Wiskunde D voor HAVO

Periodieke functies

Gert Treurniet

2.1 *Inleiding*

Een toon is een trilling. De trilling van lucht brengt ons trommelvlies in beweging. De beweging van ons trommelvlies nemen we waar als geluid.

De sinus-, cosinus en tangensfuncties geven de mogelijkheid sommige trillingen te beschrijven. Verklaringen voor natuurkundige of andersoortige verschijnselen die periodiek (zich herhalend) zijn, kunnen ook worden gegeven met deze goniometrische functies.

Het stemmen van muziekinstrumenten gebeurt door te luisteren naar zweving van de gelijktijdig hoorbaar gemaakte tonen van beide instrumenten. Zweving van 2 tonen betekent dat het volume van de samengestelde toon afwisselend hoger en lager wordt. Door het optellen van goniometrische functies kan dit beter worden begrepen.

In deze module leer je:

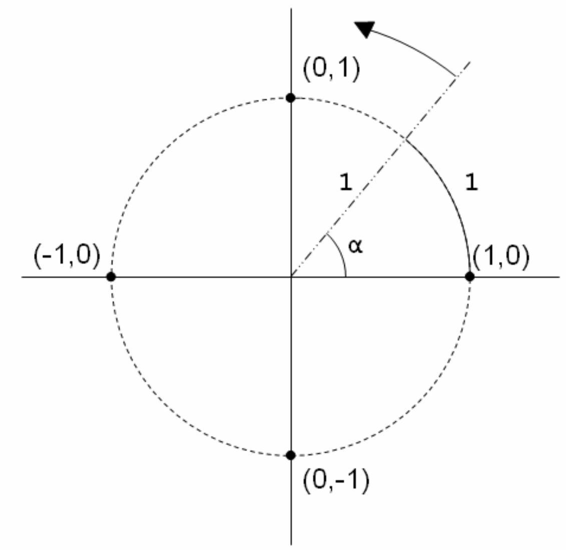
- optellen van goniometrische functies en verklaringen geven van het resultaat daarvan en resultaten voorspellen
- werken met goniometrische formules, waaronder de ‘goniometrische stelling van Pythagoras’
- differentiëren van goniometrische functies
- het toepassen van goniometrie in praktijksituaties

De studielast voor deze module is 20 klokuren.

2.2 *Sinus, cosinus en tangens*

De hoekmaat die wordt gebruikt bij het werken met goniometrische functies is vaak radialen. Een van de redenen voor dit gebruik is dat differentiëren daardoor eenvoudiger wordt.

De radiaal is gedefinieerd op de manier die is aangegeven in de figuur: de hoek α is gelijk aan 1 radiaal (afgekort tot rad) als de lengte van de bijbehorende boog langs de eenheidscirkel gelijk is aan 1.



Figuur 1: De hoek α is gelijk aan 1 radiaal, want de bijbehorende boog van eenheidscirkel heeft lengte 1.

2.1 Waarom is 1 radiaal iets kleiner dan 60^o ?

De halve omtrek van de eenheidscirkel, π, komt overeen met een hoek van 180^o. Omdat dit (π radialen $\cong 180$ dus 1 rad $= \dfrac{180^0}{\pi}$ en $1^0 = \dfrac{\pi}{180}$ rad) de vaste verhouding is tussen de hoek in radialen en de hoek in graden, kun je een verhoudingstabel gebruiken voor het omrekenen.

2.2 Maak de volgende tabel af.

Draaihoek (graden)	0	30	45		90	120		150	180
Draaihoek (radialen)	0	$\frac{1}{6}\pi$		$\frac{1}{3}\pi$			$\frac{3}{4}\pi$		π

Onthoud de volgende waarden van de sinus:

hoek (radialen)	sinus	geheugensteuntje
0	0	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$

2.3 Teken *handmatig* de functie

$$f(x) = \sin x$$

op het interval $[0, 2\pi]$. Kies op de x-as stapgrootte $\frac{1}{6}\pi$ en maak gebruik van de waarden hierboven.

