$ en $B(5, 1)$.
37. $A(3, -1)$ en $B(-3, 1)$.
38. $A(a, 0)$ en $B(0, b)$.
39. De hoekpunten van $\triangle ABC$ zijn $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ en $C(4, 6)$. Bepaal de vergelijkingen van de zijden.
40. Bepaal ook de vergelijkingen van de zwaartelijnen.
41. Liggen de punten (2, 3), (3, −1) en (0, 6) op één lijn?
42. De lijnen $y = x + 2$, $y = 2x - 4$, $2x + y = 8$ sluiten een driehoek in. Bepaal de coördinaten van de hoekpunten.
43. Gaan de lijnen $y = 4$, $y = x + 3$ en $x + y = 5$ door één punt?
44. Bewijs, dat de zwaartelijnen van elke $\triangle ABC$ door één punt gaan (Kies AB als X-as, en de Y-as door C).

Bepaal de verg. van de lijn door het punt

45. (−2, 0), die evenwijdig is met de lijn $y = 2x - 1$.
46. (2, −3), die evenwijdig is met de lijn $2x + 3y = 7$.
47. (3, 4), die evenwijdig is met de lijn $4x - 3y = 6$.

---

48. Bepaal de verg. van de lijn, die symmetrisch ligt met de lijn $y = mx + n$ t.o.v. a) de X-as; b) de Y-as.
49. Als $m$ alle mogelijke waarden aanneemt, wat is dan de meetkundige betekenis van a) $y = x + m$; b) $y = mx + 1$.
50. Teken de kromme $y = \sqrt{x^2}$ voor $-3 \leqslant x \leqslant 3$.
51. Ook nog $y = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2}$ voor $0 \leqslant x \leqslant 6$.
52. Ga na, of de punten (3, 4) en (1, 2) al dan niet aan dezelfde kant liggen van de lijn $y = 2x - 1$.

Ook nog de punten (3, 0) en (3, 2) t.o.v. de lijn $x + y = 4$.



Arceer het gebied van de punten $(x, y)$, waarvoor geldt:

53. $x < 3$ en $x + y > 2$.
54. $x < y$ en $2x + y > 3$.
55. $x + y > 2$ en $x + 6 > 2y$.
56. $x < 4$, $y < x$ en $x + y > 4$.
57. $|x| \geqslant |y|$.
58. $|x + y| \leqslant 1$.
59. $|x| + |y| \leqslant 1$.
60. $|x| - |y| \geqslant 1$.

---

## § 14. De hoek van twee lijnen; loodrechte stand.

Door O gaan de lijnen $l_1 : y = m_1 x$ en $l_2 : y = m_2 x$ (fig. 9). Voor de hoeken $\varphi_1$ en $\varphi_2$ van $l_1$ en $l_2$ met de X-as geldt dan: $\operatorname{tg} \varphi_1 = m_1$ en $\operatorname{tg} \varphi_2 = m_2$.

Is nu $\varphi$ de scherpe hoek van $l_1$ en $l_2$, dan is $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$ of $180 - (\varphi_1 - \varphi_2)$. Dus

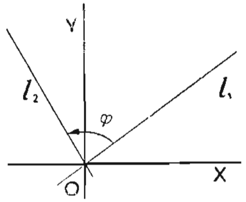

Fig. 9.

$$\mathbf{tg}\ \varphi = |\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)| = \left| \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2} \right| = \left| \frac{\mathbf{m_1 - m_2}}{\mathbf{1 + m_1 m_2}} \right|.$$

**N.B.** De hoek van de lijnen $y = m_1 x + a$ en $y = m_2 x + b$ is dezelfde als die van de lijnen $y = m_1 x$ en $y = m_2 x$.

Voor de lijnen $2x + y = 3$ en $3x - y = 6$ vinden we dus:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{-2 - 3}{1 + (-2)(3)} \right| = \left| \frac{-5}{-5} \right| = 1 \to \varphi = 45°.$$

---

Is $\mathbf{m_1 m_2 = -1}$, dan is $\operatorname{tg} \varphi$ ongedefinieerd, dus $\varphi = 90°$. Omgekeerd: als $\varphi = 90°$ is, dan is $m_1 m_2 = -1$.

**Twee lijnen staan dus loodrecht op elkaar, als het produkt van hun richtings- coëfficiënten −1 is.**

---

**Toepassing 1.** Stel de verg. op van de lijn door $A(-4, 2)$, die loodrecht staat op de lijn $2x + y = 9$.

Opl.: De r.c. van $2x + y = 9$ is $-2$; de r.c. van een loodlijn hierop is dus $+\frac{1}{2}$; de gevraagde verg. is dus:

$$y - 2 = \tfrac{1}{2}(x + 4), \text{ of } y = \tfrac{1}{2}x + 4.$$

**N.B.** Het snijpunt van de beide lijnen is (2, 5); dit is dus *de projectie van A* op de lijn $2x + y = 9$.

**2.** De loodlijn door O op de lijn $ax + by + c = 0$ heeft tot vergelijking $bx - ay = 0$.

---

vl afstand van (4,28) tot $y = \frac{3}{4}x$

## § 15. De normaalvergelijking van een lijn

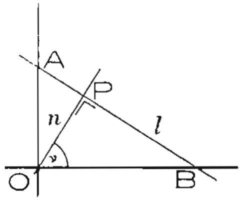


Fig. 10.

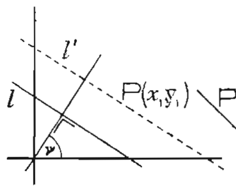


Fig. 11.

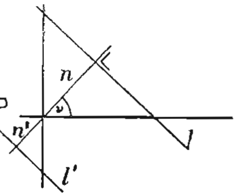


Fig. 12.

In fig. 10 is P de projectie van O op $l$. De hoek van OP en de X-as is $\nu$ (de griekse letter *nu*), en de lengte van $\overline{\mathrm{OP}}$ (dus de afstand van O tot $l$) is $n$; P is dan het punt ($n \cos \nu$, $n \sin \nu$). De r.c. van OP is tg $\nu$, dus de r.c. van $l$ is — ctg $\nu$; de verg. van $l$ is dan

$$y - n \sin \nu = -\operatorname{ctg} \nu \; (x - n \cos \nu), \text{ of}$$

$$\mathbf{x \cos \nu + y \sin \nu - n = 0.}$$

Dit heet de *normaalvergelijking* van $l$; hierbij wordt de hoek $\nu$ gerekend van 0° tot 360°, $n$ wordt positief genomen.

**Vraagstuk.** Breng $ax + by + c = 0$ in de normaalvorm.

OPL.: We vermenigvuldigen $ax + by + c$ met een zodanig getal $k$, dat $ka$ en $kb$ de cosinus en sinus van eenzelfde hoek $\nu$ voorstellen. Uit $\cos^2 \nu + \sin^2 \nu = 1$ volgt dan $k^2a^2 + k^2b^2 = 1$, dus $k^2 = (a^2 + b^2)^{-1}$. Verder moet $ck = -n$ negatief zijn; de normaalverg. van $ax + by + c = 0$ is dus

$$\frac{ax + by + c}{+\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{ax + by + c}{-\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Zo is $3x + 4y = 5$ in de normaalvorm $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0$; de normaalverg. van $4x - 3y + 6 = 0$ is $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{6}{5} = 0$.

## § 16. De afstand van een punt tot een lijn.

In fig. 11 is $l$ de lijn $x \cos \nu + y \sin \nu - n = 0$; $P(x_1, y_1)$ is een willekeurig punt, en $l'$ is de lijn door P // $l$.

De verg. van de lijn $l'$ is dan $x \cos \nu + y \sin \nu - n' = 0$, waarin $n'$ de afstand van O tot $l'$ is. De afstand **d** van P tot $l$ (dus van $l$ en $l'$) is dan $|\, n' - n \,|$.

Nu ligt $P(x_1, y_1)$ op $l'$, dus $n' = x_1 \cos \nu + y_1 \sin \nu$, zodat

$$\mathbf{d} = |\, \mathbf{x_1 \cos \nu + y_1 \sin \nu - n} \,|.$$



Brengen we $ax + by + c = 0$ in de normaalvorm, dan is de afstand van $P\ (x_1, y_1)$ tot de lijn $ax + by + c = 0$ dus:

$$\left| \frac{\mathbf{ax_1 + by_1 + c}}{\mathbf{\sqrt{a^2 + b^2}}} \right|$$

Zo is de afstand van P(4, 3) tot de lijn $2x - y + 5 = 0$:

$$\left| \frac{2 \times 4 - 3 + 5}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{10}{\sqrt{5}} \right| = \mathbf{2\sqrt{5}}.$$

**N.B.** Ligt O tussen $l$ en $l'$ (fig. 12), dan is de verg. van $l'$: $x \cos (180° + \nu) + y \sin (180° + \nu) - n' = 0$.
Bewijs, dat daardoor de formule voor $d$ niet verandert.

## § 17. Vraagstukken

61. Bereken tg $\varphi$, als $\varphi$ de scherpe hoek is van de lijnen
    a) $y = 2x$ en $y = -x$; c) $y = x + 3$ en $x + 3y = 6$;
    b) $y = \frac{1}{2}x$ en $y = 2x$; d) $x + 2y = 4$ en $y = 2$.
62. Stel de verg. op van de lijnen door O, die een hoek van 45° maken met de lijn $2x + y = 6$.

Bepaal de verg. van de loodlijn door het punt

63. O op de lijn $2x + y = 5$.
64. O op de lijn $x - 3y = 10$.
65. O op de lijn $ax = by$.
66. (1, 2) op de lijn $y = -3x$.
67. (—3, 1) op de lijn $x = 2y$.
68. (2, —5) op $4x - 2y = 5$.
69. Bereken de coördinaten van de projectie van P(3, —2) op de lijnen $x + y = 5$ en $2x + 3y = 13$.
70. Ook van de projecties van O op de lijnen in vr. 63 en 64.
71. De hoekpunten van $\triangle$ABC zijn A($a$, 0), B($b$, 0) en C(0, $c$). Bewijs, dat de hoogtelijnen door één punt gaan.
72. Bewijs ook, dat de middelloodlijnen door één punt gaan.
73. Bereken de afstand van O tot de lijnen a) $x + y = 6$; b) $x - 3y = 10$; c) $3x + 4y = 5$.
74. a) Bereken de afstand van (1, —4) tot de lijn $4y = 3x + 1$.
    b) Ook van (5, —3) tot $x + 2y = 4$, en van (4, 3) tot $y = 2x$.
75. a) Bereken de afstand van de lijnen $y = x$ en $y = x + 2$.
    b) Ook van de lijnen $3x + 4y = 0$ en $3x + 4y = 10$.
76. Bereken de coördinaten van de punten op de lijn $x + y = 6$, die gelijke afstanden hebben tot $y = 2x - 1$ en $x + 2y = 3$.

## III DE CIRKEL

### § 18. De vergelijking van een cirkel

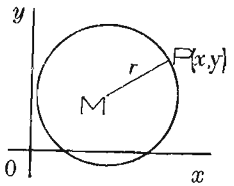

Fig. 13.

Is $M(p, q)$ het middelpunt (m.p.) van een cirkel met straal $r$, en $P(x, y)$ een punt van de cirkel, dan is $\overline{MP} = r$.

Volgens § 4 is dan

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{q})^2 = \mathbf{r}^2 \ldots . \quad (1)$$

Dit is een betrekking tussen de coördinaten van *elk* punt van de cirkel. Omgekeerd: is $(x, y)$ een punt, dat aan (1) voldoet, dan ligt dit punt op de afstand $r$ van $M(p, q)$, dus op $\odot\,(M, r)$; (1) is dus de *vergelijking* van de cirkel.

Als M samenvalt met $O(p = q = 0)$, dan gaat (1) over in

$$\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = \mathbf{r}^2.$$

Men kan (1) schrijven in de vorm

$$\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{ax} + \mathbf{by} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

In deze vergelijking van de tweede graad in $x$ en $y$ ontbreekt de term met $xy$, en de coëfficiënten van $x^2$ en $y^2$ zijn gelijk. Omgekeerd stelt zo'n vergelijking altijd een cirkel voor. Men kan nl. voor (2) schrijven:

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 + y^2 + by + \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - c,$$

of $$(x + \tfrac{1}{2}a)^2 + (y + \tfrac{1}{2}b)^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 - 4c).$$

Volgens (1) is dit een cirkel met m.p. $(-\tfrac{1}{2}a, -\tfrac{1}{2}b)$ en straal $\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$, als $a^2 + b^2 > 4c$.

Is $a^2 + b^2 = 4c$, dan voldoet aan verg. (2) alleen het punt $(-\tfrac{1}{2}a, -\tfrac{1}{2}b)$; dit is een cirkel met straal nul, een *puntcirkel*.

Is $a^2 + b^2 < 4c$, dan is de straal imaginair; men spreekt dan van een imaginaire cirkel.

OPMERKING **1.** Men kan de cirkel uit fig. 13 ook geven door

$$x = p + r\cos\varphi;\ y = q + r\sin\varphi \ \ldots\ldots \quad (3)$$

waarin $\varphi$ variabel is. (welke hoek in fig. 13 is $\varphi$?).
Eliminatie van $\varphi$ geeft dan vergelijking (1). Men noemt (3) de *parametervoorstelling* van de cirkel.

**2.** Ligt het punt $A(x, y)$ *binnen* $\odot(M, r)$, dan is $\overline{MA}^2 < r^2$ $\rightarrow (x - p)^2 + (y - q)^2 < r^2 \rightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c < 0$. Evenzo is de functie $x^2 + y^2 + ax + by + c$ positief voor de punten, die *buiten* de cirkel liggen.

**3.** Vergelijking (2) bevat drie coëfficiënten; in het algemeen is een cirkel dus bepaald door drie gegevens.

---

### § 19. De snijpunten met een rechte lijn

De snijpunten van de lijn $y = mx + n$ met de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ vinden we door $x$ en $y$ op te lossen uit deze beide vergelijkingen. Eliminatie van $y$ geeft:
$x^2 + (mx + n)^2 = r^2$, of $(m^2 + 1)\,x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0$.
De discriminant D van deze v.k.v. in $x$ is:

$$m^2n^2 - (m^2 + 1)\,(n^2 - r^2) = r^2\,(m^2 + 1) - n^2.$$

De v.k.v. heeft dus:

*a*) twee verschillende reële wortels, als $D > 0$, dus als $n^2 < r^2\,(m^2 + 1)$; de lijn en de cirkel hebben dan twee verschillende reële snijpunten.

*b*) twee complexe wortels, als $D < 0 \rightarrow n^2 > r^2\,(m^2 + 1)$; de lijn en de cirkel hebben dan twee *imaginaire punten* gemeen.

Dit heeft natuurlijk geen aanschouwelijke betekenis. Zo zegt men, dat het punt $(4 + 2i, 2 - 3i)$ op de lijn $3x + 2y = 16$ ligt, omdat $x = 4 + 2i$, $y = 2 - 3i$ aan de vergelijking voldoen.

*c*) twee gelijke reële wortels, als $D = 0 \rightarrow n = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$. In dat geval *raakt* de lijn de cirkel; de vergelijking van de *beide* raaklijnen aan de cirkel, die een r.c. $m$ hebben, is dus:

$$\mathbf{y} = \mathbf{mx} \pm \mathbf{r}\sqrt{\mathbf{m}^2 + \mathbf{1}}.$$

OPMERKING: Dit geldt natuurlijk niet voor de raaklijnen // de Y-as, omdat die niet in de vorm $y = mx + n$ te schrijven zijn. Hun vergelijkingen zijn $x = \pm r$.

---

## § 20. Raaklijn in een punt van een cirkel

Door $x^2 + y^2 = r^2$ is $y$ impliciet als (tweewaardige) functie van $x$ bepaald, nl. $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. — Differentieert men de leden van $x^2 + y^2 = r^2$ naar $x$, dan komt er:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (\text{als } y \neq 0).$$

Is nu $P(x_1, y_1)$ een punt van de cirkel (zodat $x_1^2 + y_1^2 = r^2$), dan is de r.c. van de raaklijn in P dus $-x_1 / y_1$; de verg. van de raaklijn in P is dan

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1), \text{ of } \mathbf{xx_1 + yy_1 = r^2}.$$

Zo ligt het punt P(3, −2) op de cirkel $x^2 + y^2 = 13$; de verg. van de raaklijn in P is dan $3x - 2y = 13$.

**Vraagstuk.** Bepaal de verg. van de raaklijn in P(4, 1) aan de cirkel $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 3$.

OPL.: Differentieer beide leden naar $x$:

$$2x + 2yy' - 4 + 2y' = 0.$$

Voor $x = 4$ en $y = 1$ geeft dit $y' = -1$; de verg. van de raaklijn in P is dus $y - 1 = -1(x - 4)$ of $x + y = 5$.

---

## § 21. Translatie van het coördinaten-stelsel

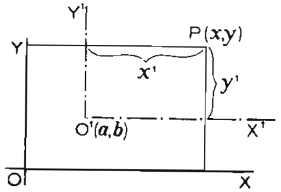

Fig. 14.

We denken ons in het XOY-vlak door het punt $O'(a, b)$ (fig. 14) twee assen O'X' en O'Y' met dezelfde richting als de X- en Y-as. Is P een punt, dat t.o.v. de assen OX en OY de coördinaten $(x, y)$ heeft, en t.o.v. het stelsel X'O'Y' de coördinaten $(x', y')$, dan blijkt uit fig. 14 direct:

$$\mathbf{x = x' + a} \text{ en } \mathbf{y = y' + b}.$$

Is $f(x, y) = 0$ de verg. van een kromme t.o.v. het XOY-stelsel, dan is de verg. t.o.v. het X'O'Y'-stelsel

$$f(x' + a, y' + b) = 0.$$

Deze *verschuiving* van het assenstelsel naar het punt $(a, b)$ heet een *translatie*.

---



## § 22. Vraagstukken

Bepaal de verg. van ⊙ (M, $r$), als gegeven is:

77. M(3, 2) en $r = 5$.
78. M(2, 1) en $r = \sqrt{5}$.
79. M(3, 0) en $r = 3$.
80. M(4, 3); ⊙ M raakt de X-as.
81. M(2, −1); ⊙ M raakt de Y-as.
82. M(−1, 2); ⊙ M gaat door O.

Bepaal het m.p. en de straal van de cirkels:

83. $x^2 + y^2 = 6y$.
84. $x^2 + y^2 + 4x = 0$.
85. $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$.
86. $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 15$.
87. Bepaal de snijpunten van de coördinaat-assen met de cirkel $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$.
88. Ga na, of de punten (3, 2) (−1, 4) en (3, 4) binnen of buiten de cirkel $x^2 + y^2 = 4x + 3y + 1$ liggen.
89. Wat is de algemene verg. van een cirkel, die a) de X-as raakt; b) de Y-as raakt; c) door O gaat.

Bepaal de verg. van ⊙ (M, $r$) als gegeven is:

90. $r = 5$; M ligt op $x + y = 7$, en ⊙ M gaat door O.
91. $r = 5$; M ligt op $x + y = 7$, en ⊙ M raakt de X-as.
92. $r = 5$; ⊙ M raakt de Y-as, en gaat door (8, 6).
93. ⊙ M raakt de X-as in O, en gaat door (3, 3).

---

94. Bewijs, dat de punten A(4, 0), B(−4, 0), C(0, 8) en D(5, 3) op één cirkel liggen.
95. Bepaal de snijpunten van $y = x + 2$ met $x^2 + y^2 = 10$.
96. Ook van $x + y = 0$ en $x^2 + y^2 - 3x + y = 16$.

---

Bepaal de verg. van de raaklijnen aan de cirkel:

97. $x^2 + y^2 = 5$, die evenwijdig zijn met de lijn $y = 2x$.
98. $x^2 + y^2 = 9$, die loodrecht staan op de lijn $4x + 3y = 1$.
99. $x^2 + y^2 = 16$, die een hoek van 120° maken met de X-as.
100. Bepaal in vr. 99 de coördinaten van de raakpunten.
101. Bewijs: de raaklijn in een punt $P(a, b)$ van de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ staat loodrecht op de straal OP.

---

Bepaal de verg. van de raaklijnen in de punten:

102. (3, 4) en (−4, 3) aan de cirkel $x^2 + y^2 = 25$.
103. $(a\sqrt{2}, 0)$ en $(a, -a)$ aan de cirkel $x^2 + y^2 = 2a^2$.
104. (4, 2) en (0, −4) aan $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$.
105. (0, 0) en (0, 2) aan $x^2 + y^2 = 4x + 2y$.

---

## § 23. De poollijn van een punt t.o.v. een cirkel

Het punt P ligt buiten de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ (fig. 15); PA en PB zijn de raaklijnen uit P, en $A(p, q)$ is een raakpunt. De verg. van PA is dan $px + qy = r^2$ (§ 20). Deze lijn PA gaat door $P(x_1, y_1)$, dus $px_1 + qy_1 = r^2$; A ligt dus op de lijn $\mathbf{xx_1 + yy_1 = r^2}$, omdat $x = p$ en $y = q$ aan deze vergelijking voldoen (slot van § 6).

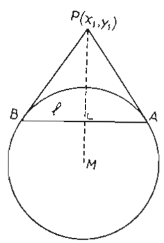


Fig. 15

Hetzelfde geldt natuurlijk voor B; de lijn $xx_1 + yy_1 = r^2$ bevat dus de raakpunten A en B van de raaklijnen uit P. Deze lijn $l$ heet de **poollijn** van P t.o.v. de cirkel[1]; P heet de **pool** van $l$.

Meetkundig is duidelijk, dat de poollijn $l$ loodrecht staat op MP (bewijs dit ook analytisch).

Ook als P *binnen* de cirkel ligt, heet de lijn $xx_1 + yy_1 = r^2$ de poollijn van P (de raakpunten zijn dan imaginair). Zo ligt het punt P(2, —3) binnen de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$; de verg. van de poollijn van A is $2x - 3y = 16$.

Ligt $P(x_1, y_1)$ *op* de cirkel, dan is $xx_1 + yy_1 = r^2$ de verg. van de *raaklijn* in P; we noemen dit ook de poollijn van P.

De verg. $xx_1 + yy_1 = r^2$ is vals, als $x_1 = y_1 = 0$; het middelpunt van een cirkel heeft dus geen poollijn.

---

**Vraagstuk.** Bepaal de verg. van de poollijn van $P(x_1, y_1)$ t.o.v. de cirkel $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Opl.: We verschuiven het assenstelsel naar het punt $(a, b)$ (§ 21); de verg. van de cirkel wordt dan $x'^2 + y'^2 = r^2$, en P wordt het punt $(x_1 - a, y_1 - b)$.

De verg. van de poollijn is dan $x'(x_1 - a) + y'(y_1 - b) = r^2$. T.o.v. het oorspronkelijke assenstelsel is dan de verg. van de poollijn $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$.

---

[1] De poollijn heeft de volgende meetkundige betekenis.
Is $p$ een willekeurige lijn door P, die de cirkel snijdt in X en Y, en de poollijn in Q, dan liggen de punten (P, Q, X, Y) *harmonisch*. Dit betekent, dat $\overline{PX} : \overline{XQ} = \overline{PY} : \overline{QY}$. Bewijs dit. (Kies de $x$ as door $P$, en projecteer Q, X en Y op de X-as).



## § 24. Raaklijnen uit een punt P aan een cirkel.

Deze vindt men op een van de volgende manieren:

1) De poollijn $l$ van P snijdt de cirkel in A en B; de lijnen PA en PB zijn de gevraagde raaklijnen (§ 23).

2) De verg. van een willekeurige lijn door $P(x_1, y_1)$ is:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Snijden met de cirkel geeft, na eliminatie van $x$ (of $y$) een vierkantsvergelijking, waarvan de discriminant nul is. Hieruit berekent men $m$.

Opgave: Bepaal nu op beide manieren de raaklijnen uit P(0, 6) aan de cirkel $x^2 + y^2 = 4x + 4$.

---

## § 25. Vraagstukken.

Bepaal de verg. van de poollijn van de punten

106. (5, 1) en (—2, 4) t.o.v. de cirkel $x^2 + y^2 = 16$.
107. $(0, 3r)$ en $(-r, 0)$ t.o.v. $x^2 + y^2 = r^2$.
108. (3, 2) t.o.v. de cirkel $x^2 + y^2 = 4x$.
109. (—2, 1) t.o.v. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 12$.

---

110. P is een willekeurig punt van de lijn $x = 2r$. Bewijs: de poollijn van P t.o.v. $x^2 + y^2 = r^2$ gaat door een vast punt.
111. Bepaal de pool van de lijn $y = 2x - 4$ t.o.v. $x^2 + y^2 = 8$. Aanw.: Noem de pool $(x_1, y_1)$ en let op opm. 1 van § 9.
112. De poollijn van P t.o.v. ⊙ M is $l$; op $l$ ligt een punt A. Bewijs: de poollijn van A t.o.v. ⊙ M gaat door P.
113. Bepaal de pool van de lijn $y = 2x + 3$ t.o.v. $x^2 + y^2 = 6x$.

---

116. Bepaal de verg. van de raaklijnen uit $(a, 2a)$ aan de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$.
117. Ook uit P(0, 9) aan de cirkel $x^2 + y^2 = 6x$.
118. Bepaal de vergelijking van de raaklijnen aan de cirkel $x^2 + y^2 - 3x + 5y = 4$, die een r.c. 1 hebben.

---

119. Stel de algemene verg. op van een cirkel, die de X-as en de lijn $y = \frac{4}{3}x$ raakt.
120. Ook van een cirkel, die de lijn $y = x$ in (2, 2) raakt.

---

## § 26. De snijpunten van twee cirkels.

De coördinaten der snijpunten van de cirkels

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6) \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7) \end{cases}$$

vindt men door oplossing van $x$ en $y$ uit (6) en (7).

Aftrekking van de overeenkomstige leden geeft:

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Dit is een lineaire vergelijking in $x$ en $y$, en stelt dus een rechte lijn voor [1]. De waarden van $x$ en $y$, die aan (6) en (7) voldoen, voldoen ook aan (8), dus (8) is de verg. van de lijn, die door de snijpunten gaat. Snijding van deze lijn met een van de cirkels geeft de gezochte snijpunten; er zijn dus twee reële en verschillende, twee reële samenvallende (de cirkels *raken* elkaar), of twee imaginaire snijpunten. In dit laatste geval zijn dus de *punten* imaginair; hun *verbindingslijn* is echter een reële lijn, waarvan (8) de vergelijking is.

---

## § 27. De hoek van twee kromme lijnen.

Hieronder verstaat men de hoek, die de raaklijnen in een snijpunt met elkaar maken. Is deze hoek recht, dan snijden de krommen elkaar *loodrecht* (of *orthogonaal*).

Als twee cirkels M en N elkaar in P loodrecht snijden, dan ligt M op de raaklijn in P aan ⊙ N. Waarom?

**Toepassing.** Bepaal de verg. van de cirkel, waarvan het m.p. op de X- as ligt, en die de cirkel $x^2 + y^2 = 20$ in het punt A(4, 2) loodrecht snijdt.

OPL.: De verg. van de raaklijn in (4, 2) aan $x^2 + y^2 = 20$ is $4x + 2y = 20$. Deze lijn snijdt de X-as in (5, 0); dit is dus het m.p. M van de gevraagde cirkel. De straal is het lijnstuk $\overline{MA}$; de lengte daarvan is $\sqrt{(5-4)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$.

De verg. van de gevraagde cirkel is dus

$$(x - 5)^2 + (y - 0)^2 = 5, \text{ of } x^2 + y^2 = 10x - 20.$$

---

[1] Als $a_1 = a_2$ en $b_1 = b_2$, dan is de vergelijking vals; de cirkels hebben dan geen snijpunten, omdat ze concentrisch zijn.

Is ook nog $c_1 = c_2$, dan is de vergelijking identiek; de cirkels vallen dan samen.



## § 28. De macht van een punt t.o.v. een cirkel.

Men noemt $\overline{PM}^2 - r^2$ de **macht** van P t.o.v. ⊙ (M, $r$).

Deze macht is blijkbaar *positief*, als P *buiten* de cirkel ligt (dan is nl. $\overline{PM} > r$) en *negatief*, als P *binnen* de cirkel ligt. Als P *op* de cirkel ligt, dan is de macht van P t.o.v. de cirkel nul, want dan is $\overline{PM} = r$.

Is $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ de vergelijking van ⊙ (M, $r$), dan geldt voor de afstand van P($x_1$, $y_1$) tot M ($a$, $b$):

$$\overline{PM}^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2;$$

de macht van P t.o.v. ⊙ (M, $r$) is dan

$$\overline{PM}^2 - r^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2.$$

*De macht van P t.o.v. een cirkel vindt men dus door de coördinaten van P te substitueren in het eerste lid van de op nul herleide cirkelvergelijking* (als daarin de coëfficiënten van $x^2$ en $y^2$ gelijk zijn aan 1).

Zo is de macht van (3, —5) t.o.v. $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 12$ gelijk aan $3^2 + (-5)^2 + 4(3) + 2(-5) - 12 = 24$.

De macht van P(2, 3) t.o.v. $2x^2 + 2y^2 = 5$ is (eerst de leden delen door 2) $2^2 + 3^2 - 2\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$.

---

Ligt P *buiten* de cirkel, en is $\overline{PR}$ een raaklijnstuk, dan is

$$\overline{PR}^2 = \overline{PM}^2 - r^2 \text{ (fig. 15)};$$

de macht van P is dan gelijk aan het kwadraat van het raaklijnstuk uit P.

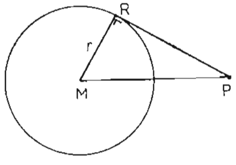

Fig. 16

**Toepassing.** Bepaal de verg. van de cirkel met m.p. P (4, 3), die de cirkel $x^2 + y^2 = x + y$ loodrecht snijdt.

OPL.: Is ⊙(P, $r$) de gevraagde cirkel, dan is $r^2$ de macht van P t.o.v. de gegeven cirkel (waarom?).

Dus $r^2 = 4^2 + 3^2 - 4 - 3 = 18$; de verg. van de gezochte cirkel is dus $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 18$.

