3 Exponentiële functies en logaritmische functies

Bij wiskunde B heb je al eerder te maken gehad met exponentiële en logaritmische functies. In dit hoofdstuk gaan we er wat dieper op in en laten we een aantal toepassingen zien. Om exponentiële en logaritmische functies goed te kunnen begrijpen is kennis en ervaring nodig met machten en exponenten. We geven daarom eerst een korte herhaling, waarin de belangrijkste definities en eigenschappen nog eens op een rijtje gezet worden.

3.1 *Machten en exponenten*

De begrippen machten en exponenten zijn direct met elkaar verbonden.

2^3 is de derde macht van twee. De 2 hierin wordt *grondtal* genoemd en de 3 hierin heet *exponent*. Wanneer de exponent een natuurlijk getal is (dus een positief, geheel getal), is machtsverheffen niets anders dan herhaald vermenigvuldigen ($2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$). Anders wordt het wanneer de exponent niet meer geheel of zelfs negatief is. Soms spreekt men in zo'n geval van een *oneigenlijke macht*. Dit soort machten komt in de toegepaste wiskunde zeer vaak voor. We zullen hierna machten met verschillende soorten exponenten aandachtig bekijken.

3.1.1 Machten met natuurlijke exponenten

Voorbeeld

3.1 Volgens een oud verhaal toonde de uitvinder van het schaakspel zijn vinding aan de koning. Deze was zo verrukt van de schoonheid van het spel, dat hij de man vorstelijk wilde belonen. De uitvinder mocht zelf zijn beloning kiezen.

Dit was wat de slimmerik wenste:

1 graankorrel op het eerste veld;
2 graankorrels op het tweede veld;
4 graankorrels op het derde veld;
8 graankorrels op het vierde veld
enzovoorts tot en met het vierenzestigste veld.

3.2 De koning was verbaasd over zoveel bescheidenheid, maar kwam daar snel van terug.

a Ga na dat het elfde veld ongeveer 1000 graankorrels moet opleveren.

b Laat zien dat bij het in vervulling laten gaan van de wens van de uitvinder, het vierenzestigste veld ruw geschat 9.000.000.000.000.000.000 graankorrels moet opleveren.

De machtige vorst bleek niet bij machte te voldoen aan de wens van de uitvinder. De overmacht van de steeds terugkerende verdubbeling had hij niet voorzien.

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} \cdots \xrightarrow{\times 2} 1024 \xrightarrow{\times 2} 2048 \xrightarrow{\times 2} 4096 \xrightarrow{\times 2} \cdots$$

Na bijvoorbeeld 12 stappen is het aantal graankorrels 4096. We noteren 2^{12} = 4096.

De macht 2^{12} is een afkorting van $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Bij 2^{12} is 2 het *grondtal* en 12 de *exponent*.

Bovenstaande “ketting” wordt met machten aldus:

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2^1 \xrightarrow{\times 2} 2^2 \xrightarrow{\times 2} 2^3 \xrightarrow{\times 2} 2^4 \xrightarrow{\times 2} \cdots \xrightarrow{\times 2} 2^{10} \xrightarrow{\times 2} 2^{11} \xrightarrow{\times 2} 2^{12} \xrightarrow{\times 2} \cdots$$

Na *n* stappen in de ketting krijgen we de n^e *macht van 2* ($= 2^{12}$).

We spreken af dat dit ook geldt voor $n = 1$en $n = 0$.

Dus $2^1 = 2$ en $2^0 = 1$ (na 0 stappen).

Opmerking: In computertaal wordt wel de notatie 2^12 gebruikt in plaats van 2^{12} .

In het algemeen kunnen we zo machten definiëren met grondtal *a* en exponenten 0, 1, 2, 3, 4…

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^2 = a \cdot a$

$a^3 = a \cdot a \cdot a$

enzovoort.

Hieruit volgen de volgende regels voor $m = 0,1,2,3,\ldots$ en $n = 0,1,2,3,\ldots$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (3.1)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (3.2)$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn} = \left(a^n\right)^m \qquad (3.3)$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n \qquad (3.4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad (3.5)$$

3.3 Formuleer de bovenstaande vijf regels in je eigen woorden.

3.4 Hoe leg je aan iemand die regel (3.1) niet kent, uit dat $a^3 \cdot a^4 = a^7$? En dat $(a^3)^4 = a^{12}$?

3.5 Leg uit dat de afspraak $a^0 = 1$ in overeenstemming is met regel (3.2).

3.6 Vereenvoudig met behulp van bovenstaande regels:

a $\dfrac{x^5 \cdot x^3}{x^2 \cdot x^4} = \ldots$

b $\dfrac{\left(y^5\right)^3}{\left(y^2\right)^4} = \ldots$

c $\dfrac{\left(a^2\right)^5 \cdot a^3}{a^{13}} = \ldots$

d $\dfrac{(pq)^5}{p^2 q^3} = \ldots$

3.7 Vereenvoudig met behulp van regels (3.1) t/m (3.5):

a $\dfrac{x^3 \cdot 64x^2}{(2x)^5} = \ldots$

b $\dfrac{\left(3y^2\right)^4}{81y^3} = \ldots$

c $\dfrac{\left(\left(p^2\right)^3\right)^4}{p^2 \cdot p^3 \cdot p^4} = \ldots$

d $\dfrac{\left(a^2 b\right)^3 \cdot b}{a^5 b} = \ldots$

3.8 Schrijf als één macht van 2; *k*, *m* en *n* zijn natuurlijke getallen.

Voorbeeld: $8 \cdot 2^m = 2^3 \cdot 2^m = 2^{3+m}$

$32 \cdot 2^k = \ldots$ $\quad 2 \cdot 2^n = \ldots$ $\quad 2^m \cdot 2^m = \ldots$ $\quad 8^k = \ldots$

$1024^m = \ldots$ $\quad 16^n \cdot 32^n = \ldots$ $\quad 2^k \cdot 4^m = \ldots$ $\quad \left(128^k\right)^m = \ldots$

3.9 Onderzoek welke van de volgende beweringen waar zijn voor *elk* natuurlijk getal *n*.

a $3 \cdot 9^n = 27^n$ $\quad$ b $3 \cdot 9^n = 3^{2n+1}$ $\quad$ c $\dfrac{32^n}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

d $2^n \cdot 2^n = 2^{2n}$ $\quad$ e $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ $\quad$ f $3^n + 3^n + 3^n = 3^{n+1}$

Even terug naar de graankorrels op het schaakbord (zie het voorbeeld aan het begin van deze paragraaf). De uitkomst van 2^{63} (het aantal korrels op het laatste veld) is een “astronomisch” getal.
Voor zulke grote getallen wordt vaak de wetenschappelijke notatie gebruikt. Als je met de rekenmachine 2^{63} uitrekent, krijg je op het venster: 9.22337 E 18
Dit betekent: $9{,}22337 \times 10^{18}$. Voor de wetenschappelijke notatie van een getal kunnen we in het algemeen schrijven: $a \times 10^b$ waarbij *a* een getal tussen 1 en 10 is en *b* een gehele exponent van macht 10.

3.10 De wetenschappelijke notatie wordt bijvoorbeeld gebruikt om afstanden in het heelal aan te geven.

Zoals je misschien weet is de snelheid van het licht 300.000 km/sec. Men zegt ook: 1 *lichtseconde* $= 3 \cdot 10^5$ km (1 lichtseconde is dus de afstand die het licht in 1 seconde aflegt).

a Ga na dat 1 *lichtminuut* gelijk is aan $1,8 \cdot 10^7$ km.

b Hoeveel km is 1 *lichtjaar*? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie.

c De (gemiddelde) afstand van de aarde tot de zon is $1,495 \cdot 10^8$ km. Hoeveel minuten heeft het licht van de zon nodig om ons te bereiken?

d De zon staat naar aardse begrippen ver van ons weg, maar naar de maatstaven van het heelal is dat anders. Vergelijk maar eens met de afstand tot de andere sterren. De dichtstbijzijnde ster (Proxima Centauri) is 4,3 lichtjaar van ons verwijderd. Hoeveel km is dat?

3.11 Het totale aantal, door de uitvinder van het schaakspel gevraagde korrels op het schaakbord is:

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$

Als je hier 1 graankorrel aan toevoegt, wordt het totaal 2^{64} korrels.

a Toon dit aan met behulp van de bewering in vraag 3.8e.

b 1000 graankorrels wegen ongeveer 30 gram. De huidige wereldproductie graan is ruim 1,3 miljard ton per jaar. Onderzoek of de vraag van de uitvinder van het schaakspel de wereldproductie van nu overtreft (reken 1 ton = 1000 kg).

3.1.2 Machten met gebroken exponenten

Tot nu toe hebben we ons alleen met machten beziggehouden met gehele, positieve (dus natuurlijke) exponenten. We zullen hierna ook te maken krijgen met (oneigenlijke) machten met gebroken exponenten. Een mooi voorbeeld is een formule uit de sterrenkunde, afkomstig van de astronoom Kepler. Er bestaat in ons zonnestelsel een verband tussen de omlooptijd van een planeet en haar afstand tot de zon.

Dat verband luidt: $T = 0,2 \cdot R^{\frac{3}{2}}$ (R is de afstand tot de zon in miljoenen km, T is de omlooptijd in dagen).

3.12 Raadpleeg opgave 3.9c en ga na dat voor de aarde geldt: $R = 149,5$

De rest van deze opgave doe je met je (grafische) rekenmachine, dus vervangen we de decimale komma door een punt.

a Toets in op je rekenmachine 149.5 ^ 1.5 ENTER en vermenigvuldig de uitkomst met 0.2. Is de formule voor de aarde redelijk kloppend?

b Saturnus ligt veel verder van de zon dan de aarde, bijna 10 keer zover, namelijk $1,427 \cdot 10^9$ km.

Hoeveel dagen is de omlooptijd van de planeet Saturnus volgens de formule? Hoeveel jaar is dat ongeveer?

3.13 Bereken met je rekenmachine: $100^{\frac{1}{2}}$; $64^{\frac{1}{2}}$; $25^{\frac{1}{2}}$;Wat is volgens jou de betekenis van "tot de macht $\frac{1}{2}$ verheffen"?

3.14 Bereken met je rekenmachine: $100^{\frac{1}{3}}$; $64^{\frac{1}{3}}$; $25^{\frac{1}{3}}$;Wat is volgens jou de betekenis van "tot de macht $\frac{1}{3}$ verheffen"?

Uitgangspunt voor het maken van afspraken over de betekenis van machten met een gebroken exponent is dat de regels (3.1) t/m (3.5) geldig blijven:
Letten we op regel (3.3) dan komt er voor $m = \frac{1}{2}$ en $n = 2$:

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}.2} = a^1 = a$$

Het moet dus zo zijn dat $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)$ **tot de macht 2** levert *a*.

Evenzo bijvoorbeeld: $\left(a^{\frac{1}{5}}\right)$ **tot de macht 5** levert *a*.

3.15 Bereken zonder (grafische) rekenmachine: $144^{\frac{1}{2}}$; $32^{\frac{1}{5}}$; $1000000^{\frac{1}{6}}$; $64^{\frac{1}{3}}$

Er moeten ook afspraken gemaakt worden voor machten met exponenten als $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$; 2,34; enzovoort. Met als uitgangspunt regel (3.3) spreken we af (voor $a \geq 0$):

$a^{\frac{1}{n}}$ tot de *n*-de macht levert *a* ofwel $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$
$a^{\frac{2}{n}}$ tot de *n*-de macht levert *a* ofwel $(a^{\frac{2}{n}})^n = a^2$

$a^{\frac{3}{n}}$ tot de *n*-de macht levert *a* ofwel $(a^{\frac{3}{n}})^n = a^3$
enzovoort

3.16 a Bereken zonder rekenmachine: $64^{\frac{1}{2}}$; $64^{\frac{1}{3}}$;$64^{\frac{1}{6}}$;$64^{\frac{5}{6}}$; $64000^{\frac{1}{3}}$
b Onderzoek nu of geldt:

(1) $64^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ (3) $\dfrac{64^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{3}}} = 64^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$

(2) $\left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$ (4) $(64 \cdot 1000)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} \cdot 1000^{\frac{1}{3}}$

Er kan bewezen worden dat de regels (3.1) t/m (3.5) geldig blijven bij bovengenoemde afspraken van machten met gebroken exponenten. Die regels kunnen handig worden gebruikt bij het berekenen van machten.

Voorbeeld:
$125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^{3\cdot\frac{2}{3}} = 5^2 = 25$

3.17 Bereken zonder rekenmachine: $27^{\frac{2}{3}}$; $10000^{\frac{3}{4}}$; $625^{1\frac{1}{4}}$; $32^{0,6}$; $128^{\frac{3}{7}}$

3.18 Vereenvoudig tot één macht:

$$\frac{\left(a^4\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^5}; \quad \frac{\left(b^2 \cdot b^{\frac{1}{3}}\right)^3}{\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^6}; \quad \frac{\left(c^{12}\right)^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{1}{6}}}; \quad \frac{\left(d^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(d^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

In het voorgaande heb je ontdekt dat $a^{\frac{1}{2}}$ hetzelfde is als $\sqrt{a}$ (want $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$).

In woorden: $a^{\frac{1}{2}}$ is de (tweede-machts)wortel uit a.

Evenzo wordt $a^{\frac{1}{3}}$ de derde-machtswortel uit a genoemd. Notatie: $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$.
In het algemeen geldt voor $a \geq 0$:

$a^{\frac{1}{n}}$ is de n-de machtswortel uit a; $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

N.B. In het geval dat *n* = 2 schrijft men meestal $\sqrt{}$ (dus niet $\sqrt[2]{}$)

3.19 Wortels kun je dus schrijven als machten met breuk-exponenten.

Voorbeelden: $\sqrt{x^3} = \left(x^3\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$ en $\sqrt[3]{y^4} = \left(y^4\right)^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{4}{3}}$

Schrijf als macht met breuk-exponent: $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{b^2}$; $\sqrt[4]{c^5}$; $\sqrt{\sqrt{d}}$

3.20 Bereken zonder rekenmachine en gebruik de wetenschappelijke notatie voor je antwoord:

$\sqrt{1,44\cdot 10^{16}}$; $\sqrt[3]{8\cdot 10^{18}}$; $\left(8\cdot 10^{18}\right)^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[4]{\left(625\cdot 10^{12}\right)^{3}}$

3.21 Een regel als $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ is een bijzonder geval van regel (3.3) voor het rekenen met machten. Immers: $(ab)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}$.
Verklaar de volgende regels voor het rekenen met wortels uit de regels (3.1) t/m (3.5):

a $\sqrt[3]{xy}=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}$ b $\sqrt[3]{\sqrt[4]{p}}=\sqrt[12]{p}$

c $\sqrt{ab^2}=b\sqrt{a}$ d $\sqrt[4]{c^5}=c\sqrt[4]{c}$

3.22 a Verklaar dat voor elke $x\geq 0$ geldt: $x^{1\frac{1}{2}}=x\sqrt{x}$.

b Teken op het interval [0,4] in één figuur de grafieken van $y=x$, $y=x^2$ en $y=x^{1\frac{1}{2}}$.

