VERKENNEN

GEBRUIKEN

VERDIEPEN

Op zoek naar

een verbetering

van

de programmalijn wiskunde

en

de onderwijspraktijk

in de onderbouw havo-vwo

Inhoud

1 Inleiding

1.1 Oriëntatie

De minister van OCW heeft een vernieuwingscommissie wiskunde ingesteld om voorstellen te doen voor een vernieuwing van het curriculum wiskunde in de tweede fase havo-vwo en daarmee samenhangend te adviseren over de doorlopende leerlijnen vanaf het primair onderwijs tot aan hbo en wo. Deze commissie, de Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) genoemd, heeft inmiddels voorstellen uitgewerkt voor de examenprogramma's van de wiskundevakken in de tweede fase havo-vwo. Op zijn vroegst zullen de leerlingen die in 2011 in 4 vwo of 4 havo binnenkomen het wiskundeonderwijs volgens dat vernieuwde programma volgen. De inhoud van het vernieuwde bovenbouwprogramma heeft natuurlijk consequenties voor het programma in de onderbouw havo-vwo en daarmee ook, maar in mindere mate, voor de eerste jaren van het vmbo. De voorstellen van de Programmacommissie Onderbouw van cTWO voor een vernieuwd programma voor 12-16 jarigen hebben mede tot doel op termijn een goede aansluiting tussen 3 havo-vwo en 4 havo-vwo te bevorderen en voor de overstap 4 vmboT naar 4 havo. Op termijn, want de lichting leerlingen die in 2008-2009 in het eerste leerjaar van het voortgezet onderwijs aanwezig is, volgt in 2011-2012 in 4 havo-vwo het onderwijs. Zij hebben dan nog niet een vernieuwd programma in de leerjaren 1, 2 en 3 gevolgd.

1.2 Taakstelling cTWO-programmacommissie Onderbouw

De taken van de programmacommissie omvatten:

1. Het beschrijven van kennis en vaardigheden met het noodzakelijke beheersingsniveau waarover leerlingen aan het einde van klas 3 dienen te beschikken om voldoende toegerust de Tweede Fase van havo en vwo te kunnen instromen. Per subdomein eventueel onderscheid maken tussen aansluiting op wiskunde A en op wiskunde B in 4 havo en 4 vwo.
2. Het beschrijven van de doorlopende leerlijnen in kennis en vaardigheden van primair onderwijs naar leerjaar 1, van leerjaar 1 tot leerjaar 2, van leerjaar 2 tot leerjaar 3 en van leerjaar 3 tot bovenbouw havo-vwo.
3. Het schetsen van methoden waarmee het bereiken van de bij 1. genoemde kennis, vaardigheden en beheersingsniveaus een structurele plaats in de onderbouw kunnen krijgen.

De werkgroep wordt geacht bij de uitvoering van haar taak contact te houden met het project ReAL, dat is uitgevoerd door SLO en FI.
Tijdpad: de werkgroep rapporteert in december 2007 aan cTWO.

1.3 Samenstelling van de programmacommissie

Saskia van Boven, docent wiskunde, schoolleider.
Leon van den Broek, docent wiskunde, auteur Wageningse methode,
Kees Buijs, auteur Wis en Reken, leerplanontwikkelaar SLO.)
Adri Knop, docent wiskunde.
Anja Moeijes, docent wiskunde.
Anne van Streun, emeritus hoogleraar RUG, lid cTWO.
Monica Wijers, onderwijsontwikkelaar FI, ReAL.

1.4 Leeswijzer

De Programmacommissie Onderbouw heeft zich in eerste instantie verdiept in de huidige praktijk in het wiskundeonderwijs voor 12-16 jarigen. De leden hebben vanuit hun eigen expertise, die gespreid is over het primair onderwijs, het vmbo en de onder- en bovenbouw havo-vwo, de knelpunten in de onderwijspraktijk geïnventariseerd aan de hand van eigen ervaringen, analyse van resultaten van het werk van leerlingen en kennisname van rapporten, bijvoorbeeld van ReAL. Uit de discussies bleek dat het weinig zin heeft om alleen te spreken over de inhoud van het curriculum, omdat omgevingsfactoren en de onderwijspraktijk eveneens een grote rol spelen, bijvoorbeeld wat betreft schoolboeken, werkvormen, toetsing, beschikbare tijd, scholing docenten enzovoort. In dit eindrapport aan cTWO zijn de aanbevelingen daarom verdeeld over een aantal rubrieken, die niet alleen betrekking hebben op de programmalijn, maar ook op die omgevingsfactoren en de gangbare onderwijspraktijk. Voor de implementatie van een voorgesteld programma zijn de omgevingsfactoren en de onderwijspraktijk essentieel.
In hoofdstuk 2 wordt daarom ingegaan op de noodzakelijke sectoroverstijgende samenhang in leerdoelen (2.1), op de gewenste prioriteit voor de basisvakken (2.2), op de aansluiting tussen primair en voortgezet onderwijs (2.3), op de gewenste differentiatie in de bovenbouw van het primair onderwijs (2.4), op het onderhouden van basisvaardigheden in andere schoolvakken (2.5), ,en de noodzakelijk geachte differentiatie in 3 havo (2.6).
Hoofdstuk 3 bevat een analyse van sterke en zwakke punten in het huidige wiskundeprogramma voor 12-16 jarigen. Speciale aandacht gaat uit naar de vraag of de leerlijnen van po naar vo naar bovenbouw havo-vwo wel doorlopen en goed worden onderhouden. Met name de rekenlijn geeft aanleiding tot zorg.
In hoofdstuk 4 zijn de verschillende doelen van het wiskundeonderwijs voor 12-16 jarigen geanalyseerd en worden aanbevelingen geformuleerd in termen van accentverschuivingen.
De programmacommissie heeft in hoofdstuk 5 het bestaande (informele) leerplan als uitgangspunt genomen en in de vorm van aanbevelingen aangegeven waar accentverschuivingen gewenst zijn. Voor de onderbouw is het niet gebruikelijk om formele eindtermen te formuleren, zodat de inhoudsbeschrijvingen een meer globaal karakter hebben. Auteursgroepen van schoolboeken en wiskundesecties van scholen werken die inhoudsbeschrijvingen uit in lesmateriaal en ontwerpen daar onderwijs bij. In dit rapport wordt beargumenteerd dat het voor een kwaliteitsimpuls gewenst is om voor de verschillende wiskundedomeinen duidelijker dan tot nu toe gebruikelijk is aan te geven wat de beheersingsniveaus dienen te zijn van duidelijk aan te geven kernconcepten en kernmethoden. Daarom hebben we er in het omvangrijkste hoofdstuk, hoofdstuk 5, naar gestreefd om een zodanige beschrijving te geven van gewenste beheersingsniveaus van leerdoelen aan het einde van 3 havo en 3 vwo dat schoolboekenauteurs, wiskundesecties en schoolleidingen daar voldoende houvast aan kunnen ontlenen voor een substantiële vernieuwing en verbetering van het wiskundeonderwijs voor 12-16 jarigen. Die beschrijving wordt geïllustreerd met voorbeelden van kernopgaven en bijbehorende oplossingsstrategieën.

