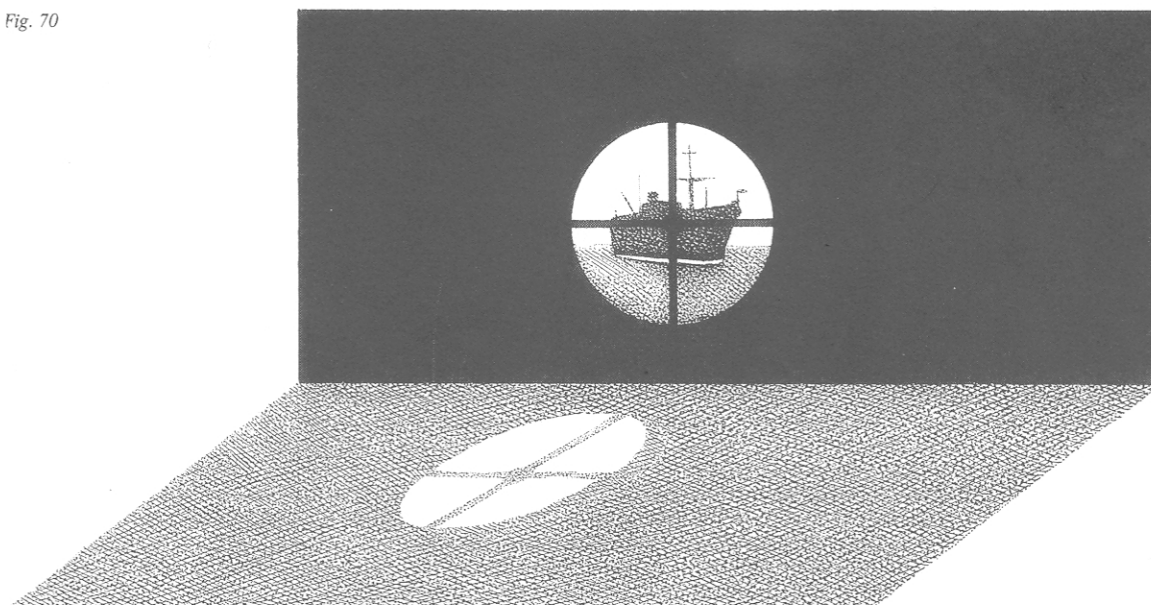


# CILINDER- EN KEGELSNEDEDEN

## 7.1 Cilindersneden

- 65 De schaduw van de 'patrijspoot' op de grond is een zgn. ellips (fig. 70). De hoogte van de zon is  $30^\circ$ , dat betekent dat de zonnestralen de aarde treffen onder een hoek van  $30^\circ$ .
- a Hoe verhouden zich de lengten van de beide tralies in het schaduwbeeld?
- b De schaduw van de patrijspoot kan ook een cirkel zijn!  
Hoe hoog moet de zon dan staan?

Fig. 70



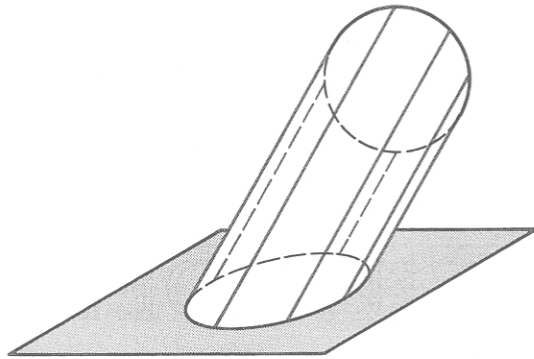


Fig. 71

De zonnestralen in opgave 65 vormen een 'scheve cilinder'.

De schaduwelips is op te vatten als de snijkromme van die cilinder met een plat vlak (de vloer waarop de schaduw valt), zie fig. 71.

Omdat dit meetkundig gezien eenvoudiger is, richten we voorlopig onze aandacht op doorsneden van 'rechte' cilinders met vlakken.

### Opgave

- 66 Evenals een plat vlak is een cilindervlak in principe onbegrensd (heeft noch bodem, noch deksel).

Het cilindervlak  $\gamma$  staat loodrecht op het vlak  $\alpha$  (fig. 72)a.

a Beschrijf hoe de snijfiguur van  $\gamma$  en  $\alpha$  verandert als de cilinder langzaam gekanteld wordt, waarbij alleen het punt  $O$  op zijn plaats blijft.

b Hoeveel graden moet de cilinder worden gekanteld om een doorsnede van de vorm volgens fig. 72b te krijgen?

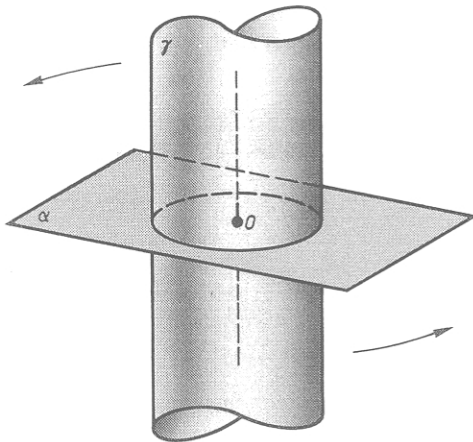


Fig. 72a

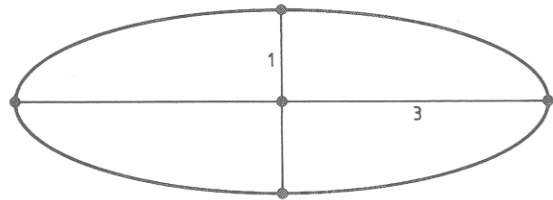


Fig. 72b

We letten nu niet op de twee 'randgevallen' waarbij  $\alpha$  loodrecht op de as staat of waarbij de as in  $\alpha$  ligt.

Het vlak  $\alpha$  dat nu 'scheef' staat t.o.v. de cilinderas, is als het ware een tussenschot in de cilinderbuis.

Je kunt je nu voorstellen dat twee bollen (die precies in de cilinder passen) van twee kanten door de buis rollen tot zij tegen het tussenschot rusten.