3.23 Schrijf als macht van *x* met een breuk-exponent:

$x^2\sqrt{x}$; $x\cdot\sqrt[3]{x}$; $\sqrt[3]{x^9}$; $\sqrt{x\sqrt{x}}$

3.24 a. Teken de grafiek van $y=x^{\frac{1}{2}}$ op het interval [0,9].

b Vergelijk de grafiek met die van $y=x^2$ op het interval [0,3]. Wat is je conclusie?

c Los *x* op uit $x^{\frac{1}{2}}>2$.

Een voorbeeld van een vergelijking waarin machten met gebroken exponenten staan:

$x^{\frac{1}{2}}=2x^{\frac{1}{3}}$

Oplossing: Breng zowel linker- als rechterlid tot de macht 6 om de breuk-exponenten weg te werken:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^6=\left(2x^{\frac{1}{3}}\right)^6$$

$$x^3=64x^2$$

$$x^3-64x^2=0$$

$$x^2(x-64)=0$$

$$x=0\vee x=64$$

3.25 Los de volgende vergelijkingen op voor $x\geq 0$:

a $x^{\frac{2}{3}}=4$ e $x^2=8\sqrt{x}$

b $x^{1\frac{1}{2}} = 4$

c $x^{1\frac{1}{2}} = 4x$

d $x^{1\frac{1}{2}} = 4x^2$

f $x\sqrt{x} = 1$

g $\dfrac{x}{100} = \sqrt[3]{x}$

h $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

3.26 Van een kubus is de ribbe *r*, de totale oppervlakte *O* en de inhoud *V*.

a Druk *O* en *V* uit in *r*.

b Bewijs: $O = 6 \cdot V^{\frac{2}{3}}$

c Van een kubus is de oppervlakte 42 cm^2. Bereken het volume (in één decimaal nauwkeurig).

3.27 Het warmteverlies van een dier is afhankelijk van de huidoppervlakte. Biologen zijn daarom geïnteresseerd in het verband tussen de huidoppervlakte *H* (in m^2) en het lichaamsgewicht *G* (in kg) voor de verschillende diersoorten. Dat verband wordt gegeven door de formule $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. De constante *c* is per diersoort verschillend en afhankelijk van de vorm van het dier. Een paar voorbeelden:

koe: $c = 0,09$ egel: $c = 0,075$

aap: $c = 0,12$ muis: $c = 0,09$

Voor de koe en de muis geldt dus bij benadering dezelfde formule: $H = 0.09 \cdot G^{\frac{2}{3}}$.
Een koe weegt gemiddeld 500 kg en een muis 0,05 kg.

a Bereken de gemiddelde huidoppervlakte van de koe en de muis.

b Hoe verhouden zich de lichaamsgewichten van koe en muis? En hoe hun huidoppervlakten?

c Grote dieren kunnen gemakkelijker extreme kou verdragen dan kleine dieren. Hoe verklaar je deze bewering?

3.28 Voor de mens heeft een zekere Dubois een formule opgesteld die het verband aangeeft tussen huidoppervlakte, lichaamsgewicht en lichaamslengte.
Die formule luidt: $H = 0,007 \cdot G^{0,425} \cdot L^{0,725}$.
Hierbij geldt:
H = huidoppervlakte in m^2
G = gewicht in kg.
L = lengte in m

a Bereken volgens deze formule je eigen huidoppervlakte.

b Iemand heeft een huidoppervlakte van 2 m^2 en is 80 kg zwaar. Hoe lang is die persoon?

c Een manier om de exponenten 0,425 en 0,725 in de formule te controleren is de volgende:
Het is aannemelijk dat *H* evenredig is met L^2 en dat *G* evenredig is met L^3 (dus $H = c \cdot L^2$ en $G = d \cdot L^3$).
Vul deze uitdrukkingen in de formule in en controleer of de exponenten van de machten van *L* in linker- en rechterlid hetzelfde zijn.

3.1.3 Machten met negatieve exponenten

We hebben hiervoor kunnen zien hoe er betekenis kan worden gegeven aan machten met een gebroken exponent. Exponenten kunnen ook *negatief* zijn. Uitgangspunt is daarbij dat de regels (3.1) t/m (3.5) (zie de tweede bladzijde van dit hoofdstuk) geldig blijven.

3.29 Kijk eerst wat je (grafische) rekenmachine ervan zegt:

a Bereken met behulp van de ^-knop: 10^{-1}; 5^{-1}; 4^{-1}; $0{,}5^{-1}$.

b Wat, denk je, is de betekenis van a^{-1}?

c Bereken ook: 10^{-2}; 5^{-2}; 4^{-2}; $0{,}5^{-2}$.

d Wat zal de betekenis van a^{-2} zijn?

3.30 Wat je in opgave 3.28 ontdekt hebt, is in overeenstemming met regel (3.1). Volgens die eigenschap zou moeten gelden:

$a^{-1} \cdot a^{1} = a^{-1+1}$

$a^{-2} \cdot a^{2} = a^{-2+2}$

$a^{-3} \cdot a^{3} = a^{-3+3}$

enzovoort.

a Hoe kun je hieruit de betekenis van a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, enzovoort afleiden?

b Waarom moet *a* voldoen aan de beperking $a \neq 0$?

3.31 Bekijk regel (3.2): $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Kies $m = 5$ en $n = 8$.

Welke conclusie kun je trekken? Is dat in overeenstemming met wat je in de vorige opgave hebt ontdekt?

3.32 Bekijk regel (3.3): $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$. Kies $m = -2$ en $n = -1$.

Laat zien dat het resultaat klopt met wat in opgave 3.29 over de betekenis van “tot de macht -2” en “tot de macht -1” hebt ontdekt.

We maken nu de volgende afspraak:

Voor $a \neq 0$ geldt:

a^{-1} is het omgekeerde van *a*, ofwel $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

a^{-2} is het omgekeerde van *a*, ofwel $a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$

a^{-3} is het omgekeerde van *a*, ofwel $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$

enzovoort.

Door deze afspraak blijven de regels (3.1) t/m (3.5) geldig.

3.33 Bekijk onderstaande ketting:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & \times 3 & & \times 3 & & \times 3 & & \times 3 & & \times 3 & & \times 3 & & \times 3 & \\ \ldots & \rightarrow & \ldots & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 9 & \rightarrow & 27 & \rightarrow & 81 & \rightarrow & 243 \\ 3^{-2} & & 3^{-1} & & 3^{0} & & 3^{1} & & 3^{2} & & 3^{3} & & 3^{3} & & 3^{4} \end{array}$$

Vul de passende breuken in: $3^{-1} = \ldots$; $3^{-2} = \ldots$; $3^{-3} = \ldots$; $3^{-4} = \ldots$; $3^{-5} = \ldots$;

3.34 a. Bereken eerst zonder rekenmachine en controleer daarna je antwoord: 5^{-3}; 10^{-3}; 2^{-5}; 2^{-10}.

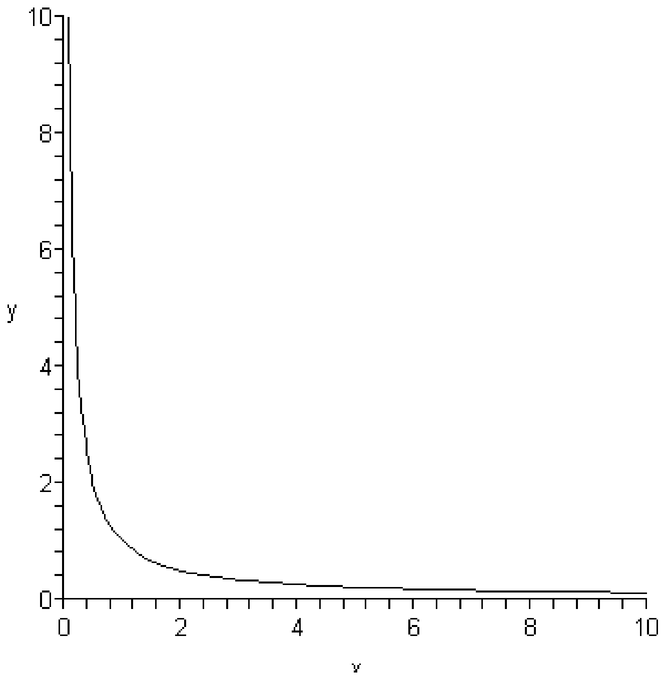
b Vul in: $\frac{1}{64} = 2^{\cdots}$; $\frac{1}{625} = 5^{\cdots}$; $\frac{1}{121} = 11^{\cdots}$; $\frac{2}{3} = 1,5^{\cdots}$

c Vul in: $0,0001 = 10^{\cdots}$; $0,125 = 2^{\cdots}$; $0,04 = 5^{\cdots}$; $0,008 = 5^{\cdots}$

3.35 Vereenvoudig:

$$\left(\frac{a^2b}{ab^2}\right)^{-1}; \qquad \frac{\left(x^2y\right)^{-1}}{\left(xy^2\right)^{-2}}; \qquad \frac{\left(c^{-1}d\right)^{-3}}{c^2d^{-4}}; \qquad \frac{\left(\left(p^{-1}\right)^{-2}\right)^{-3}}{p^{-1}\cdot p^{-2}\cdot p^{-3}}$$

3.36 Hieronder zie je de grafiek van $y = x^{-1}$ voor $x > 0$



a Voor welke $x \neq 0$ geldt: $x^{-1} > 100$?

b Voor welke $x \neq 0$ geldt: $0 < x^{-1} < 0,0001$?

De x-as en de y-as zijn de zogenaamde asymptoten van de grafiek van $y = \frac{1}{x}$.

De grafiek nadert tot de x-as (horizontale asymptoot) als x heel groot wordt en nadert tot de y-as (vertikale asymptoot) als x heel dicht bij 0 komt.

3.37 Teken de grafiek van $y = x^{-2}$ voor $x > 0$. Welke asymptoten heeft de grafiek?

Als je 3^{-25} uitrekent op je rekenmachine komt er 1.18023539 E -12. Dit is weer een voorbeeld van de wetenschappelijke notatie en betekent: $1{,}18123539 \times 10^{-12}$.
Het eerste deel is een getal tussen 1 en 2, het tweede deel een macht van 10. Deze notatie kan op deze wijze worden gebruikt om getallen, die dicht bij 0 liggen overzichtelijk te noteren.
Nog een voorbeeld: $0{,}000000000183 = 1{,}83 \times 10^{-10}$.

3.38 De massa van één elektron is $9{,}1 \cdot 10^{-28}$ gram. Een waterstofatoom heeft een massa die ongeveer 200 keer zo groot is als de massa van een elektron. Bereken de massa van een waterstofatoom en geef je uitkomst in de wetenschappelijke notatie.

Tot nu toe zijn de negatieve exponenten geheel geweest. Uit regel (3.1) volgt onmiddellijk hoe je ook machten met negatief-gebroken exponent zinvol kunt definiëren.
Bijvoorbeeld: $a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^0 = 1$, dus $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.
Evenzo: $a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$
Om problemen met wortels te voorkomen, stellen we voor het grondtal de beperkende voorwaarde: $a > 0$.
Toelichting: Rekenen met machten waarbij het grondtal negatief is, kan tot een tegenspraak leiden:
$(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$ bestaat niet, maar $(-4)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2$. Vandaar dat negatieve grondtallen niet zijn toegestaan.
Als we met gehele machten rekenen, mag het grondtal uiteraard wel negatief zijn, zo is:
$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$.
Voor de gedefinieerde machten gelden weer de regels (3.1) t/m (3.5).

3.39 Vereenvoudig:

$$\frac{\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot a}{a^{\frac{1}{3}}}\ ; \quad \frac{\left(x^{-3}y^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{x\sqrt{x}}\ ; \quad \left(\frac{p\sqrt{q}}{q\sqrt{p}}\right)^{-2}\ ; \quad \frac{u^{-\frac{3}{5}}v^{\frac{1}{5}}}{\left(u^2v\right)^{-\frac{4}{5}}}$$

3.40 Een vorm als $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$ kan worden geschreven als één macht met x als grondtal.

Dat gaat zo: $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = x^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{1\frac{2}{3}}$

Herleid elk van de volgende vormen tot één macht met x als grondtal:

$$\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x}\ ; \quad x\sqrt{x^5}\ ; \quad \sqrt{\frac{1}{x^3}}\ ; \quad \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}\ ; \quad \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}}{x}\ ; \quad \sqrt{x^3\sqrt{x}}$$

3.41 De (normale) hartslag S van een rustend zoogdier is afhankelijk van het lichaamsgewicht G van het dier. Die afhankelijkheid wordt uitgedrukt door een formule met de gedaante: $S = k \cdot G^{-\frac{1}{4}}$.

Hierin is S het aantal slagen per minuut, G het gewicht in kg. De bioloog Stahl vond voor de constante k de waarde 241.

a Het gewicht van een volwassen olifant is 4000 kg. Hoeveel slagen per minuut maakt het hart van een slapende volwassen olifant?

b Hoeveel weegt een zoogdier dat in rustende toestand een 2 keer zo snelle hartslag heeft als de in a. bedoelde olifant?

3.1.4 Samenvatting

In deze paragraaf is de betekenis van x^p (p geheel of gebroken, positief of negatief) uit de doeken gedaan.

Voorbeelden van machten van x:

$x^2 = x \cdot x$; $\quad x^3 = x \cdot x \cdot x$; $\quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$;

$x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ $\quad x^{-1} = \frac{1}{x}$ $\quad x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

De belangrijkste eigenschappen voor het rekenen met machten zijn:

1) $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$

2) $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$

3) $\left(x^p\right)^q = x^{pq} = \left(x^q\right)^p$

4) $(xy)^p = x^p \cdot y^p$

5) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^p = \dfrac{x^p}{y^p}$

Deze eigenschappen zijn in elk geval geldig voor *positieve* grondtallen x en y. Als de exponenten p en q geheel zijn mogen x en y ook negatief zijn.

3.42 Schrijf als macht met 2 als grondtal:

$2\sqrt{2}$; 64^{-1} ; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{128}$; $\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$; 1

3.43 Los x op uit:

$x^{-1} = 3$; $x^{1\frac{1}{2}} = 1000$; $x^{-\frac{1}{2}} = 0,2$;

$x^{-2} = 0,2x^{-1}$; $x^{-2} = (0,2x)^{-1}$

3.44 Op verschillende hoogten op een seintoren is de windsnelheid gemeten. Het verband tussen de windsnelheid W (in m/sec) en de hoogte h (in m) wordt voor $2 \le h \le 250$ gegeven door de formule: $W = 2,9 \cdot h^{0,2}$.

a Bereken de windsnelheid op een hoogte van 32 meter.

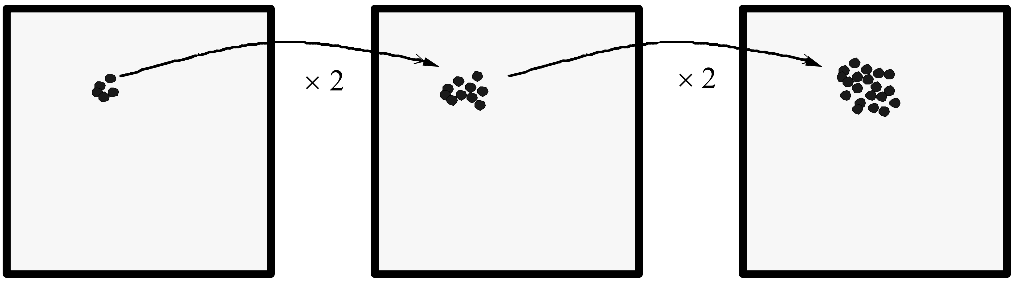
b Op welke hoogte is de windsnelheid het dubbele van de windsnelheid op het laagste meetpunt (2 meter)?