2 Omgevingsfactoren

2.1 Samenhang in onderwijsbeleid

In brede kring (politiek, maatschappelijke groeperingen, onderwijsinstellingen) vreest men dat de leerlingen momenteel te weinig basiskennis verwerven op het gebied van de Nederlandse taal en rekenen/wiskunde.
Een ministeriële commissie, de “Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen” heeft in haar eindrapport aanbevelingen gedaan voor het vaststellen van beheersingsniveau voor rekenen en taal in het primair onderwijs, het voortgezet onderwijs, het middelbaar beroepsonderwijs en het hoger onderwijs [1)].
De vernieuwingscommissie cTWO (commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs) heeft van de minister de taak gekregen om vernieuwde programma’s wiskunde voor de bovenbouw havo-vwo voor te stellen en de leerlijn vanaf het primair onderwijs via de onderbouw havo-vwo en in samenhang met de vmbo-onderbouw door te lichten [2)]. Aan de richtlijnen in het visiedocument *Rijk aan betekenis* is de *Programmacommissie onderbouw* van cTWO gebonden.
In het project ReAL (SLO-FI) zijn de leerlijnen voor rekenen en algebra vanaf het primair onderwijs tot en met 3 havo-vwo geanalyseerd en zijn voorstellen voor verbetering geformuleerd. Een publicatie over de gewenste vernieuwing en verduidelijking van de leerlijnen is beschikbaar [3)]. Het project richt zich in opdracht van het ministerie nu op het vmbo.
In aansluitingsprojecten van vo naar mbo, hbo en wo worden mogelijke deficiënties op het gebied van rekenen en wiskunde onderzocht, ingangstoetsen ontworpen en voorstellen gedaan voor verbetering van de aansluiting van vo naar het betreffende type vervolgonderwijs. De eerder gesignaleerde tekorten in rekeninzicht en rekenvaardigheid bij instromende studenten van de pabo’s wordt in het hbo en door de minister nu in het algemene kader van instroom in het hbo geplaatst. De basis van het leergebied rekenen&wiskunde moet in het primair onderwijs en de onderbouw vmbo-havo-vwo worden gelegd en onderhouden.
Binnen het mbo is het ‘Raamwerk rekenen/wiskunde mbo’ [4)] eind 2007 voltooid. Het Raamwerk verschaft een kader voor te onderhouden en gebruiken vaardigheden op het gebied van rekenen&wiskunde. Algemene commissies, zoals de groep Onderbouw-vo, worden eveneens geacht aan de minister te rapporteren over de aansluiting po-vo en onderbouw-bovenbouw vo.

Aanbeveling 2.1 Samenhang in onderwijsbeleid
Samenhangend sectoroverstijgend onderwijsbeleid is noodzakelijk voor een versterking van de basis aan kennis, inzicht en vaardigheden op het gebied van het rekenen en de wiskunde. De expertise en de producten van de verschillende commissies en projecten op het gebied van doorlopende leerlijnen en programmavernieuwing moeten op elkaar worden afgestemd.

2.2 Prioriteit voor de basisvakken

De gesignaleerde maatschappelijke zorg en onrust betreft de beheersing van de basiskennis van de Nederlandse taal en van rekenen&wiskunde. Tegelijk is er zeker wat betreft de positie van het rekenen en de wiskunde al enige jaren de tendens waar te nemen dat hieraan in het voortgezet onderwijs niet meer de tijd en aandacht wordt besteed, die noodzakelijk lijkt om de vereiste kennis te verwerven en te onderhouden. Uit de keuze voor het doen verwerven en onderhouden van een stevige basis aan kennis, inzicht en vaardigheden in rekenen en wiskunde, zal de consequentie moeten worden getrokken dat die vakgebieden weer meer ruimte en tijd moeten krijgen.

Aanbeveling 2.2 Prioriteit voor de basisvakken
De prioriteit voor het verwerven en onderhouden van de noodzakelijke basis aan kennis, inzicht en vaardigheden op het gebied van rekenen&wiskunde moet in het vo leiden tot meer aandacht, ruimte en studietijd voor dit leergebied.