2.4 a Plot (met behulp van je rekenmachine) en schets (op papier) de grafiek van $f(t) = \cos 2t$ op het interval $[-\pi, 3\pi]$.

b Los exact op: $\cos 2t = 0{,}5$ op het interval $[-\pi, 3\pi]$.

c Wat is het verschil tussen de periode van $f(x) = \sin x$ en $f(t) = \cos 2t$?

De grafieken van $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \cos x$ hebben amplitude 1, periode 2π en evenwichtslijn $y = 0$. Ook deze grafieken kunnen worden verschoven en worden vermenigvuldigd met een factor.

Verschuiving/vermenigvuldiging van $f(x) = \sin x$	Formule
Verschuiving naar rechts over afstand c	$f(x) = \sin(x - c)$
en verschuiving naar boven over afstand d	$f(x) = \sin(x - c) + d$
en vermenigvuldiging met factor a t.o.v. de x-as	$f(x) = a\sin(x - c) + d$
en vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{b}$ t.o.v. y-as	$f(x) = a\sin b(x - c) + d$

De grafiek van $f(x) = a\sin b(x - c) + d$ heet een sinusoïde (=sinusvormige).

De periode T is $\dfrac{2\pi}{b}$.

De frequentie f is $\dfrac{1}{T}$.

b heet ook wel de hoeksnelheid van een sinusoïde en is gelijk aan $2\pi f$

2.5 Geef van de volgende functies aan hoe de grafieken ontstaan uit die van $f(x) = \sin x$.
Geef aan welke factor(en) en afstand(en) gebruikt zijn. Bereken ook van iedere functie de periode en de frequentie.

a $f(x) = \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$

b $f(x) = \sin \frac{1}{3}(x - \frac{1}{8}\pi)$

c $f(x) = 3{,}5 \sin 3x$

d $f(x) = 0{,}3 \sin(\frac{1}{3}x + 4)$

e $f(x) = 0{,}6 \sin 2\pi(x + 6) - 7$

2.6 Hier moet nog een opgave komen waarin wordt geoefend met het herkennen van functievoorschriften en grafieken.

2.7 Bekijk de functies $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \cos x$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.

a In welk punt is de sinusfunctie symmetrisch op dit interval?

b In welke lijn is de cosinusfunctie symmetrisch op dit interval?

c Wat is de periode van f en g ?

Maak gebruik van symmetrie en/of periodiciteit van f en g bij het beantwoorden van de volgende vragen.

2.8 Bereken exact:

a $\sin 1\frac{1}{6}\pi$

b $\cos(-1\frac{1}{4}\pi)$

Hier moet nog worden aangevuld met meer opgaven.

2.9 Gegeven de functies $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \cos x$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.
Bereken alle oplossingen van de volgende vergelijkingen in 2 decimalen:

a $f(x) = 0{,}6$

b $g(x) = -0{,}3$

Hier moeten formules voor symmetrie worden vermeld.
Hier moet nog de tangens worden geïntroduceerd, dit moet nog worden afgestemd met het deel differentiëren. Misschien verderop verwerken?

2.3 *Sinusoïden met gelijke periode optellen*

Als 2 tonen tegelijkertijd klinken, bereikt een optelling van de trillingen het oor. In dit gedeelte onderzoeken we wat de som van 2 sinusoïden met **gelijke** periode voor eigenschappen heeft.

2.10 Sinusoïden optellen op de GR

Bekijk de volgende functies van sinusoïden:

$$f(x) = \sin x \text{ en } g(x) = \cos x$$

Wat is de periode van *f* en *g*?
Plot beide functies op de GR.
Plot ook de som van beide functies op de GR (dit kan door de somfunctie van de GR, y1 + y2, te gebruiken).
Lijkt de grafiek van de som ook op een sinusoïde?

Hoewel het bovenstaande geen bewijs is, geldt toch:

Theorie, stelling

De som (van de grafieken) van 2 sinusoïden met dezelfde periode *T* is weer een sinusoïde met dezelfde periode *T*.

Werkwijze

Als de som van de 2 sinusoïden weer een sinusoïde is, moet deze dus ook in de vorm

$$s(x) = a \sin b(x - c) + d$$

te schrijven zijn. Hoe doe je dat?