3.2 *Exponentiële functies*

3.45 In een grote vijver groeit een kwaadaardig soort waterlelie. De lelie breidt zich zo snel uit, dat elke dag de oppervlakte van het door de waterlelie overdekte deel van de vijver wordt verdubbeld. Als de lelie ongestoord kan groeien, bedekt zij in 30 dagen de gehele vijver. Daarbij zullen dan alle andere levensvormen in de vijver verstikken. Kortom een catastrofe dreigt. Geruime tijd ziet de toestand in de vijver er echter lang niet verontrustend uit en maakt de tuinman geen aanstalten om in te grijpen. Pas als de helft van de vijver is bedekt, komt hij in actie.

a. Hoeveel dagen heeft die tuinman dàn nog de tijd om te voorkomen dat de vijver geheel overwoekerd raakt?

b. En hoeveel dagen heeft hij werkeloos toegezien?



Het verhaal over de graankorrels op het schaakbord (paragraaf 3.1.1) en de vijver met het zich verdubbelende kroos (bovenstaande opgave) zijn klassieke voorbeelden van wat men *exponentiële groei* noemt. In de jaren ’70 verscheen er een rapport van een groep verontruste wetenschappers uit alle delen van de wereld (de ’Club van Rome’) getiteld: grenzen aan de groei. In dat rapport werden problemen aangesneden die nog niets aan actualiteit hebben ingeboet, integendeel. Om er een paar te noemen:

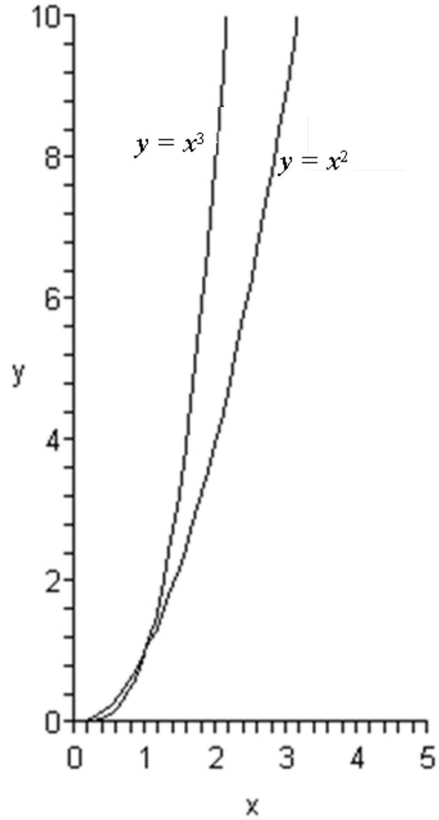
- de explosief toenemende vervuiling van het milieu
- de groei van de wereldbevolking;
- de sterk stijgende behoefte aan landbouwgrond;
- het sterk toenemende verbruik van energie.

Bij de gesignaleerde problemen is er sprake van een groei zoals die bij het waterlelieprobleem of in het verhaal van de graankorrels op het schaakbord. Het lijkt een poos mee te vallen, maar ineens rijst het de pan uit...

De groei van de waterlelie in de vijver wordt beschreven door de functie $x \to 2^x$; dit is een zogenaamde exponentiële functie.

Een kenmerk van zo’n exponentiële functie is dat de toename bij elke stap sterk wordt beïnvloed door de hoeveelheid die er al is.

Er zijn ook andere groeiprocessen waarbij de toename sterker wordt, naarmate het bereikte niveau hoger is. Denk bijvoorbeeld aan groei volgens machtsfuncties zoals: $x \to x^2$, $x \to x^3$ enzovoort.



Grafiek stijgt sneller, naarmate *y* en ook *x* groter wordt

Toch is er een wezenlijk verschil tussen een machtsfunctie als $x \to x^2$ en een exponentiële functie zoals $x \to 2^x$. Merk eerst op dat bij $x \to x^2$ het grondtal varieert en de exponent vast is; bij een exponentiële functie is het andersom, grondtal is constant, exponent varieert. We vergelijken nu de twee functies voor $x \geq 0$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

Tabel bij $y = x^2$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Tabel bij $y = 2^x$

3.46 a Controleer beide tabellen.

b Teken voor $0 \leq x \leq 7$ in één figuur de grafieken van $y = x^2$ en $y = 2^x$. Neem als eenheid op de *x*-as 1 cm en op de *y*-as 1 mm.

c Voor welke x tussen 0 en 4 geldt: $2^x < x^2$? Lees je antwoord uit de figuur en controleer de ongelijkheid voor een drietal waarden van x.

3.47 In de tabel en in de grafiek zie je dat, het begin niet meegerekend, 2^x sneller groeit dan x^2. Zo groeit x^2 op het interval [10, 11] met 21%, terwijl 2^x op datzelfde interval met 100% toeneemt.
Hoe groot zijn de groeipercentages van x^2 en 2^x op het interval [100,101]?

Er zijn verschillende manieren om de groei van twee functies te vergelijken. In opgave 2 heb je dat gedaan door het groeipercentage te nemen. Een ander instrument is de groeifactor.
Op het interval [1, 2] groeit x^2 van 1 naar 4, dat is met een groeifactor 4;
op [2, 3] is de groeifactor van x^2 gelijk aan $\frac{9}{4} = 2,25$.
op [2, 4] is de groeifactor van x^2 gelijk aan $\frac{16}{4} = 4$, enzovoort.

3.48 a Hoe groot is de groeifactor van x^2 op het interval [10, 11] ?
En op het interval [100, 101]?

b Op welk interval [100, p] is de groeifactor van x^2 gelijk aan die op het interval [10, 11]?

c Toon aan dat de groeifactor van x^2 op het interval [x, x + 1] gelijk is aan $1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$

d Wat gebeurt er met de groeifactor van x^2 op [x, x + 1] als x heel groot wordt?

e Wat is de groeifactor van e Wat weet je van de groeifactor van 2^x op de intervallen [1,2], [2,3], [3,4]; enzovoort.?

f Wat is de groeifactor van f Wat gebeurt er met de groeifactor van 2^x op [x, x + 1] als x heel groot wordt?

3.49 Vergelijk de functies $f(x) = x^{10}$ en $g(x) = 10^x$.

a Bereken de groeifactoren van f op [1,2], [2,3], [3,4], [4,5] en [5,6].

b Dezelfde opdracht voor g.

Als je bij een machtsfunctie (zoals $x \to x^2$ of $x \to x^{10}$) de groeifactor meet over een aantal gelijke intervallen, dan zie je dat die groeifactor afneemt bij toenemende x.

Kenmerkend voor een exponentiële functie (zoals $x \to 2^x$ of $x \to 10^x$) is dat de groeifactor over gelijke intervallen constant is.

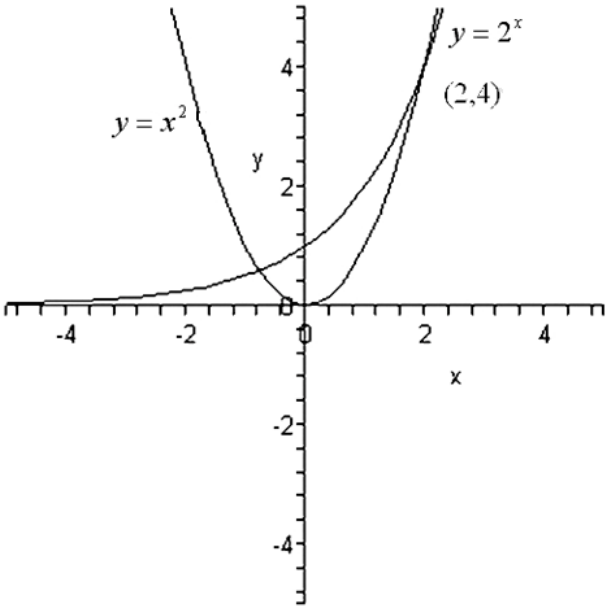
3.50 De grafiek van $y = 2^x$ (opgave 3.45) kun je voortzetten naar links (dus voor negatieve x).

a Teken de grafiek voor $-3 \leq x \leq 3$ (neem op de x-as en y-as nu dezelfde eenheid).

b Hoeveel eenheden moet je vanuit 0 op de x-as naar links gaan om een y-waarde kleiner dan 0,001 te vinden?

c Welke asymptoot heeft de grafiek van $y = 2^x$ (als x niet aan grenzen gebonden is)?

3.51 In opgave 3.45 heb je gezien dat de grafieken van $y = x^2$ en $y = 2^x$ rechts van de y-as elkaar in twee “mooie” punten snijden: (2,4) en (4,16). Links van de y-as bevindt zich nog een derde snijpunt.



Bepaal met behulp van je rekenmachine de x-coördinaat van dat snijpunt in 2 decimalen nauwkeurig.

Opmerking: Dat snijpunt is niet exact met algebra te bepalen.

3.52 a Teken met je GR in één figuur de grafieken van $y = 2^x$ en $y = 3^x$.

b Welk snijpunt hebben die grafieken?

c Lees de oplossingen van de volgende ongelijkheden rechtstreeks af uit het plaatje:

$2^x < \frac{1}{8}$ $2^x < \frac{1}{8}$; $\quad \frac{1}{9} < 3^x < 3$; $\quad 2^x < 3^x$; $\quad 3^x - 2^x \geq 1$

3.53 $f(x) = 2 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^x$ voor $-3 \leq x \leq 3$

a Neem onderstaande tabel over en vul in:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

b Wat is de groeifactor van *f* over de intervallen [-3,-2], [-2,-1], …. , [2,3]

c Teken de grafiek van *f*.

3.54 a Teken in één figuur de grafieken van $f(x) = 3 \cdot 2^x$ en $g(x) = 2 \cdot 3^x$ (Neem op de *x*-as de schaal 2 keer zo groot als op de *y*-as).

b Wat is de groeifactor van *f* op een interval met lengte 1?

c Voor welke *f* geldt: $f(x) < g(x)$?

3.55 a Teken in één figuur de grafieken van $y = 2^x$ en $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

b Die grafieken zijn elkaars spiegelbeeld. Welke lijn is de spiegelas?

c Voor welke *x* geldt: $2^x \geq 32$? En voor welke *x* geldt: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 32$?

3.56 $f(x) = 2^x + 1$ en $g(x) = 2^x - 3$.

a Teken in één figuur de grafieken van *f* en *g*.

b Welke asymptoten hebben die grafieken?

3.3 *Groei en verval*

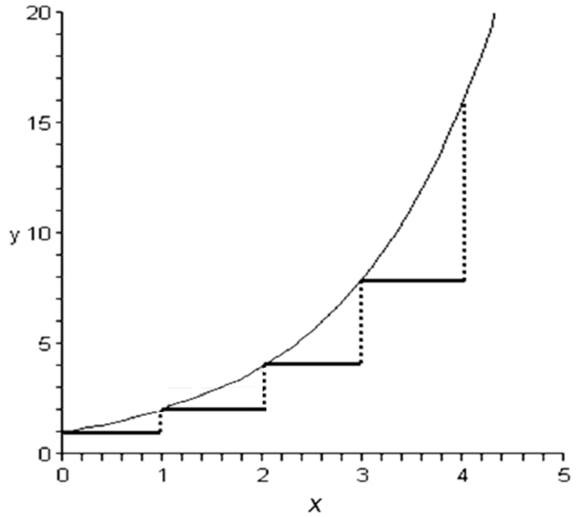
Exponentiële functies spelen een belangrijke rol bij het onderzoek naar groei of verval. Daar gaat deze paragraaf over. We beginnen met een opgave:

3.57 Onder gunstige omstandigheden deelt een bacterie van een zeker type zich ieder etmaal in tweeën: $1 \to (24u) \to 2 \to (24u) \to 4 \to (24u) \to 8$ enzovoort.

a Hoeveel bacteriën brengt een bacterie voort in één week?

b En hoeveel in t etmalen (t geheel)?

Bij de bacteriën uit opgave 3.56 vindt er ieder etmaal plotseling verdubbeling van het aantal plaats. De grafiek van deze "sprongsgewijze" groei zie je hieronder. In dezelfde grafiek zie je de toename van het aantal bacteriën wanneer de groei continu zou verlopen. De groei naar aantal verloopt sprongsgewijs, maar de groei naar volume of gewicht gaat niet sprongsgewijs maar geleidelijk.



Continue versus sprongsgewijze groei

3.58 Blaasontsteking bij mensen wordt veroorzaakt door coli-bacteriën (Eschirichia Coli). Een kolonie van zulke bacteriën groeit snel: in een tijd van 20 minuten is hun aantal verdubbeld. Stel bij een zeker persoon bevonden zich op het tijdstip $t = 0$ zo'n 1000 coli-bacteriën in de urinewegen. Het aantal bacteriën dat hij na t uur bij zich draagt noemen we $N(t)$.

a Verklaar: $N(t) = 1000 \cdot 8^t$

b De infectie wordt pas door de drager opgemerkt als hij zo'n 10^8 bacteriën bij zich heeft. Ga na dat dit ruim $5\frac{1}{2}$ uur na $t = 0$ het geval is.

c Bij het legen van een volle blaas wordt 90% van de 10^8 bacteriën uitgestoten. Hoeveel tijd heeft de bacteriekolonie hierna nodig om weer op het peil van 10^8 te komen?

Omdat het moeilijk is om alleen door middel van veel drinken van een blaasontsteking af te komen, wordt meestal een medicijn gebruikt. Stel dat door het gebruik van het medicijn de omvang van een bacteriekolonie elk uur met 65% afneemt. $M(t)$ is het aantal bacteriën, t uur na het eerste gebruik van het medicijn en uitgaande van 10^8 bacteriën op $t = 0$.

d Verklaar de formule: $M(t) = 10^8 \cdot 0,35^t$

e Na hoeveel uur is de bacterie uitgeroeid? (bepaal met je rekenmachine wanneer voor het eerst geldt dat $M(t) < 1$).

In opgave 3.57 is er zowel sprake van *exponentiële groei* (N als functie van t) als van *exponentieel verval* (M als functie van t). In het eerste geval is er sprake van een groeifactor 8 per uur, in het tweede geval is de "groeifactor" 0,35 per uur. Men spreekt in het laatste geval ook van negatieve groei .

3.59 Een bekend voorbeeld van negatief-exponentiële groei is de afname van de stralingsintensiteit van een radioactieve stof. Bij de kernramp van Tsjernobyl (1986) kwamen vooral de radioactieve elementen jodium (131), cesium (137) en strontium (91) vrij.

a Jodium (131) heeft de eigenschap dat de straling snel afneemt, namelijk met 8,3% per 24 uur. Toon aan dat de straling na 8 dagen gehalveerd is. Men zegt: de *halveringstijd* (of *halfwaardetijd*) van jodium (131) is 8 dagen.

b Van cesium en strontium is bekend dat het schadelijke effect veel langer in stand blijft: de halveringstijd is zo'n 30 jaar! De straling van beide stoffen gedraagt zich volgens de formule: $S(t) = S(0) \cdot r^t$ (t is de tijd in jaren). Bepaal r.

c Met hoeveel % per jaar neemt de straling van die stoffen af?