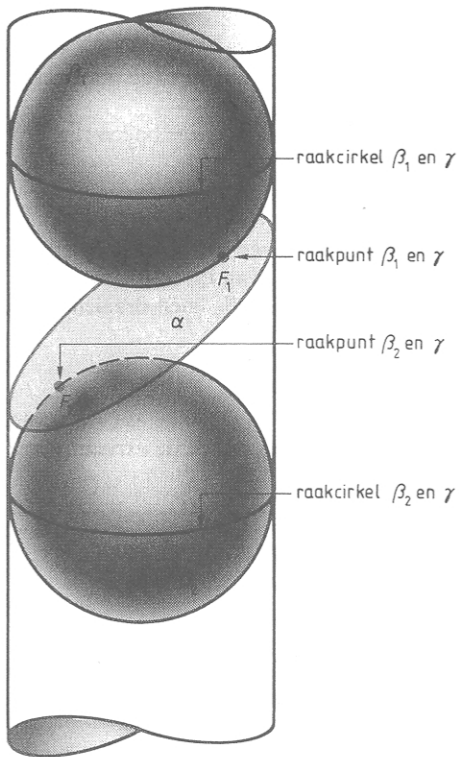


Fig. 73

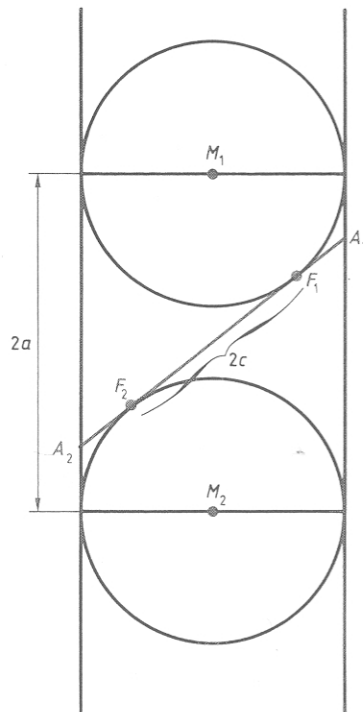


Fig. 74

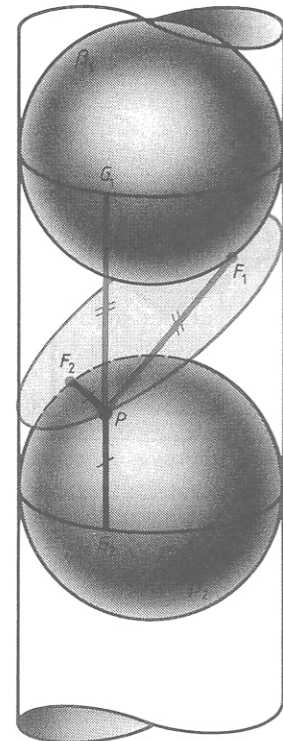


Fig. 75

Wiskundig gezegd: je kunt twee bollen  $\beta_1$  en  $\beta_2$  aanbrengen die dezelfde straal hebben als de cilinder, de cilinder 'inwendig' raken en bovendien raken aan het vlak  $\alpha$  (fig. 73).

In fig. 74 zie je een lengtedoorsnede van de cilinder met de beide bollen. De afstand tussen de twee raakcirkels noemen we  $2a$ , de afstand tussen de raakpunten  $F_1$  en  $F_2$  heet  $2c$ .

$P$  is een willekeurig punt op de snijkromme van  $\alpha$  en de cilinder.

In fig. 75 zie je twee raaklijnen getekend uit  $P$  aan de bol  $\beta_1$ , namelijk de lijn  $PF_1$  en de lijn  $PG_1$  (parallel met de cilinderas).

Evenzo zie je de raaklijnstukken  $PF_2$  en  $PG_2$  aan  $\beta_2$ .

### Opgave

- 67  $PF_1 + PF_2 = 2a$ . Verklaar!

Hiermee is de stelling van Dandelin verklaard.

Voor elk punt van de snijkromme van het vlak  $\alpha$  en de cilinder  $\gamma$  is de som van de afstanden tot  $F_1$  en  $F_2$  constant, namelijk  $2a$ .

Bovengenoemde eigenschap van de snijkromme wordt vaak gebruikt om een ellips te definiëren:

Een ellips is de verzameling van punten in een plat vlak waarvan de afstanden tot twee gegeven punten  $F_1$  en  $F_2$  een constante som hebben.

De punten  $F_1$  en  $F_2$  worden, om redenen waar we in paragraaf 7.2 op in zullen gaan, de *brandpunten* van de ellips genoemd.

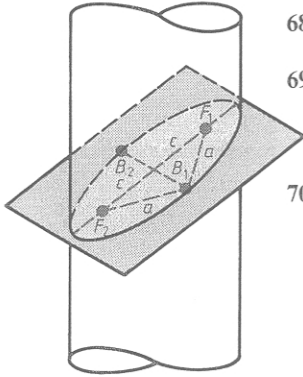


Fig. 76

## Opgaven

- 68 Hoe kun je een ellips tekenen met behulp van een touwtje en twee punaises?
- 69 Bekijk nog eens de lengtedoorsnede van de cilinder met de twee bollen (fig. 71). Het lijnstuk  $A_1A_2$  wordt de *lange as* van de ellips genoemd. Toon aan:  $A_1A_2 = 2a$ .
- 70 Er zijn twee punten ( $B_1$  en  $B_2$ ) op de ellips die even ver van  $F_1$  en  $F_2$  (afstand  $a$ ) afliggen (fig. 76). Het lijnstuk  $B_1B_2$  heet de *korte as* van de ellips. Hoe verandert de ellips van vorm als we  $\alpha$  om de lijn  $B_1B_2$  laten draaien? Wat verandert er dan aan de ligging van de punten  $F_1$  en  $F_2$ ?

## Opmerkingen

- 1 De verhouding tussen de brandpuntsafstand ( $= 2c$ ) en de lange as ( $= 2a$ ) van een ellips is een maat voor de vorm. Die verhouding wordt de *excentriciteit*  $e$  van de ellips genoemd.

Er geldt:

$$e = \frac{c}{a} \text{ en } 0 < e < 1$$

Hoe dichter  $e$  bij 0 ligt, hoe meer de ellips op een cirkel lijkt.

Hoe dichter  $e$  bij 1 ligt, hoe langwerpiger de ellips is.

- 2 De lengte van de halve korte as van een ellips noemen we  $b$ . Omdat de eindpunten van de korte as ( $B_1$  en  $B_2$ ) op een afstand  $a$  van  $F_1$  en  $F_2$  afliggen kan bij een ellips met gegeven assen gemakkelijk de plaats van de brandpunten worden geconstrueerd en/of berekend (zie fig. 77).
- 3 De stelling van Dandelin spreekt zich slechts uit over de snijkromme van een 'rechte' cilinder en een vlak dat scheef staat t.o.v. de cilinders. Voor een scheve cilinder, zoals de bundel zonnestralen door de patrijspoort, geldt ook dat de doorsnede van een vlak met de cilinder óf een cirkel óf een ellips is óf bestaat uit twee evenwijdige lijnen. In paragraaf 7.2 volgt het bewijs hiervan.