2.3 Aansluiting op het basisonderwijs

In het eindrapport van de Expertgroep[1)] wordt geconstateerd dat de overgang van het basisonderwijs naar het voortgezet onderwijs niet probleemloos verloopt. Enerzijds is er een verschuiving in het basisonderwijs geconstateerd, waarbij met name de leeropbrengst op het gebied van bewerkingen met getallen (dat is: het cijferend op papier optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) achter blijft bij wat gebruikelijk was en de opbrengst op schattend rekenen en hoofdrekenen en het terrein van de verhoudingen (waaronder bijvoorbeeld ook procenten vallen) juist is verbeterd. Anderzijds wordt in het voortgezet onderwijs met name in havo-vwo in het wiskundeprogramma heel weinig gedaan aan het onderhouden en uitbreiden van rekenvaardigheden. (Zie bijvoorbeeld ReAL[3)].) In het vmbo wordt in het wiskundeprogramma tot en met het examen nog wel werk gemaakt van het rekenen. In havo-vwo echter, wordt ten onrechte verondersteld dat leerlingen alle kennis en vaardigheden van het rekenen goed beheersen. De Expertgroep concludeert dat ook in het voortgezet onderwijs veel explicieter de rekenvaardigheden en routines uit het basisonderwijs moeten worden onderhouden en uitgebreid.
Kijken we naar de schoolboeken in het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs, dan is er wat betreft onderwerpen als grafieken en meten en meetkunde sprake van enige overlap. Zo worden in havo-vwo bijvoorbeeld onderwerpen uit de grafische verwerking en meetkunde helemaal vanaf het begin opgebouwd, terwijl deze ook in het PO aan bod zijn gekomen. Als meer rekening wordt gehouden met wat hierover in het basisonderwijs al aan bod is geweest, zou dit in het voortgezet onderwijs tot tijdwinst kunnen leiden.
Naast het zoeken naar een zekere eenheid in operationele leerdoelen voor het primair onderwijs, zoals het rapport van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen voorstelt, is het voor de leerlingen van groot belang dat hun overgang van het po naar het vo zonder onnodige drempels verloopt. Overleg tussen de scholen van primair onderwijs en de scholen van voortgezet onderwijs waar de leerlingen instromen is noodzakelijk om de feitelijk in het po gerealiseerde leerdoelen en het aanvangsniveau in het vo op elkaar af te stemmen. Uit onderwijskundig onderzoek blijkt dat er per regio en per school een forse variatie bestaat in het feitelijk gerealiseerde beheersingsniveau van de leerlingen.

Aanbeveling 2.3 De aansluiting op het basisonderwijs
Opdat er echt sprake kan zijn van een doorlopende leerlijn, is het, gelet op de variëteit tussen basisscholen, noodzakelijk dat de inhoudelijke afstemming voor

rekenen&wiskunde tussen de ontvangende scholen voor voortgezet onderwijs en het toeleverende basisonderwijs per regio worden geïntensiveerd.

2.4 Differentiatie in bovenbouw basisonderwijs

Aansluitend op het rapport van de Expertgroep constateren wij dat in de bovenbouw van het basisonderwijs de verschillen in prestaties van leerlingen op het gebied van rekenen&wiskunde groot zijn. Wij ondersteunen het voorstel van de Expertgroep om twee duidelijke niveaus voor de uitstroom van groep 8 vast te leggen. Met de kennis en vaardigheden van het ene niveau kunnen leerlingen aansluiting krijgen op het programma rekenen&wiskunde in het vmbo BB en KB. Voor de grote groep leerlingen die instroomt in het vmbo TL-GL of havo-vwo is het andere niveau bedoeld, met een breder pakket aan kennis en vaardigheden en een hoger beheersingsniveau.
In de bovenbouw van het basisonderwijs werkt ook een deel van de leerlingen beneden hun ontwikkelingsniveau qua tempo en abstractiegraad. Wegens het ontbreken van een voor hen passend onderwijsaanbod, moeten zij noodgedwongen pas op de plaats maken. Naar de mening van onze programmacommissie moet, naast de twee door de Expertgroep beschreven uitstroomniveaus, voor deze groep leerlingen bij de verschillende onderwerpen een verdieping worden aangeboden. We denken dan niet aan een scala aan losse activiteiten maar aan substantiële uitgelijnde stukken leerstof waarin aandacht is voor bijvoorbeeld generaliseren en formaliseren, algebraïsche verkenningen, informele getaltheorie, patronen met getallen en meetkundige figuren. Zie bijvoorbeeld de suggesties die hiervoor gedaan zijn in ReAL[3)]. Op ons verzoek heeft Kees Buijs (SLO) exemplarisch aangegeven wat hier in de bovenbouw van het basisonderwijs mogelijk is. Deze notitie is opgenomen als bijlage bij dit rapport.

Aanbeveling 2.4 Differentiatie in bovenbouw basisonderwijs
In de bovenbouw van basisonderwijs moet meer rekening worden gehouden met verschillen, zowel gericht op de beide uitstroomniveaus van de Expertgroep als op de verrijking en verdieping voor de groep leerlingen die (veel) meer aan kan.

2.5 Schoolbeleid voor onderhoud rekenvaardigheden in alle vakken

Een analyse van de inhoud van schoolboeken en programma's van andere vakken, bestemd voor 12-16 jarigen, leidt tot de conclusie dat in die schoolvakken de aandacht in het laatste decennium sterk verschoven is naar een meer kwalitatieve benadering met verwaarlozing van een kwantitatieve aanpak, zodat in die vakgebieden het rekenen (aan grootheden) weinig wordt beoefend. Hetzelfde geldt voor het sterk teruggebrachte gebruik van formules en algebra, waar in het vervolgonderwijs juist wel een beroep op wordt gedaan. En als er wel wordt gerekend, dan gebeurt dat veelal zonder inzet van de beproefde methoden en rekenmodellen (b.v. de verhoudingstabel), waar de leerlingen in het reken- en wiskundeonderwijs mee hebben leren werken. Hierbij lijkt er ook slechts in beperkte mate afstemming te zijn over het al dan niet gebruiken van de rekenmachine. Verder ontbreekt 'onderwijs' in het correct en verstandig gebruik van die rekenmachine. In bovenstaande ligt ongetwijfeld een oorzaak van het breed geconstateerde gemis aan een aantal vaardigheden rekenen&wiskunde in de hogere leerjaren vo en het mbo, hbo en wo. Basale vaardigheden die niet worden onderhouden en benut in andere vakgebieden, zakken weg en worden ook niet meer als zodanig herkend. Binnen de scholen van het vo kan hier al veel aan worden gedaan. (Hetzelfde geldt voor het overleg tussen de verschillende leerplancommissies.) Het is wenselijk om per school in alle relevante