Als na elke dag de hoeveelheid bacteriën in een kweekje $1\frac{1}{2}$ keer zo groot wordt, geldt $B(t) = B_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$, waarbij B_0 het aantal bacteriën is op tijdstip $t = 0$ en t in dagen is uitgedrukt (groeifactor $\frac{3}{2}$). Drukken we t in uren uit, dan is

$$B(t) = B_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{24}} = B_0 \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{24}} \right)^t = B_0 (1,0170379)^t$$

De groeifactor is nu 1,0170379.

3.60 In 1960 telde de wereldbevolking circa 3 miljard mensen. In 1970 was dat aantal gegroeid tot 3,6 miljard. Veronderstel dat de wereldbevolking groeit volgens een exponentiële functie.

a Hoe groot is de groeifactor per 10 jaar?

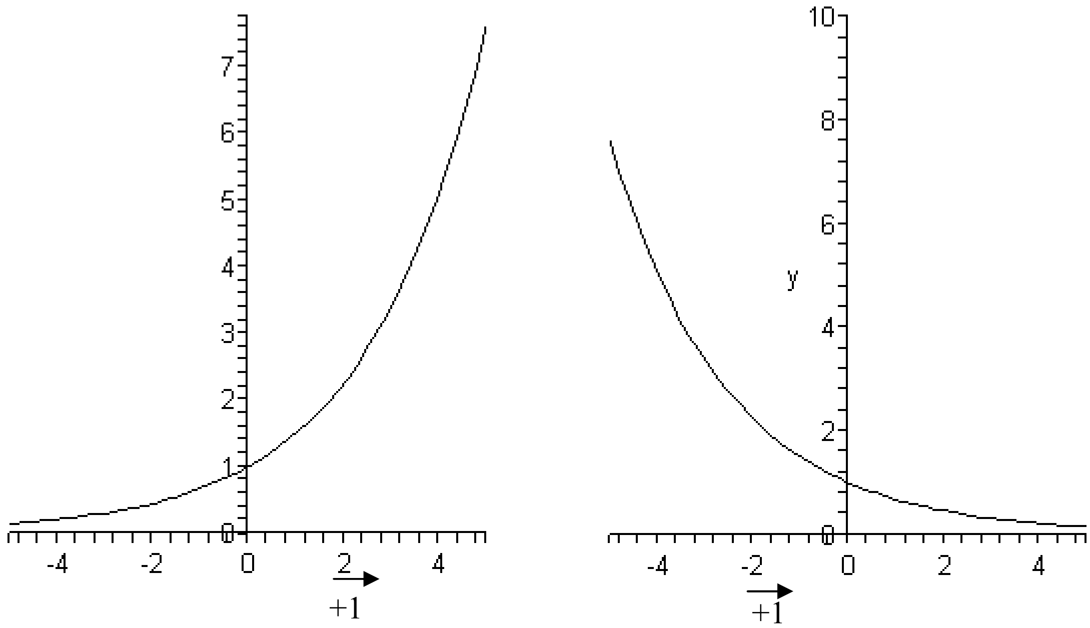
b Komt een groei van 20% per 10 jaar op hetzelfde neer als een groei van 2% per jaar? Verklaar je antwoord.

c Laat het aantal mensen op aarde (in miljarden) op tijdstip t gelijk zijn aan $N(t)$. (t is de tijd in decennia (perioden van 10 jaar), $t = 0$ komt overeen met 1 januari 1960). Druk $N(t)$ uit in t.

d Bekijk via zoekfuncties op het internet of de wereldbevolking in de jaren 1980, 1990 en 2000 inderdaad overeenkomstig de formule voor $N(t)$ is toegenomen. Indien je een afwijking constateert, pas dan de groeifactor aan en reken daarmee verder.

3.3.1 Samenvatting

Functies van het type $y = c \cdot p^x$ (c, p constant, $p > 0$ en $p \neq 1$) worden exponentiële functies genoemd. We onderscheiden twee gevallen (we nemen voor c even 1):



Het grondtal p is de groeifactor over een interval met lengte 1.

De constante c in de formule $y = c \cdot p^x$ is de functiewaarde bij $x = 0$ (soms "beginwaarde" genoemd).
De grafiek van $y = c \cdot p^x$ heeft een horizontale asymptoot.
Dat betekent: De grafiek benadert de x-as willekeurig dicht bij afnemende x (in het geval $p > 1$) of bij toenemende x (in het geval $0 < p < 1$).

3.61 a Teken de grafiek van f voor $-2 \leq x \leq 2$ (Neem als eenheid op de x-as 1 cm en op de y-as 1 mm).

b Als je de grafiek van f spiegelt t.o.v. de y-as, krijg je de grafiek van een functie $g(x) = a \cdot b^x$. Bepaal a en b.

c Voor welke x geldt: $f(x) \geq 250$? En voor welke x geldt: $g(x) \geq 250$?

d De functie f beschrijft een exponentieel groeiproces. Controleer dat in een tijdsinterval met lengte 0,43 de groeifactor ongeveer 2 is (Men zegt: de "verdubbelingstijd" is 0,43).

e Hoe lang is de "halveringstijd" van de functie g?

3.4 *Exponentiële grafieken en vergelijkingen*

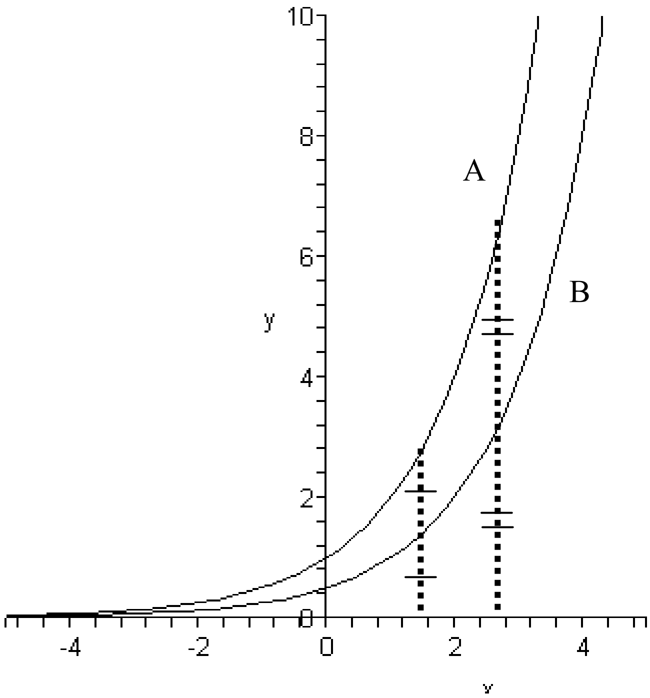
Bij het tekenen van grafieken en oplossen van vergelijkingen waarbij exponentiële functies optreden, kan vaak gebruik worden gemaakt van de "exponentiële"eigenschappen:

1) $p^x \cdot p^t = p^{x+t}$

2) $\dfrac{p^x}{p^t} = p^{x-t}$

3) $\left(p^x\right)^t = p^{xt}$

4) $(pq)^x = p^x \cdot q^x$

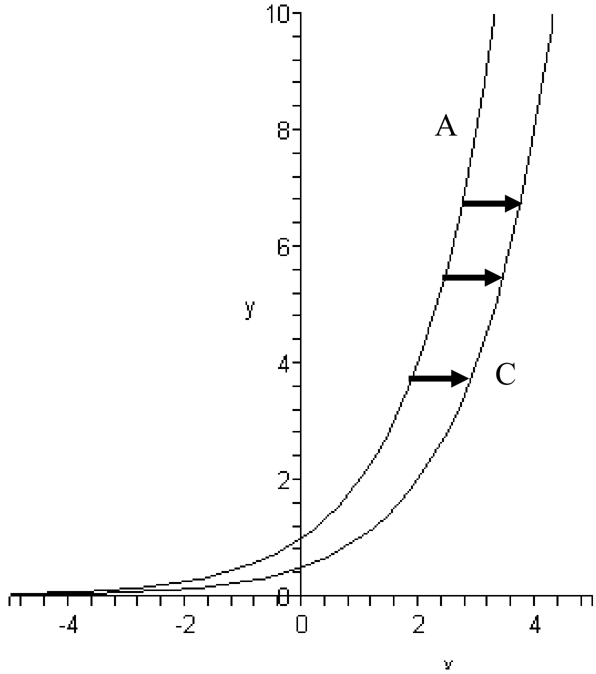


Voorbeeld

Uit de grafiek van $y = 2^x$ (A) kan de grafiek van $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$ (B) worden verkregen door de punten van A in verticale richting met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.

Uit de grafiek van $y = 2^x$ (A) kan de grafiek van $y = 2^{x-1}$ (C) worden verkregen door de punten van A in horizontale richting naar rechts te verschuiven.

Het lijkt erop in de plaatjes dat B en C dezelfde grafieken zijn.



Dat is ook zo. Kijk maar:

$$\frac{1}{2} \cdot 2^x = 2^{-1} \cdot 2^x$$
$$= 2^{-1+x}$$
$$= 2^{x-1}$$

3.62 $f(x) = 2^x$ en $g(x) = \frac{1}{8} \cdot 2^x$

a Teken in één figuur de grafieken van *f* en *g*.

b De grafiek van *g* is op te vatten als het resultaat van een horizontale verschuiving, toegepast op de grafiek van *f*. Toon dit aan.

c Teken in dezelfde figuur ook de grafiek van $h(x) = 2^{x+1}$.

d De grafiek van *h* kan worden gevonden door de grafiek van *f* in verticale richting te vermenigvuldigen. Toon dit aan.

3.63 $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 2^{1-x}$

a Teken in één figuur de grafieken van *f* en *g*.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt van beide grafieken.

3.64 $f(x) = 4^{-x}$ en $g(x) = 2^{x+1}$

a Teken in één figuur de grafieken van *f* en *g*.

b Het snijpunt van beide grafieken heeft de *x*-coördinaat $x = -\frac{1}{3}$. Controleer dit door substitutie.

Het opsporen van het snijpunt van de grafieken van *f* en *g* uit opgave 3.63 leidt tot de exponentiële vergelijking $4^{-x} = 2^{x+1}$. Bij het oplossen van een dergelijke vergelijking is het zaak om linker- of rechterlid zo te herleiden dat de grondtallen gelijk worden. Hier komt er dan: $\left(2^2\right)^{-x} = 2^{x+1} \Rightarrow 2^{-2x} = 2^{x+1}$.
Nu de grondtallen gelijk zijn moeten ook de exponenten gelijkgemaakt worden, dus

$$-2x = x+1 \Rightarrow$$
$$-3x = 1 \Rightarrow$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

3.65 Werk in elk van de volgende vergelijkingen er naartoe dat in linker- en rechterlid machten van hetzelfde grondtal komen. Los vervolgens de vergelijking op door de exponenten aan elkaar gelijk te stellen.

a	$16^x = \frac{1}{2}$	e	$10^x = 100^{1-x}$
b	$16 \cdot 2^x = \sqrt{2}$	f	$100^{2x-5} = 1000^{1-3x}$
c	$4 \cdot 2^x = 8 \cdot 2^{-x}$	g	$25^{2x} = 125$
d	$4^{x+1} = 8^{x-1}$	h	$0,2^x = \sqrt{5} \cdot 5^x$

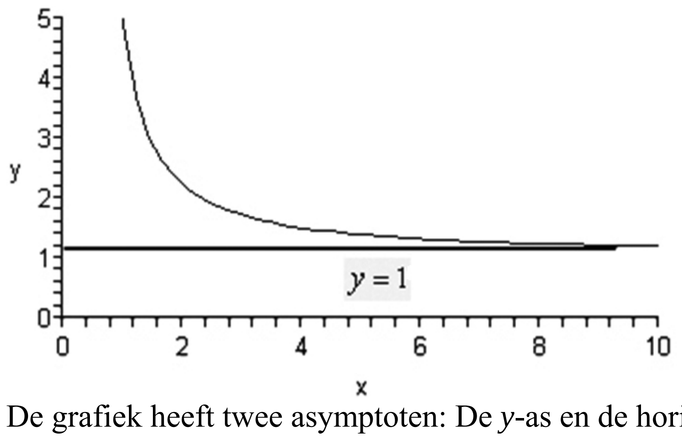
3.66 a Teken in één figuur de grafieken van $f(x) = 2^{x+3}$ en $g(x) = 0,25^x$.

b De grafieken van *f* en *g* snijden de lijn $y = 128$ respectievelijk in A en B.

c Bereken de lengte van AB.

d Voor welke *x* geldt $f(x) < g(x)$?

3.67 Hieronder zie je de grafiek van $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$ voor $x > 0$.



De grafiek heeft twee asymptoten: De *y*-as en de horizontale lijn door (0,1).

a Hoe kun je dit verklaren?

b Los x op uit $f(x) = \sqrt{5}$.

c Verklaar: Als x de negatieve getallen doorloopt, dan bereikt $f(x)$ alle waarden tussen 0 en 1.

d Teken de grafiek van f voor $x < 0$

3.68 Teken de grafiek van $f(x) = 2^{\sin x}$ voor $0 \le x \le 4\pi$ op je grafische rekenmachine.

a Welk interval is het bereik van f?

b Voor welke x tussen 0 en 4π geldt: $f(x) = \sqrt{2}$?

c Teken de grafiek van $g(x) = 3^{\cos x}$ voor $-2\pi \le x \le 2\pi$.

d Voor welke x tussen -2π en 2π geldt: $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$?

3.4.1 Samenvatting

De eigenschappen die gebruikt worden bij de "algebra" van exponentiële functies zijn:

1) $p^x \cdot p^t = p^{x+t}$

2) $\dfrac{p^x}{p^t} = p^{x-t}$

3) $\left(p^x\right)^t = p^{xt}$

4) $(pq)^x = p^x \cdot q^x$

Bij exponentiële vergelijkingen is het streven gericht op het gelijkmaken van de grondtallen. Daarna worden de exponenten aan elkaar gelijk gesteld.

Opmerking: We kunnen exponentiële vergelijkingen vaak ook oplossen met behulp van logaritmen. Zie hiervoor de volgende paragrafen.

3.69 $f(x) = 3^{x+1}$ en $g(x) = 3^x$

a Teken in één figuur de grafieken van f en g.

b Teken in dezelfde figuur ook de grafieken van de verschilfunctie $v(x) = f(x) - g(x)$.

c De functie v is ook een exponentiële functie met grondtal 3: $v(x) = c \cdot 3^x$. Hoe groot is c?

d Los x op uit: $3^{x+1} - 3^x = 162$.