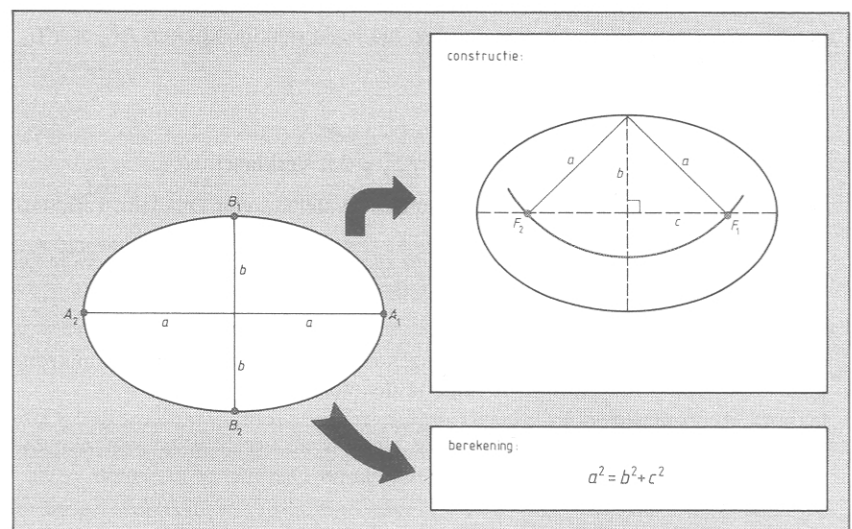


Fig. 77



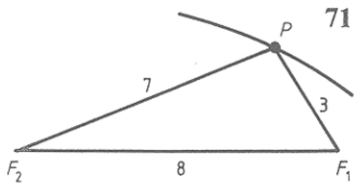


Fig. 78

- 71 Van een punt  $P$  is gegeven dat het op een ellips ligt met brandpunten  $F_1$  en  $F_2$  en dat  $PF_1 = 7$  en  $PF_2 = 3$  (zie fig. 78). Bovendien geldt:  $F_1F_2 = 8$ .
- Hoe lang zijn de assen van de ellips?
  - Hoe groot is de excentriciteit?
- 72 Een blikje sap heeft een hoogte van 12 cm en een diameter van 5 cm. Als het blikje half vol is dan kan, al naar gelang de stand, de vloeistofspiegel vier vormen aannemen: cirkel, ellips, 'afgekapte' ellips en rechthoek. Hoe moet je het blik houden om een (niet afgekapte) ellips met maximale excentriciteit te krijgen? Hoe groot is die excentriciteit?
- 73 Als de 'mantel' van een bierblikje wordt uitgerold krijg je een rechthoek. Hoe denk je dat de figuur eruit ziet die je krijgt door een scheef afgekapte cilinder (fig. 79) uit te rollen? Controleer je antwoord met de volgende proef: Neem een kaars en rol er een velletje papier omheen; snijdt vervolgens kaars en papier scheef door.

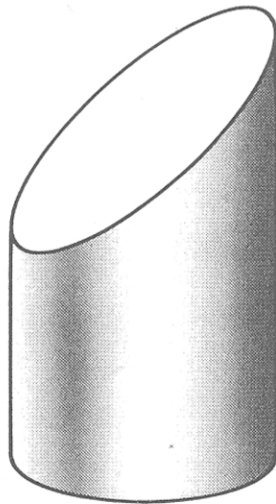


Fig. 79

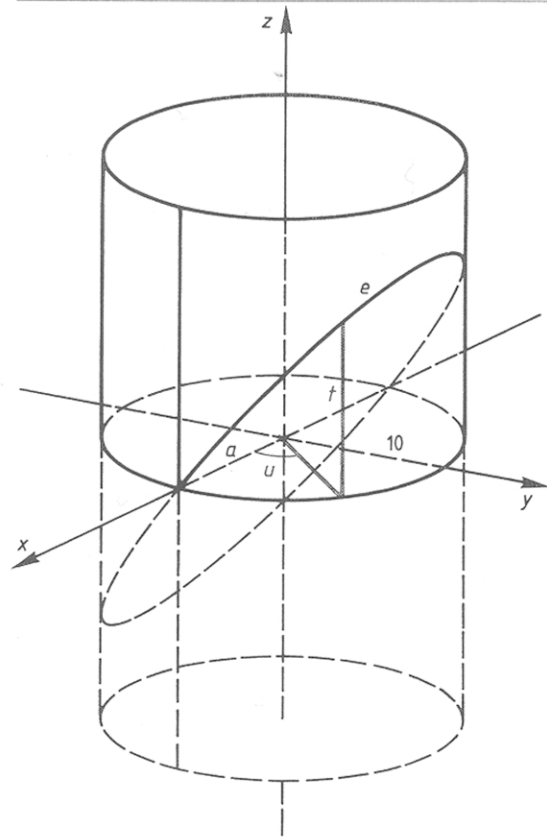


Fig. 80

- 74 De cilinder  $x^2 + y^2 = 100$  wordt gesneden met vlak  $y = z$  (fig. 80).
- Wat is de excentriciteit van de snijkromme  $e$ ?
  - Geef een parametervoorstelling van de cilinder. (parameters  $t$  en  $u$ ).
  - Welke betrekking bestaat er tussen  $t$  en  $u$  voor de punten op de kromme  $e$ ?
  - De cilinder wordt opengeknipt langs de lijn door  $(10, 0, 0)$  parallel met de  $z$ -as en vervolgens uitgerold. Teken de uitslag met een rooster van  $u$ -lijnen ( $u = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \dots, 2\pi$ ) en  $t$ -lijnen ( $t = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 10$ ) en teken in dat rooster de uitgerolde ellips  $e$ .

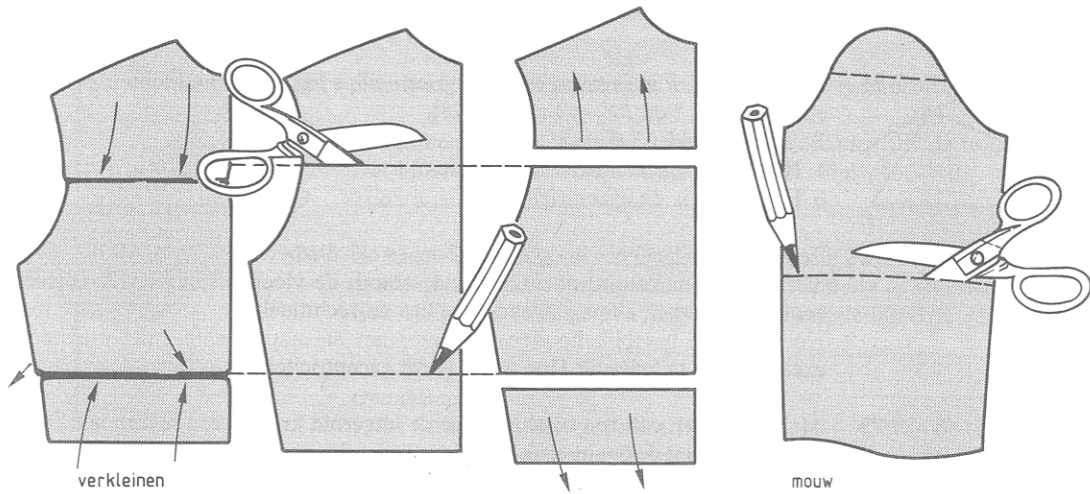


Fig. 81

- 75 Wat heeft het knippatroon van fig. 81 met de beide vorige opgaven te maken?
- 76 Gegeven zijn twee uitslagen van cilinderstukken ( $A$  en  $B$ ) met elliptisch bodem- en dekselgat (fig. 82).  
Hoe liggen die ellipsen t.o.v. elkaar bij  $A$ ? En bij  $B$ ?