vakken het schoolbreed gebruiken van de rekenprocedures, geleerd in het basisonderwijs en de wiskundelessen, *expliciet* te harmoniseren en te onderwijzen en te toetsen.
Tijdens de veldraadpleging van de Expertgroep op 21 november (350 aanwezigen) was de overgrote meerderheid van de aanwezigen van mening dat van de versterking van die samenhang tussen de basisvakken enerzijds en de toepassing van die kennis en vaardigheid in andere vakken anderzijds op schoolniveau veel meer werk moet worden gemaakt. In projecten zoals BPS[5)], Salvo[6)],Winst[7)] zijn hiermee goede ervaringen opgedaan.

Aanbeveling 2.5 Rekenvaardigheden onderhouden in en buiten het vak wiskunde
Het onderhouden van vaardigheden en geleerde procedures op het gebied van het rekenen, en de wiskunde moet voor een belangrijk deel plaats vinden tijdens het toepassen en functioneel gebruiken in andere vakken. De aanpak die in rekenen&wiskunde is aangeleerd moet bij de docenten van andere vakken bekend zijn en indien mogelijk worden gebruikt.

2.6 Differentiatie in 3 havo

Vanaf de start van het huidige onderwijsstelsel in 1968 bestaat er voor het wiskundeonderwijs in 3 havo een structureel probleem. Wegens het cumulatieve karakter van het schoolvak wiskunde in combinatie met de toenemende formalisering en abstractie bereikte een deel van de leerlingen in 3 havo hierin hun cognitief plafond. Zij gingen met een stevige onvoldoende over naar 4 havo en kozen geen wiskunde in hun vakkenpakket. Maatschappelijk gezien werd zo'n grote groep niet-wiskunde-kiezers steeds onwenselijker. Dankzij de invoering van wiskunde A1 en A12 met de verplichting voor het kiezen van ten minste wiskunde A1, bleken alle leerlingen in de bovenbouw havo in staat om een redelijk tot goed niveau in wiskundige kennis en vaardigheden te bereiken, passend bij hun vervolgopleiding in het hbo.
Ook na de invoering van de profielen in het studiehuis zit het knelpunt in de leerlijn wiskunde voor de havo nog steeds in leerjaar 3, waar leerlingen een stevige basis moeten krijgen voor zowel wiskunde A als wiskunde B en zich daar bovendien op moeten oriënteren in verband met de keuze van profielen en vakken. Delen van het vigerende programma in 3 havo zijn een uitermate wenselijke basis voor wiskunde B, maar zijn voor een belangrijk deel van de leerlingenpopulatie in 3 havo te hoog gegrepen en niet nodig voor hun verder studie. Andere delen van het programma in 3 havo zijn juist meer relevant als voorbereiding op wiskunde A.
In verschillende scholen is intussen positieve ervaring opgedaan met een oplossing van dit structurele probleem. Een aantal onderwerpen, namelijk de meer technische algebraïsche herleidingen van formules en vergelijkingen, worden alleen door de leerlingen bestudeerd die de optie voor een keuze van wiskunde B willen openhouden, terwijl tegelijkertijd de andere leerlingen een onderwerp bestuderen, dat een betere aansluiting op wiskunde A verzorgt. Op die manier worden leerlingen beter voorbereid op de keuze van de profielen, voorzover het de wiskunde betreft en tegelijk wordt een betere aansluiting verzorgd op de beide bovenbouwvakken. Het ligt voor de hand om deze differentiatie in de tweede helft van een schooljaar te laten plaatsvinden, omstreeks de voorlopige profielkeuze. Dit kan in de praktijk bijvoorbeeld door na kerst in 3 havo met clustergroepen voor wiskunde A en wiskunde B te werken. Leerlingen die ervaren dat wiskunde B of wiskunde A voor hen niet een wenselijke of haalbare keuze is en willen switchen van profiel of vak, kunnen via een speciale inhaalregeling tegen het einde van het schooljaar alsnog het ontbrekende onderwerp op niveau inhalen.

Aanbeveling 2.6 Differentiatie in 3 havo
In de tweede helft van het leerjaar 3 havo is het wenselijk om een differentiatie toe te passen met het oog op een betere oriëntatie en voorbereiding op wiskunde A of wiskunde B, zodat de aansluiting tussen 3 havo en 4 havo wordt verbeterd.

In 3 vwo speelde en speelt deze behoefte aan een structurele differentiatie een minder grote rol, omdat het vierde leerjaar van het vwo veelal als een overgangsjaar wordt ingevuld. Binnen het voor iedereen haalbare programma van 3 vwo zijn voldoende mogelijkheden om leerlingen te oriënteren op wiskunde A, B, C en D.