---

## § 29. Vraagstukken.

121. Bereken de coördinaten van de snijpunten der cirkels $x^2 + y^2 = 13$ en $x^2 + y^2 = 4x + 1$.
122. Eveneens van $x^2 + y^2 = 2x$ en $x^2 + y^2 = 8x - 14$.
123. Ook nog van $x^2 + y^2 = 10$ en $x^2 + y^2 = 12x + 4y - 30$.
124. Bewijs, dat de poollijnen van een punt P t.o.v. twee concentrische cirkels evenwijdig zijn.
125. Bepaal de verg. van de cirkels met straal $2\frac{1}{2}$, die de cirkel $x^2 + y^2 = 25$ in (3, 4) raken.
126. Bepaal de verg. van de cirkel door (5, 4), die de cirkel $x^2 + y^2 = 5$ in (2, 1) raakt.
127. Ook van de cirkel, waarvan het m.p. op de Y-as ligt, en die de cirkel $x^2 + y^2 = 6x + 1$ in (2, 3) raakt.
128. Ook nog van de cirkel met straal 3, die zijn m.p. op de X-as heeft, en die $x^2 + y^2 = 16$ loodrecht snijdt.
129. Bereken de tangens van de (scherpe) hoek, die de cirkels $x^2 + y^2 = 8$ en $x^2 + y^2 = 4x$ met elkaar maken.
130. Dezelfde vraag voor $x^2 + y^2 = 6$ en $x^2 + y^2 = 6y$.
131. Bewijs, dat de cirkels $x^2 + y^2 = 6x - 4$ en $x^2 + y^2 = 2y + 4$ elkaar loodrecht snijden.
132. Stel de algemene verg. op van een cirkel, die in (3, 0) de cirkel $x^2 + y^2 = 9$ loodrecht snijdt.
133. Bepaal de verg. van de beide cirkels met straal $\sqrt{10}$, die de cirkel $x^2 + y^2 = 10$ in (1, 3) loodrecht snijden.

---

135. Bepaal de macht van O t.o.v. de cirkels $x^2 + y^2 = 4y$ en $3x^2 + 3y^2 = 2x + 5y + 6$.
136. Bereken de macht van P(3, 2) t.o.v. $x^2 + y^2 = 4x$ en van $2x^2 + 2y^2 - 3y = 12$.
137. Bepaal het punt op de X-as, dat gelijke machten heeft t.o.v. de cirkels $x^2 + y^2 = 9$ en $(x - 5)^2 + y^2 = 14$.
138. Bepaal op de lijn $y = x + 2$ het punt, dat gelijke machten heeft t.o.v. de cirkels uit vr. 137.
139. Bepaal de m.pl. van de punten, waarvan de macht t.o.v. $x^2 + y^2 = r^2$ gelijk is aan $k^2$.
140. Bewijs, dat er geen punt is, dat gelijke machten heeft t.o.v. twee concentrische cirkels.

---



## § 30. Herhaling.

141. Bereken de coördinaten van het punt P, dat
   a) symmetrisch ligt met O t.o.v. de lijn $2x + y = 5$.
   b) symmetrisch ligt met $(a, b)$ t.o.v. de lijn $y = x$.
142. Door A(2, 3) gaat een lijn $l$, die de Y-as snijdt in P, en de X-as in Q. Bepaal de verg. van $l$, als $\overline{PA} = 2\overline{AQ}$.
143. Bepaal de verg. van de lijnen door (2, 0), die met de lijn $y = 2x - 4$ een hoek van 45° maken.
144. Welke punten van de lijn $y = x$ liggen op gelijke afstanden van de lijnen $2x + y = 4$ en $2y = x + 8$?
145. Bepaal de verg. van de lijnen door (—2, 1), die gelijke hoeken maken met de lijnen $x + y = 2$ en $x - 7y = 3$.
146. Bepaal de verg. van de centraal van de cirkels
$$x^2 + y^2 - 4x - 10y = 2 \text{ en } x^2 + y^2 + 4x + 2y = 10.$$
147. Bepaal de verg. van de raaklijnen uit P(3, —3) aan de cirkel $x^2 + y^2 = 2x - 4y - 1$.
148. Gegeven O(0, 0), A(8, 0) en B(0, 6). Bepaal de verg. van de omgeschreven cirkel van $\triangle$OAB.
149. Bepaal ook de verg. van de ingeschreven cirkel.
150. Gegeven A(9, 0) en B(0, 3). Bereken de coördinaten van een punt P op de lijn $y = 2x$, waarvoor $\overline{PA} = 2\overline{PB}$.
uitwendig 151. Bepaal de verg. van de gemeenschappelijke raaklijnen aan de cirkels $x^2 + y^2 = 5$ en $x^2 + (y - 5)^2 = 20$.
152. Teken de punten $(x, y)$, waarvoor $|x| = |y + 1|$.
153. De hoekpunten van $\square$ABCD zijn $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ en $D(x_4, y_4)$; de middens van $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ en $\overline{DA}$ zijn opv. P, Q, R, S. Bewijs, dat $\overline{PR}$ en $\overline{QS}$ elkaar halveren.
154. Bepaal de verg. van de beide lijnen door P(0, 1), die gelijke afstanden hebben tot A(2, 1) en B(6, 5).
155. Arceer het gebied van de punten $(x, y)$, waarvoor geldt
   a) $x + y > 4$ en $x^2 + y^2 < 16$; b) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) > 0$
156. Bereken de hoek, waaronder de cirkels $x^2 + y^2 = 8$ en $x^2 + y^2 = 4x$ elkaar snijden.
157. Bereken de coördinaten van de punten, waarvan de poollijnen t.o.v. $x^2 + y^2 = 4$ en $(x - 5)^2 + y^2 = 4$ samenvallen.
158. Bepaal de verg. van de poollijn van O t.o.v. de cirkel $x^2 + y^2 = 8x + 4y - 16$.

159. In $\triangle ABC$ is $\overline{AC} = \overline{BC}$; P is een willekeurig punt op $\overline{BA}$. Bewijs: $\overline{PC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AP}.\overline{PB}$.
160. Gegeven $A(-2, 1)$, $B(2, 5)$ en $C(3, -1)$. Bereken de afstand van C tot AB, en daarmee opp. $\triangle ABC$.
161. Gegeven $A(2, 0)$, $B(0, 6)$ en $C(6, 6)$. Bereken de coördinaten van het punt P op BC, waarvoor $\overline{PA} = \overline{PB}$.
162. Bereken de coördinaten van de punten op de lijn $y = 2x$, waarvan de machten t.o.v. de beide cirkels $x^2 + y^2 = 20$ en $x^2 + y^2 + 2x - y = 20$ elkaars tegengestelden zijn.
163. Bepaal de verg. van de beide lijnen, waarvan de afstand tot de lijn $x = y\sqrt{3}$ gelijk is aan 2.
164. Bepaal de verg. van de raaklijnen uit $P(4, 2)$ aan $x^2 + y^2 = 10$. Als A en B de raakpunten zijn, bereken dan de coördinaten van het hoogtepunt van $\triangle$ PAB.
165. Bepaal de polen van de lijn $2x - y = 6$ t.o.v. de cirkels $x^2 + y^2 = 12$ en $x^2 + y^2 = 4x$.
166. In $\triangle OAB$ is $\angle O = 90°$; de vierkanten OACD en OBEF liggen buiten de driehoek. Bewijs, dat AE, BC en de hoogtelijn uit O door één punt gaan.
167. Arceer het gebied van de punten $(x, y)$ als $x^2 < (y - 2)^2$.
168. Bepaal de verg. van de raaklijnen aan $x^2 + y^2 = 20$, die evenwijdig zijn met de poollijn van $P(2, 1)$.
169. Bepaal de verg. van de cirkel door $(2, 0)$ en $(0, 4)$, waarvan het m.p. ligt op de lijn $y = x$.
170. Een raaklijn aan $x^2 + y^2 = r^2$ snijdt de lijnen $x = \pm r$ in A en B. Bewijs: de cirkel, waarvan $\overline{AB}$ middellijn is, gaat door O.
171. Bepaal de verg. van de cirkel door $(0, 0)$ en $(4, 0)$, die de lijn $x + y = 0$ raakt.
172. Welke punten van de cirkel $x^2 + y^2 = 4a^2$ liggen op gelijke afstanden van $A(-2a, 0)$ en de lijn $x = a$?
173. Ga na, of er een punt is, dat gelijke machten heeft t.o.v. $x^2 + y^2 = 4$; $(x - 4)^2 + y^2 = 8$ en $x^2 + (y - 1)^2 = 9$.
174. Bepaal de verg. van de cirkel met m.p. O, die de cirkel $x^2 + y^2 = 3x + 5y - 6$ loodrecht snijdt.
175. De poollijnen van de punten P en Q t.o.v. een cirkel snijden elkaar in S. Bewijs, dat S de pool van PQ is.

---



# IV VERZAMELINGEN

**§ 31. Vraagstuk 1.** Bepaal de verzameling van de punten, die op gelijke afstanden liggen van twee punten A en B.

OPL.: We kiezen de lijn AB als X-as en de middelloodlijn van $\overline{AB}$ als Y-as; de punten A en B kan men dan aanduiden met $A(a, 0)$ en $B(-a, 0)$.

Is $P(x, y)$ een punt van de verzameling, dan is volgens § 4:

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \rightarrow (x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2 + y^2$$

Uitwerking geeft: $4ax = 0$, dus $x = 0$, want $a \neq 0$. De coördinaten van P moeten dus voldoen aan de voorwaarde $x = 0$; de verzameling van P is dus de lijn $x = 0$ (de Y-as), dus de middelloodlijn van $\overline{AB}$. — Natuurlijk is dit resultaat al bekend uit de vlakke meetkunde.

OPMERKING: Eigenlijk is alleen bewezen, dat de punten P op de mll. moeten liggen, maar niet, dat ook elk punt van de mll. voldoet. Dit laatste is echter zonder moeite in te zien.

---

**Vraagstuk 2.** Gegeven een lijnstuk $\overline{AB} = 2a$. Bepaal de verzameling van de punten P, waarvoor $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = k^2$.

OPL.: We kiezen weer AB als X-as, en de mll. van $\overline{AB}$ als Y-as; A en B zijn dan de punten $(a, 0)$ en $(-a, 0)$.

Is $P(x, y)$ een punt van de verzameling, dan is

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = k^2 \rightarrow (x - a)^2 + y^2 + (x + a)^2 + y^2 = k^2.$$

of $$2x^2 + 2y^2 + 2a^2 = k^2,$$

dus $$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}k^2 - a^2.$$

Dit is een cirkel, waarvan O (het midden van $\overline{AB}$) het m.p. is; de straal is $\sqrt{\tfrac{1}{2}k^2 - a^2}$.

Is $k^2 < 2a^2$, dan is de cirkel imaginair; is $k^2 = 2a^2$, dan is het een puntcirkel (het punt O).

---

## § 32. De machtlijn van twee cirkels.

**Vraagstuk 3.** Bepaal de verzameling van de punten, die gelijke machten hebben t.o.v. de cirkels

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{en}$$
$$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

OPL.: Is $P(x, y)$ een punt, dat gelijke machten heeft t.o.v. beide cirkels, dan is volgens § 28:

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2,$$

dus $$(a_1 - a_2)\,x + (b_1 - b_2)\,y + c_1 - c_2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

De verzameling van P is dus een rechte lijn; deze heet de **machtlijn** van de beide cirkels (OPGAVE. Bewijs, dat de machtlijn loodrecht op de centraal staat).

OPMERKING: We vonden (1) in § 26 als de lijn, die door de snijpunten van de beide cirkels gaat. Dit is ook begrijpelijk, want de snijpunten hebben elk een macht nul t.o.v. beide cirkels, en behoren dus tot de machtlijn.

Is $a_1 = a_2$ en $b_1 = b_2$, dan stelt (1) geen lijn voor; de cirkels zijn dan concentrisch en hebben geen machtlijn.

## § 33. De deellijn van een hoek.

De lijnen $ax + by + c = 0$ en $px + qy + r = 0$ vormen vier hoeken. Is $P(x_1, y_1)$ een punt van een der bisectrices, dan ligt P op gelijke afstanden van de lijnen; volgens § 16 is dan

$$\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{px_1 + qy_1 + r}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right|.$$

Het punt P ligt dus op een van de lijnen

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{px + qy + r}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Dit zijn dus de vergelijkingen van de deellijnen.

VOORBEELD: De lijnen $y = 3x + 1$ en $x + 3y = 5$ vormen vier hoeken; de vergelijkingen van de deellijnen zijn

$$\frac{y - 3x - 1}{\sqrt{10}} = \pm \frac{x + 3y - 5}{\sqrt{10}}, \text{ of } \begin{cases} 2x + y = 2 \text{ en} \\ 2y - x = 3. \end{cases}$$



## § 34. Vraagstukken.

176. Gegeven de punten $A(-2a, 0)$ en $B(a, 0)$. Bepaal de verzameling van de punten P, waarvoor $\overline{PA} = 2\overline{PB}$.

177. Gegeven de punten $A(-a, 0)$ en $B(a, 0)$. Bewijs: de verzameling van de punten P, waarvoor $\overline{PA} = k.\overline{PB}$, is een cirkel. (*cirkel van Apollonius*). Wat komt er als $k = 1$?

178. Bepaal ook de verzameling van de punten P, waarvoor
$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 4a^2.$$

179. Ook nog van de punten P, waarvoor $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = a^2$.

180. Gegeven $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$ en $C(0, 6)$. Bewijs: de verzameling van de punten P, waarvoor $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = k^2$, is een cirkel, die het zwaartepunt van $\triangle ABC$ tot m.p. heeft. $k^2 > 32$ bv $k^2 = 59$ $x^2 + (y-2)^2 = 9$

181. Dezelfde vraag voor $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ en $C(0, c)$.

182. Bepaal de verzameling van de punten, die op gelijke afstanden liggen van het punt $(0, 1)$ en de lijn $y = -1$.

183. Bepaal de machtlijn van $x^2 + y^2 = 10$ en $x^2 + y^2 - 2x = 8$. Ook van $x^2 + y^2 = 4x$ en $3x^2 + 3y^2 = 4y$.

184. Bepaal de verzameling van de punten, waarvan de som der machten t.o.v. $x^2 + y^2 = a^2$ en $x^2 + y^2 = 2ax$ gelijk is aan $3a^2$.

185. Bepaal de verzameling van de middelpunten der cirkels, die
   a) de Y-as raken, en gaan door het punt $(2, 0)$.
   b) twee gegeven cirkels loodrecht snijden (meetkundig).

186. Gegeven $\odot(M, r)$ en punt A. Bepaal de verzameling van de punten P, waarvan de macht t.o.v. $\odot M$ gelijk is aan $\overline{PA}^2$ (Kies M als oorsprong en MA als X-as).

187. Bepaal de verzameling van de punten, die op gelijke afstanden liggen van de lijnen $y = x\sqrt{3} + 1$ en $x = (y - 1)\sqrt{3}$.

188. Bepaal de vergelijkingen van de deellijnen der hoeken, die gevormd worden door de lijnen $y = 2x$ en $2x + 4y = 7$.

189. Bepaal de verzameling van de punten, waarvan de afstanden tot de X-as en de lijn $3y = 4x$ zich verhouden als 5 en 1.

190. Gegeven de punten $A(-a, 0)$ en $B(a, 0)$.
   a) Bepaal de verz. van de punten P, waarvoor $\overline{PA}.\overline{PB} = a^2$.
   b) In welke punten snijdt die kromme de X- en Y-as?
   c) Bewijs, dat de kromme symmetrisch is t.o.v. de assen.
   d) Bepaal de horizontale raaklijnen met de raakpunten, en teken dan de kromme (een *lemniscaat*).

## § 35. Eliminatie van parameters.

In § 31—34 kan men een punt P van de gevraagde verzameling de coördinaten $(x, y)$ — of $(x_1, y_1)$ zoals in § 33 — geven, en dan de voorwaarde opstellen, waaraan P moet voldoen. Dit is dan direct de vergelijking van de verzameling. Dikwijls gaat het echter niet zo eenvoudig.

Als men aan de letter $m$ in de vergelijking $y = mx + 3$ alle mogelijke waarden geeft, dan heeft men daarmee alle lijnen door het punt (0,3) (behalve de lijn $x=0$). Men noemt $m$ een *parameter* van de vergelijking. Dit is dus een *veranderlijke* grootheid, waarmee men een groep figuren aanduidt. Zo is $x^2 + y^2 = a^2$ de verg. van een stelsel (concentrische) cirkels, als $a$ variabel is.

Dikwijls kan men een verzameling vinden door eliminatie van een of meer parameters.

---

## § 36. Toepassingen.

**Vraagstuk 5.** Gegeven de punten $A(-p, 0)$ en $B(p, 0)$. Door A trekt men een willekeurige lijn $a$, en door B de lijn $b \perp a$. Bepaal de verzameling van het snijpunt van $a$ en $b$.

OPL.: Een willekeurige lijn $a$ door A heeft tot vergelijking:

$$y = m(x + p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De loodlijn door $B(p, 0)$ op $a$ heeft dan tot vergelijking

$$y = -\frac{1}{m}(x - p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

De coördinaten $x$ en $y$ van hun snijpunt S voldoen aan (2) en (3). Eliminatie van de parameter $m$ geeft een betrekking tussen $x$ en $y$, *onafhankelijk van m*, dus een betrekking, waaraan de coördinaten van *elk* punt S moeten voldoen. Deze betrekking is dus de verg. van de verzameling van S. De eliminatie van $m$ gaat eenvoudig door vermenigvuldiging der overeenkomstige leden van (2) en (3). Dit geeft

$$y^2 = -(x^2 - p^2), \text{ dus } x^2 + y^2 = p^2.$$

Dit is de cirkel, waarvan $\overline{AB}$ middellijn is.

OPMERKING: Verg. (2) omvat niet de lijn door A // de Y-as. Deze geeft voor S het punt A; dit ligt ook op de cirkel.



## § 37. Vraagstuk 6.

**§ 37. Vraagstuk 6.** Op de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ ligt het punt $A(0, a)$. De raaklijn in een punt P van de cirkel snijdt de raaklijn in A in Q; het hoogtepunt van $\triangle APQ$ is H. Bepaal de verzameling van H, als P de cirkel doorloopt.

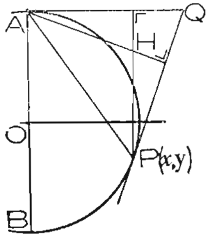


Fig. 17.

OPL. : (Fig. 17). Voor een punt $P(x_1, y_1)$ van de cirkel is $x_1^2 + y_1^2 = a^2$. . . . . (4)

De verg. van de raaklijn PQ is

$$xx_1 + yy_1 = a^2;$$

De vergelijking van de lijn door $A(0, a) \perp PQ$ is (als $x_1 \neq 0$):

$$x_1(y - a) = xy_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

De verg. van de hoogtelijn uit P is

$$x = x_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

De coördinaten $(x, y)$ van het hoogtepunt H van $\triangle APQ$ voldoen dus aan (5) en (6), waarbij bovendien (4) geldt.

Eliminatie van $x_1$ en $y_1$ uit (4), (5) en (6) geeft dus een betrekking tussen de coördinaten van H, *onafhankelijk* van $x_1$ en $y_1$, dus de vergelijking van de verzameling van H.

Substitutie van (6) in (5) geeft òf $\mathbf{x = 0}$, òf

$$y_1 = y - a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Substitutie van (6) en (7) in (4) geeft $\mathbf{x^2 + (y - a)^2 = a^2}$. De verzameling van H bestaat dus uit de Y-as ($x = 0$) en $\odot(A, a)$. (De Y-as ontstaat, als men P in A kiest; ga dit na).

---

**Vraagstuk 7.** Op de positieve X-as kiest men een punt P, en op de positieve Y-as het punt Q zó, dat $\overline{OP} + \overline{OQ} = 2a$; het midden van $\overline{PQ}$ is M. Bepaal de verzameling van M.

OPL.: (Maak een tekening!). We stellen $P(p, 0)$ en $Q(0, q)$, waarbij $p + q = 2a$ ($p \geqslant 0$ en $q \geqslant 0$). Dan is

$$x_M = \tfrac{1}{2}p \text{ en } y_M = \tfrac{1}{2}q. \quad (x \geqslant 0 \text{ en } y \geqslant 0).$$

Eliminatie van $p$ en $q$ uit

$$x = \tfrac{1}{2}p, \; y = \tfrac{1}{2}q \text{ en } p + q = 2a$$

geeft $x + y = a$. Maar $x \geqslant 0$ en $y \geqslant 0$; de verzameling van M is dus het *lijnstuk* begrensd door $(0, a)$ en $(a, 0)$.

---

**Vraagstuk 8.** Uit O trekt men de raaklijnen aan de cirkels

$$(x-2)^2+y^2=p \quad (p \text{ variabel}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Bepaal de verzameling van de raakpunten.

OPL.: De raaklijnen uit O kan men vinden zoals in § 24, en daarmee de coördinaten van de raakpunten, uitgedrukt in $p$. De verzameling van die raakpunten ontstaat dan door eliminatie van $p$.

*Veel korter* is echter de volgende manier.

De raakpunten van de raaklijnen uit O aan (1) zijn de snijpunten van (1) met de poollijn van O.

De verg. van die poollijn is

$$(x-2)(0-2)+y.0=p, \text{ of } 2x=4-p \quad . \quad . \quad (2)$$

De verzameling van de raakpunten vinden we dus door eliminatie van $p$ uit (1) en (2). Dit geeft

$$(x-2)^2+y^2=4-2x \text{ of } (x-1)^2+y^2=1.$$

---

## § 38. Vraagstukken

191. Bepaal de verzameling der projecties van O op alle lijnen, die door het punt $(2a, 0)$ gaan.
192. Gegeven $P(p, 0)$ en $Q(0, 2p)$; het midden van $\overline{PQ}$ is M. Bepaal de verzameling van M, als $p$ variabel is.
193. Op de X-as kiest men een punt P, en op de Y-as het punt Q zó, dat $\overline{PQ}=2a$. Bepaal de verzameling van
a) het midden van $\overline{PQ}$; b) het zwaartepunt van $\triangle OPQ$.
194. Een punt P doorloopt de lijn $x+2y=4$; de projecties van P op de assen zijn $P_1$ en $P_2$. Bepaal de verzameling van het midden M van $\overline{P_1P_2}$.
195. De punten van de cirkel $x^2+y^2=r^2$ verbindt men met $(p, 0)$. Bepaal de verzameling der middens van die lijnstukken.
196. Gegeven de punten $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ en $P(0, p)$; de lijn door A $\perp$ PA snijdt de lijn door B $\perp$ BP in S. Bepaal de verzameling van S, als $p$ variabel is.
197. Op de lijn $x=2a$ kiest men een punt P; de lijn OP snijdt de poollijn van P t.o.v. de cirkel $x^2+y^2=a^2$ in S. Bepaal de verzameling van S, als P de lijn $x=2a$ doorloopt.
198. Bepaal de verzameling van de middelpunten der cirkels, die de Y-as raken, en $(x-3)^2+y^2=4$ loodrecht snijden.



199. Bepaal de verzameling van de punten, waarvan de poollijn t.o.v. $x^2+y^2=2x+6$ door O gaat.
200. Ook van de punten, waarvan de poollijnen t.o.v. $x^2+y^2=r^2$ en $x^2+y^2=2ax$ loodrecht op elkaar staan.
201. P doorloopt de lijn $y=a$. Bepaal de verzameling der projecties van $(a, 0)$ op de poollijn van P t.o.v. $x^2+y^2=a^2$.
202. Gegeven de punten $A(-a, 0)$ en $B(a, 0)$. Op de Y-as kiest men punten P en Q zó, dat $\overline{OP}.\overline{OQ}=a^2$; de lijnen AQ en BP snijden elkaar in S. Bepaal de verzameling van S.
203. Door $A(0, a)$ gaat een willekeurige lijn $l$, die de X-as snijdt in P; de lijn door P // de Y-as snijdt de lijn door A $\perp$ $l$ in S. Bepaal de verzameling van S.
204. Een punt P doorloopt de machtlijn van $x^2+y^2=12x-21$ en $x^2+y^2=3$; de poollijnen van P t.o.v. de cirkels snijden elkaar in S. Bepaal de verzameling van S.
205. Een punt P doorloopt de cirkel $x^2+y^2=2r^2$; de poollijn van P t.o.v. de cirkel $x^2+y^2=r^2$ snijdt OP in S. Bepaal de verzameling van S.
206. a) Bepaal de verzameling van de middelpunten der cirkels
$$x^2+y^2=2p(x+y) \quad (p \text{ variabel}).$$
b) Aan elke cirkel trekt men de raaklijnen met r.c. 1.
Bepaal de verzameling van de raakpunten.
207. Gegeven de punten $A(-a, 0)$ en $B(a, 0)$. Bepaal de verzameling van de punten C, als in $\triangle ABC$ geldt tg B = 2 tg A.
Dezelfde vraag, als tg A tg B = 1.
208. Een punt P doorloopt de cirkel $x^2+y^2=a^2$; de raaklijn in P snijdt de lijn $x=a$ in Q; de lijn OQ snijdt de lijn door P, die // de X-as is, in S. Bepaal de verzameling van S.
209. a) Bepaal de algemene verg. van een cirkel, die de X-as in (2, 0) raakt.
b) Uit O trekt men de raaklijnen aan elke cirkel van het stelsel. Bepaal de verzameling van de raakpunten.
210. Door O trekt men een willekeurige lijn $l$, die de cirkel $x^2+y^2=2ax$ nog snijdt in P; op $l$ kiest men het punt Q zò, dat $\overline{OP}.\overline{OQ}=k^2$ (P en Q aan dezelfde kant van O).
Bepaal de verzameling van Q, als $l$ om O draait.

---

# V DE PARABOOL

**§ 39.** Een **parabool** is de verzameling van de punten, die gelijke afstanden hebben tot een punt F en een lijn $l$ (fig. 18).

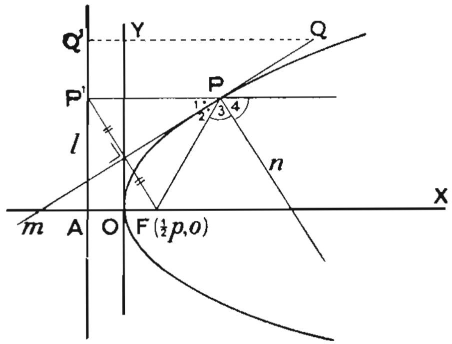


Fig. 18.

F heet het *brandpunt*, $l$ de *richtlijn*; de afstand $\overline{FA}$ van F tot $l$ heet de *parameter* van de parabool.

De lijn door F $\perp l$ heet de *as*; het punt O van de parabool dat op de as ligt (dus het midden van $\overline{FA}$), heet de *top*. We duiden de parabool aan met (F, $l$).

Een punt X ligt *buiten* (binnen) de parabool, als $\overline{XF}$ groter (kleiner) is dan de afstand van X tot $l$.

Uit de bepaling volgt direct, dat de parabool symmetrisch is t.o.v. de as; verder is duidelijk, dat alle punten van de parabool aan dezelfde kant van de richtlijn liggen als F.

Men kan als volgt een willekeurig punt van de parabool (F, $l$) construeren: trek door een willekeurig punt P' van $l$ de loodlijn op $l$; deze snijdt de middelloodlijn $m$ van $\overline{P'F}$ in een punt P. Uit congruentie volgt dan $\overline{PP'} = \overline{PF}$, dus P is een punt van de parabool; PF heet de *voerstraal* van P.

## § 40. Hoofdeigenschap van raaklijn en normaal

Is Q een punt van de lijn $m$, dat niet met P samenvalt, en Q' de projectie van Q op $l$, dan is $\overline{QF} = \overline{QP'}$ (uit congruentie). Maar in $\triangle QQ'P'$ is $\overline{QP'} > \overline{QQ'} \rightarrow \overline{QF} > \overline{QQ'} \rightarrow$ Q ligt buiten de parabool. *Elk* punt van de lijn $m$ (behalve P) ligt dan buiten de parabool, dus $m$ *raakt* de parabool.

Uit congruentie volgt nog, dat $\angle P_1 = \angle P_2$, dus dat $m$ de hoek P'PF middendoor deelt; men kan dus gemakkelijk de raaklijn in P construeren.

BEPALING: De **normaal** in een punt P van een kromme is de lijn door P, die loodrecht staat op de raaklijn in P.

Is $n$ de normaal in P (fig. 18), dan deelt $n$ dus de nevenhoek van $\angle$ P'PF middendoor $\rightarrow \angle P_3 = \angle P_4$. Dus: *de normaal en de raaklijn in een punt P van de parabool zijn de deellijnen van de hoeken, die gevormd worden door de voerstraal van P en de lijn door P // de as van de parabool.*

OPMERKING: Als men de parabool wentelt om z'n as, dan ontstaat een *omwentelings-paraboloïde*. Is die van binnen spiegelend, dan worden alle lichtstralen, die evenwijdig met de as intreden, teruggekaatst door het brandpunt F (parabolische spiegel). De stralen, die van F uitgaan, worden teruggekaatst als een evenwijdige bundel (reflector).

## § 41. De vergelijking van de parabool

In fig. 18 kiezen we de as van de parabool als X-as, en de top O als oorsprong. Is $p$ de parameter (dus $\overline{FA} = p$), dan is $l$ de lijn $x = -\frac{1}{2}p$; F is het punt $(\frac{1}{2}p, 0)$.

Is P($x$, $y$) een punt van de parabool, dan is $\overline{PF} = \overline{PP'}$, dus

$$\sqrt{(x - \tfrac{1}{2}p)^2 + y^2} = x + \tfrac{1}{2}p.$$

$$(x - \tfrac{1}{2}p)^2 + y^2 = (x + \tfrac{1}{2}p)^2 \rightarrow \mathbf{y^2 = 2px}.$$

Dit is de *topvergelijking* van de parabool.

OPMERKING **1.** Als we $x$ en $y$ verwisselen, dan wordt de vergelijking $x^2 = 2py$. Dit is dus een parabool, waarvan de Y-as de as is, en O de top; het brandpunt is $(0, \frac{1}{2}p)$.

**2.** De verg. $y^2 = -2px$ ($p > 0$) stelt een parabool voor met top O, die *links* van de Y-as ligt.

**3.** Uit de afspraak in § 39 volgt: voor de punten $(x, y)$ *buiten* de parabool $y^2 = 2px$ is de functie $y^2 - 2px$ positief; voor de punten er *binnen* is $y^2 - 2px$ negatief.