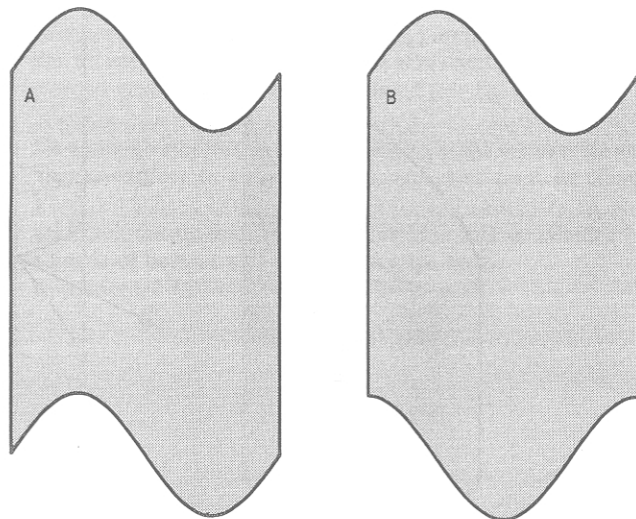


Fig. 82

## 7.2 De ellips nader bekeken

### Opgaven

- 77 Een (rechte) cilinder met straal  $b$  wordt gesneden met een vlak  $\alpha$  (fig. 83a).  $P$  is een punt op de snij-ellips waarvan de assen  $2a$  en  $2b$  zijn.  $Q$  is het voetpunt van de loodlijn uit  $P$  op de lijn  $A_1A_2$ .  $OQ = x$  en  $PQ = y$ .  
Toon aan (zie fig. 83b):

$$QD_1 = \frac{b}{a}(a - x) \quad \text{en} \quad QD_2 = \frac{b}{a}(a + x)$$

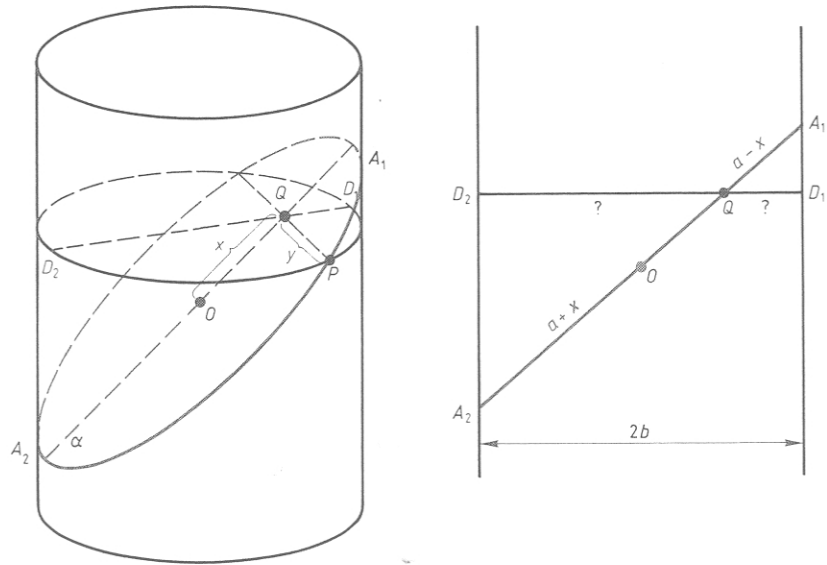


Fig. 83

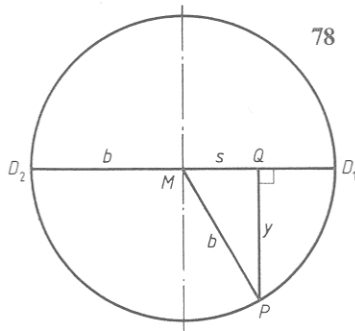


Fig. 84

- 78 De doorsnede van het 'horizontale' vlak door P met de cilinder is de cirkel met middelpunt M en straal b (fig. 84). Druk PQ, QD<sub>1</sub> en QD<sub>2</sub> uit in b en s en bewijs:  $PQ^2 = QD_1 \cdot QD_2$ .

Uit de opgaven 77 en 78 volgt:

$$y^2 = \frac{b}{a}(a-x) \cdot \frac{b}{a}(a+x)$$

ofwel:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \quad (1)$$

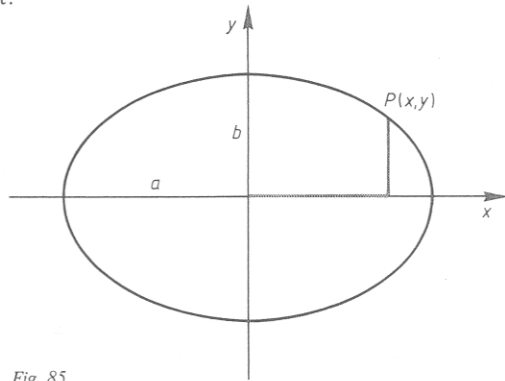


Fig. 85

Hiermee is de vergelijking gevonden van een ellips waarvan lange as en korte as resp. langs x-as en y-as vallen (fig. 85).

Opgave

- 79 Laat zien dat de ellips-vergelijking (1) kan worden herleid tot:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Uit de ellipsvergelijking (1) kan worden afgeleid dat de scheve projectie van een cirkel op een vlak (dat niet parallel is met de projectiestralen) een ellips (of eventueel een cirkel) is.