3 Pluspunten en knelpunten in het wiskundeprogramma

3.1 Het totale programma Wiskunde 12-16

Het huidige wiskundeprogramma voor de onderbouw havo-vwo en het hele vmbo is tegelijk met de basisvorming ingevoerd. Het was mede een reactie op de onvrede die bestond over het toenmalige examenprogramma wiskunde voor vbo/mavo. Door die sector werd met tevredenheid op het nieuwe programma gereageerd. Inmiddels is er ruime ervaring mee opgedaan en zijn er gaandeweg een aantal accentwijzigingen door de schoolboekenauteurs ingevoerd, gehoord de wensen van het veld. In de eerste jaren na de invoering lopen de programma’s in vmbo TL (toen: mavo) en havo-vwo nog redelijk parallel, maar de verschillen worden bij elke nieuwe editie van de schoolboeken groter. In het vmbo liggen de leerlijnen door de afsluiting met een centraal vastgelegd examenprogramma redelijk vast, zodat er weinig ruimte is voor ingrijpende veranderingen. De behoefte daaraan is ook niet groot, omdat 80% van de vmbo-populatie het vak wiskunde opneemt in het examenpakket en daar redelijke resultaten behaalt. Minder wenselijk is het dat de afstand tussen het eindniveau van wiskunde op vmbo TL en het verwachte instroomniveau in 4 havo (gebaseerd op het programma in 3 havo) groter is geworden dan in de oude situatie met de mavo-instroom op basis van het toenmalige wiskundeprogramma op D-niveau. Onder invloed van de toenmalige politieke opvattingen over de basisvorming en het vmbo is het eindniveau van mavo D verlaagd en de doorstroom naar 4 havo bemoeilijkt.

Het is aan de afzonderlijke scholen om aan te geven in hoeverre in de twee eerste leerjaren de inhoud van de wiskundeprogramma’s vmbo en havo-vwo uiteen mogen lopen. Een totaal verschillend programma in de eerste twee leerjaren van het vmbo TL enerzijds en het havo-vwo anderzijds is maatschappelijk en onderwijskundig niet acceptabel. Dit in verband met de gewenste mogelijkheid voor het overstappen van leerlingen van het ene schooltype naar het andere. De schoolboeken werken net als de scholen in leerjaar 1 en 2 met een zogenoemde dakpanconstructie. Wat betreft inhouden zijn de verschillende tussen die boeken voor de verschillende schooltypen niet erg groot. De verschillen zullen vooral in de diepgang, het formaliseren, generaliseren en abstraheren moeten worden gevonden.
Conform de opdracht van deze programmacommissie concentreren wij ons op de eerste drie leerjaren havo-vwo, waar geen afsluitend examen centraal staat, maar een sterk gedifferentieerde doorstroom naar profielen met wiskundevakken, die onderling sterk in karakter verschillen. Accentwijzigingen in de onderbouwprogramma’s moeten vanuit die verschillende doorstroommogelijkheden worden beargumenteerd en binnen de totaal beschikbare ruimte aan lesuren en studielast in de onderbouw worden gerealiseerd. De marges voor een programmawijziging in het onderbouwprogramma van havo-vwo zijn daarom klein, terwijl op dit moment de onderwijsbaarheid van dat programma in de ogen van leerlingen (positieve waardering) en leraren (goed haalbaar) goed is.

> *Aanbeveling 3.1 De marges van het programma onderbouw havo-vwo*
> *Binnen de beschikbare ruimte aan lestijd en studielast zijn de marges voor een wijziging in het onderbouwprogramma havo-vwo klein. Accentverschuivingen in het vigerende programma moeten mede worden onderbouwd met argumenten ontleend aan de aansluiting op de verschillende wiskundevakken in 4 havo en 4 vwo.*

3.2 Aansluiting op het basisonderwijs en voortzetting van de rekenlijn

In de onderbouw van havo-vwo zullen de rekenlijnen uit het basisonderwijs meer systematisch moeten worden onderhouden en verbreed. Onderhouden betekent voor deze leerlingen het opvoeren van het beheersingsniveau tot het *paraat hebben* van feiten en routines, het *verdiepen van inzicht* in fundamentele relaties en eigenschappen en het *leggen van verbanden* met andere wiskundige onderwerpen. Specifieke onderwerpen, zoals het inzicht in en het werken met breuken, moeten van de grond af aan worden opgebouwd en in de verschillende wiskundige onderwerpen worden onderhouden in plaats van vermeden. Daarnaast is het noodzakelijk om per school in alle relevante vakken het schoolbreed gebruiken van de rekenprocedures, geleerd in het basisonderwijs en de wiskundelessen, *expliciet* te harmoniseren en te onderwijzen. Continue herhaalde aandacht voor het toepassen van het rekenen is van belang. Het paraat hebben van alle relevante routines wordt zo in eenvoudige situaties in toegepaste rekenopdrachten uit de andere vakken onderhouden en beoordeeld[8)].

Aanbeveling 3.2 Voortzetting van de rekenlijn
De rekenlijnen in havo-vwo moeten meer systematisch worden onderhouden en verbreed, terwijl speciaal werk moet worden gemaakt van het functioneel gebruik van geleerde rekenprocedures in de andere schoolvakken. Aandacht voor het toegepast rekenen in de andere vakken lijkt noodzakelijk.

3.3 Aansluiting onderbouw-bovenbouw havo-vwo

De aansluiting tussen de onderbouw en de bovenbouw is altijd een knelpunt geweest in havo-vwo, met name voor de meer exacte richtingen, en in het bijzonder voor wiskunde B. De onderbouw havo-vwo heeft een bredere doelstelling en een bredere samenstelling van de leerlingenpopulatie dan elk van de verschillende stromen in de bovenbouw havo-vwo. In de loop van de onderbouw ontwikkelen de leerlingen zich meer in de exacte richting van wiskunde B en de natuurprofielen of meer in de toegepaste richting van wiskunde A in de economische en maatschappelijke profielen. In het derde leerjaar begint die profilering duidelijk zichtbaar te worden, wat in 3 havo een geleidelijke differentiatie, zoals eerder beschreven, gewenst maakt. In 3 vwo kan dat op het niveau van enkele hoofdstukken ook worden toegepast.
In veel scholen doet zich de situatie voor dat de leraren die in de onderbouw de reguliere wiskundelessen verzorgen niet (meer) in de bovenbouw lesgeven en omgekeerd. Dat leidt binnen de scholen gemakkelijk tot een onduidelijkheid over het uitstroomniveau van de onderbouw en het instroomniveau van de bovenbouw. In de organisatie van een school met onderbouwteams en bovenbouwteams moeten sterke vaksecties ervoor zorgen dat de leerlijnen van onderbouw naar bovenbouw inderdaad goed doorlopen. Stevig en niet vrijblijvend overleg over het haalbare en gewenste beheersingsniveau binnen de wiskundesectie is noodzakelijk.