**4.** De verg. $(y-b)^2 = 2p(x-a)$ stelt een parabool voor met top $(a, b)$, waarvan de as // de X-as is; dit blijkt, als we het assenstelsel verschuiven naar het punt $(a, b)$. Twee parabolen zijn dus *congruent*, als ze dezelfde parameter hebben.

**5.** Een willekeurig punt van de parabool $y^2 = 2px$ kan men aangeven met $P(2pt, 2pt^2)$, waarin $t$ variabel is. Eliminatie van $t$ uit

$$\mathbf{x = 2pt; y = 2pt^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

geeft nl. $y^2 = 2px$.

Men noemt (1) de *parametervoorstelling* van de parabool.

---

## § 42. Raaklijn in een gegeven richting

De coördinaten der snijpunten van de lijn

$$y = mx + n \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

en de parabool

$$y^2 = 2px \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

vinden we door oplossing van deze vergelijkingen.

Eliminatie van $y$ geeft: $(mx + n)^2 = 2px$, of

$$m^2x^2 + 2(mn - p)\,x + n^2 = 0 \quad \dots\dots \quad (3)$$

Is $m \neq 0$, dan is dit een v.k.v. in $x$; de lijn heeft dus niet meer dan twee punten met de parabool gemeen.

De lijn *raakt* de parabool, als (3) twee gelijke wortels heeft; de nodige en voldoende voorwaarde hiervoor is $D = 0$, dus

$$(mn - p)^2 - m^2n^2 = 0 \rightarrow n = \frac{p}{2m} \text{ (als } m \neq 0).$$

De vergelijking van de raaklijn met r.c. $m$ is dus

$$\mathbf{y = mx + \frac{p}{2m}}.$$

Opmerking. Is $m = 0$, dan is (3) een *lineaire* vergelijking Elke lijn, die evenwijdig is met de as, snijdt dus de parabool in één punt. Natuurlijk zijn dit geen „samenvallende" punten; de parabool heeft dus geen raaklijn, die // de as is.

---



## § 43. Raaklijn en normaal in een punt van de parabool

Door $y^2 = 2px$ is $y$ als (tweewaardige) functie van $x$ bepaald. Differentiëren we beide leden naar $x$, dan komt er:

$$2y\frac{dy}{dx} = 2p \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} \quad (\text{als } y \neq 0).$$

Is $P(x_1, y_1)$ een punt van de parabool, dan is de r.c. van de raaklijn in P dus $p/y_1$; de verg. van de raaklijn is dan:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1), \text{ of } yy_1 = px + y_1^2 - px_1.$$

Maar P ligt op de parabool, dus $y_1^2 = 2px_1$; de verg. van de raaklijn is dus

$$yy_1 = px + px_1 \text{ of } \mathbf{yy_1 = p(x + x_1)}.$$

Opmerking: De afleiding van de formule geldt niet voor $y_1 = 0$, dus als P de top van de parabool is. De verg. van de topraaklijn is $x = 0$ (de Y-as).

---

De r.c. van de raaklijn is $p/y_1$; die van de normaal is dus $-y_1/p$; de verg. van de normaal in P is dan

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Zo is de verg. van de raaklijn in $P(1, -2)$ aan $y^2 = 4x$:

$$y(-2) = 2(x + 1) \text{ of } x + y = -1.$$

De r.c. van de raaklijn is $-1$, die van de normaal is dus $+1$. De verg. van de normaal in P is dus

$$y + 2 = 1(x - 1) \text{ of } y = x - 3.$$

---

**Vraagstuk.** Bepaal de verg. van de raaklijn in het punt $A(5, 8)$ aan de parabool $y^2 - 4y - 6x = 2$.

Opl.: Differentieer de beide leden naar $x$:

$$2yy' - 4y' - 6 = 0.$$

Voor het punt A is $y = 8$, dus $16y' - 4y' - 6 = 0 \rightarrow y' = \frac{1}{2}$; de r.c. van de raaklijn in A is dus $\frac{1}{2}$. De verg. van de raaklijn is dan $y - 8 = \frac{1}{2}(x - 5)$ of $2y = x + 11$.

Opgave: Doe dit vraagstuk ook op de manier van § 24.

---

## § 44. Vraagstukken

Bepaal de verg. van de parabool, waarvan

211. (3, 0) het brandpunt, en $x = -3$ de richtlijn is.
212. (4, 0) het brandpunt, en de Y-as de richtlijn is.
213. (0, 2) het brandpunt, en $y = -2$ de richtlijn is.
214. (4, 0) het brandpunt is, en die gaat door $(0, \pm 3)$.
215. (1, 2) de top, en $x = -1$ de richtlijn is.

Bepaal de as en de top van de volgende parabolen:

216. $(y - 2)^2 = 2(x - 1)$.
217. $y^2 + 4x - 6 = 0$.
218. $y^2 - 2y + 5 = 4x$.
219. $x^2 = 4y - 2$.
220. $x^2 - 4x = y$.
221. $x^2 = 2(x + y + 1)$.

222. Wat is de algemene verg. van een parabool, waarvan de as a) de X-as is; b) de lijn $y = 2$ is?
223. Bepaal het brandpunt en de richtlijn van de parabool $(y - 2)^2 = 4(x - 4)$.
224. Ga na, of de punten (3, 4) en (2, —1) binnen of buiten de parabool $y^2 = -2x$ liggen.

Bepaal de verg. van de raaklijn aan de parabool

225. $y^2 = 4x$, die een r.c. 2 heeft.
226. $y^2 = -2x$, die evenwijdig is met de lijn $y = x$.
227. $x^2 = 4y$, die een hoek van 60° maakt met de X-as.
228. $y^2 = 6x - 9$, die een hoek van 60° maakt met de X-as.

Bepaal de verg. van de raaklijn en de normaal in het punt

229. (4, 4) van $y^2 = 4x$.
230. (4, 8) van $x^2 = 2y$.
231. (3, —2) van $y^2 = 4(x - 2)$.
232. (0, 3) van $y^2 = 3(x + y)$.
233. Bepaal de verzameling der projecties van O op de raaklijnen aan de parabool $y^2 = 8x$ (de kromme heet *cissoïde*).
234. De raaklijn en de normaal in een punt P van de parabool $y^2 = 2px$ snijden de X-as opv. in Q en R. Bewijs: a) $x_R - x_P = p$; b) $x_Q = -x_P$.
235. Een punt P doorloopt de parabool $y^2 = 2px$ (P niet in O). De lijn door het brandpunt, die evenwijdig is met de raaklijn in P, snijdt OP in S. Bepaal de verzameling van S.
236. Bepaal de verzameling van de middelpunten der cirkels, die de X-as raken, en gaan door (4, 2).



## § 45. Poollijn van een punt t.o.v. een parabool

Evenals in § 23 vindt men: de verg. van de poollijn van een punt $(x_1, y_1)$ t.o.v. de parabool $y^2 = 2px$ is

$$\mathbf{yy_1 = p(x + x_1).}$$

Dit is weer de lijn, die gaat door de (reële of imaginaire) raakpunten van de raaklijnen uit P aan de parabool.

Zo is de verg. van de poollijn van P(6, —2) t.o.v. $y^2 = -4x$:

$$-2y = -2(x + 6) \text{ of } y = x + 6.$$

Ligt P *op* de parabool, dan is $yy_1 = p(x + x_1)$ de verg. van de raaklijn in P (§ 43); dit is ook de poollijn van P.

De poollijn van $P(x_1, y_1)$ t.o.v. de parabool $x^2 = 2py$ heeft natuurlijk tot vergelijking $xx_1 = p(y + y_1)$.

**Vraagstuk 1.** Bepaal de poollijn van $P(x_1, y_1)$ t.o.v.

$$(y - b)^2 = 2p(x - a).$$

OPL.: We verplaatsen het assenstelsel naar het punt $(a, b)$ (zie § 21). De verg. van de parabool wordt $y'^2 = 2px'$; de coördinaten van P worden $(x_1 - a, y_1 - b)$.

De verg. van de poollijn is dan:

$$y'(y_1 - b) = p(x' + x_1 - a).$$

Ten opzichte van het oorspronkelijke assenstelsel is de verg. dan ($y'$ vervangen door $y - b$, en $x'$ door $x - a$):

$$(y - b)(y_1 - b) = p(x - a + x_1 - a).$$

**Vraagstuk 2.** Bepaal de verg. van de raaklijnen uit P(—2, 0) aan de parabool $y^2 = 8x$.

OPL.: De poollijn $l$ van P heeft tot vergelijking

$$y.0 = 4(x - 2), \text{ dus } x = 2.$$

De raakpunten A en B van de raaklijnen uit P zijn de snijpunten van $l$ en de parabool, dus de punten $(2, \pm 4)$.

De raaklijnen zijn dan de lijnen PA en PB; hun vergelijkingen zijn $y = \pm(x + 2)$ (nagaan).

**§ 46.** EIGENSCHAP. **De projecties van het brandpunt op de raaklijnen aan de parabool liggen op de topraaklijn.**

BEWIJS: Een raaklijn $l$ aan de parabool $y^2 = 2px$ kunnen we volgens § 42 voorstellen door

$$y = mx + \frac{p}{2m} \text{ of } my = m^2x + \tfrac{1}{2}p \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

De verg. van de lijn $\perp$ l door het brandpunt $F(\frac{1}{2}p,\ 0)$ is

$$y = -\frac{1}{m}(x - \tfrac{1}{2}p), \text{ of } my = -x + \tfrac{1}{2}p \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

De verzameling van de projecties van F op de raaklijnen vinden we dus door eliminatie van $m$ uit (5) en (6).

Aftrekking van de overeenkomstige leden geeft

$0 = (m^2 + 1)x \rightarrow \mathbf{x = 0}$, dus de topraaklijn.

OPGAVE. Bewijs de eigenschap ook meetkundig uit fig. 18.

---

**Vraagstuk 4.** Bewijs, dat de beide parabolen $y^2 = 4x$ en $y^2 = -4(x - 2)$ elkaar loodrecht snijden.

BEWIJS: Is $P(x_1, y_1)$ een snijpunt van de parabolen, dan is

$$\left.\begin{aligned} &y_1^2 = 4x_1 \\ \text{en} \quad &y_1^2 = -4(x_1 - 2) \end{aligned}\right\} \rightarrow y_1^2 = 4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

De vergelijkingen van de raaklijnen in P zijn:

$$yy_1 = 2(x + x_1) \text{ en } yy_1 = -2(x + x_1 - 4).$$

Het produkt van hun richtings-coëfficiënten is $-4/y_1^2$, dus $-1$, volgens (8). De krommen snijden elkaar dus loodrecht.

---

**Vraagstuk 5.** In de parabool $y^2 = 2px$ trekt men de koorden met r.c. 1. Bepaal de verzameling van hun middens.

OPL.: Voor de snijpunten A en B van de lijn $y = x + n$ en de parabool $y^2 = 2px$ geldt:

$$\left.\begin{aligned} y &= x + n \\ y^2 &= 2px \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} &(x + n)^2 = 2px, \text{ of} \\ &x^2 - 2(p - n)x + n^2 = 0. \end{aligned}$$

Voor de wortels $x_A$ en $x_B$ geldt: $x_A + x_B = 2(p - n)$.

Voor het midden M van $\overline{AB}$ is dus

$$x_M = \tfrac{1}{2}(x_A + x_B) = p - n \rightarrow y_M = x_M + n = p.$$

De verzameling van M is dus de lijn $\boldsymbol{y = p}$.

---



**§ 47. Vraagstukken**

Bepaal de verg. van de poollijn van het punt

237. (2, 0) t.o.v. $y^2 = 4x$.
238. (4, 2) t.o.v. $y^2 = 2x$.
239. (0, 4) t.o.v. $x^2 = 8y$.
240. (2, 3) t.o.v. $y^2 = -6x$.
241. (6, 0) t.o.v. $(y - 3)^2 = 6x$.
242. (4, 2) t.o.v. $(y - 2)^2 = 4x$.
243. (1, 4) t.o.v. $y^2 = 8(x + y)$.
244. (2, 6) t.o.v. $y^2 = 4 - 2x$.
245. Bepaal de verg. van de raaklijnen uit O aan $y^2 = 8x - 16$.
246. Bewijs, dat de richtlijn van een parabool de poollijn van het brandpunt is.
247. Bewijs, dat de poollijnen der punten van de lijn $y = k$ t.o.v. de parabool $y^2 = 2px$ evenwijdig zijn.
248. Bepaal de verg. van de cirkel met m.p. (3, 0), die de parabool $y^2 = 4x$ raakt.
249. Bereken de hoek, waaronder de parabolen $y^2 = 2px$ en $x^2 = 2py$ elkaar (niet in O) snijden.
250. Kunnen de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ en de parabool $y^2 = 2px$ elkaar loodrecht snijden?
251. Bereken de hoek, waaronder de cirkel $x^2 + y^2 = 18$ en de parabool $y^2 = 3x$ elkaar snijden.
252. $y = ax^2 - (2a - 4)x + a - 3$ is de verg. van een stelsel parabolen ($a$ variabel). Bepaal de verz. ~~m.pl.~~ van hun toppen.
253. Bepaal de verzameling van de punten, waarvan de poollijn t.o.v. $y^2 = 2px$ a) door $(p, 0)$ gaat; b) de r.c. 1 heeft.
254. Bepaal de verzameling van de middens der koorden van de parabool $y^2 = 2px$, die door het brandpunt gaan.
255. P doorloopt de lijn $x = -p$; de poollijn $l$ van P t.o.v. $y^2 = 2px$ snijdt OP in S. Bewijs, dat $l \perp$ OP.
256. Bepaal de verzameling van de punten S uit vr. 255.
257. Bepaal de pool A van de lijn $y = ax + 1$ t.o.v. $y^2 = 2px$. Bepaal de verzameling van A, als $a$ variabel is.
258. P doorloopt de lijn $x = -2p$; de poollijnen van P t.o.v. $y^2 = 2px$ en $x^2 + y^2 = p^2$ snijden elkaar in S. Bepaal de verz. van S.
259. Bewijs: de verzameling van de punten, van waaruit de raaklijnen aan $y^2 = 2px$ loodrecht op elkaar staan, is de richtlijn.
260. Men projecteert het brandpunt van de parabool $y^2 = 4x$ op de poollijn van een punt P. Bepaal de verzameling van de projecties, als P de lijn $x = -2$ doorloopt.

---

# VI DE ELLIPS

**§ 48.** Een **ellips** is de verzameling van de punten, waarvan de *som* der afstanden tot twee gegeven punten constant is. Deze punten ($F_1$ en $F_2$ in fig. 19) heten de *brandpunten*.

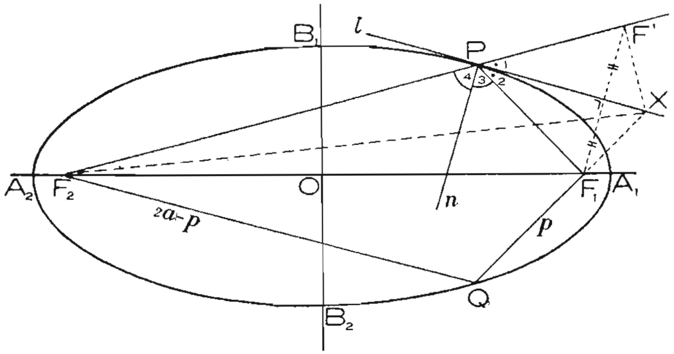


Fig. 19.

Is P een punt van de ellips, waarbij $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ is, en $\overline{F_1F_2} = 2c$, dan moet $a > c$ zijn; de verhouding $c : a$ heet de *excentriciteit* van de ellips. — We geven de ellips aan met $(F_1F_2, 2a)$; $\overline{PF^1}$ en $\overline{PF^2}$ heten de *voerstralen* van P.

Is $c = 0$, dan gaat de ellips over in $\odot$ (F, $a$); *een cirkel is dus een ellips, waarvan de brandpunten samenvallen.*

Een punt X ligt *buiten* de ellips, als $\overline{XF_1} + \overline{XF_2} > 2a$; het ligt er binnen, als $\overline{XF_1} + \overline{XF_2} < 2a$.

Uit de bepaling volgt, dat de ellips symmetrisch is t.o.v. de lijn $F_1F_2$, ook t.o.v. de middelloodlijn van $\overline{F_1F_2}$, en t.o.v. het snijpunt O van die lijnen (het *middelpunt* van de ellips).

Een koorde door O heet een *middellijn*; deze wordt dus in O middendoor gedeeld.

Men kan als volgt punten van de ellips construeren. (fig. 19). Kies een lijnstuk $p < 2a$; de cirkels $(F_1, p)$ en $(F_2, 2a - p)$ snijden elkaar dan in twee punten P en Q van de ellips.

---

## § 49. Hoofdeigenschap van raaklijn en normaal

Is P een punt van de ellips, en $l$ de deellijn van de nevenhoek van $\angle F_1PF_2$ (fig. 19), dan zullen we bewijzen, dat $l$ aan de ellips raakt. Is nl. F' het snijpunt van de loodlijn uit $F_1$ op $l$ met de lijn $PF_2$, en X een willekeurig punt van $l$, dat niet met P samenvalt, dan volgt uit congruentie, dat $\overline{XF_1} = \overline{XF'}$, en dat $\overline{F_2F'} = \overline{F_2P} + \overline{PF'} = \overline{F_2P} + \overline{F_1P} = 2a$.

In $\triangle XF_2F'$ is $\overline{XF_2} + \overline{XF'} > \overline{F_2F'} \rightarrow \overline{XF_2} + \overline{XF_1} > 2a$. Het punt X ligt dus buiten de ellips. Elk punt van $l$, behalve P, ligt dus *buiten* de ellips; *l raakt* dus de ellips in P.

Is $n$ de normaal in P, dan is $n \perp l$, dus $\angle P_3 = \angle P_4$. Dus: **de normaal en de raaklijn in een punt P van de ellips zijn de deellijnen van de hoeken, die door de voerstralen van P gevormd worden.**

OPMERKING: Wentelt men de ellips om $F_1F_2$, dan ontstaat een *omwentelings-ellipsoïde.* Is het binnen-oppervlak hiervan spiegelend, dan zullen lichtstralen, die uitgaan van een brandpunt, na terugkaatsing door het andere brandpunt gaan.

---

## § 50. De vergelijking van de ellips

We kiezen in fig. 19 de lijn $F_1F_2$ als X-as, en O als oorsprong. Is $P(x, y)$ een punt van de ellips $(F_1F_2, 2a)$ en $\overline{F_1F_2} = 2c$, dan zijn $F_1$ en $F_2$ opv. de punten $(c, 0)$ en $(-c, 0)$. Nu is:

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, dus $\overline{PF_1} = 2a - \overline{PF_2}$ of (§ 4):

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Kwadrateer:

$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$;

$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$;

$a^2(x+c)^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$;

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Stellen we $\mathbf{a^2 - c^2 = b^2}$, dan komt er:

$$\mathbf{b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2}, \text{ of } \mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

De ellips snijdt de X- en Y-as in de *toppen* $A_{12}$ $(\pm a, 0)$ en $B_{12}(0, \pm b)$; het lijnstuk $\overline{A_1A_2} = 2a$ heet de *grote as*, en $\overline{B_1B_2} = 2b$ heet de *kleine as* van de ellips.

OPMERKING **1.** De verg.

$$b^2(x-p)^2 + a^2(y-q)^2 = a^2b^2$$

stelt een ellips voor met middelpunt $(p, q)$, waarvan de assen evenwijdig zijn met de coördinaat-assen (§ 21).

**2.** Ligt $P(x_1, y_1)$ *buiten* de ellips, dan is $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > 2a$; in § 50 moet dan het teken = vervangen worden door >; er komt dan $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 > a^2b^2$.

Evenzo ligt $P(x_1, y_1)$ *binnen* de ellips, als $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 < a^2b^2$.

**3.** De verg. $2x^2 + y^2 = 8$ of $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}y^2 = 1$ stelt een ellips voor met halve assen 2 en $2\sqrt{2}$; de *kleine* as valt nu langs de $X$-as, zodat de brandpunten op de $Y$-as liggen.

---

## § 51. De snijpunten met een rechte lijn

De coördinaten der snijpunten van de lijn

$$y = mx + n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en de ellips

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

vinden we weer door $x$ en $y$ op te lossen uit (1) en (2). Eliminatie van $y$ geeft een v.k.v. in $x$; de lijn heeft dus twee (reële of imaginaire) punten met de ellips gemeen. Als deze punten samenvallen, dan *raakt* de lijn de ellips. Door het nul stellen van de discriminant vindt men $n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$ (nagaan!); de raaklijnen met r.c. $m$ zijn dus $y = mx \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

---

## § 52. Congruentie en gelijkvormigheid van ellipsen

Twee ellipsen, waarvan de assen gelijk zijn, zijn *congruent*. Zo zijn de volgende ellipsen congruent:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1; \quad \frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

(de tweede ontstaat uit de eerste door draaiing om het middelpunt over een hoek van 90°).

Ellipsen, waarvan de assen dezelfde verhouding hebben, zijn *gelijkvormig*, b.v.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ en } \frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{81} = 1.$$

---



## § 53. De oppervlakte van de ellips

We nemen aan, dat de oppervlakte O van de cirkel $x^2+y^2 = a^2$ gelijk is aan $\pi a^2$.

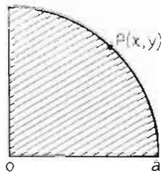


Fig. 20a

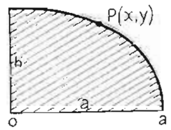


Fig. 20b

Voor elk punt $P(x, y)$ van de kwartcirkel in fig. 20a is $y = \sqrt{a^2 - x^2}$; volgens de integraal-rekening is de oppervlakte dus

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \rightarrow \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi a^2 \quad \ldots \quad (1)$$

Voor de punten $P(x, y)$ van de kwart-ellips in fig. 20b is

$$y = \sqrt{\frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

De oppervlakte van de kwart-ellips is dus gelijk aan

$$\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Volgens (1) is dit gelijk aan $\frac{1}{4}\pi ab$; de oppervlakte van de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ is dus $\boldsymbol{\pi ab}$.

---

## § 53a. De parameter-voorstelling van de ellips.

Een punt van de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ kan men aangeven met $P(x_1, y_1)$, waarin dan $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$.

Men kan echter ook nemen P $(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$, waarin $\varphi$ variabel is. Eliminatie van $\varphi$ uit

$$\mathbf{x = a\cos\varphi;\ y = b\sin\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

geeft nl. (omdat $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$) weer de verg. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Men noemt (2) de *parameter-voorstelling* van de ellips.

---

## § 54. Raaklijn en normaal in een punt van de ellips

De r.c. van de raaklijn in een punt $P(x_1, y_1)$ van de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ vinden we weer door de leden naar $x$ te differentiëren ($y$ als functie van $x$ beschouwd). Dit geeft

$$2b^2x + 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2y} \quad (\text{als } y \neq 0).$$

De r.c. van de raaklijn in $P(x_1, y_1)$ is dus $-b^2x_1 : a^2y_1$; de verg. is dus

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1), \text{ of } b^2xx_1 + a^2yy_1 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2.$$

Maar P ligt op de ellips, dus $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$; de verg. van de raaklijn in P is dus

$$\mathbf{b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

of

$$\mathbf{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

**N.B.** Dikwijls is de vorm (1) gemakkelijker dan (2). Zo is de verg. van de raaklijn in $P(2, -3)$ aan $3x^2 + 2y^2 = 30$:

$$3x(2) + 2y(-3) = 30 \text{ of } x - y = 5.$$

OPMERKING **1.** Uit de r.c. van de raaklijn vinden we de r.c., en daarmee de verg. van de *normaal* in P.

**2.** De raaklijn aan een ellips in meer algemene ligging vinden we weer door differentiëren (voorb. 1 in § 56).

---

## § 55. De poollijn van een punt t.o.v. een ellips

Volkomen analoog met § 23 blijkt, dat (1) of (2) uit § 54 de verg. is van de **poollijn** van $P(x_1, y_1)$ t.o.v. de ellips, als P *niet* op de ellips ligt. — Het middelpunt van de ellips ($x_1 = y_1 = 0$) heeft weer geen poollijn.

De poollijn van $P(x_1, y_1)$ t.o.v. de ellips

$$b^2(x - p)^2 + a^2(y - q)^2 = a^2b^2$$

vindt men weer door het assenstelsel te verschuiven naar het punt $(p, q)$. Controleer, dat de verg. dan is

$$b^2(x - p)(x_1 - p) + a^2(y - q)(y_1 - q) = a^2b^2.$$

---



## § 56. Toepassingen

**1.** Bepaal de verg. van de raaklijn in het punt $(3, -2)$ aan de ellips $2x^2 + 3y^2 = 4x - 6y + 6$.

OPL.: Differentieer beide leden naar $x$:

$$4x + 6yy' = 4 - 6y'.$$

Voor $x = 3$, $y = -2$ is dan $y' = \frac{4}{3}$; de verg. van de raaklijn is dus $y + 2 = \frac{4}{3}(x - 3)$, of $4x - 3y = 18$.

---

**2.** Bepaal de verzameling van de punten, waarvan de poollijnen t.o.v. de beide ellipsen

$$2x^2 + y^2 = 12 \text{ en } x^2 + 2(y - 4)^2 = 20$$

loodrecht op elkaar staan.

OPL.: Laat $P(x_1, y_1)$ een punt zijn, dat aan de vraag voldoet. De verg. van de poollijn van P t.o.v.

$$2x^2 + y^2 = 12 \text{ is } 2xx_1 + yy_1 = 12, \text{ en t.o.v.}$$

$$x^2 + 2(y - 4)^2 = 20 \text{ is } xx_1 + 2(y - 4)(y_1 - 4) = 20.$$

Het produkt van de richtings-coëfficiënten moet nu gelijk zijn aan $-1$, dus

$$-\frac{2x_1}{y_1}\cdot\frac{-x_1}{2(y_1 - 4)} = -1 \rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 4y_1.$$

De verzameling van P is dus de cirkel $x^2 + y^2 = 4y$.

---

EIGENSCHAP. **De projecties van de brandpunten op de raaklijnen aan een ellips liggen op de hoofdcirkel.**

BEWIJS: De lijn door $(c, 0)$ $\perp$ de raaklijn

$$y - mx = \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

(zie slot van § 51) heeft tot vergelijking

$$x + my = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

We elimineren $m$ door kwadrateren en optellen van de overeenkomstige leden. Dit geeft (omdat $b^2 + c^2 = a^2$):

$$(m^2 + 1)(x^2 + y^2) = a^2(m^2 + 1), \text{ of } x^2 + y^2 = a^2.$$

Dit is de vergelijking van de z.g. *hoofdcirkel*.

---

OPMERKING: Een zuiver meetkundig bewijs van deze eigenschap is ook eenvoudig. Is nl. in fig. 19 S het snijpunt van $F_1F'$ en PX, dan zijn O en S in $\triangle F_2F_1F'$ de middens van $\overline{F_1F_2}$ en $\overline{F_2F'}$, dus $\overline{OS} = \frac{1}{2}\overline{F_2F'} = \frac{1}{2} \times 2a = a$.

S ligt dus op $\odot(O, a)$, dus op de hoofdcirkel.

---

## § 75. Vraagstukken

Stel de verg. op van de ellips, waarvan

261. $(\pm 2, 0)$ de brandpunten zijn, en $(0, 1)$ een top is.
262. $(\pm\sqrt{3}, 0)$ de brandpunten zijn, en de excentriciteit $\frac{1}{2}$ is.
263. $(\pm 3, 0)$ de brandpunten zijn, en die gaat door $(2, \sqrt{2})$.
264. $(-1, 1)$ en $(5, 1)$ de toppen zijn, en gaat door O.
265. $(4, 2)$ het middelpunt is, en die de X- en Y-as raakt.

---

266. Stel de algemene verg. op van een ellips, waarvan een as op de Y-as ligt, en die de X-as raakt.
267. Ook van een ellips, waarvan $(1, 0)$ en $(5, 0)$ toppen zijn.
268. Bepaal het middelpunt en de assen van de ellipsen
$$x^2 - 6x + 4y^2 = 16 \text{ en } 2x^2 - 4x + 3y^2 + 6y = 7.$$
269. Ga na, of de punten $(3, 5)$, $(2, -3)$ en $(-1, 4)$ binnen of buiten de ellips $2x^2 + 3y^2 = 50$ liggen.
270. Bereken de lengte van de koorde door het brandpunt van de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ loodrecht op de X-as.

Bepaal de verg. van de raaklijnen aan de ellips

271. $3x^2 + y^2 = 9$, die een r.c. 1 hebben.
272. $x^2 + 2y^2 = 18$, die loodrecht staan op de lijn $x + 2y = 1$.
273. $2x^2 + 3y^2 = 21$, die gaan door $(0, 7)$.
274. $(x - 3)^2 + 2y^2 = 6$, die gaan door O.

---

Bepaal de verg. van de raaklijn en de normaal in het punt

275. $(3, 2)$ van de ellips $x^2 + 3y^2 = 21$.
276. $(1, -2)$ van de ellips $2x^2 + y^2 = 6$.
277. $(2, 4)$ van de ellips $2x^2 + 3y^2 = 4x + 12y$.

---

Bepaal de verg. van de poollijn van het punt

278. $(4, 6)$ t.o.v. $x^2 + 2y^2 = 8$.
279. (2,) 3) t.o.v. $3x^2 + y^2 = 6$.
280. $(-4, 5)$ t.o.v. $x^2 + 4y^2 = 16y$.
281. $(4, 2)$ t.o.v. $2x^2 + y^2 = 4(x + y)$.
282. Bepaal op de lijn $x + y = 6$ het punt, waarvan de poollijn t.o.v. $4x^2 + 9y^2 = 12$ door $(3, 0)$ gaat.
283. Op de lijn $x = 4$ ligt een punt P. Bewijs, dat de poollijn van P t.o.v. $x^2 + 2y^2 = 8$ door een brandpunt gaat.
284. Bereken de hoek, die de raaklijnen uit $(5, 0)$ aan de ellips $x^2 + 2y^2 = 10$ met elkaar maken.