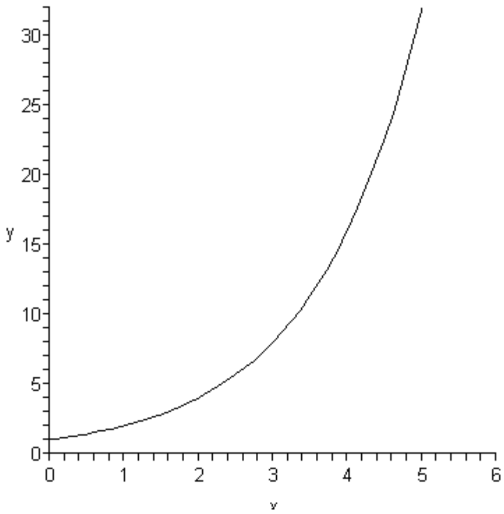
3.70 Los elk van de volgende vergelijkingen op:

a $36^{x+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{x-2}$ c $5^x = 25^{\sqrt{x}}$

b $6^{\frac{1}{x}} = 6\sqrt{6}$ d $5^{\frac{x+2}{x}} = 125$

3.5 *Logaritmen*

Hiernaast zie je de grafiek van een exponentieel groeiende waterplant in een vijver, uitgaande van 1 m^2 waterplant. Het oppervlak (in m^2) dat de waterplant inneemt wordt voorgesteld door *y*; de tijd (in weken) door *x*.
Zoals je in de grafiek kunt zien is de verdubbelingstijd van de waterplant 1 week.



a Uit de grafiek kun je schatten dat na 4,3 weken de hoeveelheid waterplanten $20\,m^2$ is. Controleer dit.

b Na hoeveel weken ligt er dus 40 m^2 waterplant in de vijver? En na hoeveel weken 80 m^2?

c Het verband tussen oppervlakte en tijd (in *weken*) kun je vastleggen in een tabel:

Oppervlakte (y)	5	10	20	40	80	160
Tijd in weken (x)			4,3			

d Wat is er opmerkelijk in de tabel?

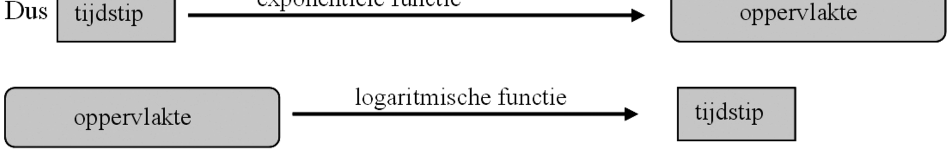
e Controleer met je rekenmachine dat na 5,6 weken ($x = 5,6$) de hoeveelheid planten, naar beneden afgerond, 48 m^2 is.

f Neem onderstaande tabel over en vul in:

Oppervlakte (y)	3	6	12	24	48	96
Tijd in weken (x)					5,6	

De functie die bij een gegeven tijdstip *x* de oppervlakte van de aanwezige hoeveelheid waterplanten (in m^2) geeft, is een exponentiële functie en wel de functie $x \to 2^x$.
De functie die bij een gegeven oppervlakte aan waterplanten het bijbehorende tijdstip geeft, is een zogenaamde *logaritmische* functie.

Dus



Voor een logaritmische functie gebruikt men de afkorting log.

Om aan te geven dat het hier om groeifactor 2 gaat, noteren we ${}^2\log$. Dus:

$$\boxed{\text{oppervlakte}} \xrightarrow{{}^2\log} \boxed{\text{tijdstip}}$$

Voorbeeld (zie opgave 70): $48 \xrightarrow{{}^2\log} 5{,}6$

ofwel ${}^2\log 48 = 5{,}6$; spreek uit: de 2-logaritme van 48 is 5,6.

3.71 Het tijdstip waarop de oppervlakte van de waterplant 64 m^2 bedraagt, is 6. Anders gezegd:De 2-logaritme van 64 is 6. Kortweg: ${}^2\log 64 = 6$.

Vul nu in: ${}^2\log 128 = \ldots$ ${}^2\log 4 = \ldots$ ${}^2\log 32 = \ldots$ ${}^2\log 8 = \ldots$

${}^2\log 2 = \ldots$ ${}^2\log 16 = \ldots$ ${}^2\log 1 = \ldots$ ${}^2\log \frac{1}{2} = \ldots$

3.72 De logaritmen in opgave 3.71 komen allemaal “mooi” uit. Meestal is dat niet zo. Bijvoorbeeld: ${}^2\log 7 = 2{,}807$.

a Controleer dat $2^{2{,}807}$ ongeveer gelijk is aan 7.

b Laat zien dat hieruit volgt: ${}^2\log 14 \approx 3{,}807$

c Bereken ook: ${}^2\log 28$; ${}^2\log 56$; ${}^2\log 3{,}5$

Uit het voorgaande volgt: $\boxed{\text{Als } {}^2\log 5 = t \text{, dan } 2^t = 5}$

Anders gezegd: $\boxed{{}^2\log 5 \text{ is de oplossing van de vergelijking } 2^t = 5}$

Het getal 2 wordt ook het *grondtal* van de logaritme genoemd.
Een regel als hierboven kan ook voor andere grondtallen worden opgeschreven.
Zo geldt: ${}^5\log 125 = t \Rightarrow 5^t = 125$. Hieruit volgt onmiddellijk: ${}^5\log 125 = 3$.

3.73 Geef bij elk van de volgende logaritmen een passende vergelijking en vervolgens een uitkomst:

logaritme	vergelijking	uitkomst
${}^5\log 25$	$5^t = 25$	
${}^3\log 81$		
${}^{10}\log 1000$		
${}^4\log 64$		
${}^6\log 1$		
${}^{10}\log 0{,}1$		
${}^2\log 0{,}25$		
${}^5\log 0{,}04$		

3.74 Geef de uitkomsten van de volgende logaritmen:

$^{7}\log 49$; $^{3}\log\sqrt{3}$; $^{\frac{1}{2}}\log 16$; $^{16}\log\frac{1}{2}$; $^{5}\log 125$; $^{0,2}\log 125$

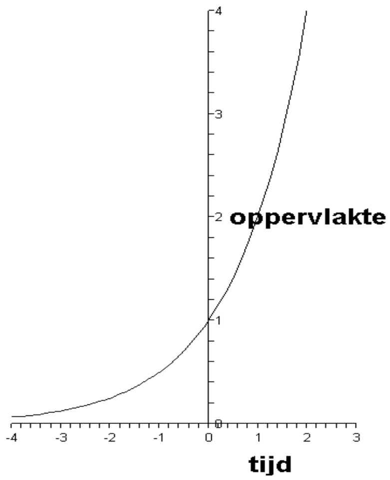
3.75 Gegeven: a is een natuurlijk getal, groter dan 1.

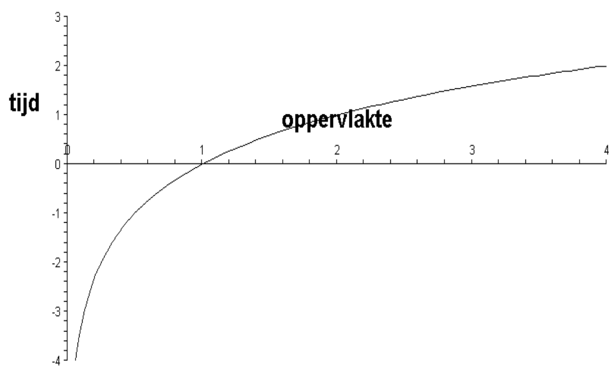
Bereken: $^{a}\log a^{2}$; $^{a}\log\sqrt[3]{a}$; $^{a}\log\frac{1}{a}$; $^{\frac{1}{a}}\log a$; $^{a^2}\log a^{3}$

Terug naar de waterplanten aan het begin van deze paragraaf. De functies "tijd $\rightarrow$ oppervlakte" en "oppervlakte $\rightarrow$ tijd" werken precies omgekeerd. We zeggen: die functies zijn elkaars inverse. Als je die functies direct na elkaar toepast op t, is de invoer gelijk aan de uitvoer.

Ofwel: $2^{^{2}\log t} = t$ en $^{2}\log\left(2^{t}\right) = t$.

De 2-logaritme neutraliseert de 2-macht. Hieronder zie je naast elkaar de grafieken van beide functies (we hebben voor de variabele "tijd" tijdelijk negatieve waarden toegestaan). De linkergrafiek is die van $opp = 2^{tijd}$ en de grafiek hieronder is die van $tijd = {}^{2}\log(opp)$.





3.76 a Teken in één figuur de grafieken van $y = 2^{x}$ en $y = {}^{2}\log x$.

b De grafieken zijn elkaars spiegelbeeld. Ten opzichte van welke as?

c Voor welke x geldt $^{2}\log x = 10$? En voor welke x geldt $^{2}\log x = -10$?

d Welke asymptoot heeft de grafiek van $y = {}^{2}\log x$?

e Wat is de uitkomst van $^{2}\log\left(2^{x}\right)$? En van $2^{^{2}\log x}$?

a Teken in één figuur de grafieken van $y = 3^x$ en $y = {}^3\log x$.

b Vul in: ${}^3\log\left(3^x\right) = \ldots$; $3^{{}^3\log x} = \ldots$

c De lijn $y = \frac{1}{3}$ snijdt de grafiek van $y = 3^x$ in A en die van $y = {}^3\log x$ in B. Bereken de lengte van lijnstuk AB.

3.77 a Teken in één figuur de grafieken van $y = 0{,}5^x$ en $y = {}^{0,5}\log x$.

b Voor welke x geldt: ${}^{0,5}\log x = 5$? En voor welke x geldt: ${}^{0,5}\log x = -6$?

c Teken de grafiek van 1^x. Verklaar waarom het niet zinvol is te spreken van een logaritme met grondtal 1.

Aan de grafieken van de opgaven 3.76 t/m 3.78 zie je dat het domein van de functies uitsluitend positieve getallen bevat. We zeggen ook: $x \to {}^2\log x$, $x \to {}^{0,5}\log x$, $x \to {}^3\log x$, enzovoorts, zijn alleen gedefinieerd voor $x > 0$. Bovendien moet het grondtal positief zijn en $\neq 1$.
Kortom:

${}^a\log x$ is alleen gedefinieerd voor $a > 0$, $a \neq 1$ en $x > 0$ $x \to {}^{0,5}\log x$

3.78 Bekijk de functie $x \to {}^2\log(x-3)$.

a Bereken de uitkomst bij de invoerwaarde respectievelijk: 11, 5, 4, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{8}$.

b Voor welke x-waarden is ${}^2\log(x-3)$ gedefinieerd?

c Teken de grafiek van $y = {}^2\log(x-3)$

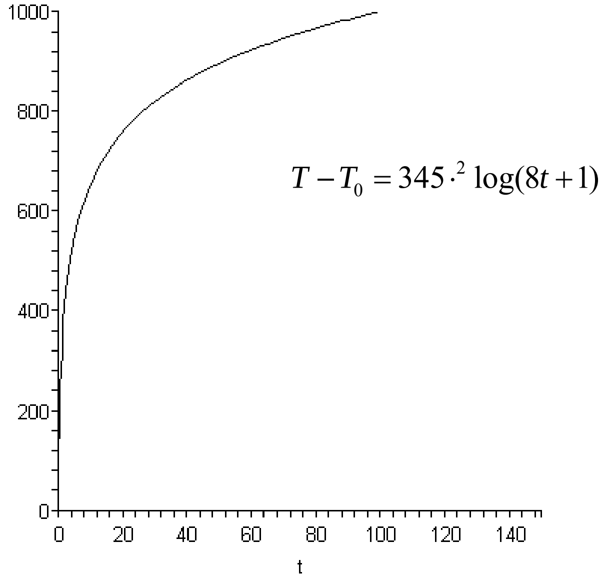
d Welke lijn is de asymptoot van die grafiek?

e Voor welke x geldt: ${}^2\log(x-3) = 4$?

3.79 Een voorbeeld van een logaritmische functie in de praktijk is de *standaard*brandkromme. Bij voorzieningen voor de brandveiligheid van een gebouw is het van belang te weten hoe de hitte bij een standaardbrand zich ontwikkelt.
Op de vertikale as is afgezet de temperatuurstijging $T - T_0$ in graden Celsius, waarbij T_0 de temperatuur is op het moment dat de brand ontstaat, en T de temperatuur zelf.
Op de horizontale as is afgezet de tijd t in minuten.

a Bekijk de formule bij de grafiek. Controleer dat $T = T_0$ op tijdstip $t = 0$.

b In de grafiek zie je dat in het vierde halve uur na het ontstaan van de brand de temperatuur met 1000° C is opgelopen. Bereken met de formule na hoeveel minuten dat is.



3.5.1 Samenvatting

De *a*-logaritme van *b* wordt genoteerd als ${}^a\log b$.

$$\boxed{\text{Als } {}^a\log b = t \text{, dan } a^t = b}$$

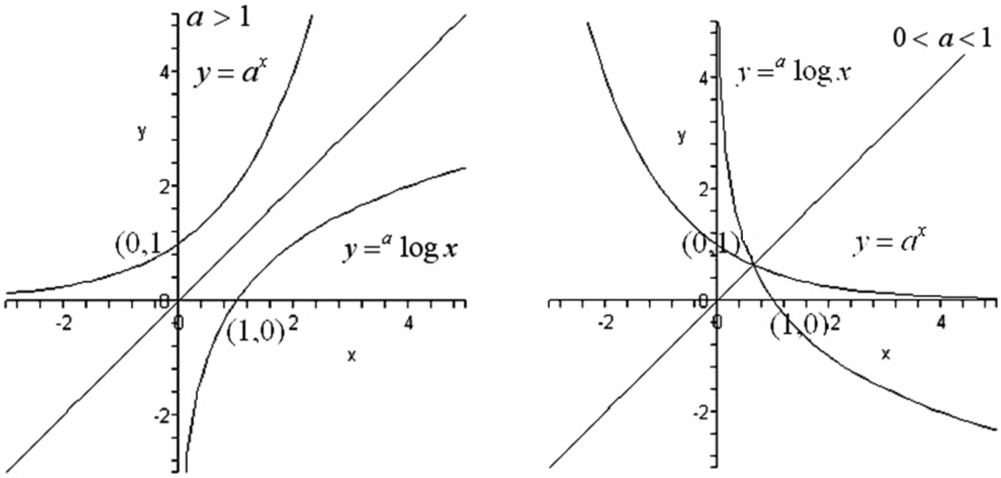
Ofwel

$$\boxed{{}^a\log b \text{ is de oplossing van de vergelijking } a^t = b}$$

${}^a\log b$ is alleen gedefinieerd als a en b beide positief zijn en als bovendien $a \neq 1$.

De functies $x \to a^x$ en $x \to {}^a\log x$ zijn elkaars inverse.

De grafieken van $y = a^x$ en $y = {}^a\log x$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de lijn $y = x$.



De grafiek van $y = {}^{a}\log x$ heeft een vertikale asymptoot, namelijk de y-as.

3.80 a Bereken: ${}^{2}\log 1$; ${}^{4}\log 2$; ${}^{8}\log 4$; ${}^{16}\log 8$.

b Bereken: ${}^{3}\log(3^{10})$; ${}^{3}\log(9^{10})$; ${}^{9}\log(3^{10})$; ${}^{9}\log(9^{10})$

c In welk punt snijdt de grafiek van $y = {}^{2}\log(x+4)$ de x-as?

d Teken de grafiek van $y = {}^{2}\log(x+4)$ en los op: ${}^{2}\log(x+4) < 4$ (denk aan de beperkende voorwaarde voor x !).