Aanbeveling 3.3 Aansluiting onderbouw-bovenbouw havo-vwo
Binnen de school moeten bindende afspraken worden gemaakt over het gemeenschappelijke uitstroomniveau van de onderbouw havo-vwo en over de differentiële leerdoelen gericht op aansluiting bij wiskunde A of wiskunde B.

3.4 Aansluiting vmbo TL op 4 havo

Het percentage leerlingen dat doorstroomt van vmbo TL naar 4 havo neemt toe en deze route lijkt politiek weer aanvaardbaar te zijn. Na opheffing van de mavo met een stevig examenvak wiskunde op D-niveau en een goede doorstroming naar 4 havo werd de instroom in de havo vanuit het nieuwe vmbo TL sterk bemoeilijkt door de invoering van de profielen in de bovenbouw havo en de kloof tussen het examenprogramma wiskunde van vmbo TL en de vakken wiskunde A en B in 4 havo. Gelet op de maatschappelijke behoefte en de onderwijskundige wenselijkheid van deze ‘herkansing’ naar havo is het aan te bevelen hiervoor een nieuw doorstroomprogramma te maken, dan wel het eerder door de SLO ontworpen doorstroomprogramma te actualiseren, dat instromende vmbo-leerlingen een betere aansluiting op het programma wiskunde A in 4 havo biedt. Voor de aansluiting op wiskunde B is een variant van dit doorstroomprogramma gewenst.

Aanbeveling 3.4 Aansluiting vmbo TL op 4 havo
Het is de moeite waard om landelijk, bijvoorbeeld in overleg met de auteurs van schoolboeken, een additioneel wiskundeprogramma vast te stellen – of te actualiseren- voor leerlingen die na vmbo TL gaan instromen in 4 havo. Zowel voor de doorstroom naar wiskunde A als naar wiskunde B is een dergelijk programma gewenst.

4 Verkennen, gebruiken en verdiepen

In dit hoofdstuk wordt beargumenteerd welk type leerdoelen in het wiskundeonderwijs van de onderbouw centraal moeten staan. Zie voor een wetenschappelijke onderbouwing Van Streun 2001 [9)] en voor een toepassing op doorlopende leerlijnen voor het gebied van rekenen&wiskunde de rapporten van de Expertgroep [1)].
Een analyse van de huidige situatie leidt tot aanbevelingen om op een aantal punten het realiseren van bepaalde leerdoelen krachtiger na te streven. Die aanbevelingen worden in hoofdstuk 5 uitgewerkt voor de verschillende leergebieden.

4.1 Leerdoelen in de onderbouw

In navolging van het visiedocument *Rijk aan betekenis* [2)] maken we onderscheid tussen wiskundige concepten en denkactiviteiten. Die concepten zijn veelal onderling weer sterk verbonden en vormen conceptuele netwerken, waaraan weer wiskundige vaardigheden en routines zijn gekoppeld. In de leeftijdsgroep van 12-16 jarigen wordt de basis gelegd voor een aantal essentiële conceptuele netwerken, terwijl op enkele conceptuele netwerken uit het primair onderwijs wordt voortgebouwd. In hoofdstuk 5 worden enkele belangrijke conceptuele netwerken besproken in het licht van leerlijnen en beheersingsniveaus. Daarmee vervlochten zijn de (wiskundige) denkactiviteiten, waar we in dit rapport ook de te ontwikkelen gewoonten en werkwijzen onder laten vallen. Leerstofonderdelen die niet bijdragen aan uitbreiding en versterking van een conceptueel netwerk of aan het onderhouden van vaardigheden in een lange leerlijn zullen minder aandacht krijgen dan andere leerstofonderdelen die zich daar wel voor lenen. Speciale aandacht in onze analyse krijgt de relatie tussen horizontaal mathematiseren (rekenen-wiskunde in toegepaste situaties) en verticaal mathematiseren (structureren binnen de wiskunde).
De programmacommissie Onderbouw acht ook in de onderbouw een balans nodig tussen het streven naar inzicht en het beheersen van vaardigheden. Waarbij een zekere mate van inzicht in begrippen en handelingen de basis voor routinevorming en denkactiviteiten vormt.. Wij onderschrijven de volgende argumentatie in Adding it Up [10)]

1. Ten onrechte wordt vaardigheid soms *tegenover* inzicht geplaatst. Begrijpen maakt het leren van vaardigheden gemakkelijker, minder gevoelig voor fouten en het beklijft beter. Aan de andere kant is een zeker niveau van vaardigheden noodzakelijk om nieuwe wiskundige begrippen en methoden met begrip te leren en ontwikkelen.
2. Zonder een goede *routine* stranden leerlingen bij het verdiepen van wiskundige ideeën of het oplossen van wiskundige problemen. De aandacht die zij dan nodig hebben om hun resultaten uit te werken in plaats van die paraat op te roepen gaat ten koste van de aandacht voor de aanpak van het probleem of het zoeken naar onderliggende relaties.
3. Leerlingen die een vaardigheid zonder begrip leren hebben heel veel oefening nodig om de stappen niet te vergeten. Als leerlingen de operaties *begrijpen*, dan zijn ze beter in staat om ze te reconstrueren en in samenhang met andere operaties te zien.
4. Als vaardigheden zonder begrip worden geleerd, dan blijven het geïsoleerde brokjes kennis. Nieuwe begrippen of vaardigheden kunnen dan minder goed voortbouwen op een bestaand *netwerk* aan kennis. Dat leidt ertoe dat leerlingen voor elke kleine variatie in opgaven weer nieuwe oplossingsprocedures moeten leren.