285. Bepaal de verg. van de normalen aan de ellips $x^2 + 4y^2 = 20$, die door $(0, -3)$ gaan.
286. De raaklijnen in de eindpunten van een middellijn van een ellips zijn evenwijdig. Bewijs dit.
287. Bepaal de verg. van de gemeenschappelijke raaklijnen aan de cirkel $x^2 + y^2 = 10$ en de ellips $x^2 + 4y^2 = 16$.
288. $F_1$ en $F_2$ zijn de brandpunten van $x^2 + 2y^2 = 8$; $B(0, 2)$ is een top. Bepaal het hoogtepunt van $\triangle F_1F_2B$.
289. Bewijs, dat de ellips $2x^2 + y^2 = a^2$ en de parabool $y^2 = 2px$ elkaar loodrecht snijden.
290. Bereken de tangens van de hoek, waaronder de ellipsen $x^2 + 4y^2 = 20$ en $4x^2 + y^2 = 20$ elkaar snijden.
291. Stel de algemene verg. op van een cirkel, die de ellips $3x^2 + 2y^2 = 12$ in $(2, 0)$ loodrecht snijdt.
292. Het produkt van de afstanden der brandpunten van een ellips tot een willekeurige raaklijn is constant. Bewijs dit.
293. Een punt P doorloopt de lijn $x = a$; de poollijn van P t.o.v. de ellips $x^2 + 2y^2 = a^2$ is $l$. Bepaal de verzameling van de projecties van P op $l$.
294. Bepaal ook de verzameling van de projecties van O op $l$.
295. Bepaal de verzameling der projecties van O op de raaklijnen aan de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
296. Bepaal de verzameling van de punten, van waaruit de raaklijnen aan $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ loodrecht op elkaar staan.
297. De poollijn van een brandpunt heet een *richtlijn* van de ellips. — Is P een punt van een ellips, F een brandpunt, en $l$ de bijbehorende richtlijn, dan is de verhouding der afstanden van P tot F en $l$ constant. Bewijs dit.
298. Bepaal de verzameling van de punten, waarvan de poollijn t.o.v. $2x^2 + y^2 = 10$ evenwijdig is met de lijn $x + y = 0$.
299. Onder welke voorwaarde zijn er punten P, waarvan de poollijnen t.o.v. $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ en $x^2 + 2y^2 = 5a^2$ samenvallen? Bepaal dan de verzameling van P.
300. In $a^2x^2 + b^2y^2 = k^2$ is $k$ variabel. Bewijs, dat dit de verg. van een stelsel gelijkvormige ellipsen is. Bereken de oppervlakte van de ellips, die de lijn $x + y = a$ raakt.

---

# VII DE HYPERBOOL

**§ 58.** Een **hyperbool** is de verzameling van de punten, waarvoor *het verschil* der afstanden tot twee gegeven punten $F_1$ en $F_2$ (de *brandpunten*) constant is.

Is dit verschil $2a$, en P een punt van de hyperbool, dan is dus $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$. Is $\overline{F_1F_2} = 2c$, dan moet $a < c$ zijn; de verhouding $c : a$ heet de *excentriciteit* van de hyperbool.

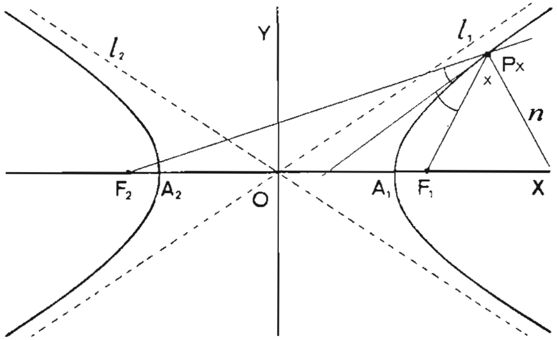


Fig. 21.

Op de lijn $F_1F_2$ (de **hoofd-as**) liggen twee punten $A_1$ en $A_2$ van de hyperbool (de *toppen*) zó, dat $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = a$; op de middelloodlijn van $\overline{F_1F_2}$ (de *neven-as*) ligt natuurlijk geen punt van de hyperbool. De kromme bestaat dus uit twee geheel gescheiden delen (*de takken*); voor de punten P op de ene tak is $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$, en voor de punten op de andere tak is $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$.

Uit de bepaling volgt: de hyperbool is symmetrisch t.o.v. de assen, en t.o.v. hun snijpunt O (het *middelpunt* van de kromme).

Een punt X ligt buiten de hyperbool $(F_1F_2, 2a)$, als $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| < 2a$, en er binnen, als $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| > 2a$.

Een punt van de hyperbool construeert men als volgt: kies een lijnstuk $p$; de cirkels $(F_1, p)$ en $(F_2, 2a + p)$ snijden elkaar dan in twee punten van de hyperbool.

Geheel analoog met de ellips kan men bewijzen:

**De raaklijn en de normaal in een punt P van de hyperbool zijn de deellijnen van de hoeken, die de brandpuntsvoerstralen met elkaar maken.**

---

**§ 59. De vergelijking van de hyperbool.**

In fig. 21 kiezen we $F_1F_2$ als X-as, en de mll. van $\overline{F_1F_2}$ als Y-as. Is $\overline{F_1F_2} = 2c$, en $P(x, y)$ een punt van de hyperbool, dan is $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a$, dus $\overline{PF_1} = \overline{PF_2} \pm 2a$, of

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \pm 2a;$$

Kwadrateren en verder herleiden geeft (zie § 50):

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Stellen we $\mathbf{c^2 - a^2 = b^2}$ (dit kan, want $c > a$), dan komt er:

$$\mathbf{b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2}, \text{ of } \mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Controleer: Het punt $P(x_1, y_1)$ ligt *binnen* de hyperbool, als $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} > 1$, en *erbuiten*, als $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} < 1$.

**N.B.** De vergelijking

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ of } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

stelt ook een hyperbool voor. De brandpunten liggen op de $Y$-as; de toppen zijn de punten $(0, \pm b)$.

---

**§ 60.** De vergelijking van de hyperbool vinden we uit die van de ellips, als we $b^2$ vervangen door $-b^2$. Ook de betrekking $c^2 + b^2 = a^2$ bij de ellips is $c^2 - b^2 = a^2$ bij de hyperbool.

Hieruit volgt: de vergelijking van de raaklijn in een punt $(x_1, y_1)$, of van de poollijn van een punt $(x_1, y_1)$, is

$$\mathbf{\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.}$$

Het middelpunt van de hyperbool heeft geen poollijn.

---

## § 61. De asymptoten van een hyperbool

Voor de snijpunten van de lijn $y = mx$ en de hyperbool $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ vinden we na eliminatie van $y$:

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 = a^2b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Voor $m = \pm\frac{b}{a}$ is verg. (1) vals. De lijnen $y = \pm\frac{b}{a}x$ of $bx = \pm\, ay$ hebben evenwel een bijzondere betekenis. Verg. (1) is nl. in het algemeen van de *tweede* graad in $x$; voor $b^2 = a^2m^2$ is de verg. van de *nulde* graad. Men zegt wel, dat de verg. dan *twee oneindig grote wortels* heeft [1]; de lijnen $bx = \pm\, ay$ hebben met de hyperbool twee „oneindig verre" punten gemeen. Deze lijnen heten de *asymptoten* van de hyperbool ($l_1$ en $l_2$ in fig. 21). Dus: **de asymptoten van de hyperbool** $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ **zijn de lijnen** $\mathbf{y = \pm\frac{b}{a}x}$.

Deze lijnen zijn ook de asymptoten van de hyperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ of } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ (nagaan!)}$$

Voor $bx = \pm ay$ kan men schrijven $bx^2 - a^2y^2 = 0$; de asymptoten vinden we dus door het eerste lid van de verg. van de hyperbool nul te stellen. De asymptoten van de hyperbool $2x^2 - y^2 = 10$ zijn dus de lijnen $y = \pm\, x\sqrt{2}$ [2].

De algemene verg. van de hyperbool, die de lijnen $y = \pm ax$ tot asymptoten heeft, is

$$y^2 - a^2x^2 = p \text{ (}p\text{ variabel en } \neq 0\text{)}.$$

OPGAVE. Ga na, waar de takken van die hyperbool liggen als $p > 0$, en ook als $p < 0$. Wat komt er als $p = 0$?

---

[1] De wortels van (1) zijn nl.

$$x_{12} = \frac{\pm\, ab}{\sqrt{(b^2 - a^2m^2)}}, \text{ als } b^2 \neq a^2m^2.$$

Laten we hierin de noemer tot nul naderen, dan nemen $|x_1|$ en $|x_2|$ onbeperkt toe; daarom zeggen we, dat de wortels oneindig groot zijn als $a^2m^2 = b^2$.

[2] In § 68 geven we een algemene definitie van een asymptoot.



**§ 62.** BEPALING: Een **orthogonale hyperbool** is een hyperbool, waarvan de asymptoten loodrecht op elkaar staan.

Hiervoor is nodig en voldoende, dat $b = a$; de verg. is dan $\mathbf{x^2 - y^2 = a^2}$; de asymptoten zijn de lijnen $y = \pm\, x$.

Is P $(x_1, y_1)$ een punt van deze hyperbool, dan is het produkt der afstanden van P tot de asymptoten volgens § 16:

$$\left|\frac{y_1 - x_1}{\sqrt{2}}\right| \times \left|\frac{y_1 + x_1}{\sqrt{2}}\right| = \tfrac{1}{2}\,|\,y_1^2 - x_1^2\,| = \tfrac{1}{2}a^2.$$

*Kiest men dus de asymptoten van een orthogonale hyperbool als coordinaat-assen, dan is de verg. van de hyperbool* $\mathbf{xy = p}$.

Is $p > 0$, dan liggen de takken van de hyperbool in het eerste en derde kwadrant; ze liggen in II en IV als $p < 0$.

---

## § 63. Vraagstukken

301. Bereken de brandpunts-afstand en de excentriciteit van de hyperbool $x^2 - 2y^2 = 1$.

*Stel de verg. van de hyperbool op, waarvan*

302. $(\pm 3, 0)$ de toppen zijn, en die gaat door het punt $(5, 4)$.
303. $(\pm 4, 0)$ de brandpunten zijn, en de excentriciteit 2 is.
304. $(\pm 2, 0)$ de brandpunten, en $y = 2x$ een asymptoot is.
305. $x = \pm 2y$ de asymptoten zijn, en $(2, 0)$ een top is.

---

306. Bereken de lengte van de koorde door het brandpunt van de hyperbool $x^2 - 3y^2 = 9$ loodrecht op de hoofd-as.
307. Bepaal de verg. van de raaklijn en de normaal in het punt $(3, 2)$ van de hyperbool $2x^2 - y^2 = 14$.
308. Ook in het punt $(0, 2)$ van $2x^2 - 3y^2 = 4x - 6y$.
309. Bepaal de verg. van de poollijn van de punten $(b, 0)$ en $(0, -a)$ t.o.v. de hyperbool $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.
310. Bepaal de verg. van de poollijn van het punt $(4, 4)$ t.o.v. de hyperbool $x^2 - 2y^2 = 4x$.
311. Bewijs: de projectie van een brandpunt op een raaklijn aan de hyperbool $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ligt op de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ (meetkundig in $\triangle PF_1F_2$ van fig. 21).
312. Bepaal de verg. van de raaklijnen uit $(2, 0)$ aan $2x^2 - y^2 = 16$.
313. Bereken de tangens van de hoek, waaronder de hyperbool $2x^2 - y^2 = 16$ en de parabool $y^2 = 4x$ elkaar snijden.

314. Dezelfde vraag voor $x^2 - 2y^2 = a^2$ en $x^2 + y^2 = 4a^2$.
315. Bereken de excentriciteit van een orthogonale hyperbool.
316. Bepaal de verg. van de raaklijn in het punt (4, 2) aan de hyperbool $xy = 8$.
317. Ook van de raaklijn in $(x_1, y_1)$ aan $xy = a^2$.
318. $P(x, y)$ is een punt van de orthogonale hyperbool $x^2 - y^2 = a^2$; de projectie van P op de Y-as is P'. Bewijs: de afstand van P' tot een van de toppen is gelijk aan $\overline{PP'}$.
319. Het produkt der afstanden van een punt op een hyperbool tot de beide asymptoten is constant. Bewijs dit.
320. Bewijs, dat uit een punt van een asymptoot maar één raaklijn aan de hyperbool gaat. → ≠ middelpunt
321. Aan de hyperbolen $xy = a^2$ ($a$ variabel) trekt men de raaklijnen met r.c. $-1$. Bepaal de verz. van de raakpunten.
322. Een raaklijn aan $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ snijdt de lijnen $x = \pm a$ in P en Q; F is een brandpunt. Bewijs, dat FP $\perp$ FQ.
323. $F_1$ en $F_2$ zijn de brandpunten, en P is een willekeurig punt van de hyperbool $x^2 - y^2 = a^2$. Bewijs: $\overline{PO}^2 = \overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2}$.
324. Bepaal de verg. van de hyperbool, die de lijnen $y = \pm 2x$ tot asymptoten heeft, en de lijn $x + y = 2$ raakt.

antwoord fout

325. De raaklijn in een punt P van een hyperbool snijdt de asymptoten in A en B. Bewijs, dat P het midden van $\overline{AB}$ is.
326. Bewijs in vr. 325, dat opp. $\triangle$OAB constant is.
327. Bepaal de verzameling van de punten, van waaruit de raaklijnen aan de hyperbool $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ loodrecht op elkaar staan. Kan dit altijd?
328. Op de X-as kiest men een punt P, en op de $Y$-as het punt Q zó, dat $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = a^2$; het midden van $\overline{PQ}$ is M. Bepaal de verzameling van M.
329. In $(k^2 - a^2)x^2 + k^2y^2 = k^2(k^2 - a^2)$ is $k$ variabel, en $\neq a^2$.
   a) Voor welke waarden van $k$ stelt de verg. een ellips voor, en voor welke een hyperbool?
   b) Bewijs, dat alle krommen van het stelsel dezelfde brandpunten hebben (ze zijn *confocaal*).
330. In vr. 329 gaan door elk punt $(x_1, y_1)$ (niet op een van de assen) twee krommen van het stelsel. Bewijs, dat die elkaar loodrecht snijden (meetkundig met § 49 en slot van § 58).



# VIII KEGELSNEDEN

**§ 64.** We denken ons een omwentelings-kegelvlak met top T en halve tophoek $\alpha$. Is $a$ de as, dan is de doorsnede met een vlak $\perp a$ een cirkel.

Een vlak V door de top, dat met $a$ een hoek $\varphi > \alpha$ maakt, heeft alleen het punt T met het kegelvlak gemeen; is $\varphi = \alpha$, dan raakt V aan het kegelvlak (V heeft dan twee samenvallende lijnen met het kegelvlak gemeen); is $\varphi < \alpha$, dan heeft V met het kegelvlak twee snijdende lijnen gemeen.

BEPALING: Elke doorsnede van een plat vlak met een kegelvlak heet een **kegelsnede**; hiervan kennen we dus de cirkel, het punt, twee samenvallende lijnen en twee snijdende lijnen.

Beschouwt men een cilindervlak als een kegelvlak, waarvan de top „in het oneindige" ligt, dan is ook een paar evenwijdige lijnen een kegelsnede (nl. de doorsnede met een vlak, dat evenwijdig is met de as).

**§ 65.** We denken ons een kegelvlak met top T en halve tophoek $\alpha$. Is V een vlak, dat niet door T gaat, dan zijn er drie gevallen mogelijk; we zullen bewijzen:

*a*) Is $\varphi > \alpha$, dan is de doorsnede een *ellips* (een cirkel, als $\varphi = 90° - \alpha$).
*b*) Is $\varphi < \alpha$, dan is de doorsnede een *hyperbool*.
*c*) Is $\varphi = \alpha$, dan is de doorsnede een *parabool*.

De nu volgende bewijzen van deze eigenschappen zijn gegeven door DANDELIN (een Belgisch wiskundige uit de 19e eeuw); op een andere manier komen ze echter al voor bij APOLLONIUS van Perga (derde eeuw v. Chr.).

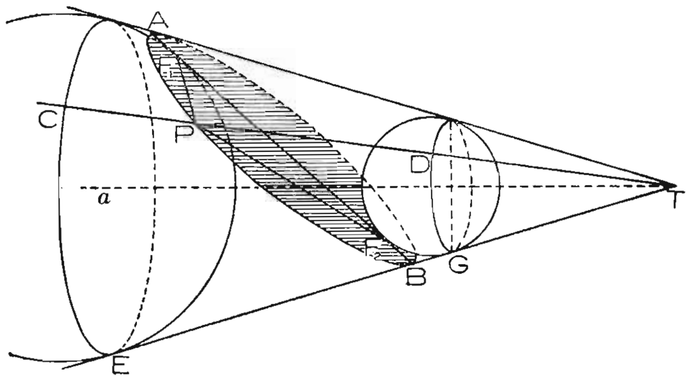


Fig. 22.

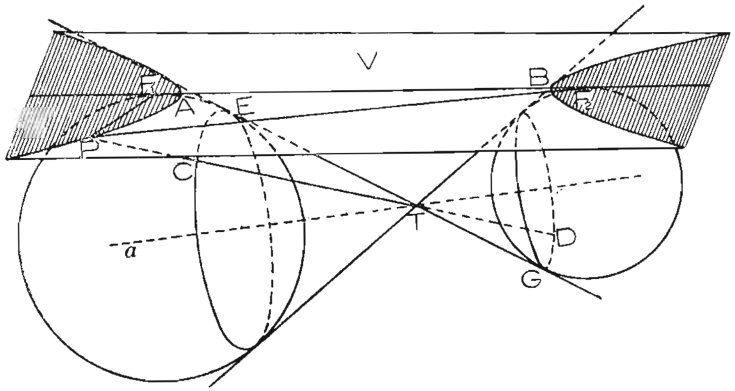


Fig. 23.

*a*) We denken ons een as-doorsnede ATB van het kegelvlak die loodrecht staat op V; hun snijlijn is AB (fig. 22). Het kegelvlak heeft twee ingeschreven bollen, die V raken in twee punten $F_1$ en $F_2$ van AB. Is P een punt van de kegelsnede, en D en C de raakpunten van die bollen met TP, dan is $\overline{PD} = \overline{PF_2}$ en $\overline{PC} = \overline{PF_1}$ (raaklijnstukken uit P aan een bol zijn nl. gelijk). Dus $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{CD} = 2p$.

De verzameling van P is dus de ellips ($F_1$, $F_2$, $2p$).

*b*) Is $\varphi < \alpha$, dan snijdt V de beide bladen van het kegelvlak (fig. 23); ATB is weer een as-doorsnede $\perp$ V van het kegelvlak; hun snijlijn is AB. De ingeschreven bollen, die V raken, raken AB in $F_1$ en $F_2$.



Voor elk punt P van de kegelsnede geldt dan

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PD} - \overline{PC}| = \overline{CD} = 2p$$

De verzameling van P is dus de hyperbool ($F_1$, $F_2$, $2p$).

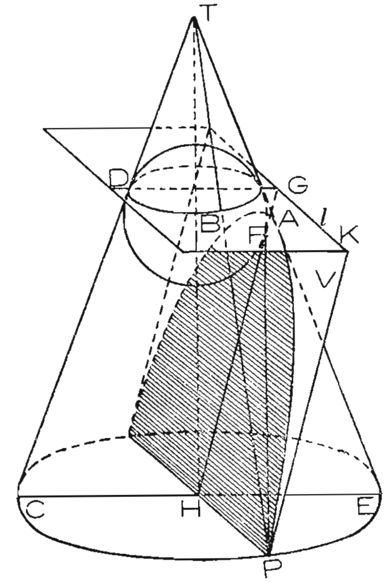


Fig. 24.

*c*) Is $\varphi = \alpha$, dan is V evenwijdig met een beschrijvende lijn TC van het kegelvlak (fig. 24); het snijdt de as van het kegelvlak in H, en dan is vlak TCH $\perp$ V. De ingeschreven bol, die V raakt in F, raakt TC in D; het vlak door D $\perp$ TH snijdt AH in G en V volgens de lijn *l*. Voor het punt P van de kegelsnede is dan $\overline{PF} = \overline{PB} = \overline{CD}$.

$\square$DGHC is een parallelogram, dus $\overline{GH} = \overline{CD}$. Is K de projectie van P op *l*, dan is $\overline{PK} = \overline{GH}$, dus ook $\overline{PK} = \overline{CD} = \overline{PF}$. De verzameling van P is dus de parabool (F, *l*).

**IX** DE ALGEMENE VERGELIJKING VAN DE TWEEDE GRAAD

## § 66. Rotatie van het coördinaten-stelsel.

We draaien het assenstelsel XOY over een hoek $\varphi$[1] (fig. 26); de coördinaten van een punt P t.o.v. de beide assenstelsels noemen we $(x, y)$ en $(x', y')$.

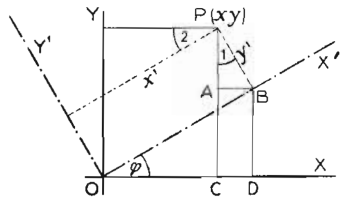


Fig. 25.

In fig. 25 is $\angle P_1 = \angle P_2 = \varphi$. Verder is

$\overline{PC} = \overline{PA} + \overline{AC} = \overline{PA} + \overline{BD}$, dus $y = y' \cos\varphi + x' \sin\varphi$.

$\overline{OC} = \overline{OD} - \overline{CD} = \overline{OD} - \overline{AB}$, dus $x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$.

De transformatie-formules bij deze *rotatie* zijn dus

$$\begin{cases} \mathbf{x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi} \\ \mathbf{y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi} \end{cases}$$

**Toepassing.** Transformeer de verg. $x^2 + xy + y^2 = 6$ door het assenstelsel over een hoek van 45° te draaien.

Opl.: De transformatie-formules geven bij $\varphi = 45°$:

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x' - y') \text{ en } y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(x' + y').$$

De verg. gaat dan over in:

$$\tfrac{1}{2}(x' - y')^2 + \tfrac{1}{2}(x' - y')(x' + y') + \tfrac{1}{2}(x' + y')^2 = 6,$$

of na herleiding $3x'^2 + y'^2 = 12$.

Dit is een ellips met assen 2 en $2\sqrt{3}$; deze assen maken dus met de X- en Y-as hoeken van 45°.

[1] Hiermee wordt bedoeld, dat de positieve X-as om O over een hoek $\varphi$ gedraaid wordt tegen de wijzers van de klok in.

## § 67. De algemene vergelijking van de tweede graad.

De algemene vergelijking van de tweede graad in $x$ en $y$ is:

$$\mathbf{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0} \;\ldots\ldots\; (1)$$

waarin $a$, $b$ en $c$ niet allemaal nul zijn. We beweren, dat deze vergelijking in alle gevallen een kegelsnede voorstelt.

We bewijzen eerst, dat men het assenstelsel over een zodanige hoek $\varphi$ kan draaien, dat de term met $xy$ verdwijnt. De termen van de tweede graad gaan nl. over in:

$$a(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 + 2b(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)$$
$$(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) + c\,(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2.$$

De coëfficiënt van $x'y'$ hierin is:

$$-2a \sin\varphi \cos\varphi + 2b(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2c \sin\varphi \cos\varphi,$$

of

$$(c - a) \sin 2\varphi + 2b \cos 2\varphi.$$

Het is duidelijk, dat er steeds een waarde van $\varphi$ is, waarvoor dit nul is. Voor die waarde van $\varphi$ gaat vergelijking (1), na weglating van de accenten, over in:

$$a_1x^2 + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0 \;\ldots\ldots\; (2)$$

waarin $a_1$ en $c_1$ niet allebei nul zijn.

I. Is $a_1 \neq 0$ en $c_1 \neq 0$, dan kunnen we voor (2) schrijven

$$a_1(x - p)^2 + c_1(y - q)^2 = f' \;\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

Hebben $a_1$ en $c_1$ hetzelfde teken, dan stelt (3) een ellips voor (een cirkel als $a_1 = c_1$) met middelpunt $(p, q)$.

Zijn $a_1$ en $c_1$ ongelijk van teken, dan stelt (3) een hyperbool voor, met als bijzonder geval een lijnenpaar, als $f' = 0$.

II. Is $a_1 = 0$ en $c_1 \neq 0$, dan kunnen we, als $d_1 \neq 0$ is, verg. (2) schrijven in de vorm

$$c_1(y - q)^2 = 2d_1(x - p).$$

Dit is een parabool met top $(p, q)$; de as is de lijn $y = q$.

Is $a_1 = d_1 = 0$, dan schrijven we voor (2):

$$c_1y^2 + 2e_1y + f_1 = 0.$$

Dit stelt twee lijnen evenwijdig met de X-as voor, die eventueel kunnen samenvallen of imaginair zijn.

III. Het geval $a_1 \neq 0$ en $c_1 = 0$ geeft analoge conclusies.

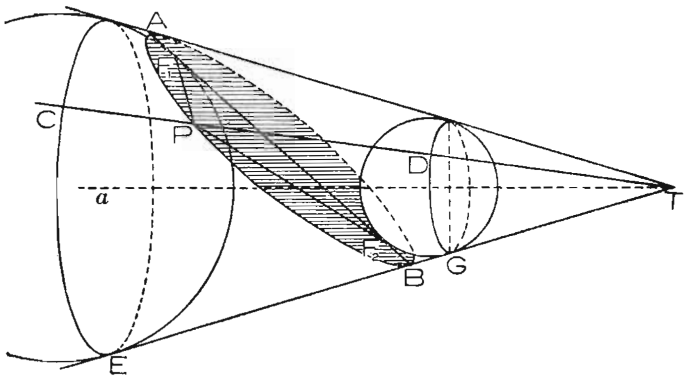


Fig. 22.

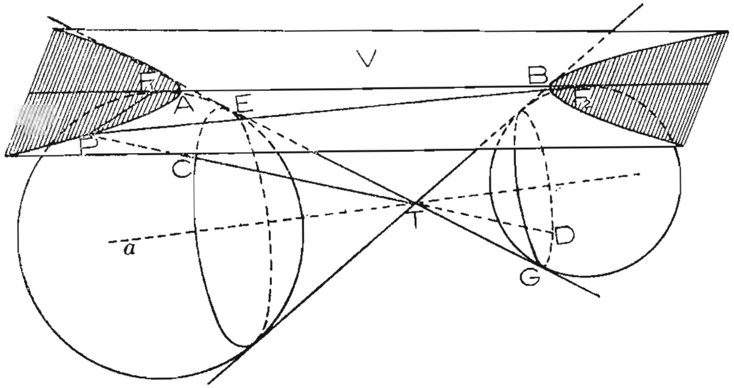


Fig. 23.

*a*) We denken ons een as-doorsnede ATB van het kegelvlak die loodrecht staat op V; hun snijlijn is AB (fig. 22). Het kegelvlak heeft twee ingeschreven bollen, die V raken in twee punten $F_1$ en $F_2$ van AB. Is P een punt van de kegelsnede, en D en C de raakpunten van die bollen met TP, dan is $\overline{PD} = \overline{PF}_2$ en $\overline{PC} = \overline{PF}_1$ (raaklijnstukken uit P aan een bol zijn nl. gelijk). Dus $\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = \overline{CD} = 2p$.

De verzameling van P is dus de ellips $(F_1, F_2, 2p)$.

*b*) Is $\varphi < \alpha$, dan snijdt V de beide bladen van het kegelvlak (fig. 23); ATB is weer een as-doorsnede $\perp$ V van het kegelvlak; hun snijlijn is AB. De ingeschreven bollen, die V raken, raken AB in $F_1$ en $F_2$.



Voor elk punt P van de kegelsnede geldt dan

$$|\overline{PF}_1 - \overline{PF}_2| = |\overline{PD} - \overline{PC}| = \overline{CD} = 2p$$

De verzameling van P is dus de hyperbool $(F_1, F_2, 2p)$.

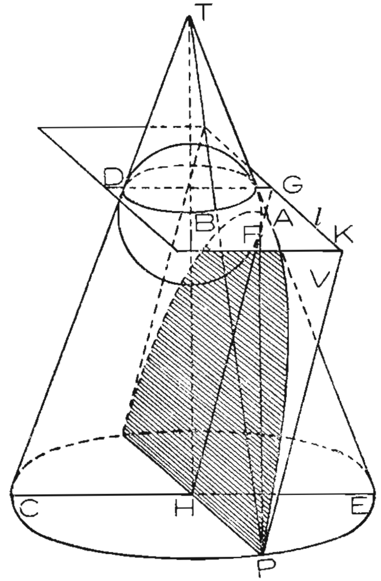


Fig. 24.

*c*) Is $\varphi = \alpha$, dan is V evenwijdig met een beschrijvende lijn TC van het kegelvlak (fig. 24); het snijdt de as van het kegelvlak in H, en dan is vlak TCH $\perp$ V. De ingeschreven bol, die V raakt in F, raakt TC in D; het vlak door D $\perp$ TH snijdt AH in G en V volgens de lijn *l*. Voor het punt P van de kegelsnede is dan $\overline{PF} = \overline{PB} = \overline{CD}$.

$\square$DGHC is een parallelogram, dus $\overline{GH} = \overline{CD}$. Is K de projectie van P op *l*, dan is $\overline{PK} = \overline{GH}$, dus ook $\overline{PK} = \overline{CD} = \overline{PF}$. De verzameling van P is dus de parabool (F, *l*).

## IX DE ALGEMENE VERGELIJKING VAN DE TWEEDE GRAAD

### § 66. Rotatie van het coördinaten-stelsel.

We draaien het assenstelsel XOY over een hoek $\varphi$[1] (fig. 26); de coördinaten van een punt P t.o.v. de beide assenstelsels noemen we $(x, y)$ en $(x', y')$.

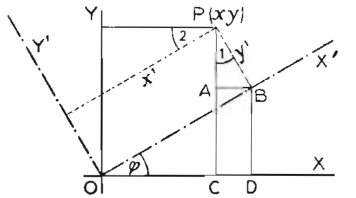


Fig. 25.

In fig. 25 is $\angle P_1 = \angle P_2 = \varphi$. Verder is

$\overline{PC} = \overline{PA} + \overline{AC} = \overline{PA} + \overline{BD}$, dus $y = y' \cos\varphi + x' \sin\varphi$.

$\overline{OC} = \overline{OD} - \overline{CD} = \overline{OD} - \overline{AB}$, dus $x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$.