We maken gebruik van de GR. (Het kan ook met formules, maar dat behoort niet tot de onderwijsstof.)

b is de hoeksnelheid. Deze is gelijk aan de hoeksnelheid van de 2 oorspronkelijke functies, dus b = 1.
a is de amplitude. Deze is te bepalen door de waarden van het maximum en het minimum van de somgrafiek te bepalen, deze van elkaar af te trekken en vervolgens door 2 te delen. (Waarom?)
d is de evenwichtslijn. Deze is gelijk aan de som van de *y*-waarden van de evenwichtslijnen van de oorspronkelijke functies, in dit geval dus 0. Teken deze evenwichtslijn op de GR.
c is de verschuiving naar rechts. Deze is te bepalen door langs de evenwichtslijn de afstand van de *y*-as tot de eerste positieve 0-doorgang te bepalen.

Voorbeeld

Gegeven:

$$f(x) = \sin 2\pi x + 1 \text{ en } g(x) = \sin 2\pi(x - 0{,}25) - 2$$

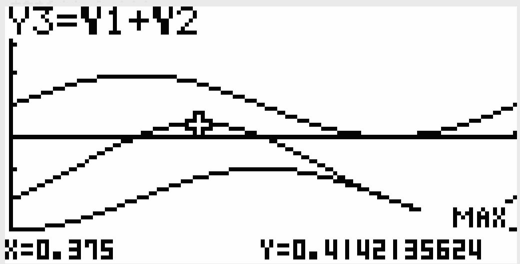
Wat is de formule van $s(x) = f(x) + g(x)$?

Antwoord:

$b_s = b_f = 2\pi$

$$T = \frac{2\pi}{b_s} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Plot de som van de beide functies op de GR.



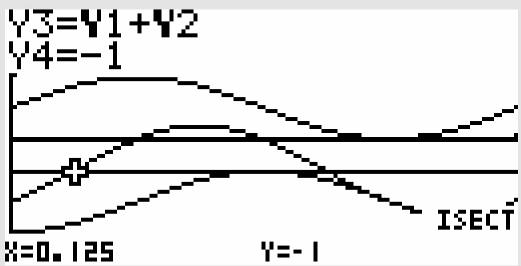
Bepaal met G-Solve de waarden van het maximum en het minimum:

$s_{\min} \approx 0{,}414$ en $s_{\max} \approx -2{,}414$

De amplitude a is dus gelijk aan $\dfrac{0{,}414 - (-2{,}414)}{2} = 1{,}414$

$d_s = d_f + d_g = 1 + (-2) = -1$

c kan worden berekend door de x-coördinaat van het snijpunt van s met zijn evenwichtslijn te bepalen, waarbij s de evenwichtlijn in opwaartse richting moet snijden. Zie hieronder. In dit geval geldt dus: $c = 0{,}125$



Er geldt dus: $s(x) = 1{,}414\sin(2\pi(x - 0{,}125)) - 1$

2.11 Opgave om bovenstaande te oefenen.

Hier komen nog aanvullingen.

2.4 *Sinusoïden met ongelijke perioden optellen*

Als 2 tonen met ongelijke frequentie klinken, bereikt de som van deze 2 tonen het oor. In dit gedeelte onderzoeken we wat de som van 2 sinusoïden met ongelijke frequentie voor eigenschappen heeft.

2.12 Bekijk de volgende functies van sinusoïden:

$f(t) = \sin \pi t$ en $g(t) = \sin \tfrac{2}{3}\pi t$

- a Wat is de periode van $f(t)$?
- b Wat is de periode van $g(t)$?
- c Plot beide functies.
- d Plot ook de som van beide functies $s(t)$.
- e Lijkt de grafiek van de som ook op een sinusoïde?
- f Wat is de periode van $s(t)$?
- g Wat zou het verband kunnen zijn tussen de periodes van $f(t)$ en $g(t)$ en de periode van $s(t)$?

2.13 Voer de opdrachten van de vorige opgave ook uit voor de volgende functies.

$k(t) = \sin \tfrac{1}{2}\pi t$ en $l(t) = \sin \tfrac{1}{3}\pi t$

Klopt de periode van de somfunctie met het verband dat je bij de vorige vraag had gevonden? Zo niet, waarom niet? Hoe zou het verband dan wel zijn?