3.6 *Logaritmen met grondtal 10*

De functies $x \to a^x$ en $x \to {}^a\log x$ (grondtal $a > 0$, $a \neq 1$) behoren tot de groep standaardfuncties. Welke toetsen op de rekenmachine passen bij deze functies?

Voor de exponentiële functies kun je drie knoppen vinden:

^ Te gebruiken voor alle exponentiële functies, met welk grondtal dan ook. Bijvoorbeeld 2^0.5 (levert 1.414213562)

10^x Te gebruiken voor exponentiële functies met grondtal 10.

e^x Te gebruiken voor exponentiële functies met grondtal 2,71828….. (= **e**). We zullen zien dat grondtal e heel bijzondere eigenschappen en toepassingmogelijkheden kent (zie paragraaf 3.9.1).

Voor de logaritmische functies hebben we op de rekenmachine twee toetsen:

log Te gebruiken voor de logaritmische functies met grondtal 10.

ln Te gebruiken voor de logaritmische functies met grondtal **e**. We noemen deze logaritme ook wel de *natuurlijke* logaritme (zie paragraaf 3.9.2)

We zullen in dit hoofdstuk vrijwel uitsluitend de toets voor de 10-logaritme gebruiken. We gebruiken ook de kortere notatie $\log x$ in plaats van ${}^{10}\log x$.
Met behulp van de 10-logaritme kun je ook logaritmen met een ander grondtal berekenen, zoals je in deze paragraaf zult leren.

3.81 a Bereken met je rekenmachine het rijtje: $\log 1$, $\log 10$, $\log 100$, $\log 1000$
b Bereken ook het rijtje: $\log 5$, $\log 50$, $\log 500$, $\log 5000$

3.82 Met je rekenmachine vind je: $\log 3 \approx 0,4771$. Dat betekent: de exponent van de 10-macht met uitkomst 3 is ongeveer 0,4771. Kortweg: $10^{0,4771} \approx 3$.
a Controleer dit laatste op je rekenmachine.
b Vul passende exponenten, afgerond op 4 decimalen, in:
$2 \approx 10^{\cdots}$; $5 \approx 10^{\cdots}$; $25 \approx 10^{\cdots}$; $200 \approx 10^{\cdots}$
$0,2 \approx 10^{\cdots}$; $250 \approx 10^{\cdots}$; $1,99 \approx 10^{\cdots}$; $123456 \approx 10^{\cdots}$

a Bereken $\log 4$ $\log 3 \approx 0,4771$ $\log 4$ en vervolgens $10^{\log 4}$. Verrassing?
b Wat is de uitkomst van $10^{\log x}$?
c Bereken zonder rekenmachine**:** $10^{\log 12}$; $\left(10^{\log 5}\right)^3$; $10^{-\log 2}$; $100^{\log 3}$; $10^{\log 2}$; $10^{\log 3}$; $10^{\log 2 \cdot \log 3}$; $10^{\log 2 + \log 3}$; $10^{\log 6}$; $6^{\log 10}$

De log-toets kan worden gebruikt voor exponentiële vergelijkingen die niet “mooi” uitkomen:

Voorbeeld:

$$2^x = 6$$

Oplossing: Schrijf 2 en 6 als machten van 10.

Met je rekenmachine vind je: $2 \approx 10^{0,3010}$ en $6 \approx 10^{0,7781}$.

Bij benadering geldt nu:

$$\left(10^{0,3010}\right)^x = 10^{0,7781} \Rightarrow x = \frac{0,7781}{0,3010} = 2,2850$$

Je kunt de oplossing ook als volgt noteren:

$$2^x = 6$$

$$\left(10^{\log 2}\right)^x = 10^{\log 6}$$

$$(\log 2) \cdot x = \log 6 \Rightarrow x = \frac{\log 6}{\log 2} = \frac{0,7781}{0,3010} = 2,2850$$

$$\left(10^{0,3010}\right)^x = 10^{0,7781} \Rightarrow x = \frac{0,7781}{0,3010} = 2,2850$$

3.83 Controleer met je rekenmachine dat $2^{2,5850}$ ongeveer gelijk is aan 6.

3.84 Benader de oplossingen in 4 decimalen nauwkeurig van:

a	$3^x = 5$	d	$5^x = 0,01$
b	$5^x = 3$	e	$5^x = 0,01$
c	$10^x = 18$	f	$3^x = 60000$

3.85 Uit bovenstaand voorbeeld volgt: ${}^2\log 6 = \dfrac{\log 6}{\log 2}$.

a Toon dit aan.

b Hoe kun je ${}^a\log b$ uitdrukken in 10-logaritmen?

b Bereken in vier decimalen nauwkeurig:
${}^3\log 5$; ${}^{30}\log 50$; ${}^2\log 0,1$; ${}^{0,5}\log 0,01$

3.86 a Beantwoord zonder rekenmachine: Tussen welke twee opvolgende gehele getallen ligt ${}^2\log 100$? En ${}^3\log 100$?

b Bereken ${}^2\log 100$ en ${}^3\log 100$ met je rekenmachine.

Bij exponentiële groei is men vaak geïnteresseerd in de zogenaamde verdubbelingstijd.

Voorbeeld:
Een waterhyacint in een meer groeit exponentieel met 35% per jaar.
De groeifactor is dus 1,35 (per jaar).
In *t* jaar groeit de waterplant met factor $(1,35)^t$.
De verdubbelingstijd wordt gevonden uit de vergelijking: $1,35^t = 2$.
Dit geeft: $t = {}^{1,35}\log 2 = \dfrac{\log 2}{\log 1,35} \approx 2,3096854$.
De verdubbelingstijd is dus zo'n 2,3 jaar.

waterhyacint

3.87 Iemand zet een flinke geldsom vast op de spaarbank tegen een rente van 5% per jaar. De rente die jaarlijks wordt bijgeschreven levert ook weer rente op. Kortom: het kapitaal groeit exponentieel met 5% per jaar.
Na hoeveel jaar is het kapitaal verdubbeld?

3.88 De stralingsintensiteit van een zekere radioactieve stof neemt exponentieel af met 10% per maand. Hoeveel maanden is de halfwaardetijd, d.w.z. de tijd die nodig is om de stralingsintensiteit te halveren?

3.89 a Geef een benaderende oplossing van $3^{x-2} = 7$.
b Ook van $3^{x-2} = 7^x$.

3.90 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{{}^2\log x}{{}^3\log x}$ ($x > 0$, $x \neq 1$).
a Bereken $f(x)$ voor enkele waarden van *x*.
b Wat valt je op? Verklaar dat.

3.7 *Logaritmische eigenschappen*

3.91 a Bereken in 1 decimaal nauwkeurig: ${}^2\log 3$, ${}^2\log 5$ en ${}^2\log 15$.

b Welk verband lijkt er tussen deze drie logaritmen te bestaan?

c Iemand beweert: ${}^2\log 3 + {}^2\log 5 = {}^2\log 8$. Klopt dat?

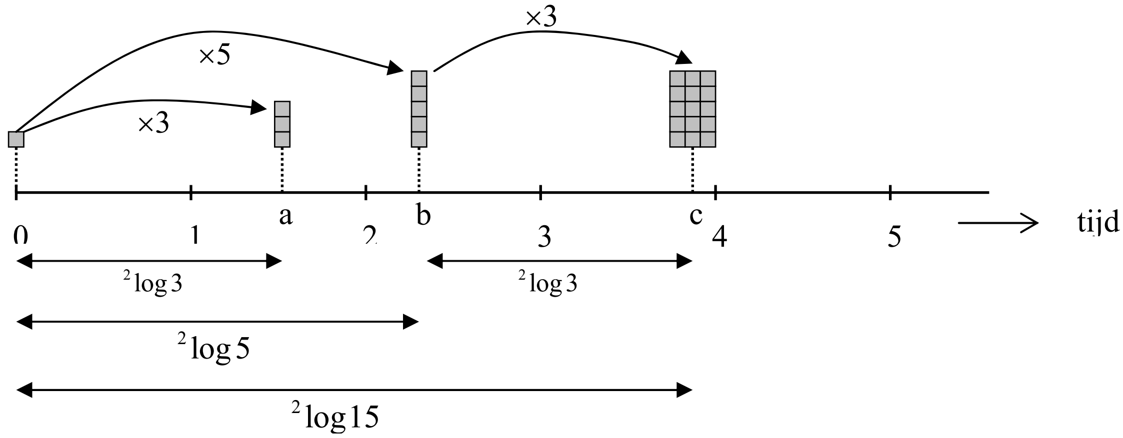
Het verband dat je in opgave 3.93 hebt gezien, kan worden uitgelegd met behulp van de groeiende waterplant van paragraaf 3.5 (groeifactor 2 bij tijdsinterval met lengte 1).
Er geldt:

${}^2\log 3$ = lengte tijdsinterval waarin groeifactor 3 is

${}^2\log 5$ = lengte tijdsinterval waarin groeifactor 5 is

${}^2\log 15$ = lengte tijdsinterval waarin groeifactor 15 is

Schematisch:



3.92 a Verklaar uit bovenstaand schema: ${}^2\log 5 + {}^2\log 3 = {}^2\log 15$

b Je kunt de betrekking ook met algebra afleiden:
Stel ${}^2\log 3 = a$, ${}^2\log 5 = b$ en ${}^2\log 15 = c$.
Er geldt dus: $2^a = 3$, $2^b = 5$ en $2^c = 15$.
Hoe volgt nu: ${}^2\log 5 + {}^2\log 3 = {}^2\log 15$?

In opgave 3.94 is het bewijs geleverd van de zogenaamde *hoofdeigenschap* van logaritmen: ${}^2\log p + {}^2\log q = {}^2\log(pq)$ In woorden: de som van twee logaritmen (met grondtal 2) is de logaritme van het produkt. Deze eigenschap geldt natuurlijk ook voor andere grondtallen dan 2.
Algemeen geformuleerd luidt de eigenschap:

$$\boxed{{}^a\log p + {}^a\log q = {}^a\log(pq)}$$

3.93 a Vul in: ${}^6\log 4 + {}^6\log 9 = {}^6\log \ldots = \ldots$

b Vul in: ${}^{21}\log 3 + {}^{21}\log 7 = {}^{21}\log \ldots = \ldots$

c Vul in: $\log 40 + \log \ldots = \log 1000 = \ldots$

3.94 Bekijk nog eens de tweede ingevulde tabel bij opgave 3.70:

Oppervlakte (y)	3	6	12	24	48	96
Tijd in weken (x)	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

Uit de tabel zie je bijvoorbeeld: ${}^2\log 6 + 1 = {}^2\log 12$.

a Wat heeft dit te maken met de hoofdeigenschap: ${}^a\log p + {}^a\log q = {}^a\log(pq)$?

b Hoe volgt ${}^2\log 12 + 3 = {}^2\log 96$ uit de hoofdeigenschap?

In de tabel hierboven zie je ook ${}^2\log 48 - {}^2\log 12 = {}^2\log 4$ en ${}^2\log 6 - {}^2\log 3 = {}^2\log 2$.

Kortom:

$${}^2\log p - {}^2\log q = {}^2\log \frac{p}{q}$$

Deze regel volgt onmiddellijk uit de hoofdeigenschap (kijk ook naar opgave 3.95c).

In woorden luidt de regel: Het verschil van twee logaritmen (met grondtal a) is de logaritme van het quotiënt.

In formule:

$${}^a\log p - {}^a\log q = {}^a\log \frac{p}{q}$$

3.95 Bereken zonder rekenmachine:

a ${}^2\log 72 - {}^2\log 9$

b ${}^2\log 240 - {}^2\log 12 - {}^2\log 5$

c $\log 2 + \log 4 + \log 5 + \log 25$

d ${}^5\log 6 - {}^5\log 5 - {}^5\log 4 - {}^5\log 3 + {}^5\log 2$

> Voorbeeld:
> Los x op uit: ${}^2\log x + {}^2\log 8 = {}^2\log 12$
>
> Oplossing: ${}^2\log(8x) = {}^2\log 12 \Rightarrow 8x = 12 \Rightarrow x = 1\frac{1}{2}$
>
> Immers altijd geldt: Als ${}^2\log(a) = {}^2\log(b) \Rightarrow a = b$

3.96 Los x op uit:

a	${}^2\log x + {}^2\log 5 = {}^2\log 95$	d	$\log x + \log 40 = 4$
b	${}^3\log x = {}^3\log 24 + {}^3\log 0,5$	e	$\log x - \log 5 = \log 4 + \log 7$
c	${}^5\log x - {}^5\log 2 = {}^5\log 7$	f	${}^2\log x - {}^2\log 3 = {}^2\log 12 - {}^2\log x$

3.97 Hoe presteert een lange-afstandsloper op een korte afstand? En wat is een sprinter waard op bijvoorbeeld de 5000 m? Emil Zatopek (zie foto hiernaast, bijnaam: de "lokomotief") liep halverwege de vorige eeuw, zowel de marathon als verschillende kortere afstanden en oogstte daarbij veel succes.

Iemand beweert een formule te hebben gevonden waarmee uit een prestatie op een bepaalde afstand de prestatie op een andere afstand kan worden voorspeld.

Die formule luidt: $v_1 - v_2 = {}^2\log s_2 - {}^2\log s_2$.

Hierin zijn s_1 respectievelijk s_2 afstanden in *meters* en v_1 respectievelijk v_2 de bijbehorende gemiddelde snelheden in *km per uur*.

Een lange-afstandsloper loopt de 10 km in 30 minuten.
Hij gebruikt de formule om een voorspelling te kunnen doen over zijn prestatie op de 400m.

a Bereken zijn gemiddelde snelheid in km per uur op de 400 m. Rond je antwoord af op een geheel getal.

b Hoe kun je in de formule zien dat bij een langere afstand een lagere gemiddelde snelheid hoort?

c Wat voor effect heeft verdubbeling van de afstand op de gemiddelde snelheid?

Er is nog een derde formule die belangrijk is bij het rekenen met logaritmen. Kijk eens naar:

$\log x + \log x + \log x = \log(x \cdot x \cdot x)$, ofwel $3 \cdot \log x = \log\left(x^3\right)$.

Dit is (na verwisseling van linker- en rechterlid) een bijzonder geval van de regel:

$$\boxed{{}^a\log\left(x^r\right) = r \cdot {}^a\log x}$$

In woorden: De a-logaritme van een macht van x is gelijk aan de exponent van die macht, vermenigvuldigd met de a-logaritme van x.