De transformatie-formules bij deze *rotatie* zijn dus

$$\begin{cases} \mathbf{x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi} \\ \mathbf{y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi} \end{cases}$$

---

**Toepassing.** Transformeer de verg. $x^2 + xy + y^2 = 6$ door het assenstelsel over een hoek van 45° te draaien.

OPL.: De transformatie-formules geven bij $\varphi = 45°$:

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x' - y') \text{ en } y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(x' + y').$$

De verg. gaat dan over in:

$$\tfrac{1}{2}(x' - y')^2 + \tfrac{1}{2}(x' - y')(x' + y') + \tfrac{1}{2}(x' + y')^2 = 6,$$

of na herleiding $3x'^2 + y'^2 = 12$.

Dit is een ellips met assen 2 en $2\sqrt{3}$; deze assen maken dus met de X- en Y-as hoeken van 45°.

---

[1] Hiermee wordt bedoeld, dat de positieve X-as om O over een hoek $\varphi$ gedraaid wordt tegen de wijzers van de klok in.

### § 67. De algemene vergelijking van de tweede graad.

De algemene vergelijking van de tweede graad in $x$ en $y$ is:

$$\mathbf{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0} \quad \dots\dots \quad (1)$$

waarin $a$, $b$ en $c$ niet allemaal nul zijn. We beweren, dat deze vergelijking in alle gevallen een kegelsnede voorstelt.

We bewijzen eerst, dat men het assenstelsel over een zodanige hoek $\varphi$ kan draaien, dat de term met $xy$ verdwijnt. De termen van de tweede graad gaan nl. over in:

$$a(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 + 2b(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)$$
$$(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) + c\,(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2.$$

De coëfficiënt van $x'y'$ hierin is:

$$-2a \sin\varphi \cos\varphi + 2b(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2c \sin\varphi \cos\varphi,$$

of

$$(c - a) \sin 2\varphi + 2b \cos 2\varphi.$$

Het is duidelijk, dat er steeds een waarde van $\varphi$ is, waarvoor dit nul is. Voor die waarde van $\varphi$ gaat vergelijking (1), na weglating van de accenten, over in:

$$a_1x^2 + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0 \quad \dots\dots \quad (2)$$

waarin $a_1$ en $c_1$ niet allebei nul zijn.

I. Is $a_1 \neq 0$ en $c_1 \neq 0$, dan kunnen we voor (2) schrijven

$$a_1(x - p)^2 + c_1(y - q)^2 = f' \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Hebben $a_1$ en $c_1$ hetzelfde teken, dan stelt (3) een ellips voor (een cirkel als $a_1 = c_1$) met middelpunt $(p, q)$.

Zijn $a_1$ en $c_1$ ongelijk van teken, dan stelt (3) een hyperbool voor, met als bijzonder geval een lijnenpaar, als $f' = 0$.

II. Is $a_1 = 0$ en $c_1 \neq 0$, dan kunnen we, als $d_1 \neq 0$ is, verg. (2) schrijven in de vorm

$$c_1(y - q)^2 = 2d_1(x - p).$$

Dit is een parabool met top $(p, q)$; de as is de lijn $y = q$.

Is $a_1 = d_1 = 0$, dan schrijven we voor (2):

$$c_1y^2 + 2e_1y + f_1 = 0.$$

Dit stelt twee lijnen evenwijdig met de X-as voor, die eventueel kunnen samenvallen of imaginair zijn.

III. Het geval $a_1 \neq 0$ en $c_1 = 0$ geeft analoge conclusies.

## § 68. Asymptotische richtingen, asymptoten

We snijden (1) met de lijn $y = mx$. Eliminatie van $y$ geeft:

$$(a + 2bm + cm^2)x^2 + 2(d + em)\,x + f = 0 \;\ldots.\; (4)$$

Dit is in het algemeen een v.k.v. in $x$, dus de lijn heeft twee (reële of imaginaire) punten met de kromme gemeen; deze kunnen ook samenvallen. Is echter $a + 2bm + cm^2 = 0$, dan is (4) een *lineaire* verg. in $x$, en de lijn heeft dan maar één snijpunt met de kromme (natuurlijk kan men dan niet spreken van samengevallen punten). We zeggen nu, dat (4) dan een *oneindig grote wortel* heeft (§ 61); de lijn $y = mx$ *heeft een punt in het oneindige* met de kromme gemeen.

De waarden $m_1$ en $m_2$, die volgen uit $a + 2bm + cm^2 = 0$, heten de *asymptotische richtingen* van de kegelsnede.

BEPALING: Een **asymptotische richting** van een kromme lijn is de r.c. van een rechte lijn, die met de kromme een punt in het oneindige gemeen heeft. — Elimineren we $m$ uit $a + 2bm + cm^2 = 0$ en $y = mx$, dan komt er:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$$

Dit is de vergelijking van een lijnenpaar door O; men kan b.v. voor $2x^2 + xy - y^2 = 0$ schrijven: $(2x - y)(x + y) = 0$. Dus: *de lijnen door O in de asymptotische richtingen vindt men door het homogene tweede-graadsdeel van* (1) *nul te stellen.*

Snijden we de kegelsnede met de lijn $y = mx + n$, en kiest men $m$ en $n$ zodanig, dat na eliminatie van $y$ de coëfficiënten van $x^2$ *en* van $x$ nul worden, dan heeft de vergelijking *twee oneindig grote wortels*; voor die waarden van $m$ en $n$ heet de lijn $y = mx + n$ een *asymptoot* van de kromme. — Algemeen:

Een **asymptoot** van een kromme lijn is een rechte lijn, die met de kromme twee punten in het oneindige gemeen heeft.

OPMERKING: Als de vergelijking $f(x, y) = 0$ van de $n^e$ graad is in $x$ en (of) $y$, dan geeft snijding met de lijn $y = mx$ na eliminatie van $y$ in het algemeen een vergelijking van de $n^e$ graad in $x$. De waarden van $m$, waarvoor de coëfficiënt van $x^n$ in die vergelijking nul is, heten weer de asymptotische richtingen van de kromme; de lijnen door O in de asymptotische richtingen vindt men door het homogene $n^e$ graadsdeel van $f(x, y)$ nul te stellen.



## § 69. Asymptotische richtingen van de kegelsneden

We onderzoeken de asymptotische richtingen van de rechte lijn, ellips, parabool en hyperbool.

*a*) De asymptotische richting van de lijn $ax + by + c = 0$ is $ax + by = 0$; een rechte lijn $l$ heeft dus één asymptotische richting. Deze is dezelfde als van $l$; men zegt daarom, dat *twee evenwijdige lijnen een snijpunt in het oneindige hebben.*

*b*) Voor de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ volgen de asymptotische richtingen uit $b^2x^2 + a^2y^2 = 0$. Dit is geen reëel lijnenpaar; een ellips heeft dus geen asymptotische richtingen. (de cirkel dus ook niet).

*c*) De asymptotische richtingen van de parabool $y^2 = 2px$ volgen uit $y^2 = 0$, dus $y_{12} = 0$. Een parabool heeft dus twee samenvallende asymptotische richtingen; dit is de richting van de as. De parabool heeft echter *geen* asymptoot, want snijding met $y = k$ geeft (na eliminatie van $y$): $2px = k^2$, en dit geeft één eindige waarde voor $x$, omdat $p \neq 0$.

*d*) De hyperbool $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ heeft twee asymptotische richtingen, nl. $b^2x^2 - a^2y^2 = 0$, dus $bx = \pm\, ay$.

---

## § 70. Kenmerk voor ellips, parabool, hyperbool

In § 68 vonden we de asymptotische richtingen van

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \;\ldots.\; (1)$$

uit

$$a + 2bm + cm^2 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (5)$$

Dit geeft de volgende mogelijkheden:

1) Is $\mathbf{b^2 - ac > 0}$, dan zijn er twee reële asymptotische richtingen; (1) stelt dan een **hyperbool** voor. (§ 69).

Is $a = -c$, dan is het produkt van de asymptotische richtingen $-1$; de hyperbool is dan *orthogonaal.*

De hyperbool kan *ontaard* zijn in *een paar snijdende lijnen* (als men in fig. 23 het vlak V verschuift tot het door T gaat).

2) Is $\mathbf{b^2 - ac < 0}$, dan zijn er geen reële asymptotische richtingen; (1) stelt dan een **ellips** voor (of een cirkel, als $b = 0$ en $a = c$).

De ellips kan imaginair (b.v. $x^2 + 4y^2 = -3$), of een punt-ellips zijn ($2x^2 + y^2 = 0$).

## § 54. Raaklijn en normaal in een punt van de ellips

De r.c. van de raaklijn in een punt $P(x_1, y_1)$ van de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ vinden we weer door de leden naar $x$ te differentiëren ($y$ als functie van $x$ beschouwd). Dit geeft

$$2b^2x + 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2y} \quad (\text{als } y \neq 0).$$

De r.c. van de raaklijn in $P(x_1, y_1)$ is dus $-b^2x_1 : a^2y_1$; de verg. is dus

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1), \text{ of } b^2xx_1 + a^2yy_1 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2.$$

Maar P ligt op de ellips, dus $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$; de verg. van de raaklijn in P is dus

$$\mathbf{b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

of

$$\mathbf{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

**N.B.** Dikwijls is de vorm (1) gemakkelijker dan (2). Zo is de verg. van de raaklijn in $P(2, -3)$ aan $3x^2 + 2y^2 = 30$:

$$3x(2) + 2y(-3) = 30 \text{ of } x - y = 5.$$

OPMERKING **1.** Uit de r.c. van de raaklijn vinden we de r.c., en daarmee de verg. van de *normaal* in P.

**2.** De raaklijn aan een ellips in meer algemene ligging vinden we weer door differentiëren (voorb. 1 in § 56).

---

## § 55. De poollijn van een punt t.o.v. een ellips

Volkomen analoog met § 23 blijkt, dat (1) of (2) uit § 54 de verg. is van de **poollijn** van $P(x_1, y_1)$ t.o.v. de ellips, als P *niet* op de ellips ligt. — Het middelpunt van de ellips ($x_1 = y_1 = 0$) heeft weer geen poollijn.

De poollijn van $P(x_1, y_1)$ t.o.v. de ellips

$$b^2(x - p)^2 + a^2(y - q)^2 = a^2b^2$$

vindt men weer door het assenstelsel te verschuiven naar het punt $(p, q)$. Controleer, dat de verg. dan is

$$b^2(x - p)(x_1 - p) + a^2(y - q)(y_1 - q) = a^2b^2.$$

---



## § 56. Toepassingen

**1.** Bepaal de verg. van de raaklijn in het punt $(3, -2)$ aan de ellips $2x^2 + 3y^2 = 4x - 6y + 6$.

OPL.: Differentieer beide leden naar $x$:

$$4x + 6yy' = 4 - 6y'.$$

Voor $x = 3$, $y = -2$ is dan $y' = \frac{4}{3}$; de verg. van de raaklijn is dus $y + 2 = \frac{4}{3}(x - 3)$, of $4x - 3y = 18$.

---

**2.** Bepaal de verzameling van de punten, waarvan de poollijnen t.o.v. de beide ellipsen

$$2x^2 + y^2 = 12 \text{ en } x^2 + 2(y - 4)^2 = 20$$

loodrecht op elkaar staan.

OPL.: Laat $P(x_1, y_1)$ een punt zijn, dat aan de vraag voldoet. De verg. van de poollijn van P t.o.v.

$$2x^2 + y^2 = 12 \text{ is } 2xx_1 + yy_1 = 12, \text{ en t.o.v.}$$

$$x^2 + 2(y - 4)^2 = 20 \text{ is } xx_1 + 2(y - 4)(y_1 - 4) = 20.$$

Het produkt van de richtings-coëfficiënten moet nu gelijk zijn aan $-1$, dus

$$-\frac{2x_1}{y_1}\cdot\frac{-x_1}{2(y_1 - 4)} = -1 \rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 4y_1.$$

De verzameling van P is dus de cirkel $x^2 + y^2 = 4y$.

---

EIGENSCHAP. **De projecties van de brandpunten op de raaklijnen aan een ellips liggen op de hoofdcirkel.**

BEWIJS: De lijn door $(c, 0)$ $\perp$ de raaklijn

$$y - mx = \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

(zie slot van § 51) heeft tot vergelijking

$$x + my = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

We elimineren $m$ door kwadrateren en optellen van de overeenkomstige leden. Dit geeft (omdat $b^2 + c^2 = a^2$):

$(m^2 + 1)(x^2 + y^2) = a^2(m^2 + 1)$, of $x^2 + y^2 = a^2$.

Dit is de vergelijking van de z.g. *hoofdcirkel.*

---

OPMERKING: Een zuiver meetkundig bewijs van deze eigenschap is ook eenvoudig. Is nl. in fig. 19 S het snijpunt van $F_1F'$ en PX, dan zijn O en S in $\triangle F_2F_1F'$ de middens van $\overline{F_1F_2}$ en $\overline{F_2F'}$, dus $\overline{OS} = \frac{1}{2}F_2F' = \frac{1}{2} \times 2a = a$.

S ligt dus op $\odot$ (O, $a$), dus op de hoofdcirkel.

---

## § 75. Vraagstukken

Stel de verg. op van de ellips, waarvan

261. $(\pm 2, 0)$ de brandpunten zijn, en $(0, 1)$ een top is.
262. $(\pm\sqrt{3}, 0)$ de brandpunten zijn, en de excentriciteit $\frac{1}{2}$ is.
263. $(\pm 3, 0)$ de brandpunten zijn, en die gaat door $(2, \sqrt{2})$.
264. $(-1, 1)$ en $(5, 1)$ de toppen zijn, en gaat door O.
265. $(4, 2)$ het middelpunt is, en die de X- en Y-as raakt.

---

266. Stel de algemene verg. op van een ellips, waarvan een as op de Y-as ligt, en die de X-as raakt.
267. Ook van een ellips, waarvan $(1, 0)$ en $(5, 0)$ toppen zijn.
268. Bepaal het middelpunt en de assen van de ellipsen $$x^2 - 6x + 4y^2 = 16 \text{ en } 2x^2 - 4x + 3y^2 + 6y = 7.$$
269. Ga na, of de punten $(3, 5)$, $(2, -3)$ en $(-1, 4)$ binnen of buiten de ellips $2x^2 + 3y^2 = 50$ liggen.
270. Bereken de lengte van de koorde door het brandpunt van de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ loodrecht op de X-as.

Bepaal de verg. van de raaklijnen aan de ellips

271. $3x^2 + y^2 = 9$, die een r.c. 1 hebben.
272. $x^2 + 2y^2 = 18$, die loodrecht staan op de lijn $x + 2y = 1$.
273. $2x^2 + 3y^2 = 21$, die gaan door $(0, 7)$.
274. $(x - 3)^2 + 2y^2 = 6$, die gaan door O.

---

Bepaal de verg. van de raaklijn en de normaal in het punt

275. $(3, 2)$ van de ellips $x^2 + 3y^2 = 21$.
276. $(1, -2)$ van de ellips $2x^2 + y^2 = 6$.
277. $(2, 4)$ van de ellips $2x^2 + 3y^2 = 4x + 12y$.

---

Bepaal de verg. van de poollijn van het punt

278. $(4, 6)$ t.o.v. $x^2 + 2y^2 = 8$.
279. $(2,) 3)$ t.o.v. $3x^2 + y^2 = 6$.
280. $(-4, 5)$ t.o.v. $x^2 + 4y^2 = 16y$.
281. $(4, 2)$ t.o.v. $2x^2 + y^2 = 4(x + y)$.
282. Bepaal op de lijn $x + y = 6$ het punt, waarvan de poollijn t.o.v. $4x^2 + 9y^2 = 12$ door $(3, 0)$ gaat.
283. Op de lijn $x = 4$ ligt een punt P. Bewijs, dat de poollijn van P t.o.v. $x^2 + 2y^2 = 8$ door een brandpunt gaat.
284. Bereken de hoek, die de raaklijnen uit $(5, 0)$ aan de ellips $x^2 + 2y^2 = 10$ met elkaar maken.



285. Bepaal de verg. van de normalen aan de ellips $x^2 + 4y^2 = 20$, die door $(0, -3)$ gaan.
286. De raaklijnen in de eindpunten van een middellijn van een ellips zijn evenwijdig. Bewijs dit.
287. Bepaal de verg. van de gemeenschappelijke raaklijnen aan de cirkel $x^2 + y^2 = 10$ en de ellips $x^2 + 4y^2 = 16$.
288. $F_1$ en $F_2$ zijn de brandpunten van $x^2 + 2y^2 = 8$; B(0, 2) is een top. Bepaal het hoogtepunt van $\triangle F_1F_2B$.
289. Bewijs, dat de ellips $2x^2 + y^2 = a^2$ en de parabool $y^2 = 2px$ elkaar loodrecht snijden.
290. Bereken de tangens van de hoek, waaronder de ellipsen $x^2 + 4y^2 = 20$ en $4x^2 + y^2 = 20$ elkaar snijden.
291. Stel de algemene verg. op van een cirkel, die de ellips $3x^2 + 2y^2 = 12$ in $(2, 0)$ loodrecht snijdt.
292. Het produkt van de afstanden der brandpunten van een ellips tot een willekeurige raaklijn is constant. Bewijs dit.
293. Een punt P doorloopt de lijn $x = a$; de poollijn van P t.o.v. de ellips $x^2 + 2y^2 = a^2$ is $l$. Bepaal de verzameling van de projecties van P op $l$.
294. Bepaal ook de verzameling van de projecties van O op $l$.
295. Bepaal de verzameling der projecties van O op de raaklijnen aan de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
296. Bepaal de verzameling van de punten, van waaruit de raaklijnen aan $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ loodrecht op elkaar staan.
297. De poollijn van een brandpunt heet een *richtlijn* van de ellips. — Is P een punt van een ellips, F een brandpunt, en $l$ de bijbehorende richtlijn, dan is de verhouding der afstanden van P tot F en $l$ constant. Bewijs dit.
298. Bepaal de verzameling van de punten, waarvan de poollijn t.o.v. $2x^2 + y^2 = 10$ evenwijdig is met de lijn $x + y = 0$.
299. Onder welke voorwaarde zijn er punten P, waarvan de poollijnen t.o.v. $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ en $x^2 + 2y^2 = 5a^2$ samenvallen? Bepaal dan de verzameling van P.
300. In $a^2x^2 + b^2y^2 = k^2$ is $k$ variabel. Bewijs, dat dit de verg. van een stelsel gelijkvormige ellipsen is. Bereken de oppervlakte van de ellips, die de lijn $x + y = a$ raakt.

---

## VII DE HYPERBOOL

**§ 58.** Een **hyperbool** is de verzameling van de punten, waarvoor *het verschil* der afstanden tot twee gegeven punten $F_1$ en $F_2$ (de *brandpunten*) constant is.

Is dit verschil $2a$, en P een punt van de hyperbool, dan is dus $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$. Is $\overline{F_1F_2} = 2c$, dan moet $a < c$ zijn; de verhouding $c : a$ heet de *excentriciteit* van de hyperbool.

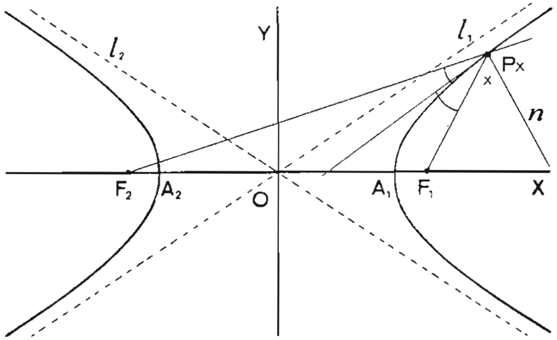


Fig. 21.

Op de lijn $F_1F_2$ (de **hoofd-as**) liggen twee punten $A_1$ en $A_2$ van de hyperbool (de *toppen*) zó, dat $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = a$; op de middelloodlijn van $\overline{F_1F_2}$ (de *neven-as*) ligt natuurlijk geen punt van de hyperbool. De kromme bestaat dus uit twee geheel gescheiden delen (*de takken*); voor de punten P op de ene tak is $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$, en voor de punten op de andere tak is $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$.

Uit de bepaling volgt: de hyperbool is symmetrisch t.o.v. de assen, en t.o.v. hun snijpunt O (het *middelpunt* van de kromme).

Een punt X ligt buiten de hyperbool $(F_1F_2, 2a)$, als $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| < 2a$, en er binnen, als $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| > 2a$.

Een punt van de hyperbool construeert men als volgt: kies een lijnstuk $p$; de cirkels $(F_1, p)$ en $(F_2, 2a + p)$ snijden elkaar dan in twee punten van de hyperbool.

Geheel analoog met de ellips kan men bewijzen:

**De raaklijn en de normaal in een punt P van de hyperbool zijn de deellijnen van de hoeken, die de brandpuntsvoerstralen met elkaar maken.**

---

**§ 59. De vergelijking van de hyperbool.**

In fig. 21 kiezen we $F_1F_2$ als X-as, en de mll. van $\overline{F_1F_2}$ als Y-as. Is $\overline{F_1F_2} = 2c$, en $P(x, y)$ een punt van de hyperbool, dan is $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a$, dus $\overline{PF_1} = \overline{PF_2} \pm 2a$, of

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a;$$

Kwadrateren en verder herleiden geeft (zie § 50):

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Stellen we $\mathbf{c^2 - a^2 = b^2}$ (dit kan, want $c > a$), dan komt er:

$$\mathbf{b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2}, \text{ of } \mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Controleer: Het punt $P(x_1, y_1)$ ligt *binnen* de hyperbool, als $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} > 1$, en *erbuiten*, als $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} < 1$.

**N.B.** De vergelijking

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ of } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

stelt ook een hyperbool voor. De brandpunten liggen op de $Y$-as; de toppen zijn de punten $(0, \pm b)$.

---

**§ 60.** De vergelijking van de hyperbool vinden we uit die van de ellips, als we $b^2$ vervangen door $-b^2$. Ook de betrekking $c^2 + b^2 = a^2$ bij de ellips is $c^2 - b^2 = a^2$ bij de hyperbool.

Hieruit volgt: de vergelijking van de raaklijn in een punt $(x_1, y_1)$, of van de poollijn van een punt $(x_1, y_1)$, is

$$\mathbf{\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.}$$

Het middelpunt van de hyperbool heeft geen poollijn.

---

## § 61. De asymptoten van een hyperbool

Voor de snijpunten van de lijn $y = mx$ en de hyperbool $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ vinden we na eliminatie van $y$:

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Voor $m = \pm \frac{b}{a}$ is verg. (1) vals. De lijnen $y = \pm \frac{b}{a} x$ of $bx = \pm ay$ hebben evenwel een bijzondere betekenis. Verg. (1) is nl. in het algemeen van de *tweede* graad in $x$; voor $b^2 = a^2m^2$ is de verg. van de *nulde* graad. Men zegt wel, dat de verg. dan *twee oneindig grote wortels* heeft [1]; de lijnen $bx = \pm ay$ hebben met de hyperbool twee „oneindig verre" punten gemeen. Deze lijnen heten de *asymptoten* van de hyperbool ($l_1$ en $l_2$ in fig. 21). Dus: **de asymptoten van de hyperbool $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ zijn de lijnen $\mathbf{y = \pm \frac{b}{a} x}$.**

Deze lijnen zijn ook de asymptoten van de hyperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ of } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ (nagaan!)}$$

Voor $bx = \pm ay$ kan men schrijven $bx^2 - a^2y^2 = 0$; de asymptoten vinden we dus door het eerste lid van de verg. van de hyperbool nul te stellen. De asymptoten van de hyperbool $2x^2 - y^2 = 10$ zijn dus de lijnen $y = \pm x\sqrt{2}$ [2].

De algemene verg. van de hyperbool, die de lijnen $y = \pm ax$ tot asymptoten heeft, is

$$y^2 - a^2x^2 = p \quad (p \text{ variabel en } \neq 0).$$

OPGAVE. Ga na, waar de takken van die hyperbool liggen als $p > 0$, en ook als $p < 0$. Wat komt er als $p = 0$?

---

[1] De wortels van (1) zijn nl.

$$x_{12} = \frac{\pm ab}{\sqrt{(b^2 - a^2m^2)}}, \text{ als } b^2 \neq a^2m^2.$$

Laten we hierin de noemer tot nul naderen, dan nemen $|x_1|$ en $|x_2|$ onbeperkt toe; daarom zeggen we, dat de wortels oneindig groot zijn als $a^2m^2 = b^2$.

[2] In § 68 geven we een algemene definitie van een asymptoot.



## § 62.

BEPALING: Een **orthogonale hyperbool** is een hyperbool, waarvan de asymptoten loodrecht op elkaar staan.

Hiervoor is nodig en voldoende, dat $b = a$; de verg. is dan $\mathbf{x^2 - y^2 = a^2}$; de asymptoten zijn de lijnen $y = \pm x$.

Is P $(x_1, y_1)$ een punt van deze hyperbool, dan is het produkt der afstanden van P tot de asymptoten volgens § 16:

$$\left|\frac{y_1 - x_1}{\sqrt{2}}\right| \times \left|\frac{y_1 + x_1}{\sqrt{2}}\right| = \tfrac{1}{2}\,|y_1^2 - x_1^2| = \tfrac{1}{2}a^2.$$

*Kiest men dus de asymptoten van een orthogonale hyperbool als coordinaat-assen, dan is de verg. van de hyperbool* $\mathbf{xy = p}$.

Is $p > 0$, dan liggen de takken van de hyperbool in het eerste en derde kwadrant; ze liggen in II en IV als $p < 0$.

---

## § 63. Vraagstukken

301. Bereken de brandpunts-afstand en de excentriciteit van de hyperbool $x^2 - 2y^2 = 1$.

*Stel de verg. van de hyperbool op, waarvan*

302. $(\pm 3, 0)$ de toppen zijn, en die gaat door het punt $(5, 4)$.
303. $(\pm 4, 0)$ de brandpunten zijn, en de excentriciteit 2 is.
304. $(\pm 2, 0)$ de brandpunten, en $y = 2x$ een asymptoot is.
305. $x = \pm 2y$ de asymptoten zijn, en $(2, 0)$ een top is.

---

306. Bereken de lengte van de koorde door het brandpunt van de hyperbool $x^2 - 3y^2 = 9$ loodrecht op de hoofd-as.
307. Bepaal de verg. van de raaklijn en de normaal in het punt $(3, 2)$ van de hyperbool $2x^2 - y^2 = 14$.
308. Ook in het punt $(0, 2)$ van $2x^2 - 3y^2 = 4x - 6y$.
309. Bepaal de verg. van de poollijn van de punten $(b, 0)$ en $(0, -a)$ t.o.v. de hyperbool $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.
310. Bepaal de verg. van de poollijn van het punt $(4, 4)$ t.o.v. de hyperbool $x^2 - 2y^2 = 4x$.
311. Bewijs: de projectie van een brandpunt op een raaklijn aan de hyperbool $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ligt op de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ (meetkundig in $\triangle PF_1F_2$ van fig. 21).
312. Bepaal de verg. van de raaklijnen uit $(2, 0)$ aan $2x^2 - y^2 = 16$.
313. Bereken de tangens van de hoek, waaronder de hyperbool $2x^2 - y^2 = 16$ en de parabool $y^2 = 4x$ elkaar snijden.

314. Dezelfde vraag voor $x^2 - 2y^2 = a^2$ en $x^2 + y^2 = 4a^2$.

315. Bereken de excentriciteit van een orthogonale hyperbool.

316. Bepaal de verg. van de raaklijn in het punt (4, 2) aan de hyperbool $xy = 8$.

317. Ook van de raaklijn in $(x_1, y_1)$ aan $xy = a^2$.

318. $P(x, y)$ is een punt van de orthogonale hyperbool $x^2 - y^2 = a^2$; de projectie van P op de Y-as is P'. Bewijs: de afstand van P' tot een van de toppen is gelijk aan $\overline{PP'}$.

319. Het produkt der afstanden van een punt op een hyperbool tot de beide asymptoten is constant. Bewijs dit.

320. Bewijs, dat uit een punt van een asymptoot maar één raaklijn aan de hyperbool gaat. ≠ middelpunt

321. Aan de hyperbolen $xy = a^2$ ($a$ variabel) trekt men de raaklijnen met r.c. $-1$. Bepaal de verz. van de raakpunten.

322. Een raaklijn aan $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ snijdt de lijnen $x = \pm a$ in P en Q; F is een brandpunt. Bewijs, dat FP $\perp$ FQ.

323. $F_1$ en $F_2$ zijn de brandpunten, en P is een willekeurig punt van de hyperbool $x^2 - y^2 = a^2$. Bewijs: $\overline{PO}^2 = \overline{PF_1} . \overline{PF_2}$.

[illegible] punt

324. Bepaal de verg. van de hyperbool, die de lijnen $y = \pm 2x$ tot asymptoten heeft, en de lijn $x + y = 2$ raakt.

325. De raaklijn in een punt P van een hyperbool snijdt de asymptoten in A en B. Bewijs, dat P het midden van $\overline{AB}$ is.

326. Bewijs in vr. 325, dat opp. $\triangle$OAB constant is.

327. Bepaal de verzameling van de punten, van waaruit de raaklijnen aan de hyperbool $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ loodrecht op elkaar staan. Kan dit altijd?

328. Op de X-as kiest men een punt P, en op de $Y$-as het punt Q zó, dat $\overline{OP} . \overline{OQ} = a^2$; het midden van $\overline{PQ}$ is M. Bepaal de verzameling van M.

329. In $(k^2 - a^2)x^2 + k^2y^2 = k^2(k^2 - a^2)$ is $k$ variabel, en $\neq a^2$.
   a) Voor welke waarden van $k$ stelt de verg. een ellips voor, en voor welke een hyperbool?
   b) Bewijs, dat alle krommen van het stelsel dezelfde brandpunten hebben (ze zijn *confocaal*).

330. In vr. 329 gaan door elk punt $(x_1, y_1)$ (niet op een van de assen) twee krommen van het stelsel. Bewijs, dat die elkaar loodrecht snijden (meetkundig met § 49 en slot van § 58).



# VIII KEGELSNEDEN

**§ 64.** We denken ons een omwentelings-kegelvlak met top T en halve tophoek $\alpha$. Is $a$ de as, dan is de doorsnede met een vlak $\perp a$ een cirkel.

Een vlak V door de top, dat met $a$ een hoek $\varphi > \alpha$ maakt, heeft alleen het punt T met het kegelvlak gemeen; is $\varphi = \alpha$, dan raakt V aan het kegelvlak (V heeft dan twee samenvallende lijnen met het kegelvlak gemeen); is $\varphi < \alpha$, dan heeft V met het kegelvlak twee snijdende lijnen gemeen.