Hoewel het bovenstaande geen bewijs is, geldt de volgende theorie met betrekking tot de optelling van 2 sinusoïden met ongelijke periode:

De optelling (van de grafieken) van 2 sinusoïden met ongelijke periodes T_1 en T_2 is geen sinusoïde. Je kunt deze som dus niet schrijven in de vorm $f(x) = a \sin b(x-c) + d$.
De som van 2 sinusoïden met ongelijke periodes T_1 en T_2 kan periodiek zijn.

Bij deze theorie moet worden opgemerkt dat bij functies die geen sinusoïde zijn meestal niet gesproken wordt over een evenwichtslijn en een amplitude.

De werkwijze voor het bepalen van de periode van de som van 2 sinusoïden met ongelijke periode is als volgt:

Gegeven:
$T_1 = 6\pi$ en $T_2 = 8\pi$
Schrijf een aantal veelvouden van 6π op: 6π , 12π , 18π , 24π , 30π , 36π
Schrijf ook een aantal veelvouden van 8π op: 16π , 24π , 32π , 40π

De eerste periode die in beide rijen voorkomt is de periode van de somfunctie. In dit geval is dat dus 24π

Hier komt nog veel oefenmateriaal.

2.4.1 Verdieping

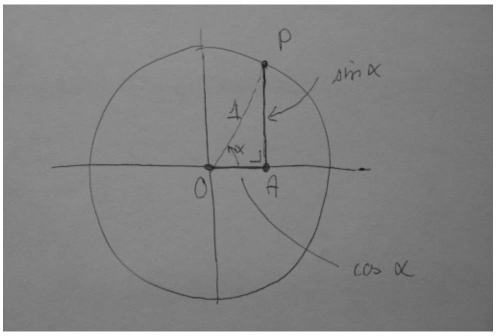
2.14 Hoe kun je met een berekening de ‘gemeenschappelijke periode van de som van 2 periodieke functies’ bepalen?

2.15 Wanneer is er geen gemeenschappelijke periode? Geef een voorbeeld.

2.5 *Sinus, cosinus en de stelling van Pythagoras*

Er zijn veel verbanden tussen de sinusfunctie en de cosinusfunctie. Hier leren we er een te gebruiken.

In de figuur hieronder is de eenheidscirkel getekend. Op de eenheidscirkel ligt een punt P. Vanuit het middelpunt O van de eenheidscirkel is de straal naar P getekend. Verder is punt A getekend, met *x*-coördinaat gelijk aan die van P. Hoek A is dus een rechte hoek.



Figuur: Sinus en cosinus in de eenheidscirkel. (Deze figuur moet nog worden verbeterd).

2.16 Bekijk nu ΔOAP .

a Welke bekende stelling kun je in deze driehoek toepassen?

b Pas de stelling toe. Welk verband tussen $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ krijg je nu?

c Geldt dit verband ook als P in een ander kwadrant ligt?

Stelling

Een gevolg van de definitie van sinus en cosinus is dat daartussen het volgende verband bestaat:

$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Opmerking:

Vaak wordt $(\sin\alpha)^2$ geschreven als en $\sin^2\alpha$. Dat is niet hetzelfde als $\sin 2\alpha$.

2.17 Schrijf de volgende functies zo om, dat er geen $\cos x$ meer in voorkomt:

a $f(x) = 3\sin^2 x + \cos^2 x - 5$

b $g(x) = 4\sin^2 x - 3\cos^2 x - 5$

c $h(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

d $i(x) = \cos x$

2.18 Werk de haakjes weg en/of vereenvoudig:

a $s(\alpha) = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$

b $\tan'(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2}$

2.19 Hier komt nog een voorbeeld bij.
Los de volgende vergelijkingen exact op, op het interval $[-\pi, 3\pi]$:

a $\sin^2 x + 2\cos^2 x = 1{,}25$

b $\cos^3 x + \cos x \sin^2 x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

2.6 *Goniometrische functies differentiëren*

Dit gedeelte moet nog worden afgestemd met het gedeelte over differentiëren.

Bij bewegingen is vaak de snelheid van belang. Snelheid is de afgeleide van de positie. Bij sinusvormige bewegingen is de afgeleide van de sinus dus van belang. In deze module gaan we werken met de afgeleiden van goniometrische functies.