Een paar voorbeelden van deze regel:

$$ {}^5\log\sqrt{x} = {}^5\log x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot {}^5\log x $$

$$ {}^2\log\frac{1}{x} = {}^2\log\left(x^{-1}\right) = -1 \cdot {}^2\log x = -{}^2\log x $$

3.98 Hoe kun je het laatste resultaat ook uit een andere regel verkrijgen?

3.99 In deze opgave bewijs je de regel ${}^a\log\left(x^r\right) = r \cdot {}^a\log x$ voor het geval $a = 10$.

a Stel $\log x = p$ en druk x en x^r beide uit in p.

b Stel $\log\left(x^r\right) = q$ en druk x^r uit in q.

c Laat zien dat uit de resultaten van a. en b. volgt $q = rp$ ofwel $\log\left(x^r\right) = r \cdot \log x$

3.100 Gegeven is ${}^a\log b = 5$ en ${}^a\log c = \frac{1}{2}$.

Bereken achtereenvolgens:

${}^a\log\left(b^2\right)$; ${}^a\log\left(\frac{b}{c}\right)$; ${}^a\log\left(b\sqrt{c}\right)$; ${}^a\log\left(\frac{1}{c}\right)$;

${}^a\log\left(bc^2\right)$; ${}^a\log\left(\frac{1}{b^3}\right)$; ${}^a\log\left(\sqrt[3]{c}\right)$; ${}^a\log\left(\sqrt{bc}\right)$

3.101 a, b en c zijn positieve getallen.

a Bewijs: $\log(ab) + \log(bc) + \log(ac) = 2\log(abc)$

b Bewijs: $\log\frac{a}{b} + \log\frac{b}{c} + \log\frac{c}{a} = 0$

3.102 Los x op uit:

a $\log x = 3 \cdot \log 6$ c $2\log\frac{1}{x} = 3\log 4$

b $3\log x = \log 6$ d $\log 6 + \log\frac{1}{x} = \log x$

3.103 $f(x) = {}^2\log\sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{2}{3} + {}^2\log x$.

Teken in één figuur de grafieken van f en g.
Bereken de exacte coördinaten van het snijpunt van beide grafieken.
Voor welke x geldt: $f(x) - g(x) > \frac{1}{3}$

3.104 $f(x) = {}^2\log\frac{1}{x-2}$

a Teken de grafiek van f.

b Los x op uit: $f(x) > -3$

3.7.1 Samenvatting

Voor het rekenen met logaritmen zijn de volgende regels van belang:

(1) ${}^a\log x + {}^a\log y = {}^a\log(xy)$

(2) ${}^a\log x - {}^a\log y = {}^a\log\frac{x}{y}$

(3) $\quad {}^{a}\log\left(x^{r}\right) = r \cdot {}^{a}\log x$

(4) $\quad {}^{a}\log x = \dfrac{\log x}{\log a}$

Regel (4) stelt je in staat om logaritmen met een willekeurig grondtal terug te brengen tot logaritmen met grondtal 10.
Bij logaritmische vergelijkingen werk je vaak toe naar een vergelijking waarin zowel in linker- als rechterlid een logaritme staat met hetzelfde grondtal: ${}^{a}\log A = {}^{a}\log B \Rightarrow A = B$.

a Stel dat de log-knop op je rekenmachine niet werkt. Hoe kun je dan toch met behulp van $\log 2 \approx 0,3010$ de volgende logaritmen vinden in twee decimalen nauwkeurig:
$\log\sqrt{2}$; $\log 0,25$; $\log\left(4 \cdot 10^{8}\right)$; $\log\left(8 \cdot 10^{-4}\right)$

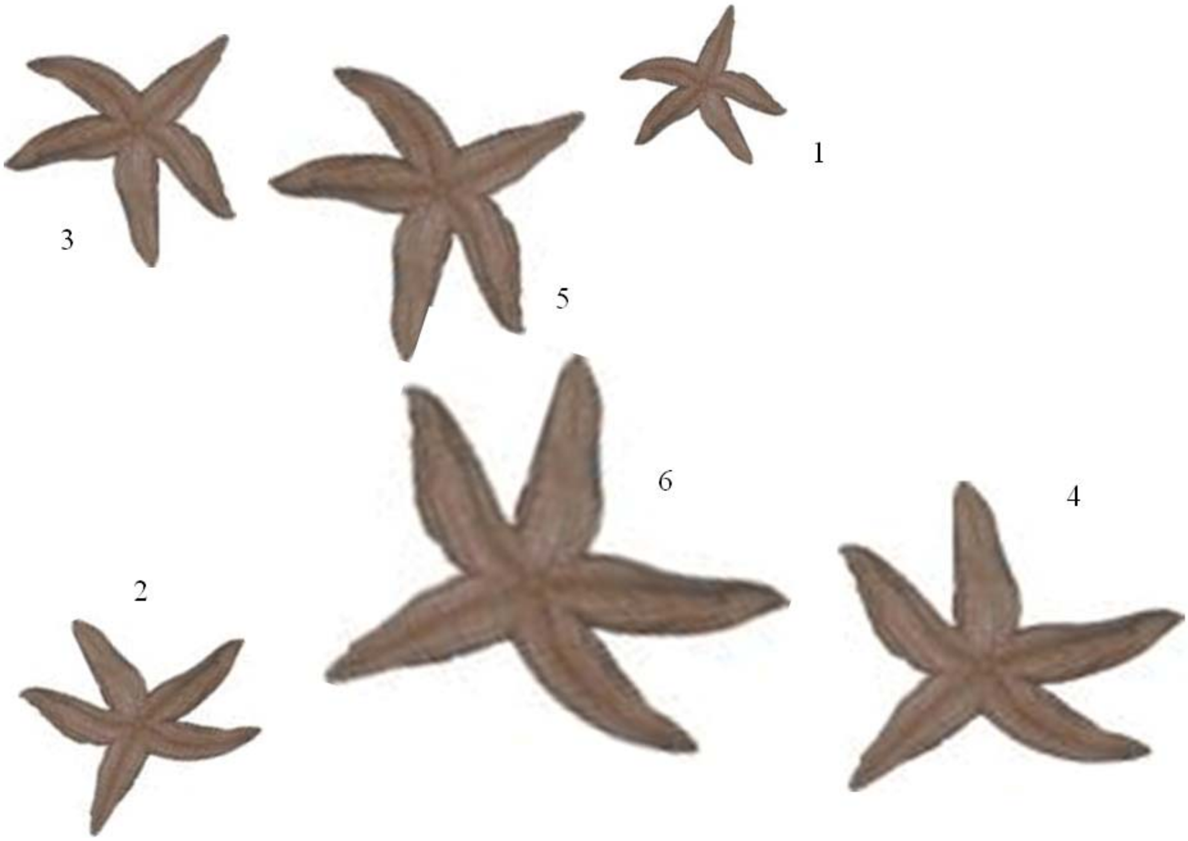
b Als je met je rekenmachine 2^{100} uitrekent krijg je de uitkomst in de notatie 1.2676506E30 . Verklaar de exponent 30 uit het gegeven van a.

c Voor welke $x > 3$ geldt: ${}^{4}\log(x-3) + {}^{4}\log(x+3) = 2$?

d Tussen de variabelen *x* en *y* bestaat het verband: $\log y = 3\log x$. Teken de grafiek van *y* als functie van *x*.

e Bewijs dat ${}^{2}\log 3$ en ${}^{3}\log 2$ elkaars omgekeerde zijn.

3.8 *Logaritmische transformaties*



Je ziet zes momentopnamen van de groei van een zeester. Van elke zeester is de armlengte gemeten (vanuit het midden van de ster). Het resultaat vind je in onderstaande tabel:

nummer	datum	armlengte
1	26 juli	9 mm
2	2 augustus	11 mm
3	18 augustus	16 mm
4	12 september	26 mm
5	26 september	34 mm
6	19 oktober	57 mm

3.105 Om na te gaan of er sprake is van exponentiële groei ga je een grafiek maken. Neem $t = 0$ op 26 juli en neem als tijdeenheid 10 dagen.

a Teken een grafiek van de armlengte a als functie van de tijd t.

b Aangenomen dat er sprake is van exponentiële groei, hoe groot is dan (ongeveer) de groeifactor per 10 dagen?

De kromme die je bij opgave 3.108 krijgt, lijkt wel wat op een exponentiële kromme. Erg overtuigend klinkt dit niet; het is nu eenmaal lastig om aan de kromme te zien tot welke familie zij behoort.
Er is een handige manier om meer zekerheid te krijgen. Met logaritmen kun je een exponentiële functie namelijk omvormen tot een lineaire functie.
Dat gaat zo:

Ga uit van $y = c \cdot p^x$ en neem links en rechts de 10-logaritme.
Volgens de eigenschappen van de logaritme komt er:

$$y = c \cdot p^x \Rightarrow$$
$$\log y = \log c + \log\left(p^x\right) \Rightarrow$$
$$\log y = \log c + x \cdot \log p$$

Omgekeerd volgt de bovenste regel uit de onderste.

Dus *y* is een exponentiële functie van *x* als $\log y$ een lineaire functie van *x* is.
Omdat de grafiek van een lineaire functie wel direct herkenbaar is (rechte lijn!), is het handig om in het geval van de zeester $\log a$ uit te zetten tegen *t*.

3.106 a Vul met de gegevens van de groeiende zeester onderstaande tabel in:

nummer	t	$\log a$
1	0	
2	0,7	
3	2,3	
4	4,8	
5	6,2	
6	8,5	

b Laat zien dat de grafiek van $\log a$ als functie van *t* goed benaderd wordt door een rechte lijn.

De hellingscoëfficiënt van de rechte lijn die je in opgave 3.109 gevonden hebt, kan worden geschat op 0,094. De betrekking tussen $\log a$ en *t* wordt dan:
$\log a = 0,95 + 0,0094 \cdot t$
Daaruit volgt: $a = 10^{0,95+0,0094 \cdot t}$

$$= 10^{0,95} \cdot \left(10^{0,094}\right)^t$$
$$= 9 \cdot 1,24^t$$

Kortom: *a* groeit exponentieel met een groeifactor (per 10 dagen) die ongeveer gelijk is aan 1,24.

3.107 De oppervlakte en het gewicht van een zeester groeien ook volgens exponentiële functies.

a Hoe groot is de groeifactor (per 10 dagen) van de oppervlakte?

b En van het gewicht?

3.108 Onderstaande tabel geeft het verband tussen de omlooptijd van een planeet en de afstand tot de zon.

Planeet	Omlooptijd T (in dagen)	Gemiddelde afstand tot de zon R (km$\times 10^6$)
Mercurius	88	57,9
Venus	225	108,2
Aarde	365	149,6
Mars	687	227,7
Jupiter	4329	778,3
Saturnus	10753	1427,0
Uranus	30660	2870,0
Neptunus	60150	4497,0
Pluto	90670	5907,0

a Maak een tabel van $\log T$ tegen $\log R$.

planeet	$\log T$	$\log R$
Mercurius	1,94	……
……	……	……

b Zet in een grafiek $\log T$ uit tegen $\log R$.

c Uit de grafiek blijkt dat er een lineair verband bestaat tussen $\log T$ en $\log R$, dus $\log T = a \cdot \log R + b$. Bepaal *a* en *b*.

d In paragraaf 3.1 (bij Machten met gebroken exponenten) werd als formule meegedeeld: $T = 0,2 \cdot R^{1,5}$. Controleer of deze formule in overeenstemming is met de resultaten van vraag c.

3.109 De (verwachte levensduur van een zoogdier in gevangenschap (de mens niet meegerekend) is afhankelijk van de grootte van het dier. Sachs vond de benaderende formule $\log T = 1,07 + 0,20 \cdot \log G$ (*T* is de levensduur in jaren, *G* is het lichaamsgewicht in kg.).

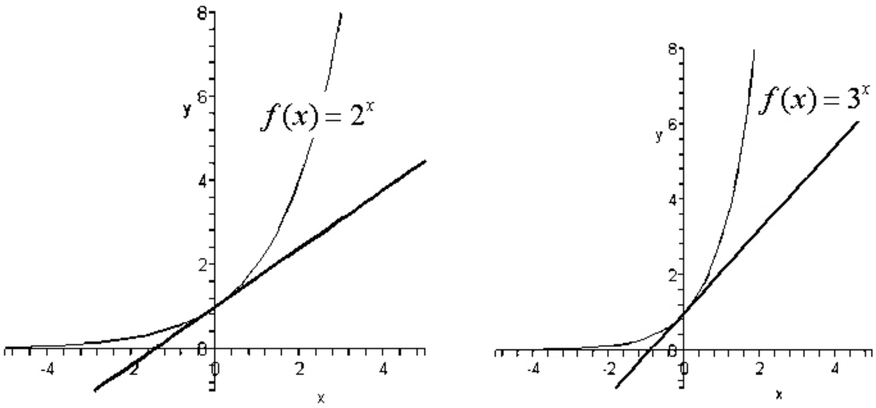
a Bereken de verwachte levensduur van een olifant in Artis van 4000 kg.

b De formule drukt $\log T$ uit in en $\log G$. Je kunt natuurlijk ook *T* uitdrukken in *G*. Welke formule krijg je?

3.9 *De afgeleide van exponentiële en logaritmische functies*

3.9.1 De afgeleide van een exponentiële functie

We bekijken de raaklijn aan de exponentiële functie $y = f(x) = a^x$ in het punt met $x = 0$ en nemen voor a achtereenvolgens de waarden 2 en 3. Hieronder zijn de beide functies naast elkaar geplot, met gelijke schaal op x-as en y-as.



Wanneer je in beide tekeningen de hoeken die de raaklijnen met de x-as (naar rechts vanaf het snijpunt) maken, of bepaal je direct de richtingscoëfficiënten van de beide raaklijnen, dan krijg je voor de eerste tekening ($y = 2^x$):

- de hoek is ongeveer $35°$ en de richtingscoëfficiënt is dan ongeveer 0,70.
- In de tweede tekening ($y = 3^x$) zijn de antwoorden respectievelijk $48°$ en 1,11.

We zien dat bij een toenemend grondtal ook de richtingscoëfficiënt stijgt. Het ligt voor de hand dat er een exponentiële functie met grondtal tussen 2 en 3 is, zodanig dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in het snijpunt met de y-as gelijk is aan 1. De afgeleide van deze exponentiële functie is dus 1 in het punt met x-coördinaat 0. De richtingshoek is dan exact $45°$.
Het grondtal waarbij deze richtingshoek van $45°$ hoort, is het reeds eerder genoemde getal e en is genoemd naar de wiskundige Euler. In de wiskunde en zeker ook in vele toepassingen komt dit getal veelvuldig voor. Het belang ervan is minstens even groot als van het beroemde getal π. We kunnen dus meteen zeggen dat de afgeleide van de functie $y = \mathrm{e}^x$ voor $x = 0$ gelijk is aan 1. Anders gezegd: het differentiaalquotiënt van de functie $y = \mathrm{e}^x$ is gelijk aan 1 als $x = 0$. Zoals we gezien hebben in hoofdstuk 1 geldt voor het differentiaalquotiënt $\frac{dy}{dx}$ in het algemeen dat deze de limiet is van het differentiequotiënt

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$, waarbij Δx nadert tot 0. In dit geval geldt dus dat de limiet van $\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]_{x=0} = \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x} = \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ voor Δx naderend tot 0 gelijk is aan 1.

3.110 Maak zelf met de GR of met TI-interactive of VUgrafiek een soortgelijke tekening als hierboven voor grondtal 2,5 en ga na dat de richtingshoek nu iets kleiner is dan $45°$. Concludeer hieruit dat e groter is dan 2,5. Herhaal deze opdracht voor de grondtallen 2,6; 2,7; en 2,8. Probeer door het grondtal nog nauwkeuriger te variëren in de buurt van de werkelijke waarde van e te komen.

3.111 Maak een tabel in met TII, VUgrafiek of EXCEL voor het differentiequotiënt $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$. Zet hierbij Δx in de eerste kolom met waarden 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; -0,0001; -0,001; -0,01 en -0,1. Bereken de bijbehorende waarden van $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ in de tweede kolom. Concludeer hieruit dat de afgeleide van $y = e^x$ in $x = 0$ inderdaad gelijk aan 1 is.