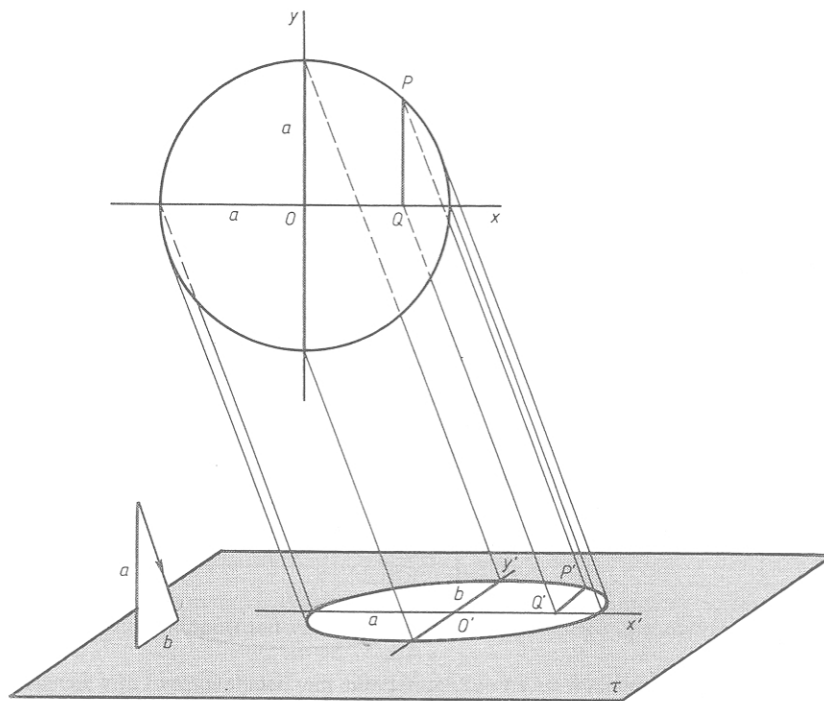


Fig. 86

Kijk naar fig. 86.

Door de projectie worden afstanden loodrecht op vlak  $\tau$  met factor  $\frac{b}{a}$  vermenigvuldigd, terwijl afstanden parallel met  $\tau$  gelijk blijven.

Stel:

$$\begin{aligned} OQ &= x & PQ &= y \\ O'Q' &= x' & P'Q' &= y' \end{aligned}$$

Dan geldt dus:

$$x' = x \text{ en } y' = \frac{b}{a} \cdot y$$

Omdat  $y^2 = a^2 - x^2$  volgt:

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x'^2)$$

En dat komt overeen met vergelijking (1).

Hieruit volgt dat in het geval  $b \neq a$  de projectie van de cirkel inderdaad ellips is.

$$\begin{aligned} OQ &= x & O'Q' &= x \\ PQ &= \sqrt{a^2 - x^2} & P'Q' &= \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

Opgave

- 80 Nogmaals de schaduw van de patrijspoort fig. 70.  
 a Bereken de excentriciteit van de schaduwellips bij een zonnehoogte van  $30^\circ$ .  
 b Doe dit ook voor een zonnehoogte van  $60^\circ$ .

In fig. 87 zijn twee projecties gegeven van een om een middellijn draaiende cirkel in één assenstelsel.

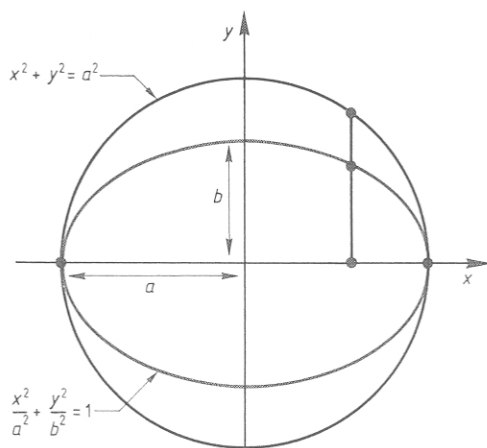


Fig. 87

De ellips is blijkbaar de beeldfiguur van de cirkel bij een verticale vermenigvuldiging vanuit de  $x$ -as.

De vermenigvuldigingsfactor is  $\frac{b}{a}$ .

### Opgave

- 81 a Teken in een  $Oxy$ -stelsel de cirkels  $x^2 + y^2 = 4$  en  $x^2 + y^2 = 25$ .  
 b Teken op de grote cirkel de punten die de cirkel in 12 even grote bogen verdelen, te beginnen bij het punt  $(5, 0)$ .  
 c Vermenigvuldig die 12 punten vanuit de  $x$ -as in verticale richting met factor  $\frac{2}{5}$ . Dit gaat heel handig door zo'n punt met  $O$  te verbinden er vanuit het snijpunt van die straal met de kleine cirkel een horizontaal lijntje te tekenen.  
 d Schets de ellips door de 12 beeldpunten. Welke vergelijking heeft die ellips?

### De raaklijneigenschap van de ellips

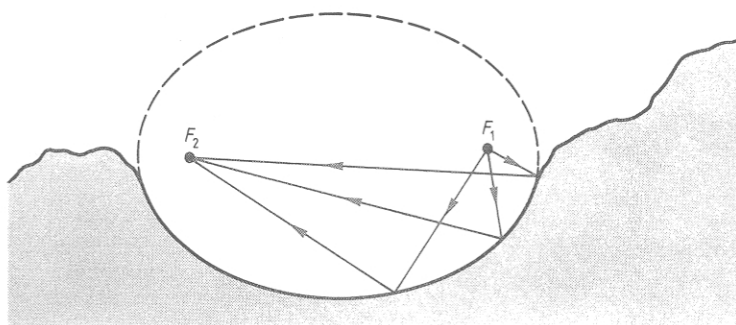
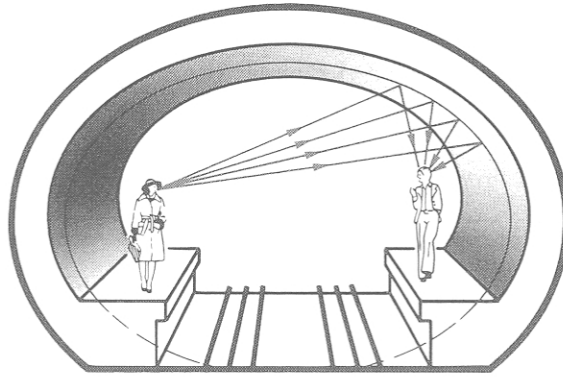


Fig. 88

Sommige duinvalleien worden 'fluisterkommen' genoemd. Is een verticale doorsnee van zo'n vallei bij benadering ellipsvormig (fig. 88), dan is een zwak geluidssignaal voortgebracht vanuit het ene brandpunt ( $F_1$ ) goed hoorbaar in het tweede brandpunt ( $F_2$ ). Zelfs als iemand, met zijn rug naar  $F_2$  gekeerd, fluisterend spreekt, kunnen zijn woorden in  $F_1$  verrassend duidelijk worden verstaan. Een dergelijk verschijnsel kent de Parijse metro waarvan sommige tunnels vrijwel elliptisch een doorsnede zijn en mensen op verschillende perrons zonder stemverheffing een goed gesprek kunnen voeren, mits zij op de goede plaatsen (de brandpunten) staan (fig. 89).

Fig. 89



Deze merkwaardige eigenschap van de ellips gaan we meetkundig verklaren. De volgende vraagstukken leiden naar dat doel.