2.20 Gegeven de functie $f(x) = \sin x$.

a Plot deze functie op het interval $[-\pi, 3\pi]$.
b Plot ook de afgeleide functie.
c Wat zal het functievoorschrift van deze afgeleide functie zijn?

Gegeven de functie $g(x) = \cos x$

d Plot deze functie op het interval $[-\pi, 3\pi]$.
e Plot ook de afgeleide functie.
f Wat zal het functievoorschrift van deze afgeleide functie zijn?
g Hoe vaak moet je $f(x)$ differentiëren om $f(x)$ weer te krijgen?

Hier nog overwegen een 'bewijs' te verwerken voor deze regels.
De afgeleide van $f(x) = \sin x$ is $f'(x) = \cos x$
De afgeleide van $g(x) = \cos x$ is $g'(x) = -\sin x$

2.21 Bepaal de afgeleiden van de volgende functies (denk aan de kettingregel):

a $f(t) = 2\sin t$
b $g(t) = \sin 3t$
c $h(t) = 2\cos 3\pi t$
d $i(t) = 2\cos 3\pi(t+2)$
e $j(t) = 2\sin 3\pi(t+2) + 7$

2.22 Differentieer en vereenvoudig waar mogelijk:

a $l(t) = 5\sin 2t \cdot \cos 3t$
b $\tan(t) = \dfrac{\sin t}{\cos t}$
c $k(t) = 5\sin(t^2 + 3t + 2)$
d $m(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$
e $s(t) = a\sin(b(t-c)) + d$

2.23 Geef aan waar de extremen van de volgende functie liggen. Bepaal ook de waarde van het extreem. Doe dit met behulp van differentiëren:

$f(x) = \sin x$ op het interval $[0, 2\pi]$

2.7 *Integratie met andere onderwerpen*

2.8 *Samenvatting en terugblik*

De halve omtrek van een cirkel, π, komt overeen met een hoek van 180^o. Omdat dit de vaste verhouding is tussen de hoek in radialen en de hoek in graden, kun je een verhoudingstabel gebruiken voor het omrekenen.

hoek (radialen)	sinus
0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	1

Verschuiving/vermenigvuldiging van $f(x) = \sin x$	Formule
Verschuiving naar rechts over afstand c	$f(x) = \sin(x - c)$
en verschuiving naar boven over afstand d	$f(x) = \sin(x - c) + d$
en vermenigvuldiging met factor a t.o.v. de x-as	$f(x) = a\sin(x - c) + d$
en vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{b}$ t.o.v. y-as	$f(x) = a\sin b(x - c) + d$

De grafiek van $f(x) = a\sin b(x - c) + d$ heet een sinusoïde (=sinusvormige).

De periode T is $\dfrac{2\pi}{b}$.

De frequentie f is $\dfrac{1}{T}$.

b heet ook wel de hoeksnelheid van een sinusoïde en is gelijk aan $2\pi f$

Enkele formules waarmee je sinus in cosinus kunt omzetten en omgekeerd, zijn:

$$\sin(x) = -\sin(-x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(x) = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x)$$
$$\cos(x) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - x)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

De som (van de grafieken) van 2 sinusoïden met dezelfde periode T is weer een sinusoïde met dezelfde periode T.

De optelling (van de grafieken) van 2 sinusoïden met ongelijke periodes T_1 en T_2 is geen sinusoïde. Je kunt deze som dus niet schrijven in de vorm $f(x) = a\sin b(x-c)+d$.

De som van 2 sinusoïden met ongelijke periodes T_1 en T_2 kan periodiek zijn. Als die periode bestaat, kun je die vinden door de kleinste gemeenschappelijke periode te zoeken die een veelvoud is van beide periodes.

De afgeleide van $f(x) = \sin x$ is $f'(x) = \cos x$
De afgeleide van $g(x) = \cos x$ is $g'(x) = -\sin x$

Uiteraard kunnen de bekende regels voor differentiëren ook worden toegepast met deze goniometrische functies.

2.9 *Praktijk: Toepassingen*

Het is de bedoeling hier nog meer toepassingen in te voegen.