BEPALING: Elke doorsnede van een plat vlak met een kegelvlak heet een **kegelsnede**; hiervan kennen we dus de cirkel, het punt, twee samenvallende lijnen en twee snijdende lijnen.

Beschouwt men een cilindervlak als een kegelvlak, waarvan de top „in het oneindige" ligt, dan is ook een paar evenwijdige lijnen een kegelsnede (nl. de doorsnede met een vlak, dat evenwijdig is met de as).

**§ 65.** We denken ons een kegelvlak met top T en halve tophoek $\alpha$. Is V een vlak, dat niet door T gaat, dan zijn er drie gevallen mogelijk; we zullen bewijzen:

*a*) Is $\varphi > \alpha$, dan is de doorsnede een *ellips* (een cirkel, als $\varphi = 90° - \alpha$).

*b*) Is $\varphi < \alpha$, dan is de doorsnede een *hyperbool.*

*c*) Is $\varphi = \alpha$, dan is de doorsnede een *parabool.*

De nu volgende bewijzen van deze eigenschappen zijn gegeven door DANDELIN (een Belgisch wiskundige uit de 19e eeuw); op een andere manier komen ze echter al voor bij APOLLONIUS van Perga (derde eeuw v. Chr.).

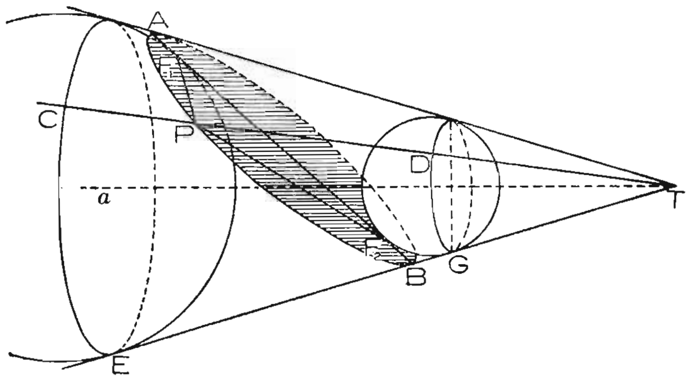


Fig. 22.

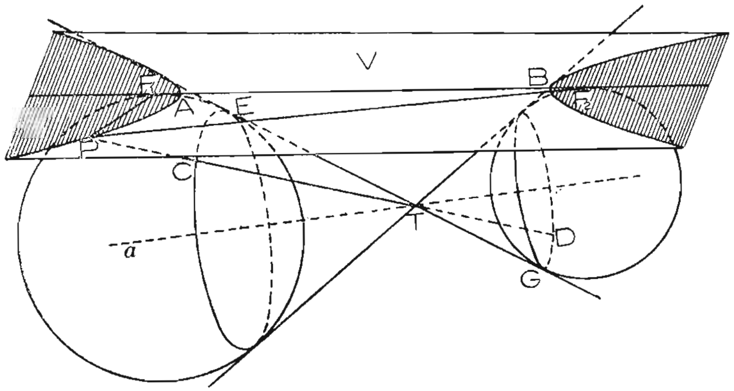


Fig. 23.

*a*) We denken ons een as-doorsnede ATB van het kegelvlak die loodrecht staat op V; hun snijlijn is AB (fig. 22). Het kegelvlak heeft twee ingeschreven bollen, die V raken in twee punten $F_1$ en $F_2$ van AB. Is P een punt van de kegelsnede, en D en C de raakpunten van die bollen met TP, dan is $\overline{PD} = \overline{PF_2}$ en $\overline{PC} = \overline{PF_1}$ (raaklijnstukken uit P aan een bol zijn nl. gelijk). Dus $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{CD} = 2p$.

De verzameling van P is dus de ellips ($F_1$, $F_2$, $2p$).

*b*) Is $\varphi < \alpha$, dan snijdt V de beide bladen van het kegelvlak (fig. 23); ATB is weer een as-doorsnede $\perp$ V van het kegelvlak; hun snijlijn is AB. De ingeschreven bollen, die V raken, raken AB in $F_1$ en $F_2$.



Voor elk punt P van de kegelsnede geldt dan

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PD} - \overline{PC}| = \overline{CD} = 2p$$

De verzameling van P is dus de hyperbool ($F_1$, $F_2$, $2p$).

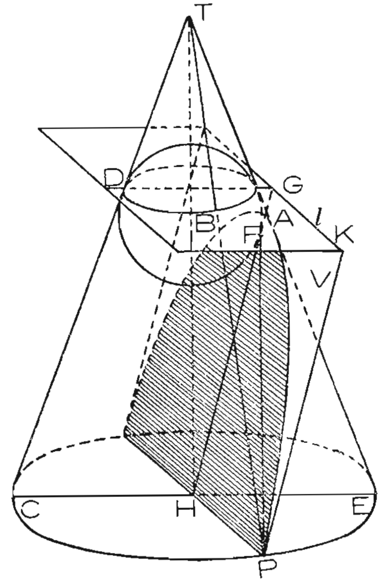


Fig. 24.

*c*) Is $\varphi = \alpha$, dan is V evenwijdig met een beschrijvende lijn TC van het kegelvlak (fig. 24); het snijdt de as van het kegelvlak in H, en dan is vlak TCH $\perp$ V. De ingeschreven bol, die V raakt in F, raakt TC in D; het vlak door D $\perp$ TH snijdt AH in G en V volgens de lijn *l*. Voor het punt P van de kegelsnede is dan $\overline{PF} = \overline{PB} = \overline{CD}$.

$\square$DGHC is een parallelogram, dus $\overline{GH} = \overline{CD}$. Is K de projectie van P op *l*, dan is $\overline{PK} = \overline{GH}$, dus ook $\overline{PK} = \overline{CD} = \overline{PF}$. De verzameling van P is dus de parabool (F, *l*).

## IX DE ALGEMENE VERGELIJKING VAN DE TWEEDE GRAAD

### § 66. Rotatie van het coördinaten-stelsel.

We draaien het assenstelsel XOY over een hoek $\varphi$ [1] (fig. 26); de coördinaten van een punt P t.o.v. de beide assenstelsels noemen we $(x, y)$ en $(x', y')$.

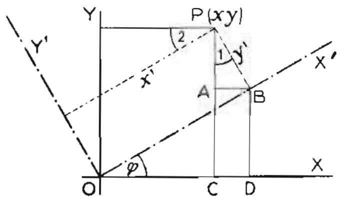


Fig. 25.

In fig. 25 is $\angle P_1 = \angle P_2 = \varphi$. Verder is

$\overline{PC} = \overline{PA} + \overline{AC} = \overline{PA} + \overline{BD}$, dus $y = y' \cos\varphi + x' \sin\varphi$.

$\overline{OC} = \overline{OD} - \overline{CD} = \overline{OD} - \overline{AB}$, dus $x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$.

De transformatie-formules bij deze *rotatie* zijn dus

$$\begin{cases} \mathbf{x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi} \\ \mathbf{y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi} \end{cases}$$

---

**Toepassing.** Transformeer de verg. $x^2 + xy + y^2 = 6$ door het assenstelsel over een hoek van 45° te draaien.

OPL.: De transformatie-formules geven bij $\varphi = 45°$:

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x' - y') \text{ en } y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(x' + y').$$

De verg. gaat dan over in:

$$\tfrac{1}{2}(x' - y')^2 + \tfrac{1}{2}(x' - y')(x' + y') + \tfrac{1}{2}(x' + y')^2 = 6,$$

of na herleiding $3x'^2 + y'^2 = 12$.

Dit is een ellips met assen 2 en $2\sqrt{3}$; deze assen maken dus met de X- en Y-as hoeken van 45°.

---

[1] Hiermee wordt bedoeld, dat de positieve X-as om O over een hoek $\varphi$ gedraaid wordt tegen de wijzers van de klok in.

### § 67. De algemene vergelijking van de tweede graad.

De algemene vergelijking van de tweede graad in $x$ en $y$ is:

$$\mathbf{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0} \quad \ldots\ldots (1)$$

waarin $a$, $b$ en $c$ niet allemaal nul zijn. We beweren, dat deze vergelijking in alle gevallen een kegelsnede voorstelt.

We bewijzen eerst, dat men het assenstelsel over een zodanige hoek $\varphi$ kan draaien, dat de term met $xy$ verdwijnt. De termen van de tweede graad gaan nl. over in:

$$a(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 + 2b(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)$$
$$(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) + c\,(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2.$$

De coëfficiënt van $x'y'$ hierin is:

$$-2a \sin\varphi \cos\varphi + 2b(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2c \sin\varphi \cos\varphi,$$

of

$$(c - a) \sin 2\varphi + 2b \cos 2\varphi.$$

Het is duidelijk, dat er steeds een waarde van $\varphi$ is, waarvoor dit nul is. Voor die waarde van $\varphi$ gaat vergelijking (1), na weglating van de accenten, over in:

$$a_1x^2 + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

waarin $a_1$ en $c_1$ niet allebei nul zijn.

I. Is $a_1 \neq 0$ en $c_1 \neq 0$, dan kunnen we voor (2) schrijven

$$a_1(x - p)^2 + c_1(y - q)^2 = f' \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Hebben $a_1$ en $c_1$ hetzelfde teken, dan stelt (3) een ellips voor (een cirkel als $a_1 = c_1$) met middelpunt $(p, q)$.

Zijn $a_1$ en $c_1$ ongelijk van teken, dan stelt (3) een hyperbool voor, met als bijzonder geval een lijnenpaar, als $f' = 0$.

II. Is $a_1 = 0$ en $c_1 \neq 0$, dan kunnen we, als $d_1 \neq 0$ is, verg. (2) schrijven in de vorm

$$c_1(y - q)^2 = 2d_1(x - p).$$

Dit is een parabool met top $(p, q)$; de as is de lijn $y = q$.

Is $a_1 = d_1 = 0$, dan schrijven we voor (2):

$$c_1y^2 + 2e_1y + f_1 = 0.$$

Dit stelt twee lijnen evenwijdig met de X-as voor, die eventueel kunnen samenvallen of imaginair zijn.

III. Het geval $a_1 \neq 0$ en $c_1 = 0$ geeft analoge conclusies.

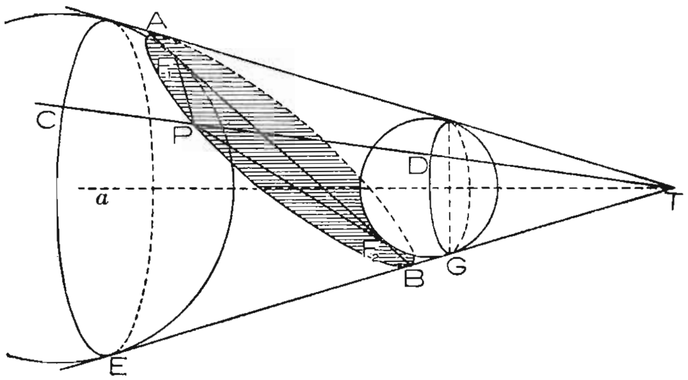


Fig. 22.

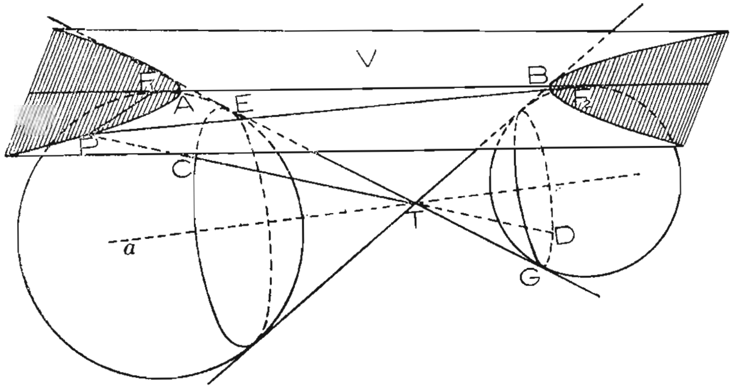


Fig. 23.

*a*) We denken ons een as-doorsnede ATB van het kegelvlak die loodrecht staat op V; hun snijlijn is AB (fig. 22). Het kegelvlak heeft twee ingeschreven bollen, die V raken in twee punten $F_1$ en $F_2$ van AB. Is P een punt van de kegelsnede, en D en C de raakpunten van die bollen met TP, dan is $\overline{PD} = \overline{PF}_2$ en $\overline{PC} = \overline{PF}_1$ (raaklijnstukken uit P aan een bol zijn nl. gelijk). Dus $\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = \overline{CD} = 2p$.

De verzameling van P is dus de ellips $(F_1, F_2, 2p)$.

*b*) Is $\varphi < \alpha$, dan snijdt V de beide bladen van het kegelvlak (fig. 23); ATB is weer een as-doorsnede $\perp$ V van het kegelvlak; hun snijlijn is AB. De ingeschreven bollen, die V raken, raken AB in $F_1$ en $F_2$.



Voor elk punt P van de kegelsnede geldt dan

$$|\overline{PF}_1 - \overline{PF}_2| = |\overline{PD} - \overline{PC}| = \overline{CD} = 2p$$

De verzameling van P is dus de hyperbool $(F_1, F_2, 2p)$.

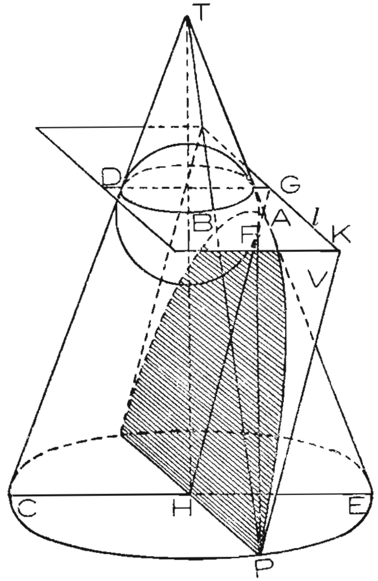


Fig. 24.

*c*) Is $\varphi = \alpha$, dan is V evenwijdig met een beschrijvende lijn TC van het kegelvlak (fig. 24); het snijdt de as van het kegelvlak in H, en dan is vlak TCH $\perp$ V. De ingeschreven bol, die V raakt in F, raakt TC in D; het vlak door D $\perp$ TH snijdt AH in G en V volgens de lijn *l*. Voor het punt P van de kegelsnede is dan $\overline{PF} = \overline{PB} = \overline{CD}$.

$\square$DGHC is een parallelogram, dus $\overline{GH} = \overline{CD}$. Is K de projectie van P op *l*, dan is $\overline{PK} = \overline{GH}$, dus ook $\overline{PK} = \overline{CD} = \overline{PF}$. De verzameling van P is dus de parabool (F, *l*).

## IX DE ALGEMENE VERGELIJKING VAN DE TWEEDE GRAAD

### § 66. Rotatie van het coördinaten-stelsel.

We draaien het assenstelsel XOY over een hoek $\varphi$ [1] (fig. 26); de coördinaten van een punt P t.o.v. de beide assenstelsels noemen we $(x, y)$ en $(x', y')$.

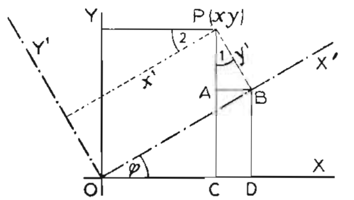


Fig. 25.

In fig. 25 is $\angle P_1 = \angle P_2 = \varphi$. Verder is

$\overline{PC} = \overline{PA} + \overline{AC} = \overline{PA} + \overline{BD}$, dus $y = y' \cos\varphi + x' \sin\varphi$.

$\overline{OC} = \overline{OD} - \overline{CD} = \overline{OD} - \overline{AB}$, dus $x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$.

De transformatie-formules bij deze *rotatie* zijn dus

$$\begin{cases} \mathbf{x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi} \\ \mathbf{y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi} \end{cases}$$

---

**Toepassing.** Transformeer de verg. $x^2 + xy + y^2 = 6$ door het assenstelsel over een hoek van 45° te draaien.

Opl.: De transformatie-formules geven bij $\varphi = 45°$:

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x' - y') \text{ en } y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(x' + y').$$

De verg. gaat dan over in:

$$\tfrac{1}{2}(x' - y')^2 + \tfrac{1}{2}(x' - y')(x' + y') + \tfrac{1}{2}(x' + y')^2 = 6,$$

of na herleiding $3x'^2 + y'^2 = 12$.

Dit is een ellips met assen 2 en $2\sqrt{3}$; deze assen maken dus met de X- en Y-as hoeken van 45°.

---

[1] Hiermee wordt bedoeld, dat de positieve X-as om O over een hoek $\varphi$ gedraaid wordt tegen de wijzers van de klok in.

### § 67. De algemene vergelijking van de tweede graad.

De algemene vergelijking van de tweede graad in $x$ en $y$ is:

$$\mathbf{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0} \quad \ldots\ldots (1)$$

waarin $a$, $b$ en $c$ niet allemaal nul zijn. We beweren, dat deze vergelijking in alle gevallen een kegelsnede voorstelt.

We bewijzen eerst, dat men het assenstelsel over een zodanige hoek $\varphi$ kan draaien, dat de term met $xy$ verdwijnt. De termen van de tweede graad gaan nl. over in:

$$a(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 + 2b(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)$$
$$(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) + c\,(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2.$$

De coëfficiënt van $x'y'$ hierin is:

$$-2a \sin\varphi \cos\varphi + 2b(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2c \sin\varphi \cos\varphi,$$

of

$$(c - a) \sin 2\varphi + 2b \cos 2\varphi.$$

Het is duidelijk, dat er steeds een waarde van $\varphi$ is, waarvoor dit nul is. Voor die waarde van $\varphi$ gaat vergelijking (1), na weglating van de accenten, over in:

$$a_1x^2 + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

waarin $a_1$ en $c_1$ niet allebei nul zijn.

I. Is $a_1 \neq 0$ en $c_1 \neq 0$, dan kunnen we voor (2) schrijven

$$a_1(x - p)^2 + c_1(y - q)^2 = f' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Hebben $a_1$ en $c_1$ hetzelfde teken, dan stelt (3) een ellips voor (een cirkel als $a_1 = c_1$) met middelpunt $(p, q)$.

Zijn $a_1$ en $c_1$ ongelijk van teken, dan stelt (3) een hyperbool voor, met als bijzonder geval een lijnenpaar, als $f' = 0$.

II. Is $a_1 = 0$ en $c_1 \neq 0$, dan kunnen we, als $d_1 \neq 0$ is, verg. (2) schrijven in de vorm

$$c_1(y - q)^2 = 2d_1(x - p).$$

Dit is een parabool met top $(p, q)$; de as is de lijn $y = q$.

Is $a_1 = d_1 = 0$, dan schrijven we voor (2):

$$c_1y^2 + 2e_1y + f_1 = 0.$$

Dit stelt twee lijnen evenwijdig met de X-as voor, die eventueel kunnen samenvallen of imaginair zijn.

III. Het geval $a_1 \neq 0$ en $c_1 = 0$ geeft analoge conclusies.

## § 68. Asymptotische richtingen, asymptoten

We snijden (1) met de lijn $y = mx$. Eliminatie van $y$ geeft:

$$(a + 2bm + cm^2)x^2 + 2(d + em)\,x + f = 0 \;.\;.\;.\;. \quad (4)$$

Dit is in het algemeen een v.k.v. in $x$, dus de lijn heeft twee (reële of imaginaire) punten met de kromme gemeen; deze kunnen ook samenvallen. Is echter $a + 2bm + cm^2 = 0$, dan is (4) een *lineaire* verg. in $x$, en de lijn heeft dan maar één snijpunt met de kromme (natuurlijk kan men dan niet spreken van samengevallen punten). We zeggen nu, dat (4) dan een *oneindig grote wortel* heeft (§ 61); de lijn $y = mx$ *heeft een punt in het oneindige* met de kromme gemeen.

De waarden $m_1$ en $m_2$, die volgen uit $a + 2bm + cm^2 = 0$, heten de *asymptotische richtingen* van de kegelsnede.

BEPALING: Een **asymptotische richting** van een kromme lijn is de r.c. van een rechte lijn, die met de kromme een punt in het oneindige gemeen heeft. — Elimineren we $m$ uit $a + 2bm + cm^2 = 0$ en $y = mx$, dan komt er:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$$

Dit is de vergelijking van een lijnenpaar door O; men kan b.v. voor $2x^2 + xy - y^2 = 0$ schrijven: $(2x - y)\,(x + y) = 0$. Dus: *de lijnen door O in de asymptotische richtingen vindt men door het homogene tweede-graadsdeel van* (1) *nul te stellen.*

Snijden we de kegelsnede met de lijn $y = mx + n$, en kiest men $m$ en $n$ zodanig, dat na eliminatie van $y$ de coëfficiënten van $x^2$ *en* van $x$ nul worden, dan heeft de vergelijking *twee oneindig grote wortels*; voor die waarden van $m$ en $n$ heet de lijn $y = mx + n$ een *asymptoot* van de kromme. — Algemeen:

Een **asymptoot** van een kromme lijn is een rechte lijn, die met de kromme twee punten in het oneindige gemeen heeft.

OPMERKING: Als de vergelijking $f(x, y) = 0$ van de $n^e$ graad is in $x$ en (of) $y$, dan geeft snijding met de lijn $y = mx$ na eliminatie van $y$ in het algemeen een vergelijking van de $n^e$ graad in $x$. De waarden van $m$, waarvoor de coëfficiënt van $x^n$ in die vergelijking nul is, heten weer de asymptotische richtingen van de kromme; de lijnen door O in de asymptotische richtingen vindt men door het homogene $n^e$ graadsdeel van $f(x, y)$ nul te stellen.



## § 69. Asymptotische richtingen van de kegelsneden

We onderzoeken de asymptotische richtingen van de rechte lijn, ellips, parabool en hyperbool.

*a*) De asymptotische richting van de lijn $ax + by + c = 0$ is $ax + by = 0$; een rechte lijn $l$ heeft dus één asymptotische richting. Deze is dezelfde als van $l$; men zegt daarom, dat *twee evenwijdige lijnen een snijpunt in het oneindige hebben.*

*b*) Voor de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ volgen de asymptotische richtingen uit $b^2x^2 + a^2y^2 = 0$. Dit is geen reëel lijnenpaar; een ellips heeft dus geen asymptotische richtingen. (de cirkel dus ook niet).

*c*) De asymptotische richtingen van de parabool $y^2 = 2px$ volgen uit $y^2 = 0$, dus $y_{12} = 0$. Een parabool heeft dus twee samenvallende asymptotische richtingen; dit is de richting van de as. De parabool heeft echter *geen* asymptoot, want snijding met $y = k$ geeft (na eliminatie van $y$): $2px = k^2$, en dit geeft één eindige waarde voor $x$, omdat $p \neq 0$.

*d*) De hyperbool $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ heeft twee asymptotische richtingen, nl. $b^2x^2 - a^2y^2 = 0$, dus $bx = \pm\, ay$.

---

## § 70. Kenmerk voor ellips, parabool, hyperbool

In § 68 vonden we de asymptotische richtingen van

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

uit

$$a + 2bm + cm^2 = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (5)$$

Dit geeft de volgende mogelijkheden:

1) Is $\mathbf{b^2 - ac > 0}$, dan zijn er twee reële asymptotische richtingen; (1) stelt dan een **hyperbool** voor. (§ 69).

Is $a = -c$, dan is het produkt van de asymptotische richtingen $-1$; de hyperbool is dan *orthogonaal.*

De hyperbool kan *ontaard* zijn in *een paar snijdende lijnen* (als men in fig. 23 het vlak V verschuift tot het door T gaat).

2) Is $\mathbf{b^2 - ac < 0}$, dan zijn er geen reële asymptotische richtingen; (1) stelt dan een **ellips** voor (of een cirkel, als $b = 0$ en $a = c$).

De ellips kan imaginair (b.v. $x^2 + 4y^2 = -3$), of een punt-ellips zijn $(2x^2 + y^2 = 0)$.

3) Is $\mathbf{b^2 - ac = 0}$, dan zijn er twee reële samenvallende asymptotische richtingen; (1) stelt dan een **parabool** voor.

De parabool kan ontaarden in een paar samenvallende lijnen (een *dubbellijn*), nl. de lijn TC in fig. 24 als men het vlak V verschuift tot het door T gaat). B.v. $(x - y + 1)^2 = 0$.

Ook kan de parabool ontaard zijn in een *paar evenwijdige lijnen* (doorsnede van een vlak met een cilindervlak).

Dit is b.v. het geval bij $(x - 2y)^2 = 6$.

Indirect bewijst men, dat de voorwaarden $b^2 - ac < 0$, $b^2 - ac > 0$ en $b^2 - ac = 0$ niet alleen voldoende, maar ook nodig zijn, als de kegelsnede een ellips, een hyperbool of een parabool is (afgezien van de eventuele ontaardingen.)

---

## § 71. Het middelpunt van een kegelsnede

BEPALING: Het punt M heet een **middelpunt** van een kromme, als bij *elk* punt P van de kromme ook het punt P', dat symmetrisch ligt met P t.o.v. M, op de kromme ligt.

EIGENSCHAP: **Het punt O is middelpunt van de kromme**

$$\mathbf{ax^2 + 2bxy + cy^2 = f.}$$

Als nl. de coördinaten $(x_1, y_1)$ aan de vergelijking voldoen, dan voldoen ook $(-x_1, -y_1)$.

---

De ellips heeft een middelpunt, dat binnen de kromme ligt; is de ellips een punt, dan is dit ook het middelpunt.

De niet-ontaarde hyperbool heeft een middelpunt, dat buiten de kromme ligt. Is de hyperbool echter ontaard in twee snijdende lijnen, dan is het snijpunt een middelpunt; dit ligt nu op de kromme. Dus: *een hyperbool is ontaard in een lijnenpaar, als het middelpunt op de kromme ligt.*

Een parabool heeft geen middelpunt. Is echter de parabool ontaard in een paar evenwijdige lijnen $l_1$ en $l_2$ dan is elk punt van de lijn, die op gelijke afstanden ligt van $l_1$ en $l_2$, een middelpunt. Is de parabool ontaard in een dubbellijn, dan is elk punt van die lijn een middelpunt. Dus: *een parabool is ontaard, als de kromme oneindig veel middelpunten heeft.*

---



**§ 72.** Het (eventuele) middelpunt van de kegelsnede

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

vinden we door het assenstelsel naar het punt $M(p, q)$ te verschuiven; we proberen dan $p$ en $q$ zó te bepalen, dat in de nieuwe vergelijking de *coëfficiënten van x en y nul zijn*; volgens § 71 is dan M het middelpunt van (1).

Na weglating van de accenten is de nieuwe vergelijking

$$a(x + p)^2 + 2b(x + p)(y + q) + c(y + q)^2 + 2d(x + p) + \\ + 2e(y + q) + f = 0.$$

Na uitwerking blijkt dan, dat $p$ en $q$ moeten voldoen aan:

$$\begin{cases} ap + bq + d = 0 \\ bp + cq + e = 0. \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Is dit stelsel onafhankelijk, dan heeft (1) één middelpunt (ellips of hyperbool). Voldoen de coördinaten van dit punt aan (1), dan is de ellips een punt-ellips; de hyperbool is ontaard in twee snijdende lijnen.

(Als de hyperbool niet ontaard is, dan zijn de asymptoten de lijnen door het middelpunt in de asymptotische richtingen).

Is het stelsel A *strijdig*, dan heeft (1) geen middelpunt; de kromme is een niet-ontaarde parabool.

Is A *afhankelijk*, dan heeft (1) oneindig veel middelpunten; de kromme is dan een dubbellijn, of een paar evenwijdige lijnen.

---

## § 73. Toepassingen

**1.** Onderzoek de kegelsnede:

$$x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 5y + 7 = 0.$$

OPL.: De asymptotische richtingen door O volgen uit $x^2 - xy + 2y^2 = 0$. Dit geeft geen reële lineaire factoren; de kromme is dus een ellips.

Verschuiving van het assenstelsel naar M $(p, q)$ geeft als nieuwe vergelijking (zonder accenten):

$$(x+p)^2 - (x+p)(y+q) + 2(y+q)^2 - 4(x+p) - 5(y+q) + 7 = 0.$$

Na uitwerking zijn de coëfficiënten van $x$ en $y$:

$$2p - q - 4 \text{ en } -p + 4q - 5.$$

Deze zijn nul voor $p = 3$ en $q = 2$, dus M is het punt (3, 2). Dit ligt niet op de kromme, dus de ellips is geen punt-ellips.

2. Eveneens $3x^2 + 2xy - y^2 - 3x + 5y = 6$.

OPL.: $3x^2 + 2xy - y^2 = (3x - y)(x + y)$.

Er zijn dus twee reële asymptotische richtingen door O; de kromme is dus een (al of niet ontaarde) hyperbool.

Verschuiving van het assenstelsel naar $(p, q)$ geeft voor de nieuwe vergelijking:

$$3(x+p)^2 + 2(x+p)(y+q) - (y+q)^2 - 3(x+p) + 5(y+q) = 6.$$

Hierin zijn de coëfficiënten van $x$ en $y$ nul, als

$$\begin{cases} 6p + 2q - 3 = 0 \\ 2p - 2q + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow p = -\tfrac{1}{4};\ q = \tfrac{9}{4}.$$

Deze coördinaten voldoen aan de verg. van de kegelsnede, dus de hyperbool is ontaard in een lijnenpaar.

De asymptotische richtingen van deze lijnen zijn $3x - y = 0$ en $x + y = 0$; de verg. van het lijnenpaar is dus te schrijven als $(3x - y + a)(x + y + b) = 0$. Hieraan voldoen de coördinaten van het middelpunt, zodat $a$ en $b$ te berekenen zijn.

---

3. Bepaal de as en de top van de parabool

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 20x - 110y + 300 = 0$$

OPL.: Uit $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 0$ volgt $(3x - 4y)^2 = 0$; de kromme heeft dus twee samenvallende asymptotische richtingen, en is dus een (àl of niet-ontaarde) parabool; de as-richting van die parabool is $3x - 4y = 0$ (§ 69).