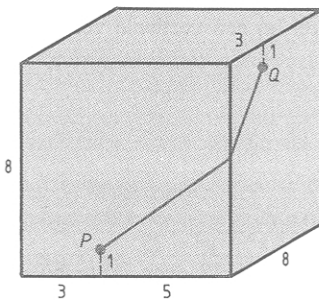


Fig. 90

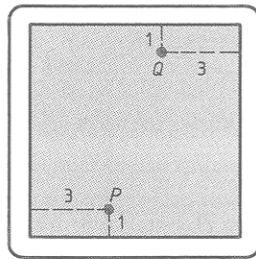


Fig. 91



Fig. 92

### Opgaven

- 82  $P$  ligt in het voorvlak en  $Q$  in het rechter-zijvlak van de kubus met ribbe 8 (fig. 90). Bereken de lengte van de kortste weg van  $P$  naar  $Q$  over de kubus.
- 83 Op een vierkant biljart (zijde 8) liggen ballen in  $P$  en  $Q$  (fig. 91). Een biljarbal wordt (zonder effect) van  $P$  naar  $Q$  gespeeld via de rechter band. Construeer de baan van de bal.
- 84 Gegeven is een lijn  $l$  en twee punten  $A$  en  $B$  (fig. 92). Construeer het punt  $C$  op  $l$  zó dat  $AC$  en  $BC$  gelijke hoeken met  $l$  maken.
- 85 Door een punt  $P$  van de ellips met lange as  $2a$  wordt de bissectrice van  $\angle F_1PF_2$  getekend (fig. 93). De lijn  $l$  staat loodrecht op die bissectrice en maakt dus gelijke hoeken met  $PF_1$  en  $PF_2$ . Toon aan: als  $Q$  een punt van  $l$  is dat niet samenvalt met  $P$ , dan geldt:  $QF_1 + QF_2 > 2a$ .

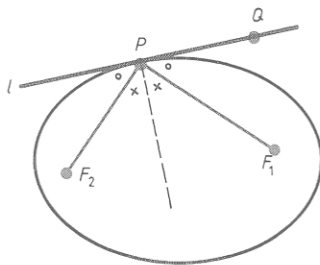


Fig. 93

### Gevolgen/opmerkingen

- Als  $P$  een punt van een ellips is met brandpunten  $F_1$  en  $F_2$ , dan is de loodlijn  $l$  van  $P$  op de bissectrice van  $\angle F_1PF_2$  een raaklijn aan de ellips. Immers:  $l$  heeft slechts één punt  $P$  met de ellips gemeenschappelijk. Alle andere punten van  $l$  liggen buiten de ellips (zie opgave 85).
- De bissectrice van  $\angle F_1PF_2$ , die loodrecht op de raaklijn in  $P$  staat, wordt om die reden de *normaal* van de ellips in  $P$  genoemd.
- Alle stralen vanuit  $F_1$ , die via de ellips worden teruggekaatst volgens het principe 'hoek van inval' = 'hoek van terugkaatsing', worden teruggekaatst door  $F_2$  (fig. 94).

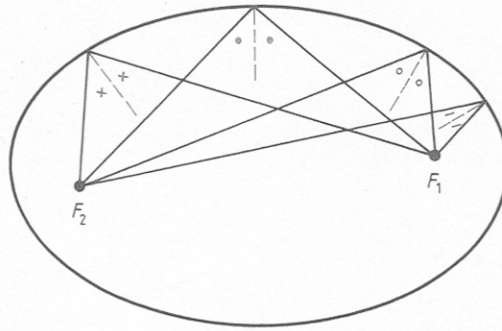
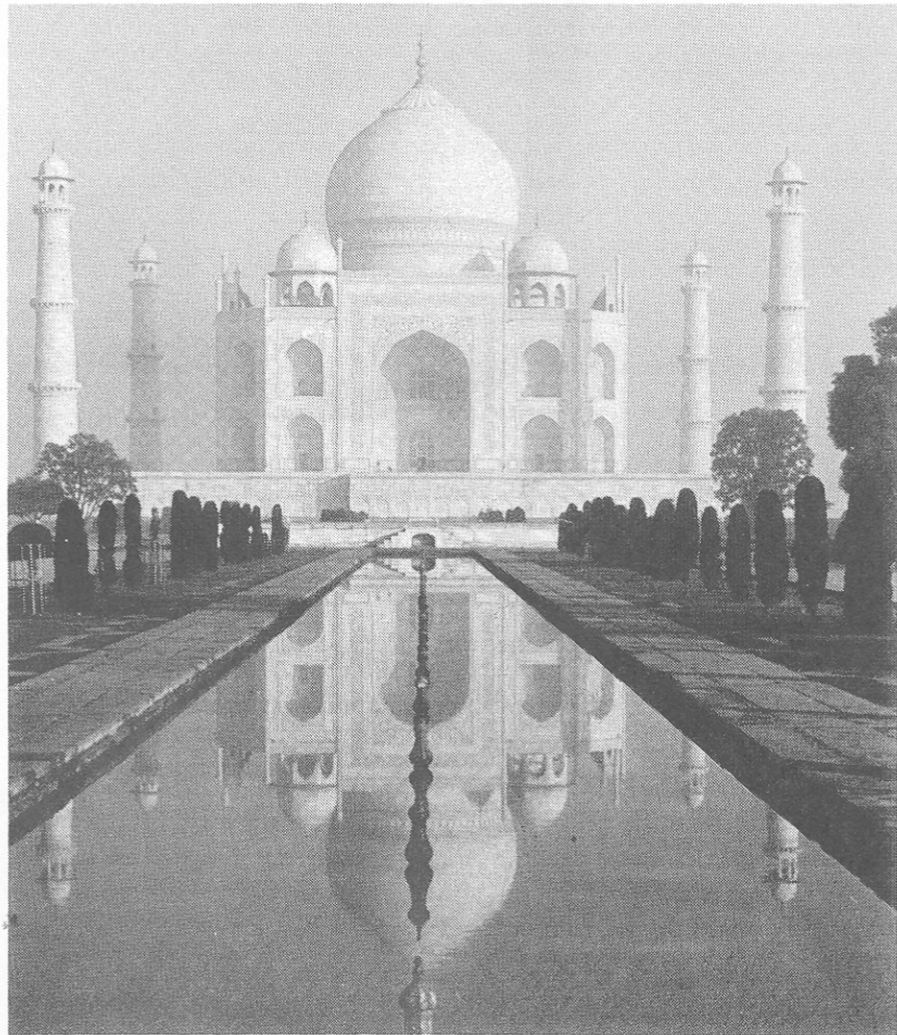


Fig. 94

## Opgave

- 86 De normalen van een cirkel gaan alle door het middelpunt van die cirkel. Hoe zit dat bij een ellips?



In de Tadj Mahal in India is een zgn. fluisterzaal te vinden met een vloer in de vorm van een ellips. Bruidsparen die de Tadj Mahal in het verleden bezochten werden in de fluisterzaal verdeeld over de beide brandpunten. De bruidegom beloofde op zachte fluisterton zijn bruid eeuwige trouw. Zijn woorden werden alleen door de bruid (op een afstand van meer dan 15 meter) gehoord.