Wat kun je in de praktijk met goniometrische formules en periodieke functies?

2.24 Intro-opgave met optellen op audio-gebied

Gegeven de 2 volgende functies:

$g(t) = \sin(10\pi t)$ en $h(t) = \sin(12\pi t)$ met *t* in seconden.

a Wat zijn de frequenties van $g(t)$ en $h(t)$?
b Geef ook de eenheid van deze frequentie.
c Wat is de periode van g?
d Plot de beide grafieken over een interval van ongeveer 3 periodes.
e Plot de somgrafiek op een interval van 4 seconden.
f Leg uit wat je zou horen als je de volgende signalen gelijktijdig hoorbaar zou maken:

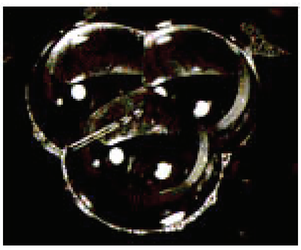
$i(t) = \sin(2\pi 1000t)$ en $j(t) = \sin(2\pi 1005t)$ met t in seconden.

Een aantal opmerkingen:
a Is dit misschien te gedetailleerd?
b Variant met VU-grafiek: frequentie van g en h hoger maken, geeft inzichtelijker plaatje
c Variant met TI-Interactive: zelfde als bij VU-grafiek.
d Audioprogramma en/of geluidsfile op wisweb

2.25 Hier komt een opgave over hijskraan met combinaties van functies

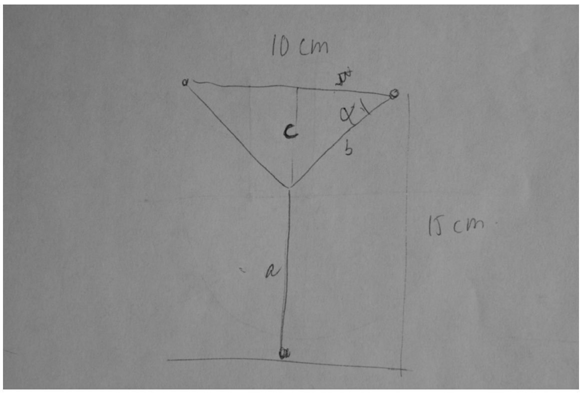
2.26 Zeepbellen

Als meerdere zeepbellen tegen elkaar aan komen, worden de grensvlakken ertussen vaak vlak. Hier zie je een plaatje van 3 zeepbellen waar dat is gebeurd.
De hoek tussen de vlakken blijkt vaak, maar niet altijd, 120° te zijn.



We gaan voor een vereenvoudigde situatie na of het daar ook het geval is.

Bekijk de onderstaande situatie waarin een rechthoek is getekend van 10 bij 15 cm. Veronderstel dat er tussen de hoekpunten van de korte zijde en het midden van de korte zijde er tegenover een 3 draadjes zijn aangebracht, die door een knoopje aan elkaar zijn gemaakt. We gaan na bij welke hoek α de totale lengte van de touwtjes minimaal is.



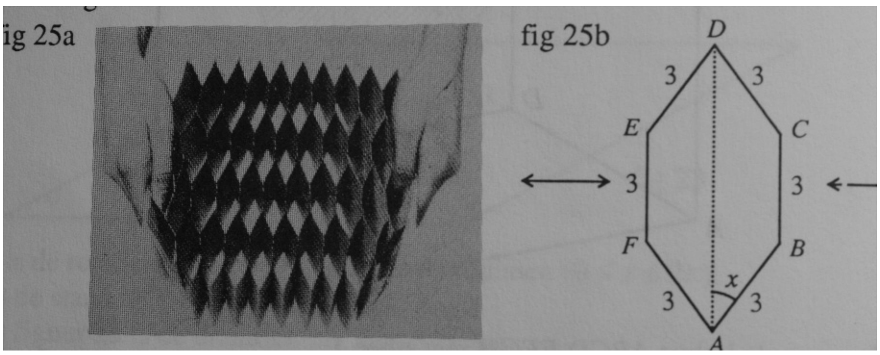
a Wat is de lengte van het touw, uitgedrukt in *a* en *b*?
b Wat is *b* uitgedrukt in α ?
c Wat is *a* uitgedrukt in c?
d Wat is c uitgedrukt in α ?
e Wat is dus de lengte van het touw uitgedrukt in α ?
f Bij welke α is de lengte minimaal?
g Hoe groot zijn dan de hoeken tussen de touwtjes?