Uit opgave 3.113 blijkt dat e in de buurt van 2,7 ligt. De exacte waarde van e is niet in een decimaal getal uit te drukken. Wel kunnen we e benaderen: $e \approx 2{,}71828182845904523536$ (in 20 decimalen). Meestal kunnen we met wat minder decimalen volstaan: $e \approx 2{,}72$.

De afgeleide van de functie $f(x) = e^x$ is de basis voor de afgeleiden van enkele functies die we in deze paragraaf zullen tegenkomen.

Voor $y = e^x$ is het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x}$ (*x* is hierbij willekeurig gekozen, voor $x = 0$ krijg je weer $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$).

Voor het differentiequotiënt van $y = e^x$ in $x = 0$ geldt dus $\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]_{x=0} = \frac{e^0\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

Nu weten we dat de limiet van $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ voor Δx naderend naar 0 gelijk is aan 1 (zie de conclusie van opgave 3.114).

Concluderend kunnen we zeggen dat voor $y = e^x$ (met *x* willekeurig gekozen) het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x}$ nadert tot $e^x \cdot 1 = e^x$.

Anders gezegd: Als $f(x) = \mathrm{e}^x$ dan is $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left[\mathrm{e}^x\right] = \mathrm{e}^x$.

De afgeleide van $f(x) = \mathrm{e}^x$ is dus gelijk is aan de functie zelf.

We bepalen nu de afgeleide van $f(x) = a^x$.
Omdat het nemen van een e-macht en het nemen van de natuurlijke logaritme (dit is de logaritme met grondtal e) elkaars inverse zijn geldt: $a^x = \mathrm{e}^{\ln(a^x)} = \mathrm{e}^{x \ln a}$.
Dus kunnen we het voorschrift van *f* als volgt herschrijven: $f(x) = \mathrm{e}^{x \ln a}$
Er volgt (met behulp van de kettingregel)
$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{x \ln a}\right] = \mathrm{e}^{x \ln a} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x \ln a\right] = \mathrm{e}^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$.
In de één na laatste stap is gebruikt dat $\ln a$ een constante is en in de laatste stap is $\mathrm{e}^{x \ln a}$ weer vervangen door a^x.

Conclusie
Als $f(x) = a^x$ dan $f'(x) = a^x \ln a$

a Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $y = f(x) = 3^x$ in het snijpunt met de *y*-as met behulp van de afgeleide en vergelijk deze met de gemeten waarde aan het begin van deze paragraaf.

b Laat zien dat formule $f'(x) = a^x \ln a$ een bijzonder geval is van formule $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

c Bepaal de afgeleide van $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en de afgeleide van $y = g(x) = 2^{-x}$ (denk om de kettingregel!); toon aan dat $f'(x) = g'(x)$ en verklaar dat.

d Toon aan dat de afgeleide van de functie $f(x) = a^x$ voor een grondtal tussen 0 en 1 voor elke waarde van x negatief is en voor een grondtal groter dan 1 voor elke waarde van *x* positief is. Geef hiervoor een verklaring.

e Differentieer onderstaande functies van *x*, waarbij *a* steeds een constante voorstelt.
- $f(x) = a^x$
- $f(x) = x^a$
- $f(x) = a^a$

We gaan nu functies samenstellen met behulp van een exponentiële functie en vervolgens differentiëren.

Voorbeeld

De afgeleide van $y = \mathrm{e}^{2x}$ bepalen we met de kettingregel (stel $u = 2x$):

$$\frac{d}{dx}[y]=\frac{d}{du}\left[e^{u}\right]\cdot\frac{d}{dx}[2x]=e^{u}\cdot 2=2e^{2x}$$

Voorbeeld

Op soortgelijke wijze bepalen we de afgeleide van $y = e^{\tan t}$ (stel nu $u=\tan t$).

$$\frac{d}{dt}[y] = \frac{d}{du}\left[e^{u}\right]\cdot\frac{d}{dt}[\tan t] = e^{u}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\tan t] = e^{\tan t}\cdot\frac{1}{(\cos t)^{2}} = \frac{e^{\tan t}}{(\cos t)^{2}}$$

Voorbeeld

Ook de afgeleide van $y=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ bepalen we met de kettingregel (stel $u=-\frac{1}{2}x^2$):

$$\frac{d}{dx}[y]=\frac{d}{du}\left[e^{u}\right]\cdot\frac{d}{dx}\left[-\tfrac{1}{2}x^2\right]=e^{u}\cdot(-x)=-xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

3.112 Differentieer de volgende functies naar x:

$$y=e^{-x};\; y=e^{\sqrt{x}};\; y=2^{7x};\; y=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2x};\; y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2};\; y=3e^{2x}+4e^{-2x}$$

3.113 Differentieer de volgende functies naar x:

$$y=x\cdot e^{x};\; y=x^2\cdot e^{-x};\; y=\frac{2^{-x}}{x^2};\; y=e^{3x}\cdot\sin(2x);\; y=\frac{1}{2^{x}}\cos(3x)$$

3.114 Gegeven de functie $y = f(x) = e^{\tan x}$

a Bepaal de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $\left(\frac{1}{4}\pi, e\right)$.

b Zijn er punten waar de raaklijn aan de grafiek van f horizontaal loopt?

3.115 Gegeven de functie $y = f(x) = x\cdot e^{-x}$

a Plot de grafiek van $f(x)$

b Onderzoek waar $f'(x)$ gelijk is aan 0. Klopt dit met de grafiek?

c Bepaal de buigpunten in de grafiek van $f(x)$

3.9.2 De afgeleide van een logaritmische functie

We bepalen nu de afgeleiden van de *logaritmische standaardfuncties*. Dit doen we met behulp van het resultaat van de vorige paragraaf. Daarom beperken we ons eerst even tot de reeds eerder genoemde *natuurlijke* logaritmefunctie, d.w.z. de logaritmefunctie met grondtal e.

Bij de berekening van de afgeleide van $f(x) = {}^{e}\log x = \ln x$ (de *natuurlijke* logaritmefunctie) maken we weer gebruik van het feit dat de e-macht en de natuurlijke logaritme de inverse zijn van elkaar. Dit betekent:

$x = e^{\ln x}$

We differentiëren nu links en rechts van het =- teken naar x (rechts van het =- teken gebruiken we de kettingregel) en krijgen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{\ln x}\right] \Rightarrow 1 = \mathrm{e}^{\ln x} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln x], \text{ zodat } 1 = x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln x]$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

De afgeleide van een logaritme met een ander grondtal dan e berekenen we door eerst over te gaan op grondtal e. Er geldt:

$$f(x) = {}^{a}\log x = \frac{{}^{\mathrm{e}}\log x}{{}^{\mathrm{e}}\log a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

We differentiëren deze functie, waarbij we bedenken dat $\ln a$ en dus ook $\frac{1}{\ln a}$ een constante is. Dit leidt tot:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[{}^{a}\log x\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right] = \frac{1}{\ln a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln x] = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = {}^{a}\log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = {}^{2}\log x$.

Met de zojuist gevonden formule vinden we $\left({}^{2}\log x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = \ln(3x)$.

We maken hier gebruik van de kettingregel:

$$\frac{d}{dx}[\ln(3x)] = \frac{d}{du}[\ln u] \cdot \frac{d}{dx}[3x] = \frac{1}{u} \cdot 3 = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

Op het eerste gezicht een vreemd resultaat, want dit zou betekenen dat $\ln x$ en $\ln(3x)$ dezelfde afgeleide hebben.

Merk echter op dat $f(x) = \ln(3x) = \ln 3 + \ln x$, zodat $f'(x) = (\ln 3)' + (\ln x)' = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$; we hebben gebruikt dat de afgeleide van een constante ($\ln 3$) gelijk is aan 0.

3.116 Wat betekent het laatste voorbeeld voor de grafieken van $\ln x$ en $\ln(3x)$? Controleer je antwoord met de GR of met software door beide grafieken in één figuur te plotten.

Voorbeeld

Differentieer $y = \ln(3t + 1)$.

$$\frac{d}{dt}[y] = \frac{d}{du}[\ln u] \cdot \frac{d}{dt}[3t + 1] = \frac{1}{u} \cdot 3 = \frac{3}{3t + 1}$$

Voorbeeld

Bepaal de afgeleide van $f(x) = {}^{2}\log(\cos x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x \cdot \ln 2} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\ln 2 \cdot \cos x} = -\frac{1}{\ln 2}\tan x$$

Ook hier is weer gebruik gemaakt van de kettingregel.

Voorbeeld

We bepalen de afgeleide van $f(x) = \log(\cos x)$. Bedenk daarbij dat het niet vermelden van het grondtal van de logaritme betekent dat het grondtal gelijk is aan 10. We schrijven daarom $f(x) = {}^{10}\log(\cos x)$ en differentiëren *f*.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x \cdot \ln 10} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = \frac{1}{\cos x \cdot \ln 10} \cdot (-\sin x) = -\frac{1}{\ln 10}\tan x$$

3.117 Differentieer de volgende functies naar *x*:

$y = {}^{3}\log x$; $\quad y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$; $\quad y = \ln(3x+5)$; $\quad y = \log(2x)$; $\quad y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

3.118 Gegeven $y = f(x) = \ln x$

a In welk punt van de grafiek loopt de raaklijn onder een hellingshoek van $60°$?

b In welk punt loopt de raaklijn onder een hellingshoek van $45°$.

c In welk punt loopt de grafiek van $f(x)$ het dichtst langs de lijn $y = x$? En wat is op dat moment de kortste afstand tussen de grafiek en de lijn?

3.119 a Plot de grafiek van $y = f(x) = \log(3x)$

b Plot ook de grafiek van $y = f(x) = \log(3x - 2)$

c De geplotte grafieken lopen, als je ze goed geplot hebt, evenwijdig. Geef hiervoor een verklaring.

3.10 *Praktische opgaven*

Maak de onderstaande opgaven in een of meer sessies met TI-interactive of VU-grafiek. Lever naast of in de worksheets een rapport in met een uitgebreide toelichting op de verkregen antwoorden.

3.120 Gegeven is dat $f(x) = a^x$ en $g(x) = {}^a\log x$.

a Definieer de variabele *a*, maak hiervoor een schuifbalk, waarin *a* de reële getallen tussen 0,001 en 5 doorloopt in stapjes van 0,001.

b Plot in één figuur de grafieken van $f(x)$, $g(x)$ en de lijn $y = x$. Stel als window in het vierkant $-10 \le x \le 10$ en $-10 \le y \le 10$ (met gelijke schaalverdeling op beide assen)

c Wat is voor elke waarde van *a* het verband tussen de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$?

d Ga na voor welke waarden van *a* (ongeveer) de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ elkaar snijden.

e Bereken voor welke exacte waarde van *a* de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ elkaar raken. Benader de gevonden waarde ook decimaal.

f Kies $a = 1,25$. Bepaal de kortste afstand tussen de twee snijpunten van $f(x)$ en $g(x)$.

g Kies $a = 0,8$. Bepaal de hoek die de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ met elkaar maken in het snijpunt.

3.121 Een groeirekening geeft een vaste rente van 4% per jaar op het gespaarde bedrag. Sander zijn grootouders openen zo'n groeirekening voor hem op zijn 10e verjaardag en storten daarop een beginkapitaal van € 1000,-.

a Maak een tabel met het totaal gespaarde bedrag na 1, 2, 3, …. 10 jaar. Maak hiervoor drie kolommen: in de eerste kolom het aantal gespaarde jaren, in de tweede kolom het saldo (= het kapitaal inclusief de bijgeschreven rente) en in de derde kolom de rente, die in het betreffende jaar is uitgekeerd.

b Bereken het rentepercentage per maand.

c Maak een tabel waarin de groei per maand gedurende het eerste spaarjaar zichtbaar is en controleer of het eindbedrag overeenkomt met wat je in vraag a hebt berekend (gebruik de spreadsheetfunctie, of doe eerst vraag e)

d Hoe oud is Sander op het moment dat het totale kapitaal gegroeid is tot € 4000,-?

e Met welke formule kun je de rente per jaar uitdrukken in het aantal jaren, dat het geld op de bank staat?

3.122 (vrij naar examen wiskunde B1,2 HAVO, 2004II). Hoe hoger in de lucht, hoe lager de luchtdruk. Voor het verband tussen luchtdruk en hoogte (gemeten vanaf de zeespiegel) geldt $D = 1014 \cdot \mathrm{e}^{-0,11865h}$. Hierin is *D* in millibar (mbar) en *h* in km.

Opmerking: millibar is feitelijk de oude eenheid voor luchtdruk. Tegenwoordig spreekt men van hPa (hectoPascal, 1 mbar = 1 hPa).

a Plot de grafiek van *D* als functie van *h*. Zoek een geschikt window, waarin je het verloop van de luchtdruk goed kunt zien.

b Maak de volgende tabel af:

Hoogte (km)	0	5	10	20
Luchtdruk (mbar)	1014			

c Op welke hoogte is de luchtdruk de helft van de luchtdruk op zeeniveau?
d Druk de hoogte in de luchtdruk uit (gebruik solve).
e Plot ook de grafiek van de hoogte als functie van de luchtdruk.
f Op welke hoogte neemt de luchtdruk met een snelheid van 5 mbar per 100 m af?
g Bij welke luchtdruk neemt de hoogte met een snelheid van 50 m per mbar af?

3.123 Van een medicijn wordt op tijdstip $t = 0$ (t in uren) een pil met 10 mg werkzame stof toegediend. In 24 uur wordt de hoeveelheid door het lichaam tot de helft afgebroken.

a Met welke factor neemt de hoeveelheid werkzame stof van een pil van 10 mg per *uur* af? En per week?
b Bepaal de hoeveelheid die in het lichaam aanwezig is als functie van de tijd $f_1(t)$ gedurende de eerste 48 uur en plot deze functie.
c De volgende dag wordt op hetzelfde tijdstip (nu dus $t = 24$) opnieuw een pil met 10 mg werkzame stof van hetzelfde medicijn toegediend. Bepaal nu het totaal aantal bacteriën dat in het lichaam aanwezig is als functie van de tijd en plot deze functie.
d Aanwijzing: Bedenk dat de hoeveelheid medicijn als gevolg van de tweede pil als functie van de oorspronkelijke t een verschoven functie is. Je kunt daarom het beste twee grafieken plotten: één voor de eerste dag en één voor de tweede dag.
e Een nog betere mogelijkheid is een zogenaamde Piecewise functie te maken, dit is een functie die op verschillende intervallen anders gedefinieerd is. Vraag eventueel je docent om hulp.
f Stel dat verder geen medicijnen worden ingenomen, wanneer is de hoeveelheid werkzame stof van het medicijn tot 10 mg gedaald?
g Beantwoord de vragen b en c nogmaals maar nu als de patiënt op de tweede dag een twee keer zo sterke pil inneemt.

3.124 Plot de grafiek van $y = e^x$.

Kies een willekeurig punt P (met x-coördinaat p op de grafiek en bepaal de vergelijking van de raaklijn in dit punt aan de grafiek.

Toon aan dat de zojuist gevonden raaklijn de x-as snijdt in het punt met x-coördinaat $p-1$.