We draaien nu het assenstelsel over de scherpe hoek $\varphi$, waarbij $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4} \rightarrow \sin \varphi = \frac{3}{5}$ en $\cos \varphi = \frac{4}{5}$; de transformatieformules worden dan:

$$x = \tfrac{4}{5}x' - \tfrac{3}{5}y';\ y = \tfrac{3}{5}x' + \tfrac{4}{5}y' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Na vereenvoudiging is dan de vergelijking t.o.v. het nieuwe assenstelsel:

$$(y' - 2)^2 = 2(x' - 4).$$

Dit is een parabool, waarvan (4, 2) de top is. De coördinaten van deze top t.o.v. het eerste assenstelsel volgen uit (6) bij de substitutie $x' = 4$ en $y' = 2 \rightarrow x = 2$ en $y = 4$.

De top is dus het punt (2, 4). De as is de lijn door dit punt evenwijdig met de lijn $3x - 4y = 0$ dus $3x - 4y + 10 = 0$.



## § 74. Voorwaarden, waaraan een kegelsnede kan voldoen

In de vergelijking van een kegelsnede:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

komen zes coëfficiënten voor. Deelt men het eerste lid door een der coëfficiënten, die niet nul is, dan blijven er vijf over; deze kunnen in het algemeen berekend worden, als men vijf gegevens heeft. Dus: *een kegelsnede is in het algemeen door vijf gegevens bepaald.* (Het kan natuurlijk gebeuren, dat de kegelsnede niet eenduidig bepaald is).

Deze gegevens kunnen o.a. zijn:

1) De kegelsnede gaat door een gegeven punt $P(x_1, y_1)$. Substitutie van die coördinaten geeft dan één vergelijking in de coëfficiënten. Als P met O samenvalt, dan is $f = 0$.

2) De kegelsnede raakt de lijn $y = mx + n$.
Door eliminatie van $y$ uit (1) en $y = mx + n$ ontstaat een v.k.v. in $x$; deze heeft twee gelijke wortels.

3) De kegelsnede heeft de lijn $y = mx + n$ tot asymptoot. Eliminatie van $y$ uit (1) en $y = mx + n$ geeft een v.k.v. in $x$; hierin zijn de coëfficiënten van $x^2$ en van $x$ nul.

4) Een as van de kegelsnede is evenwijdig met een van de coördinaat-assen. — In dat geval is $b = 0$ (§ 67).

5) Het middelpunt van de kegelsnede is een gegeven punt M $(p, q)$. — Dit telt voor twee gegevens, want bij verschuiving van het assenstelsel naar het punt $(p, q)$ vallen de termen met $x$ en $y$ weg.
Is de oorsprong het middelpunt, dan is $d = e = 0$.

6) De kegelsnede is een parabool. — Dan is $b^2 = ac$.

7) De kegelsnede is een orthogonale hyperbool. Dan is

$$a = -c.$$

8) De kegelsnede is een cirkel. — Dan is $b = 0$ en $a = c$.

---

## § 75. Vraagstukken

331. Bepaal de verg. van de ellips met brandpunten (0, 3) en (4, 3), waarvan de korte as 2 is.

332. Bepaal de verg. van de parabool met brandpunt (—2, 3), waarvan de Y-as de richtlijn is.

333. Wat wordt de vergelijking van de hyperbool $x^2 - 2y^2 = 5$, als men O verschuift naar het punt (3, 0).

334. Bepaal de verg. van de parabool, waarvan O de top is, en het punt (1, 2) het brandpunt is.

335. Draai het assenstelsel over een zodanige hoek $\varphi$, dat in de vergelijking $x^2 + 2xy + 3y^2 = 8$ na transformatie de term met $xy$ verdwijnt.
Wat wordt de vergelijking t.o.v. het nieuwe stelsel?

336. Dezelfde vragen voor de verg. $x^2 - 2xy + 3 = 0$.

337. De kromme $x^2 + xy + y^2 = 4x$ wordt gespiegeld t.o.v. de X-as. Wat is de vergelijking van die tweede kromme?

---

Welke soort kegelsnede wordt voorgesteld door:

338. $2x^2 - 3xy + 4y^2 - 3x + 5y = 6$.

339. $x^2 - y^2 + 5x - 3y + 2 = 0$.

340. $x^2 - 2xy + y^2 + 6x = 4$.

341. $2x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 6 = 0$.

342. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4v = 3$.

343. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 8 = 0$.

344. $2x^2 - xy - y^2 - x + 4y = 3$.

---

345. Bepaal het middelpunt en de asymptoten van de hyperbool $x^2 - 2xy - 3y^2 + 5x - 3y = 6$.

346. Bepaal de assen van de ellips $x^2 + xy + y^2 = 12$.

347. Bepaal de verg. van de hyperbool met asymptoten $y = 3$ en $x + y = 4$, die gaat door het punt (2, —4).

348. Bepaal de verg. van de parabool, die de lijn $y = 2$ tot as heeft, en gaat door de punten (3, 2) en (5, 4).

349. Bepaal de top van de parabool $(x - 2y)^2 = 50x$.

350. Bepaal de algemene vergelijking van een hyperbool, met asymptoten $x + y = 3$ en $2x - y = 0$.

---



# X BUNDELS

## § 76. Symbolische notatie

Dikwijls stelt men het linkerlid van de op nul herleide vergelijking van een rechte of kromme lijn voor door één letter.

Voor de vergelijking van een rechte lijn schrijft men dan eenvoudig $L = 0$, in plaats van $ax + by + c = 0$; de verg. $C = 0$ is een afkorting van $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Men noemt $L = 0$ en $C = 0$ de *symbolische vergelijking* van de rechte lijn en de cirkel.

---

## § 77. Lijnenbundels

Als $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$ twee lijnen voorstellen, dan is

$$\mathbf{L_1 + \lambda L_2 = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

een lineaire vergelijking in $x$ en $y$ (in welk geval niet?) Kiest men $\lambda$ veranderlijk (dus $\lambda$ als *parameter*), dan is (1) de vergelijking van een stelsel rechte lijnen. Elk van die lijnen gaat door het snijpunt S van de lijnen $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$, want het stel waarden van $x$ en $y$, dat voldoet aan $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$, voldoet ook aan $L_1 + \lambda L_2 = 0$. Dus (1) is de vergelijking van een stelsel lijnen, die allemaal door het punt S gaan. Dit stelsel heet een **lijnenbundel**; het punt S heet het *basispunt* of de *top* van de bundel. In het bijzonder bevat de bundel de lijn $L_1 = 0$ (voor $\lambda = 0$), maar de lijn $L_2 = 0$ niet, omdat $L_1 + \lambda L_2$ voor geen enkele waarde van $\lambda$ overgaat in $L_2$.

We kunnen deze uitzondering opheffen door voor de verg. van de bundel te schrijven $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$; de *verhouding* $\lambda_1 : \lambda_2$ bepaalt dan een lijn van de bundel. De lijnen $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$ vindt men dan opv. voor $\lambda_2 = 0$ en $\lambda_1 = 0$.

Ook kan men de bundel definiëren als de verzameling $L_1 + \lambda L_2 = 0$ met toevoeging van $L_2 = 0$.

We definiëren algemeen: Een **bundel** is een stelsel (rechte of kromme) lijnen, waarvan de vergelijking één parameter in de eerste graad bevat (die niet onder een wortelteken of in de noemer van een breuk voorkomt).

---

§ 78. EIGENSCHAP. **Door elk punt van het vlak gaat in het algemeen één exemplaar van de bundel.**

BEWIJS: De vergelijking van de bundel is

$$a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

Een lijn van de bundel gaat door P $(x_1, y_1)$, als

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 + \lambda(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Er zijn nu drie gevallen mogelijk:

1) $a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 \neq 0$ (dus P ligt niet op $L_2 = 0$).
Uit (2) volgt dan één waarde voor $\lambda$; hiermee correspondeert één lijn door P.

2) $a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$
Vergelijking (2) is dan identiek; *elke* waarde van $\lambda$ voldoet. Dit was te verwachten, want uit (3) volgt, dat P op de lijnen $L_2 = 0$ en $L_1 = 0$ ligt, dus dat P de top van de bundel is.

3) $a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$ en $a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 \neq 0$.
Verg. (2) is dan vals; geen enkele waarde van $\lambda$ voldoet. P ligt op de lijn $L_2 = 0$, en is niet de top S van de bundel.
*Elke lijn door S behoort dus tot de bundel, behalve* $L_2 = 0$.

OPMERKING: Als de lijnen $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$ evenwijdig zijn, dan stelt $L_1 + \lambda L_2 = 0$ een *evenwijdige lijnenbundel* voor.

---

**Toepassing.** De zijden van $\triangle ABC$ liggen op de lijnen:

$$x + y = 3;\ 2x - y = 6 \text{ en } x - 2y = 10.$$

Bepaal de vergelijkingen van de hoogtelijnen.

OPL.: Elke lijn door het snijpunt A van de eerste twee lijnen behoort tot de bundel

$$x + y - 3 + \lambda(2x - y - 6) = 0,$$

of
$$(1 + 2\lambda)x - (\lambda - 1)y - (3 + 6\lambda) = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

De hoogtelijn uit A is de lijn door A loodrecht op de lijn $x - 2y = 10$; het produkt der richtings-coëfficiënten van (4) en $x - 2y = 10$ is dus $-1$, zodat

$$\frac{1 + 2\lambda}{\lambda - 1} \times \tfrac{1}{2} = -1 \rightarrow \lambda = \tfrac{1}{4};$$

de vergelijking van de bedoelde hoogtelijn is dus

$$x + y - 3 + \tfrac{1}{4}(2x - y - 6) = 0, \text{ of } 2x + y = 6.$$

---



§ 79. **Cirkelbundels**

De cirkels $C_1 = x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$
en $C_2 = x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$
bepalen de bundel $C_1 + \lambda C_2 = 0$, of
$(1 + \lambda)(x^2 + y^2) + (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + c_1 + \lambda c_2 = 0.$
Dit stelt voor *elke* waarde van $\lambda$ (behalve $\lambda = -1$) weer een cirkel voor; het stelsel is dus een **cirkelbundel.**

Analoog met § 77 blijkt: elke cirkel van de bundel gaat door de snijpunten van $C_1 = 0$ en $C_2 = 0$ (de *basispunten*).

Een cirkelbundel heeft dus twee reële (verschillende of samenvallende), of twee imaginaire basispunten.

Evenals in § 78 blijkt: door elk punt gaat in het algemeen één cirkel van de bundel (behalve door de basispunten, want hierdoor gaat *elke* cirkel van de bundel).

Ook stelt $C_1 + \lambda C_2 = 0$ weer elke cirkel voor, die door de basispunten gaat, behalve weer de cirkel $C_2 = 0$.

Zijn A en B de basispunten, dan ligt het m.p. van elke cirkel van de bundel op de mll. van $\overline{AB}$, dus: *de middelpunten der cirkels van een bundel liggen op één lijn.* Deze lijn heet de *centraal* van de bundel. (Vallen A en B samen in P, dan *raken* alle cirkels elkaar in P; de centraal is dan de lijn door P loodrecht op de gemeenschappelijke raaklijn).

Een stelsel cirkels, waarvan de middelpunten op één lijn liggen, is echter *niet altijd* een bundel; denk b.v. aan alle cirkels, die de benen van een hoek raken.

Voor $\lambda = -1$ is de cirkel ontaard in de lijn $C_1 - C_2 = 0$. Dit is de verbindingslijn van de basispunten, en heet de *as* van de bundel; het is de *machtlijn* van de beide cirkels (§ 32).

N.B. Kiest men de centraal van de bundel als X-as, en de as als Y-as, dan is de verg. van de cirkelbundel:

$$\mathbf{(x - a)^2 + y^2 = a^2 + p} \quad (a \text{ variabel}).$$

De punten $(0, \pm\sqrt{p})$ zijn de basispunten, als $p > 0$.

Is $p = 0$, dan raken de cirkels elkaar in O; is $p < 0$, dan zijn er geen reële basispunten.

Een bijzondere bundel is nog een stelsel *concentrische* cirkels: $\mathbf{x^2 + y^2 = a}$ ($a$ variabel, en positief).

---

## § 80. Toepassingen

**1.** Bepaal de vergelijking van de cirkel die de X-as raakt, en gaat door de snijpunten van de cirkels $x^2 + y^2 = 16$ en $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$.

OPL.: De gevraagde cirkel behoort tot de bundel

$$x^2 + y^2 - 4x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 16) = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

De cirkel raakt de X-as, als snijding met $y = 0$ twee samenvallende punten geeft. Substitutie van $y = 0$ in (4) geeft: $x^2 - 4x + \lambda(x^2 - 16) = 0$, of $(1 + \lambda)x^2 - 4x - 16\lambda = 0$.

Deze v.k.v. heeft alleen dan twee gelijke wortels, als

$$D = 0 \rightarrow 16 + 4\,(1 + \lambda) . 16\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -\tfrac{1}{2}.$$

De vergelijking van de gevraagde cirkel is dus

$$x^2 + y^2 - 4x + 3y - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 - 16) = 0,$$

of $$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0.$$

---

**2. De machtlijnen van drie cirkels (twee aan twee genomen), gaan door één punt.**

BEWIJS: De machtlijnen van de cirkels $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ en $C_3 = 0$ (waarin de coëfficiënten van $x^2$ en $y^2$ allemaal 1 zijn) twee aan twee genomen, hebben tot vergelijking

$$C_1 - C_2 = 0; \; C_2 - C_3 = 0 \text{ en } C_3 - C_1 = 0.$$

De lijn $C_3 - C_1 = 0$ behoort (voor $\lambda = 1$) tot de lijnenbundel $C_1 - C_2 + \lambda(C_2 - C_3) = 0$; de drie lijnen gaan dus door één punt (het *machtpunt* van de drie cirkels).

---

**3. De poollijnen van een punt P t.o.v. alle cirkels van een bundel vormen een lijnenbundel.**

BEWIJS: Voor de verg. van de cirkelbundel nemen we: $(x - a)^2 + y^2 = p + a^2$ ($a$ variabel) (slot van § 79).

De poollijn van $P(x_1, y_1)$ t.o.v. een willekeurige cirkel van de bundel heeft tot verg.

$$(x - a)(x_1 - a) + yy_1 = p + a^2,$$

of $$(x_1 - a)x + y_1y = ax_1 + p \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Dit is een lineaire verg. in $x$ en $y$, en stelt dus voor *elke a* een rechte lijn voor. De parameter $a$ komt in de eerste graad voor, dus (5) is de verg. van een *lijnenbundel*.

---



## § 81. Vraagstukken

351. Bepaal de verg. van de lijn door P(3, 4), die gaat door het snijpunt van de lijnen $2x + y = 6$ en $y = 2x$.

352. Ook van de lijn door het snijpunt van de lijnen $3x + 5y = 7$ en $x + y = 3$, die loodrecht staat op de lijn $y = 2x$.

353. Bepaal de verg. van de lijn door het snijpunt van $x + y = 6$ en $2x - y = 6$, die evenwijdig is met de lijn $y = x + 2$.

354. Bepaal de verg. van de cirkel door O en de snijpunten van de cirkels $x^2 + y^2 = 6x - 6$ en $x^2 + y^2 = 4y - 12$.

355. Ook van de cirkel, die de Y-as raakt, en gaat door de snijpunten van $x^2 + y^2 = 24$ en $x^2 + y^2 - 9x + 12 = 0$.

356. Bepaal de verg. van de cirkel, die de X-as raakt, en gaat door de snijpunten van $x^2 + y^2 = 3$ en $x = y + 2$.

357. De cirkel $C = 0$ en de rechte lijn $L = 0$ bepalen de bundel $C + \lambda L = 0$. Bewijs, dat dit een cirkelbundel is.

358. Bewijs rechtstreeks: alle cirkels, die door twee gegeven punten A en B gaan, vormen een bundel.

359. Bepaal de verg. van de cirkelbundel, waarvan A(2, 0) en B(0, 4) de basispunten zijn.

360. Bewijs: alle cirkels, die twee gegeven cirkels loodrecht snijden, vormen een bundel.

361. Vormen de cirkels door het punt (2, 0), die de lijn $y = x$ raken, een bundel?

362. Wat is het basispunt van de lijnenbundel
a) $2x + ky = 4 - 2k$; b) $(a + 1)x + y = 2a$.

363. Dezelfde vraag voor de cirkelbundel $x^2 + y^2 = a(2x - y) + 5$.
Bepaal ook de verg. van de centraal en van de as.

364. Stel de algemene verg. op van een cirkel, die z'n m.p. op de X-as heeft, en de lijn $y = x$ raakt.
Vormen die cirkels een bundel?

365. Het punt (2, 4) is het basispunt van de bundel
$ax + by - 6 + \lambda(bx - ay + 2) = 0$. Bereken $a$ en $b$.

---

## § 82. Kegelsnedenbundels

Met de kegelsneden

$$K_1 \equiv a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0$$
$$K_2 \equiv a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2 = 0$$

kan men de bundel

$$\mathbf{K_1 + \lambda K_2 = 0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

vormen. Deze verg. is voor elke $\lambda$ weer van de tweede graad; elk exemplaar van de bundel is dus een kegelsnede; (5) is dus de vergelijking van een *kegelsnedenbundel.*

Elk exemplaar van (5) gaat weer door de snijpunten van $K_1 = 0$ en $K_2 = 0$. Omdat deze vergelijkingen van de tweede graad zijn, is het aantal stellen wortels vier; *een kegelsnedenbundel heeft dus vier basispunten.* Als deze reëel zijn, dan kan het gebeuren, dat:

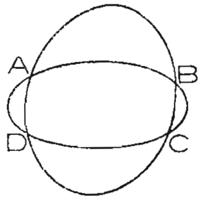

Fig. 26.

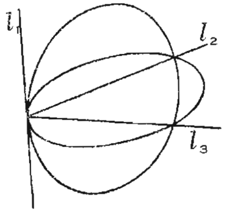

Fig. 27.

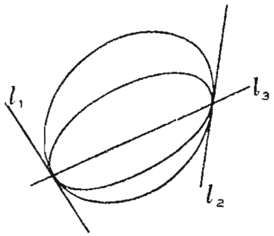

Fig. 28.

*a*) ze alle vier verschillend zijn (fig. 26).
*b*) twee ervan samenvallen (fig. 27).
*c*) ze twee aan twee samenvallen (fig. 28).

In fig. 26 is het duidelijk, dat de bundel drie lijnenparen bevat, nl. (AB en CD), (AC en BD) en (AD en BC).

In fig. 27 bevat de bundel twee lijnenparen. Welke?

De bundel, die bepaald is in fig. 28 (waarin de kegelsneden elkaar dus dubbel raken) bevat het lijnenpaar $(l_1\, l_2)$, en de dubbellijn $l_3$.

Ook kunnen drie, of alle vier, basispunten samenvallen.



## § 83. Bijzondere exemplaren in een bundel

In de bundel $K_1 + \lambda K_2 = 0$ van § 82 zijn de termen van de tweede graad in $x$ en $y$:

$$(a_1 + \lambda a_2)x^2 + 2(b_1 + \lambda b_2)xy + (c_1 + \lambda c_2)y^2 \ldots . \quad (6)$$

In het algemeen bevat de bundel dus oneindig veel ellipsen en hyperbolen; we willen echter nagaan, of er ook parabolen, cirkels en orthogonale hyperbolen in de bundel voorkomen.

1) De waarden van $\lambda$, waarvoor $K_1 + \lambda K_2 = 0$ een parabool is, volgen uit:

$$(b_1 + \lambda b_2)^2 - (a_1 + \lambda a_2)(c_1 + \lambda c_2) = 0 \ \ldots\ldots \quad (7)$$

Dit is in het algemeen een v.k.v. in $\lambda$; in het algemeen bevat de bundel dus *twee parabolen.*

Is $b_2^2 = a_2c_2$, dan is $K_2 = 0$ een parabool; (7) is dan een lineaire verg. in $\lambda$, die dan nog één andere parabool geeft. (Wanneer zijn alle exemplaren van de bundel parabolen?).

2) $K_1 + \lambda K_2 = 0$ stelt een cirkel voor, als

$$a_1 + \lambda a_2 = c_1 + \lambda c_2 \text{ èn } b_1 + \lambda b_2 = 0 \ \ldots\ldots \quad (8)$$

In het algemeen is er geen waarde voor $\lambda$, die aan deze beide voorwaarden voldoet; de bundel bevat dus in het algemeen *geen cirkel.* — Het kàn echter gebeuren, dat er één waarde van $\lambda$ is, die aan de vergelijkingen (8) voldoet (in welk geval?); de bundel bevat dan één cirkel.

Natuurlijk voldoet *elke* waarde van $\lambda$, als

$$a_1 = c_1;\ a_2 = c_2 \text{ en } b_1 = b_2 = 0;$$

$K_1$ en $K_2$ zijn dan cirkels, en de bundel is een cirkelbundel.

3) $K_1 + \lambda K_2 = 0$ is een orthogonale hyperbool, als

$$a_1 + \lambda a_2 = -(c_1 + \lambda c_2).$$

In het algemeen voldoet hieraan één waarde van $\lambda$; de bundel bevat dus één orthogonale hyperbool (eventueel ontaard in een loodrecht lijnenpaar).

Is echter $a_1 = -c_1$ en $a_2 = -c_2$, dan voldoet *elke* waarde van $\lambda$; $K_1$ en $K_2$ zijn zelf orthogonale hyperbolen, en *alle* exemplaren van de bundel eveneens.

## § 84. Toepassingen

**1.** Bepaal de verg. van de cirkel, die gaat door de snijpunten van de ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4$ en $4x^2 + y^2 = 4$.

Opl.: Alle kegelsneden, die door de bedoelde snijpunten gaan, behoren tot de bundel

$$x^2 + 4y^2 - 4 + \lambda(4x^2 + y^2 - 4) = 0,$$

of
$$(1 + 4\lambda)x^2 + (4 + \lambda)y^2 = 4(1 + \lambda).$$

Dit stelt een cirkel voor, als $1 + 4\lambda = 4 + \lambda \rightarrow \lambda = 1$; de vergelijking van die cirkel is dan $5x^2 + 5y^2 = 8$.

---

**2.** Bepaal de vergelijking van de parabool, die in A (2,0) en B (0, 4) raakt aan de X- en Y-as.

Opl.: Een ontaarde kegelsnede, die aan de vraag voldoet is de dubbellijn AB. De verg. van AB is $2x + y = 4$; de verg. van die dubbellijn is dus $(2x + y - 4)^2 = 0$.

De raaklijn in een punt van een rechte lijn is die lijn zelf; het lijnenpaar $xy = 0$ is dus ook een ontaarde kegelsnede, die de X- en Y-as in A en B raakt.

De gevraagde parabool zit dus in de bundel

$$(2x + y - 4)^2 + \lambda xy = 0,$$

of
$$4x^2 + (4 + \lambda)xy + y^2 - 16x - 8y + 16 = 0.$$

Dit stelt een parabool voor, als

$$(4 + \lambda)^2 - 16 = 0 \rightarrow 4 + \lambda = \pm 4 \rightarrow \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = -8.$$

Voor $\lambda = 0$ krijgen we de dubbellijn, die als basisexemplaar is genomen, als ontaarde parabool; $\lambda = -8$ geeft voor de verg. van de gevraagde parabool $(2x + y - 4)^2 - 8xy = 0$.

---

**3.** Bepaal de verg. van de cirkel, die in A(2, 1) en B(—2, 1) de ellips $x^2 + 3y^2 = 7$ raakt.

Opl.: De dubbellijn $(y - 1)^2 = 0$ heeft in A en B twee samengevallen punten met de ellips gemeen; de gevraagde cirkel behoort dus tot de bundel

$$x^2 + 3y^2 - 7 + \lambda(y - 1)^2 = 0, \text{ of}$$
$$x^2 + (3 + \lambda)y^2 - 2\lambda y + \lambda - 7 = 0.$$

Dit stelt een cirkel voor, als $3 + \lambda = 1 \rightarrow \lambda = -2$; de verg. van die cirkel is dan $x^2 + y^2 + 4y = 9$.

---



## § 85. Vraagstukken

366. Als $K = 0$ een kegelsnede en $L = 0$ een rechte lijn voorstellen, wat is dan de betekenis van $K + \lambda L^2 = 0$?

367. Bepaal de (eventuele) parabolen en de cirkel in de bundel $x^2 + 2y^2 - 4x + \lambda(2x^2 - y^2 + 6) = 0$.

368. Ook van de bundel $6x^2 + y^2 - 4 + \lambda(x^2 - 2xy) = 0$.

369. Bepaal de lijnenparen in de bundel $x^2 + 4y^2 - 16 + \lambda(4x^2 + y^2 - 16) = 0$.

370. Bepaal de verg. van de parabool door de punten $(0, \pm 3)$ en $(\pm 3, 0)$ (kies twee lijnenparen als basisexemplaren van een bundel).

371. Bepaal de verzameling van de toppen der parabolen van de bundel $y = ax^2 - (2a - 1)x - (3a - 5)$.

372. Bepaal de verg. van de parabool, die de cirkel $x^2 + y^2 = 16$ raakt in A (4, 0) en B (0, 4).

373. Bepaal de verg. van de orthogonale hyperbool, die gaat door de snijpunten van de cirkel $x^2 + y^2 = 9$ en de parabool $y^2 = 4x + 8$.

374. Bepaal de verg. van de kegelsnede, die gaat door de punten (0, 0), A(4, 3), B(4, 0), C(0, 6) en D(—1, 3). (Kies twee lijnenparen door A, B, C en D als basis-exemplaren van een bundel.

375. Wat is de betekenis van $L_1L_2 + \lambda L_2L_3 + \mu L_3L_1 = 0$, als $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ drie lijnen voorstellen?

Bepaal nu de verg. van de omgeschreven cirkel van de driehoek, die ingesloten wordt door de lijnen $y = 3x$, $y = x+2$ en $2x + y = 1$.

---

## § 86. ALGEMENE HERHALING

376. Gegeven A(2, 0) en B(−2, 0). Bereken de coördinaten van het punt P op de lijn $x + y = 6$, waarvoor $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ minimaal is.
377. Bewijs, dat er geen cirkel is, die twee concentrische cirkels orthogonaal snijdt.
378. Welke betrekking bestaat er tussen $a$ en $b$, als de cirkels $(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$ en $(x - b)^2 + (y - a)^2 = b^2$ elkaar raken?
379. Het punt A doorloopt de parabool $y^2 = 2px$. De raaklijn in A snijdt de Y-as in B; de lijn door B $\perp$ OA snijdt de loodlijn door A op de Y-as in S. Bepaal de verzameling van S.
380. De projectie van O op een raaklijn aan de parabool $y^2 = 2px$ is P; de lijn OP snijdt de parabool nog in Q. Bewijs, dat $\overline{OP} \times \overline{OQ} = p^2$ (P niet in O).
381. De krommen $xy = a$ en $x^2 + 2y^2 = p^2$ raken elkaar. Bepaal de verzameling van hun raakpunten, als $a$ en $p$ variabel zijn.
382. Gegeven de punten A($-a$, 0) en B($a$, 0); een punt C doorloopt de lijn $y = c$. De lijn door C $\perp$ AB snijdt de lijn door A $\perp$ AC in S. Bepaal de verzameling van S.
383. Aan de ellipsen van het stelsel $\lambda x^2 + (1 + \lambda)y^2 = \lambda(1 + \lambda)$ ($\lambda$ variabel en $> 0$) trekt men de raaklijnen met r.c. $-1$. Bepaal de verzameling van de raakpunten.
384. Bepaal de verzameling van de punten, waarvan de poollijn t.o.v. de cirkel $x^2 + y^2 = p^2$ de parabool $y^2 = 2px$ raakt.
385. A en B zijn de toppen van de hyperbool $x^2 - y^2 = a^2$; P is een punt van de hyperbool. Bewijs, dat het hoogtepunt van $\triangle$APB weer een punt van de hyperbool is.
386. Bepaal de verg. van de ellips, waarvan de assen op de $X$- en Y-as liggen, terwijl de lijn $x + 2y = 2$ de poollijn is van (4, 2).
387. In $x^2 + a^2y^2 = 4a^2$ is $a$ variabel.
    a) Bewijs, dat alle ellipsen van dit stelsel twee toppen gemeen hebben.
    b) Uit (0, $p$), waarin $p > 2$, trekt men de raaklijnen aan alle ellipsen. Bepaal de verzameling van de raakpunten.
388. In $y^2 = 2px$ is $p$ veranderlijk. Bepaal de verzameling der raakpunten van de raaklijnen met r.c. 1 aan de parabolen.
389. Welke betrekking bestaat er tussen $a$ en $p$, als de parabolen $y^2 = 2p(x + a)$ en $y^2 = -2p(x - a)$ elkaar loodrecht snijden? Bereken de oppervlakte van de rechthoek, die de vier raaklijnen in de snijpunten insluiten.
390. Bepaal de verzameling van de middelpunten der cirkels, die de Y-as en (uitwendig) de cirkel $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ raken.
391. P doorloopt de parabool $y^2 = 4x$. Uit het brandpunt trekt men de loodlijn op de raaklijn in P; deze loodlijn snijdt OP in S. Bepaal de verzameling van S (P niet in O).
392. Bepaal de verzameling van de punten, waarvan de poollijn t.o.v. $x^2 + 2y^2 = 6$ de cirkel $x^2 + y^2 = 3$ raakt.
393. Een punt P op de hyperbool $x^2 - y^2 = a^2$ is m.p. van een cirkel, die door O gaat; deze cirkel snijdt de asymptoten nog in A en B. Bewijs, dat P het midden van AB is, en dat de lijn AB de hyperbool in P raakt.
394. P doorloopt de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; de normaal in P snijdt de X-as in A, en de Y-as in B. (P niet in een van de toppen). Bepaal de verzameling van het midden van $\overline{AB}$.
395. Het punt P doorloopt de hyperbool $x^2 - 3y^2 = 12$ (P niet op de X-as). De loodlijn door het brandpunt (4, 0) op de raaklijn in P snijdt OP in S. Bepaal de verzameling van S.
396. P doorloopt de parabool $y^2 = 2px$ (brandpunt F). De lijn door O, die loodrecht staat op de raaklijn in P, snijdt PF in S. Bepaal de verzameling van S.
397. Bepaal de verzameling van de toppen der parabolen $y = x^2 - 2ax + a$ ($a$ is variabel).
398. Bepaal de verg. van de ellips, waarvan (0, 2) en (4, 2) de brandpunten zijn, en die de X-as raakt.
399. Men projecteert de top van de parabool $x^2 = 4y$ op elke raaklijn. Bepaal de verzameling van de projecties.
    Teken de gevonden kromme (ga eerst de grenzen voor $y$ na).
400. Bereken de hoek, waaronder de cirkel $x^2 + y^2 = 2a^2$ en de hyperbool $x^2 - y^2 = a^2$ elkaar snijden.
401. Men verbindt de top van de parabool $y^2 = 8(x - a)$ met P(4,4). Deze lijn snijdt de poollijn van P in S. Bepaal de verzameling van S, als $a$ variabel is.