2.27 Plantenbak (lijkt eigenlijk wel op de zeepbellen, dus misschien weglaten).

Opgave uit 'werken met, blz. 30'

Deze opgave is komt deels uit een examen uit 1990.

Voor het kweken van plantjes gebruikt een kweker een cellenstructuur zoals in de onderstaande figuur is afgebeeld.

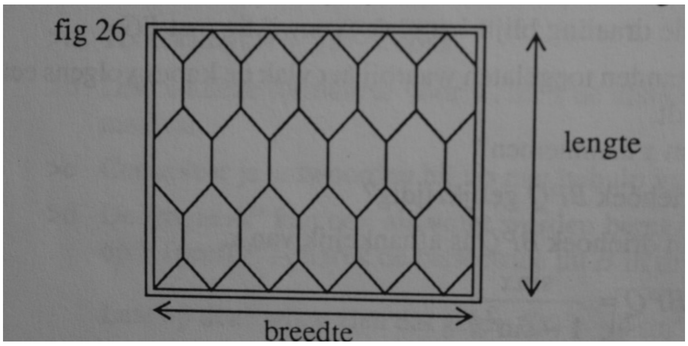


Iedere afzonderlijk cel heeft zes zijden van 3 cm. Door de hele structuur uit te rekken, in de richting zoals aangegeven in de figuur, verandert de vorm van alle cellen. Daarbij blijven EF en CB evenwijdig.
Die verandering kan worden beschreven met behulp van de variabele hoek DAB.

Stel de grootte van deze hoek is x radialen.

a Bereken x in radialen (2 decimalen nauwkeurig) in het geval dat $BF = 4$.

b In onderstaande figuur is een dergelijke cellenstructuur aangebracht in een plantenbak.



De binnenbreedte van de plantenbak is 22 cm. Bereken de binnenlengte van de plantenbak.

c De cellenstructuur van figuur 26 wordt uit de plantenbak genomen en horizontaal uitgerekt totdat $x = \frac{1}{2}\pi$ (zie voor x figuur 25b). Teken voor dit geval het bovenaanzicht van de cellenstructuur.

Het verband tussen de oppervlakte van de cel S en de hoekgrootte x wordt voor elke hoek x gegeven door

$$S = 18\sin x + 18\sin x\cos x$$

d Bewijs de juistheid van deze formule.

e Druk $\frac{dS}{dx}$ uit in $\cos x$.

f Bereken voor welke waarde van x de oppervlakte van de cel maximaal is en teken de cel met maximale oppervlakte.

2.28 Hier nog een opgave over krukas en cylinder (zie werken met, p. 31)

2.29 Hier nog een opgave over de opbouw van periodieke functies uit sinusoïden (Fourier) zeker ook met TII

2.10 *Praktijk: Toepassingen m.b.v TI Interactive*

2.30 Deze opgave moet nog geschikt worden gemaakt voor TII. Zie de opgave die eerder in dit document staat.

Gegeven de volgende functies:

$g(t) = \sin(2\pi 5t)$ en $h(t) = \sin(2\pi 6t)$ met t in seconden.

a Wat zijn de frequenties van $g(t)$ en $h(t)$?

b Geef ook de eenheid aan.

c Wat is de periode van g? En die van h?

d Plot de beide grafieken en de somgrafiek over een interval van 4 seconden. Maak de grafieken om en om zichtbaar en let vooral de op somgrafiek.

Leg uit wat je zou horen (volume en frequenties) als je de volgende signalen gelijktijdig hoorbaar zou maken:

$i(t) = \sin(2\pi 1000t)$ en $j(t) = \sin(2\pi 1005t)$ met t in seconden.

Opmerking: als je deze grafieken tekent in TI Interactive, kun je beide functies en de som ervan bijna niet goed te zien krijgen. Welke eigenschap van TI-Interactive en de computer is hier de oorzaak van?