## 7.3 Kegelsneden

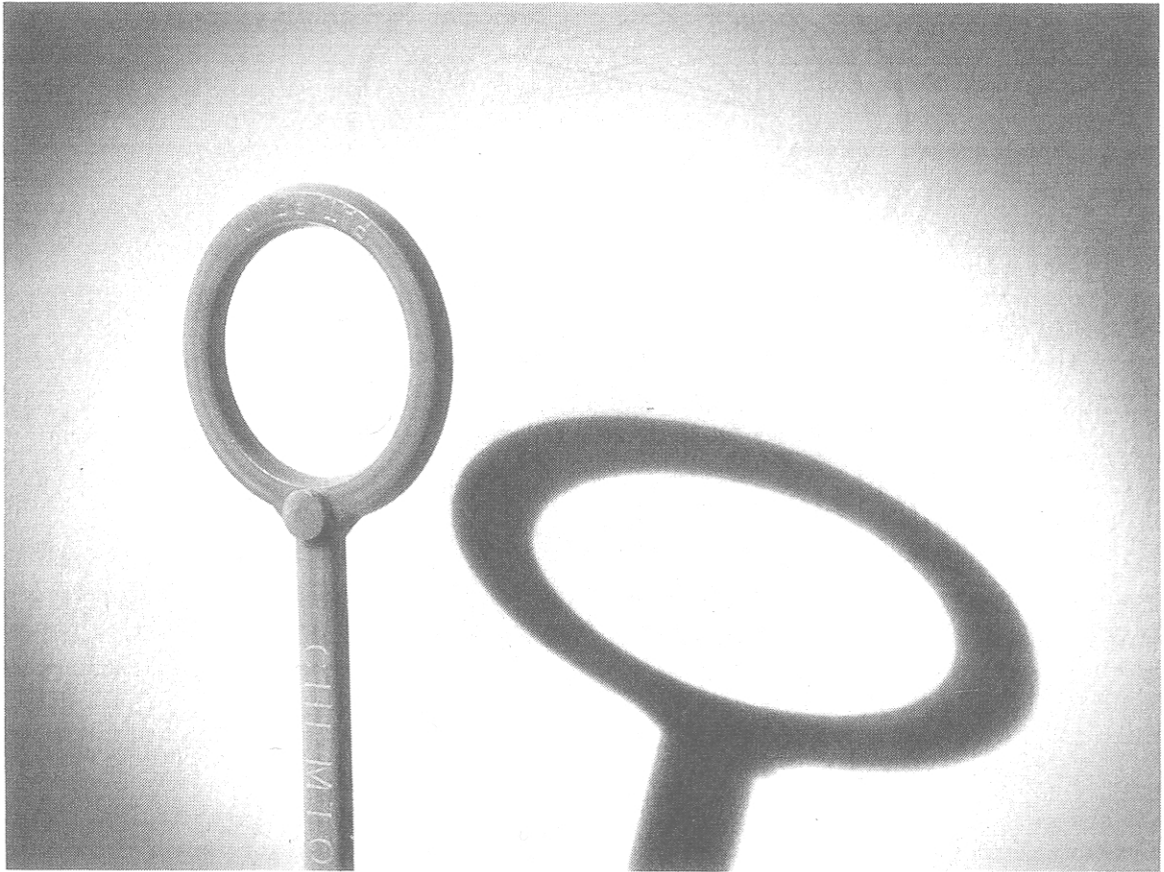


Fig. 95

De zonneschaduw van een ring is meestal een ellips (fig. 95), een enkele keer een cirkel of een recht lijnstuk.

Voor een schaduw van een ring veroorzaakt door een lamp, zijn er meer mogelijkheden. Dat heeft te maken met het feit dat de doorsnede van een kegel met een vlak (fig. 96) in meer verschillende vormen voorkomt dan de doorsnede van een cilinder en een vlak.

De doorsnede van een (rechte) kegel met een plat vlak kan, behalve een ellips, ook een *parabool* of *hyperbool* zijn (fig. 97).

De vorm van de *kegelsnede* hangt af van de stand van het snijvlak t.o.v. de as van de kegel.



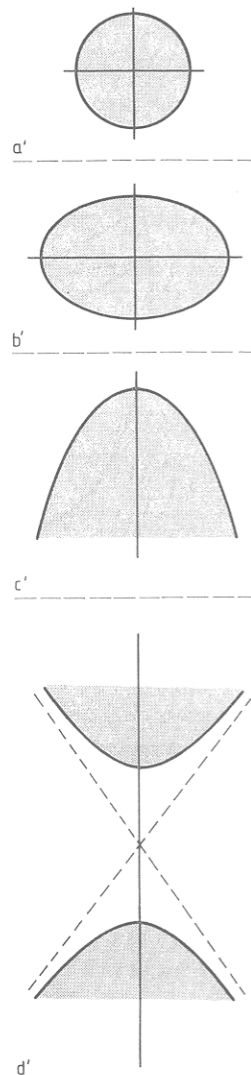
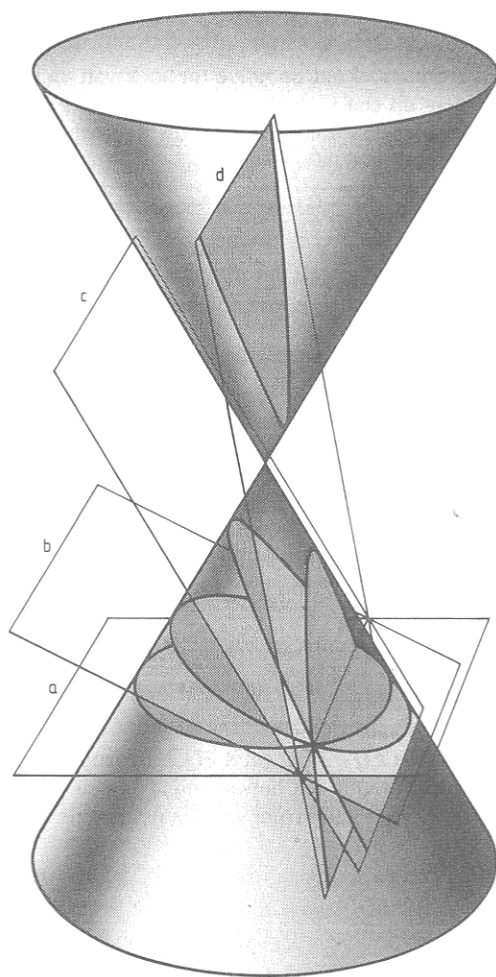