402. In $(x - a)^2 + (y - 2a)^2 = a^2$ is $a$ variabel.
a) Welke twee lijnen door O raken al deze cirkels?
b) Bepaal de verzameling van de punten, waardoor maar één cirkel van het stelsel gaat.

403. a) De parabool $y^2 = 2px$ en de hyperbool $xy = 4p^2$ snijden elkaar in A. Onder welke hoek snijden ze elkaar?
b) De raaklijn in A aan de parabool snijdt de hyperbool nog in B; de raaklijn in A aan de hyperbool snijdt de parabool nog in C. Bewijs, dat BC de beide krommen raakt.

404. Bereken de oppervlakte van de grootste rechthoek, die in de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ beschreven kan worden.

405. De poollijn van een punt P t.o.v. de hyperbool $x^2 - 2y^2 = 6$ is $l$. Door een brandpunt trekt men de lijn $l' \parallel l$; deze snijdt OP in S. Bepaal de verzameling van S.

406. Welke betrekking bestaat er tussen $p$ en $r$ ,als de gemeenschappelijke raaklijnen aan $x^2 + y^2 = r^2$ en $y^2 = 2px$ een hoek van 60° met elkaar maken?

407. a) Bepaal de verzameling der brandpunten van de ellipsen $3(x - p)^2 + 4(y - 2p)^2 = 12p^2$ ($p$ variabel en $\neq 0$).
b) Bewijs, dat door elk punt twee ellipsen van het stelsel gaan, en bepaal de verzameling van de punten P, waarin deze beide ellipsen elkaar raken.

408. P doorloopt de lijn $y = 3$; de raaklijnstukken uit P aan de ellips $x^2 + 2y^2 = 12$ zijn $\overline{PA}$ en $\overline{PB}$; het midden van $\overline{AB}$ is M. Bepaal de verzameling van M.

409. Op de machtlijn $m$ van twee cirkels kiest men een punt P; de poollijnen van P t.o.v. de cirkels snijden elkaar in S. Bewijs, dat S op $m$ ligt.

410. Bepaal de algemene verg. van de cirkels, die de hyperbool $x^2 - y^2 = a^2$ in $(a, 0)$ loodrecht snijden.
Bewijs, dat die cirkels een bundel vormen.

411. De ellipsen $p^2x^2 + q^2y^2 = p^2q^2$ ($p$ en $q$ variabel) raken de hyperbool $xy = a^2$. Bewijs, dat al die ellipsen dezelfde oppervlakte hebben.

412. De cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ raakt de hyperbool $xy = a^2$. Welke betrekking bestaat er tussen $a$ en $r$?



413. De raaklijn en de normaal in een punt P van de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ snijden de X-as in A en B. Bewijs, dat $\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OF}^2$ (F is een brandpunt).

414. Door O trekt men twee onderling loodrechte koorden $\overline{OP}$ en $\overline{OQ}$ in de parabool $y^2 = 2px$; de raaklijnen in P en Q snijden elkaar in S. Bepaal de verzameling van S.

415. Bepaal de algemene verg. van een cirkel, waarvan het m.p. op de positieve X-as ligt, en die de parabool $y^2 = 2px$ raakt. Bewijs, dat het m.p. van zo'n cirkel een constante afstand heeft tot de lijn, die de raakpunten verbindt.

416. De punten P en P' van de hyperbool $x^2 - y^2 = 4$ hebben dezelfde ordinaat; de projectie van P op de raaklijn in P' is S. Bewijs, dat PS door O gaat.
Bepaal de verzameling van S, als P de hyperbool doorloopt.

417. Bepaal de verg. van de parabool, waarvan O het brandpunt is, en die gaat door de punten $(\pm 2, 0)$.

418. Bepaal de verg. van de cirkel, waarvan het m.p. op de X-as ligt, en die de ellips $x^2 + 2y^2 = 6$ in $(2, 1)$ raakt.

419. In $(x - 2p)^2 + 4y^2 = 2p^2$ is $p$ variabel. Bewijs, dat er twee lijnen door O zijn, die elke ellips van het stelsel raken.

420. In $y^2 = 2px$ is $p$ variabel. Bewijs: de poollijnen van $P(x_1, y_1)$ t.o.v. alle parabolen van het stelsel gaan door één punt.

421. Het punt P doorloopt de ellips $x^2 + 4y^2 = 12$. De lijn door het brandpunt $(3, 0)$ $\perp$ de raaklijn in P snijdt OP in S. Bepaal de verzameling van S.

422. In de ellips $x^2 + 2y^2 = a^2$ trekt men de koorden met r.c. 1. Bepaal de verzameling van hun middens.

423. Teken de kromme $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$, en bepaal de verg. van de raaklijn in $(1, 1)$. Bereken ook de oppervlakte van de figuur, die ingesloten wordt door de kromme en de assen.

424. Bepaal de puntcirkels van de cirkelbundel $x^2 + y^2 + 4 = 2px$. Bewijs: als een cirkelbundel geen reële basispunten heeft, dan bevat de bundel twee puntcirkels.

425. Bepaal de pool A van de lijn $y = mx + 4$ t.o.v. de cirkel $x^2 + y^2 = 2$. Bepaal de verzameling van A, als $m$ variabel is.

# INHOUD

HOOFDSTUK

C. J. ALDERS

*Inleiding tot de*

# ANALYTISCHE MEETKUNDE

## ANTWOORDEN

21e – 25e DRUK

P. NOORDHOFF N.V. - 1965 - GRONINGEN

**3.** $(x, -y)$; $(-x, y)$; $(-x, -y)$.
**4.** $\sqrt{17}$; $\sqrt{17}$ en 5.
**5.** $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{10}$, $2\sqrt{5}$.
**6.** $(2^1/_2, 0)$ en $(0, 0)$.
**7.** $(1, \pm 3\sqrt{3})$.
**8.** $(a+b, a)$; $(b, a+b)$; $^1/_2(a+b)$, $^1/_2(a+b)$.
**9.** $(3, 2)$ $(1, 1)$ en $(2, -1)$.
**10.** $(2, ^2/_3)$.
**11.** 5; 5 en $\sqrt{10}$.
**12.** $(0, 2)$.
**13.** $(2, 4)$ en $(0, 3)$.
**14.** $\dfrac{x_1 + mx_2}{m+1}$, $\dfrac{y_1 + my_2}{m+1}$.

---

**26.** $y = x$; $y = -x\sqrt{3}$; $x = -y\sqrt{3}$.
**28.** 2; $-^1/_2$; $1^1/_2$; 0; $a$.
**29.** $y = x - 5$.
**30.** $y = x\sqrt{3} + 5$.
**31.** $y + x\sqrt{3} = 4$.
**32.** $x + y + 1 = 0$.
**33.** $y = 1^1/_2x + 6$.
**34.** $3x + 4y + 6 = 0$.
**35.** $2x + y = 10$.
**36.** $x = 5$.
**37.** $x + 3y = 0$.
**38.** $bx + ay = ab$.
**39.** $x = 4$; $x + 2y = 4$; $y = x + 2$.
**40.** $4y - x = 8$; $5x - 2y = 8$; $2x + y = 8$.
**41.** neen.
**42.** $(6, 8)$ $(2, 4)$ en $(3, 2)$.
**43.** ja.
**45.** $y = 2x + 4$.
**46.** $2x + 3y + 5 = 0$.
**47.** $3y = 4x$.
**48.** $y = -mx - n$; $y = -mx + n$.
**52.** neen; neen.
**61.** 3; $^3/_4$; 2; $^1/_2$.
**62.** $y = -^1/_3x$ en $y = 3x$.
**63.** $y = ^1/_2x$.
**64.** $y = -3x$.
**65.** $bx + ay = 0$.
**66.** $3y - x = 5$.
**67.** $2x + y + 5 = 0$.
**68.** $x + 2y + 8 = 0$.
**69.** $(5, 0)$ en $(5, 1)$.
**70.** $(2, 1)$ en $(1, -3)$.
**73.** $3\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$ en 1.
**74.** 4, $\sqrt{5}$ en $\sqrt{5}$
**75.** $\sqrt{2}$ en 2.
**76.** $(4, 2)$ en $(-1, 7)$.

---

**77.** $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$.
**78.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$.
**79.** $(x-3)^2 + y^2 = 9$.
**80.** $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$.
**81.** $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$.
**82.** $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$.
**83.** $(0, 3)$ en $r = 3$.
**84.** $(-2, 0)$ en $r = 2$.
**85.** $(2, -1)$ en $r = \sqrt{5}$.
**86.** $(-3, 1)$ en $r = 5$.
**87.** $(0, 0)$ $(0, 6)$ en $(4, 0)$.
**88.** Binnen, buiten, op.
**89.** $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$; $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$. $x^2 + y^2 + ax + by = 0$.
**90.** $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ of $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.
**91.** $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$. $(x-12)^2 + (y+5)^2 = 25$.
**92.** $(x-5)^2 + (y-10)^2 = 25$ of $(x-5)^2+(y-2)^2=25$.
**93.** $x^2 + (y-3)^2 = 9$.
**95.** $(1, 3)$ en $(-3, -1)$.
**96.** $(4, -4)$ en $(-2, 2)$.
**97.** $y = 2x \pm 5$.
**98.** $4y = 3x \pm 15$.
**99.** $y + x\sqrt{3} = \pm 8$.
**100.** $(\pm 2\sqrt{3}, \pm 2)$.

**102.** $3x + 4y = 25$ en
$3y = 4x + 25$.
**103.** $x = a\sqrt{2}$ en $x - y = 2a$.
**104.** $2x + 3y = 14$ of $-12$.
**105.** $y = -2x$ en $y = 2x + 2$.
**106.** $5x + y = 16$ en
$2y = x + 8$.
**107.** $y = {}^1/_3 r$ en $x = -r$.
**108.** $x + 2y = 6$.
**109.** $2y - 3x = 7$.
**113.** $(1, 1)$.
**114.** $3y = 4x$.
**115.** $x - 2y = 1$.
**116.** $x = a$ en $4y - 3x = 5a$.
**117.** $4x + 3y = 27$ en $x = 0$.
**118.** $y = x - 9$ en $y = x + 1$.
**119.** $(x - 2a)^2 + (y - a)^2 = a^2$;
$(x - a)^2 + (y + 2a)^2 = 4a^2$.
**120.** $x^2 + y^2 - 8y + 8 = 2p(x - y)$.
**121.** $(3, \pm 2)$.
**122.** geen.
**123.** $(3, 1)$.
**125.** $x^2 + y^2 = 3x + 4y$ en
$x^2 + y^2 = 9x + 12y - 50$.
**126.** $x^2 + y^2 = 8x + 4y - 15$.
**127.** $x^2 + (y - 9)^2 = 40$.
**128.** $(x \pm 5)^2 + y^2 = 9$.
**129.** 1.
**130.** $\sqrt{5}$.
**132.** $(x - 3)^2 + (y - p)^2 = p^2$.
**133.** $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$
en $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 10$
**135.** 0 en $-2$.
**136.** 1 en 4.
**137.** $(2, 0)$.
**138.** $(2, 4)$.
**139.** $x^2 + y^2 = r^2 + k^2$.
**141.** $(4, 2)$ en $(b, a)$.
**142.** $y = 3x - 3$ en $3x + y = 9$.
**143.** $3y = x - 2$ en
$3x + y = 6$.
**144.** $(-2, -2)$ en $(3, 3)$.
**145.** $y = 3x + 7$ en
$x + 3y = 1$.
**146.** $2y = 3x + 4$.
**147.** $x = 3$ en $4y = 3x - 21$.
**148.** $x^2 + y^2 = 8x + 6y$.
**149.** $x^2 + y^2 = 4x + 4y - 4$.
**150.** $(3, 6)$ en $(-1, -2)$.
**151.** $y = \pm 2x - 5$.
**154.** $y = x + 1$ en
$2y = x + 2$.
**156.** $45°$.
**157.** $(1, 0)$ en $(4, 0)$.
**158.** $2x + y = 8$.
**160.** 14.
**161.** $(10, 6)$.
**162.** $(\pm 2, \pm 4)$.
**163.** $x - y\sqrt{3} = \pm 4$.
**164.** $x + 3y = 10$ en
$y = 3x - 10$; $(4, 2)$.
**165.** $(4, -2)$ en $(6, -2)$
**168.** $2x + y = \pm 10$.
**169.** $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 10$.
**171.** $x^2 + y^2 = 4(x + y)$.
**172.** $(-a, \pm a\sqrt{3})$.
**173.** $(1^1/_2, -2)$.
**174.** $x^2 + y^2 = 6$.
**176.** $x^2 + y^2 = 4ax$.
**178.** $x^2 + y^2 = a^2$.
**179.** $4x = a$.
**182.** $x^2 = 4y$.
**183.** $x = 1$ en $y = 3x$.
**184.** $x^2 + y^2 - ax = 2a^2$.
**185.** $y^2 = 4x - 4$; de machtlijn.
**186.** $2ax = a^2 + r^2$.
**187.** $y \pm x = 1$.
**188.** $6x + 2y = 7$; $6y - 2x = 7$.
**189.** $y = x$ en $y = 2x$.
**190.** $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.
**191.** $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.
**192.** $y = 2x$.
**193.** $x^2 + y^2 = a^2$;
$x^2 + y^2 = {}^4/_9 a^2$.
**194.** $x + 2y = 2$.
**195.** $(2x - p)^2 + 4y^2 = r^2$.
**196.** $x = a + b$.
**197.** $x^2 + y^2 = {}^1/_2 ax$.
**198.** $y^2 = 6x - 5$.
**199.** $x = -6$.



**200.** $x^2 + y^2 = ax$.
**201.** $x^2 + y^2 = a(x + y)$.
**202.** $x^2 + y^2 = a^2$.
**203.** $x^2 = a(y - a)$.
**204.** $x = 2$.
**205.** $x^2 + y^2 = {}^1/_2 r^2$.
**206.** $y = x$ en $xy = 0$.
**207.** $x = {}^1/_3 a$; $x^2 + y^2 = a^2$.
**208.** $y = 0$ en $x^2 + y^2 = 2ax$.
**209.** $(x - 2)^2 + (y - a)^2 = a^2$;
$x^2 + y^2 = 4$.
**210.** $x = k^2 : 2a$.
**211.** $y^2 = 12x$.
**212.** $y^2 = 8(x - 2)$.
**213.** $x^2 = 8y$.
**214.** $y^2 = 18x + 9$ en $y^2 = 9 - 2x$.
**215.** $(y - 2)^2 = 8(x - 1)$.
**216.** $y = 2$ en $(1, 2)$.
**217.** $y = 0$ en $(1^1/_2, 0)$.
**218.** $y = 1$ en $(1, 1)$.
**219.** $x = 0$ en $(0, {}^1/_2)$.
**220.** $x = 2$ en $(2, -4)$.
**221.** $x = 1$ en $(1, -1^1/_2)$.
**222.** $y^2 = 2p(x - a)$;
$(y - 2)^2 = 2p(x - a)$.
**223.** $(5, 2)$ en $x = 3$.
**225.** $y = 2x + {}^1/_2$.
**226.** $y = x - {}^1/_2$.
**227.** $y = x\sqrt{3} - 3$.
**228.** $y = (x - 1)\sqrt{3}$.
**229.** $y = {}^1/_2 x + 2$ en
$2x + y = 12$.
**230.** $4x = y + 8$ en
$x + 4y = 36$.
**231.** $x + y = 1$ en $y = x - 5$.
**232.** $y = x + 3$ en $x + y = 3$.
**233.** $x(x^2 + y^2) + 2y^2 = 0$.
**235.** $x = -{}^1/_2 p$.
**236.** $(x - 4)^2 = 4(y - 1)$.
**237.** $x = -2$.
**238.** $2y = x + 4$.
**239.** $y = -4$.
**240.** $x + y = -2$.
**241.** $x + y = -3$.
**242.** $x = -4$.
**243.** $x = -5$.
**244.** $x + 6y = 2$.
**245.** $y = \pm x$.
**248.** $x^2 + y^2 = 6x - 1$.
**249.** $\text{tg}\ \varphi = {}^3/_4$.
**250.** neen.
**251.** $\text{tg}\ \varphi = 3$.
**252.** $y = 2x - 1$.
**253.** $x = -p$; $y = p$.
**254.** $y^2 = p(x - {}^1/_2 p)$.
**256.** $x^2 + y^2 = px$.
**257.** $4x + 2y = -1$. $(\frac{1}{a}, \frac{p}{a})$ $y = px$
**258.** $x = -3p$.
**260.** $x^2 + y^2 = 3x - 2$.
**261.** $x^2 + 5y^2 = 5$.
**262.** $3x^2 + 4y^2 = 36$.
**263.** $x^2 + 4y^2 = 12$.
**264.** $(x - 2)^2 + 5(y - 1)^2 = 9$.
**265.** $(x - 4)^2 + 4(y - 2)^2 = 16$.
**266.** $b^2x^2 + a^2(y - b)^2 = a^2b^2$.
**267.** $b^2(x - 3)^2 + 4y^2 = 4b^2$.
**268.** $(3, 0)$; 5 en $2^1/_2$; 10 en 5
$(1, -1)$; $\sqrt{6}$ en 2. $2\sqrt{6}$ en 4
**270.** $2b^2 : a$.
**271.** $y = x \pm 2\sqrt{3}$.
**272.** $y = 2x \pm 9$.
**273.** $y = \pm 2x + 7$.
**274.** $y = \pm x$.
**275.** $x + 2y = 7$ en
$2x - y = 4$.
**276.** $x - y = 3$ en
$x + y + 1 = 0$.
**277.** $x + 3y = 14$ en
$y = 3x - 2$.
**278.** $x + 3y = 2$.
**279.** $2x + y = 2$.
**280.** $3y = x + 10$.
**281.** $x = 2$.
**282.** $(1, 5)$.
**284.** $60°$.
**285.** $y + 3 = \pm x$.
**287.** $y = \pm x \pm 2\sqrt{5}$.
**288.** $(0, 2)$.
**290.** 1,875.
**291.** $(x - 2)^2 + (y - p)^2 = p^2$.

**293.** $2x^2 + 2y^2 = 3ax - a^2$.
**294.** $x^2 + y^2 = ax$.
**295.** $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$.
**296.** $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.
**298.** $y = 2x$.
**299.** $3a^2 = 2r^2$; $x = 2a$.
**300.** $\pi a^3 b : (a^2 + b^2)$.
**301.** $\sqrt{6}$; $^1/_2\sqrt{6}$.
**302.** $x^2 - y^2 = 9$.
**303.** $3x^2 - y^2 = 12$.
**304.** $20x^2 - 5y^2 = 16$.
**305.** $x^2 - 4y^2 = 4$.
**306.** 2.
**307.** $3x - y = 7$ en
$x + 3y = 9$.
**308.** $2x + 3y = 6$.
en $2y - 3x = 4$.
**309.** $bx = a^2$ en $ay = b^2$
**310.** $x - 4y = 4$.
**311.** $x^2 + y^2 = a^2$.
**312.** $y = \pm 2(x - 2)$.
**313.** $^3/_4$.
**314.** $3\sqrt{3}$.
**315.** $\sqrt{2}$.
**316.** $x + 2y = 8$.
**317.** $x_1y + y_1x = 2a^2$.
**321.** $y = x$.
**324.** $y^2 - 4x^2 = 12$. $3y^2 - 12x^2 = 16$
**327.** $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.
**328.** $xy = {}^1/_4a^2$.
**329.** $k^2 > a^2$; $0 < k^2 < a^2$.
**331.** $(x - 2)^2 + 2(y - 3)^2 = 8$.
**332.** $(y - 3)^2 + 4(x + 1) = 0$.
**333.** $(x + 3)^2 - 2y^2 = 5$.
**334.** $(2x - y)^2 = 20(x + 2y)$.
**335.** $\operatorname{tg} 2\varphi = {}^1/_2$.
**336.** $\operatorname{tg} 2\varphi = -2$.
**337.** $x^2 - xy + y^2 = 4x$.
**338.** ellips.
**339.** hyperbool.
**340.** parabool.
**341.** ellips.
**342.** lijnenpaar
**343.** cirkel.
**344.** ellips.
**345.** $x = 3y + 3$ en
$x + y = -2$.
**346.** $2\sqrt{6}$ en $2\sqrt{2}$.
**347.** $(y - x)(x + y - 4) = 12$.
**348.** $y^2 - 4y = 4x - 2$.
**349.** (0, 0).
**350.** $(x + y - 3)$
$(2x - y) = a$.
**351.** $3y = 2x + 6$.
**352.** $x + 2y = 2$.
**353.** $y = x - 2$.
**354.** $x^2 + y^2 = 12x - 4y$.
**355.** $x^2 + y^2 = 6x$.
**356.** $x^2 + y^2 = 6x - 6y - 9$ en
$x^2 + y^2 = 2x - 2y - 1$.
**359.** $x^2 + y^2 + 6x - 16 =$
$= b(2x + y - 4)$.
**361.** neen.
**362.** $(2, -2)$ en $(2, -2)$.
**363.** $(1, 2)$ en $(-1, -2)$. $y = -\frac{1}{2}x$
**364.** $(x - a)^2 + y^2 = \frac{1}{2}a^2$.
**365.** $a = b = 1$.
**367.** $5y^2 = 8x - 6$ en
$5x^2 + 5y^2 = 12x - 6$.
**368.** $5x^2 + 5y^2 = 12x - 6$.
**369.** $5x^2 = 16$; $5y^2 = 16$ en
$y = \pm x$.
**370.** $(x \pm y)^2 = 9$
**371.** $2xy + 9x - 2y = 7$.
**372.** $(x - y)^2 = 16(x + y - 3)$.
**373.** $x^2 - y^2 + 8x + 7 = 0$.
**374.** $9x^2 + 3xy + 4y^2 =$
$= 12(3x + 2y)$.
**375.** $3x^2 + 3y^2 = 6x + 10y - 6$.
**376.** (3, 3).
**378.** $a^2 + b^2 = 6ab$. 379: $x = -p$
**379.** $x = \pm y\sqrt{2}$. (381?)
**381.** $y = \pm 2x$.
**382.** $x^2 = c^2 \pm cy$.
**383.** $x^2 - y^2 = 1$.
**384.** $y^2 = -2px$.
**386.** $x^2 + 4y^2 = 8$.
**387.** $py = 4$.



**388.** $y = 2x$.
**389.** $p = 2a$; $8a^2$.
**390.** $y^2 = 4ax$ en $y = 0$.
**391.** $2x^2 + y^2 = 2x$.
**392.** $x^2 + 4y^2 = 12$.
**394.** $4a^2x^2 + 4b^2y^2 = c^4$.
**395.** $x = 3$.
**396.** $x^2 + y^2 = px$
**397.** $y = -x^2 - x$.
**398.** $(x - 2)^2 + 2(y - 2)^2 = 8$.
**399.** $y(x^2 + y^2) + 2x^2 = 0$.
**400.** $60°$.
**401.** $xy - y^2 = 16 - 4x$.
**402.** $x(3x - 4y) = 0$.
**403.** $\operatorname{tg} \varphi = 3$.
**404.** $2ab$.
**405.** $x^2 - 2y^2 = 3x$.
**406.** $9p^2 = 16r^2$.
**407.** $x = 0$ en $y = x$; $y = 2x$.
**408.** $x^2 + 2y^2 = 4y$.
**410.** $(x - a)^2 + (y - p)^2 = p^2$.
**412.** $r^2 = 2a^2$.
**414.** $x = -2p$.
**415.** $(x - a)^2 + y^2 = 2ap - p^2$.
**416.** $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.
**417.** $y^2 = 4x + 4$.
**418.** $x^2 + y^2 = 2x + 1$.
**419.** $y = \pm {}^1/_2x$.
**420.** $(-x_1, 0)$.
**421.** $x = 4$.
**422.** $x + 2y = 0$.
**423.** $x + y = 2$; $^8/_3$.
**424.** $(\pm 2, 0)$.
**425.** $y = 2$.

**293.** $2x^2 + 2y^2 = 3ax - a^2$.
**294.** $x^2 + y^2 = ax$.
**295.** $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$.
**296.** $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.
**298.** $y = 2x$.
**299.** $3a^2 = 2r^2$; $x = 2a$.
**300.** $\pi a^3 b : (a^2 + b^2)$.
**301.** $\sqrt{6}$; $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.
**302.** $x^2 - y^2 = 9$.
**303.** $3x^2 - y^2 = 12$.
**304.** $20x^2 - 5y^2 = 16$.
**305.** $x^2 - 4y^2 = 4$.
**306.** 2.
**307.** $3x - y = 7$ en
$x + 3y = 9$.
**308.** $2x + 3y = 6$.
en $2y - 3x = 4$.
**309.** $bx = a^2$ en $ay = b^2$.
**310.** $x - 4y = 4$.
**311.** $x^2 + y^2 = a^2$.
**312.** $y = \pm 2(x - 2)$.
**313.** $^3/_4$.
**314.** $3\sqrt{3}$.
**315.** $\sqrt{2}$.
**316.** $x + 2y = 8$.
**317.** $x_1y + y_1x = 2a^2$.
**321.** $y = x$.
→ **324.** $\cancel{y^2 - 4x^2} = 12$. $5y^2 - 12x^2 = 16$
**327.** $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.
**328.** $xy = {}^1/_4 a^2$.
**329.** $k^2 > a^2$; $0 < k^2 < a^2$.
**331.** $(x - 2)^2 + 2(y - 3)^2 = 8$.
**332.** $(y - 3)^2 + 4(x + 1) = 0$.
**333.** $(x + 3)^2 - 2y^2 = 5$.
**334.** $(2x - y)^2 = 20(x + 2y)$.
**335.** $\operatorname{tg} 2\varphi = {}^1/_2$.
**336.** $\operatorname{tg} 2\varphi = -2$.
**337.** $x^2 - xy + y^2 = 4x$.
**338.** ellips.
**339.** hyperbool.
**340.** parabool.
**341.** ellips.
**342.** lijnenpaar
**343.** cirkel.
**344.** ellips.
**345.** $x = 3y + 3$ en
$x + y = -2$.
**346.** $2\sqrt{6}$ en $2\sqrt{2}$.
**347.** $(y - x)(x + y - 4) = 12$.
**348.** $y^2 - 4y = 4x - 2$.
**349.** $(0, 0)$.
**350.** $(x + y - 3)$
$(2x - y) = a$.
**351.** $3y = 2x + 6$.
**352.** $x + 2y = 2$.
**353.** $y = x - 2$.
**354.** $x^2 + y^2 = 12x - 4y$.
**355.** $x^2 + y^2 = 6x$.
**356.** $x^2 + y^2 = 6x - 6y - 9$ en
$x^2 + y^2 = 2x - 2y - 1$.
**359.** $x^2 + y^2 + 6x - 16 =$
$= b(2x + y - 4)$.
**361.** neen.
**362.** $(2, -2)$ en $(2, -2)$.
**363.** $(1, 2)$ en $(-1, -2)$. $y = -\frac{1}{2}x$
**364.** $(x - a)^2 + y^2 = \frac{1}{2}a^2$.
**365.** $a = b = 1$.
**367.** $5y^2 = 8x - 6$ en
$5x^2 + 5y^2 = 12x - 6$.
**368.** $5x^2 + 5y^2 = 12x - 6$.
**369.** $5x^2 = 16$; $5y^2 = 16$ en
$y = \pm x$.
**370.** $(x \pm y)^2 = 9$
**371.** $2xy + 9x - 2y = 7$.
**372.** $(x - y)^2 = 16(x + y - 3)$.
**373.** $x^2 - y^2 + 8x + 7 = 0$.
**374.** $9x^2 + 3xy + 4y^2 =$
$= 12(3x + 2y)$.
**375.** $3x^2 + 3y^2 = 6x + 10y - 6$.
**376.** $(3, 3)$.
**378.** $a^2 + b^2 = 6ab$. 379: $x = -$!?
**379.** $x = \pm y\sqrt{2}$. (381!)
**381.** $y = \pm 2x$.
**382.** $x^2 = c^2 \pm cy$.
**383.** $x^2 - y^2 = 1$.
**384.** $y^2 = -2px$.
**386.** $x^2 + 4y^2 = 8$.
**387.** $py = 4$.



**388.** $y = 2x$.
**389.** $p = 2a$; $8a^2$.
**390.** $y^2 = 4ax$ en $y = 0$.
**391.** $2x^2 + y^2 = 2x$.
**392.** $x^2 + 4y^2 = 12$.
**394.** $4a^2x^2 + 4b^2y^2 = c^4$.
**395.** $x = 3$.
**396.** $x^2 + y^2 = px$
**397.** $y = -x^2 - x$.
**398.** $(x - 2)^2 + 2(y - 2)^2 = 8$.
**399.** $y(x^2 + y^2) + 2x^2 = 0$.
**400.** $60°$.
**401.** $xy - y^2 = 16 - 4x$.
**402.** $x(3x - 4y) = 0$.
**403.** $\operatorname{tg} \varphi = 3$.
**404.** $2ab$.
**405.** $x^2 - 2y^2 = 3x$.
**406.** $9p^2 = 16r^2$.
**407.** $x = 0$ en $y = x$; $y = 2x$.
**408.** $x^2 + 2y^2 = 4y$.
**410.** $(x - a)^2 + (y - p)^2 = p^2$.
**412.** $r^2 = 2a^2$.
**414.** $x = -2p$.
**415.** $(x - a)^2 + y^2 = 2ap - p^2$.
**416.** $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.
**417.** $y^2 = 4x + 4$.
**418.** $x^2 + y^2 = 2x + 1$.
**419.** $y = \pm {}^1/_2 x$.
**420.** $(-x_1, 0)$.
**421.** $x = 4$.
**422.** $x + 2y = 0$.
**423.** $x + y = 2$; $^8/_3$.
**424.** $(\pm 2, 0)$.
**425.** $y = 2$.