Fig. 96

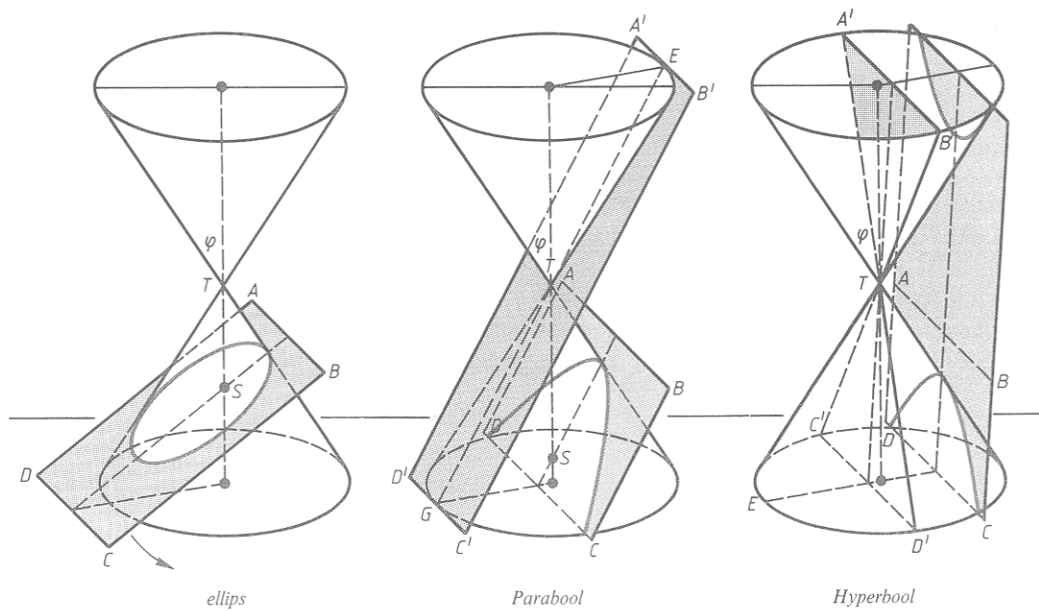


Fig. 97

ellips

Parabol

Hyperbool

## Opgaven

- 87 Veronderstel dat de halve tophoek van de kegel gelijk is aan  $\varphi$ .  
 Neem nu een vlak door de top van de kegel.  
 Hoe ziet de doorsnede eruit als de hoek van dat vlak met de as:  
 a kleiner is dan  $\varphi$ ;  
 b gelijk is dan  $\varphi$ ;  
 c groter is dan  $\varphi$ .
- 88 Neem nu een vlak dat niet door de top gaat. Raadpleeg fig. 97.  
 Wat weet je van de vorm van de kegelsnede als de hoek van dat vlak met de as:  
 a recht is;  
 b scherp is, maar groter dan  $\varphi$ ;  
 c gelijk is aan  $\varphi$ ;  
 d kleiner is dan  $\varphi$ .
- 89 Van een kegel  $\kappa$  is de tangens van de halve tophoek  $\frac{3}{4}$ . De hoogte van de kegel is 8. Een vlak  $\alpha$  is parallel met het raakvlak door  $TS$  en snijdt vlak  $TRS$  volgens  $AM$  (fig. 98).  
 $P$  is een punt op de snijkromme van  $\kappa$  en  $\alpha$ .  
 Het vlak door  $P$  loodrecht op de as  $TM$  snijdt de kegel volgens een cirkel met middellijn  $UV$ .  
 $Q$  is het snijpunt van  $AM$  en  $UV$ .  
 Stel:  $PQ = y$ ,  $AQ = x$ .  
 a Bereken  $AM$ .  
 b Toon aan:  $UQ = \frac{6}{5}x$ .  
 c Omdat  $PQ \parallel WM$ , geldt  $PQ \perp UV$  en dus  $PQ^2 = UQ \cdot QV$  (zie ook opgave 78).  
 Leidt hieruit een betrekking af tussen  $y$  en  $x$ .  
 d Wat voor een kromme is de doorsnede van  $\kappa$  en  $\alpha$ ?

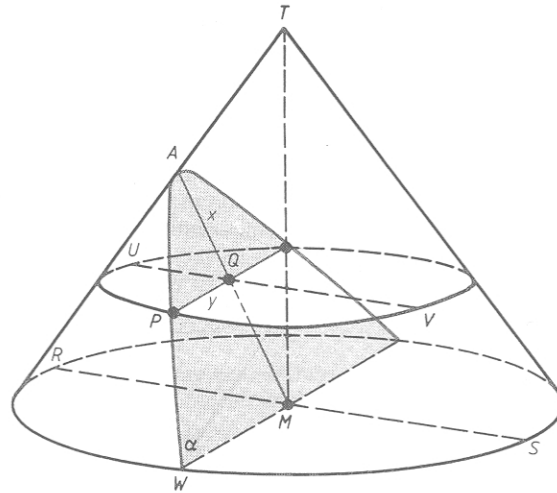


Fig. 98

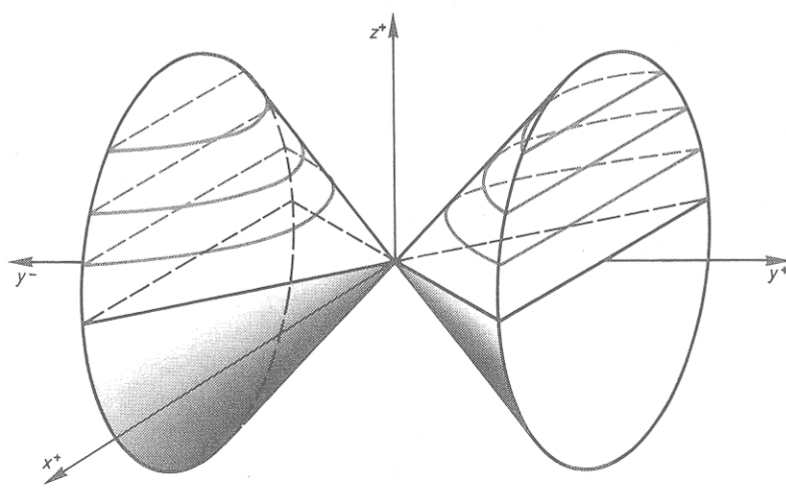


Fig. 99

- 90 Vlakken die parallel zijn met twee beschrijvende lijnen van de kegel snijden de kegel volgens een hyperbool.  
 In fig. 99 zie je de doorsneden van  $\kappa: x^2 - y^2 + z^2 = 0$  met de vlakken  $z = 1, z = 2, z = 3, \dots$   
 a Teken in een  $Oxy$ -vlak de iso-hoogtelijnen van de kegel met hoogte 0, 1, 2, 3.  
 b Wat is de vergelijking van de iso-hoogtelijn met hoogtegetal 2?
- 91 Een plastic kegel, half gevuld met vloeistof, ligt op de grond. De vloeistofspiegel heeft de vorm van een *parabool* (fig. 100).  
 Hoe kun je zeker weten dat het geen tak van een hyperbool is?

Fig. 100