Aanbeveling 4.1 Balans tussen vaardigheden, concepten en denkactiviteiten
In het wiskundeonderwijs van de onderbouw havo-vwo wordt een balans nagestreefd tussen het ontwikkelen van wiskundige begrippen, routines en denkactiviteiten, waarbij inzicht de basis vormt voor routinevorming.

4.2 Verkennen van begrippen en methoden

Het wiskundeonderwijs in de onderbouw havo-vwo is geen eindonderwijs, maar heeft tot doel om een brede basis te leggen voor een vervolg in de bovenbouw. In de onderbouw moet de interesse in de wiskunde als *menselijke activiteit* (Freudenthal) worden gewekt, moet de leerling worden geïnspireerd en uitgedaagd zelf wiskundige vragen op te roepen, wiskundige problemen aan te pakken, wiskundige concepten en methoden te heruitvinden. Werkend aan geschikte probleemstellingen ervaren de leerlingen dat zij zelf succes kunnen boeken en zelf wiskunde kunnen bedrijven. De ene keer gaat het om praktische situaties die met behulp van wiskunde kunnen worden gestructureerd of opgelost (horizontaal mathematiseren). De andere keer gaat het om wiskundige probleemstellingen, om het structureren van een wiskundig gebied, het verkorten van een wiskundige werkwijze of het analyseren van een wiskundig object (verticaal mathematiseren).

Voor de didactiek in de onderbouw betekent de prioriteit voor het bereiken van deze doelen, dat de leerlingen zelf de kans moeten krijgen om aan de hand van geschikte vragen en probleemstellingen nieuwe begrippen en methoden te verkennen en te herontdekken welke wetmatigheden, strategieën, kenmerken, oplossingsmethoden en werkwijzen aan de orde komen. De ene keer wordt dan gestart met praktische, herkenbare situaties, die aanleiding geven tot vragen en werkwijzen. De andere keer begint de verkenning vanuit een wiskundige probleemstelling, die toeleidt naar een wiskundig concept of een wiskundige methode.

Aanbeveling 4.2 Verkennen van begrippen en methoden
In de onderbouw havo-vwo moeten de leerlingen aan de hand van geschikte vragen en probleemstellingen ruim de gelegenheid krijgen om nieuwe begrippen en methoden te verkennen en te koppelen aan het al eerder verworven eigen netwerk aan kennis en vaardigheden.

4.3 Gebruiken van kennis en vaardigheden

Sinds ruim 20 jaar is in het Nederlandse wiskundeonderwijs de aandacht verbreed van een uitsluitend binnen-wiskundige benadering naar het ook functioneel gebruiken van wiskundige kennis en vaardigheden in allerlei situaties en toepassingen uit het dagelijks leven en uit andere vakgebieden op school. Internationaal is die trend, namelijk dat de transfer van ‘kennis opbouwen’ naar het gebruiken van die kennis in toepassingen ook tot de doelen van wiskundeonderwijs behoort, ook duidelijk herkenbaar.
In het internationaal vergelijkend onderzoek PISA wordt die transfer op een bepaald niveau getoetst. Het bevorderen van die transfer is alleen mogelijk door een goede ordening van de contexten, opgaven, expliciteringen en (toegepaste) problemen in een samenhangend geheel. De wiskundige concepten en methoden moeten al in de fase van *Verkennen* gekoppeld worden aan voorstelbare, betekenisvolle situaties. Ze komen in veel gevallen daaruit voort en worden vervolgens verder ontwikkeld. Tegelijkertijd moet ook het expliciteren en consolideren van de wiskundige inhouden gekoppeld blijven aan

exemplarische situaties waarin die wiskunde moet worden gebruikt. Deze situaties kunnen zowel buiten als binnen de wiskunde liggen

> *Aanbeveling 4.3 Gebruik van kennis en vaardigheden*
> *Voor het functioneel leren gebruiken en toepassen van wiskundige kennis en vaardigheden moeten in de fasen van opbouw en verwerking van die wiskundige begrippen en methoden voorstelbare situaties en toepassingen, zowel van buiten als van binnen de wiskunde, worden opgenomen.*

4.4 Verdiepen, probleemaanpak, formaliseren, abstraheren en redeneren

Probleemaanpak

In het rapport over PISA-2003 [11)] wordt het volgende geconstateerd.
“Het PISA-2003-onderzoek (Programme for International Student Assessment) heeft laten zien dat Nederlandse 15-jarige leerlingen goed zijn in simpele toegepaste wiskunde, in vergelijking met leerlingen uit andere landen. Echter, bij het onderdeel ‘probleem oplossen’ waren de Nederlandse leerlingen helemaal niet zo goed. We kunnen daar geen afdoende verklaring voor geven. Opvallend was dat Nederlandse leerlingen het betrekkelijk snel opgeven en soms niet eens aan een opgave beginnen, wanneer die veel tijd of veel inspanning vraagt. Ook duidelijk is, uit onze analyse van de gebruikte methodes, dat in het po (en het vo) weinig grote (reken)opgaven voorkomen die meer dan één vraag omvatten. In de Cito-toets komen dergelijke omvangrijke contextvragen evenmin voor.”
In het rapport wordt vervolgens aanbevolen om leerlingen vanaf de hoogste leerjaren van het po structureel van tijd tot tijd langere tijd met een relatief ingewikkeld probleem bezig te laten zijn. Zie voorbeelden op de volgende pagina. .
Een analoge constatering leverde het veldonderzoek van ReAL[3)] in het po op:
“Aan leerlingen aan het eind van het po wordt zelden gevraagd hun uitwerking of redenering op te schrijven of een toelichting te geven bij hun antwoord. Deze vaardigheid is in het vo wel belangrijk, reden om er in groep 8 aandacht aan te besteden. Dit geldt voor alle leerlingen van groep 8, niet alleen de leerlingen die naar havo-vwo gaan.”
De programmacommissie onderbouw heeft op grond van leservaringen en lesbezoek in het vo hetzelfde geconstateerd en geeft de volgende twee, elkaar aanvullende, mogelijke verklaringen:

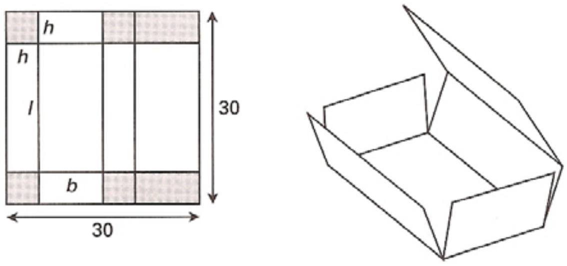
- De stappen in de opgaven in het vo zijn de laatste 20 jaar kleiner geworden. Schoolleidingen eisten meer zelfwerkzaamheid en docenten vroegen aan uitgevers om ‘minder hobbels’, waardoor de eigenlijke vraag, b.v. 3f, nu wordt voorafgegaan door 5 deelvragen. Er is balans nodig: met alleen grote opgaven wordt je gereedschapskist niet gevuld, zonder grote opgaven ontwikkel je geen aanpakgedrag.
- Een goede probleemaanpak kun je niet uit het schoolboek leren, het is de docent die het moet modelleren. In een eerste probleemverkenning, door leerlingen vaak overgeslagen, moet de probleemsituatie worden verkend om een beeld te krijgen van wat er aan de hand is. Die analyse is nodig om je (wiskundig) gereedschap te kunnen kiezen. Vervolgens is er *overzicht* nodig van wat er allemaal in de gereedschapskist zit, om een keuze te kunnen maken van het in die situatie nuttige gereedschap. Nodig is zowel het *paraat hebben* van gereedschap, het *selecteren* en *toepassen* van het gereedschap en het *overzicht* van het relevante conceptuele netwerk.

Voor het verwerven van deze bekwaamheden is veel interactie tussen leerlingen en docent noodzakelijk en die laat, door de geschetste ontwikkeling naar zelfstandig sommetjes maken, veel te wensen over.

Voorbeelden probleemaanpak bij formules maken

1.

Uit een vierkant stuk karton van 30 bij 30 cm wordt een bouwplaat van een bakje in de vorm van een balk gemaakt, dat van boven dicht is.

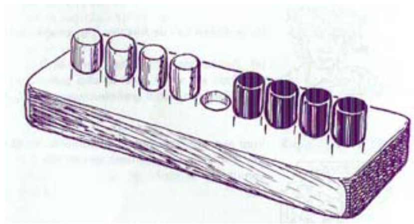


Bij welke hoogte is het volume van de balk het grootst?
Welke formule geeft het verband weer tussen het volume en de hoogte?
Hints:
Bereken bij verschillende hoogten het volume van de balk. Maak een tabel.
Teken de grafiek van het verband tussen het volume en de hoogte.
Schrijf je berekening van het volume voor een bepaalde hoogte volledig uit en vervang vervolgens in die berekening de gekozen hoogte door de lettervariabele *h*.

2.

Mijn ritje naar Amsterdam ging vlot met een gemiddelde snelheid van 100 km/u. Terug had ik door veel oponthoud een gemiddelde snelheid van maar 40 km/u.
Wat was mijn gemiddelde snelheid over de heen- en terugreis?
Kun je een formule bedenken met de afstand d, en gemiddelde snelheden x en y?
Hints
Kies een getallenvoorbeeld voor de afstand. Maak een tekening. Reken meer voorbeelden door.
Vervang in een berekening de gekozen getallen door de lettervariabelen *d*, *x* en *y*.

3.



Een spel bestaat uit vier witte en vier zwarte pionnen, elk aan een kant, en een open plaats tussen beide rijtjes. Het doel is om de posities van de witte en de zwarte pionnen te verwisselen. Een pion mag verplaatst worden naar een naastgelegen lege plaats of over maximaal 1 pion heen springen.
Wat is het minimale aantal zetten?
Wat is het minimale zetten bij zeven paar pionnen?
Wat is de formule voor het minimale aantal zetten M bij n paar pionnen?
Hints
Vereenvoudig het probleem eerst tot 1 paar pionnen, 2 paar pionnen, 3 paar pionnen,...
Spoor de gemeenschappelijke strategie op of het verband tussen de aantallen.
Maak een grafiek van je resultaten. Herken je de vorm van de grafiek?

Abstraheren

In de wiskunde is aandacht voor de onderliggende *abstractie*, het zoeken naar gemeenschappelijkheid, het *abstraheren*, van belang. Vragen die gesteld kunnen worden in het kader van abstraheren zijn bijvoorbeeld: Wat is gemeenschappelijk aan alle vergelijkingen? Welke type functies ken je en hoe kun je die herkennen? Hoe loopt deze rij getallen of dat puntenpatroon door?

Door bezig te zijn met dit soort vragen ontstaan flexibiliteit in het denken en overzicht, wat een wezenskenmerk is van wiskunde. Als je het niet begrijpt en geen verbanden ziet, zijn het allemaal losse feiten, die je geheugen (te) zwaar belasten. De programmacommissie constateert dat deze fase in een leerproces, namelijk van concrete situaties naar een abstractie, in het onderwijs aan 12-16 jarigen te weinig uit de verf komt.

> *Zijn onderstaande beweringen correcte voorbeelden van de distributieve wet?*
>
> $k(a + b) = ka + kb$
>
> $(x + y)/2 = x/2 + y/2$
>
> $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
>
> $\sqrt{(a + b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
>
> $(x + y)/x = 1 + y$
>
> $(ab)^3 = a^3b^3$
>
> $(2p)^3 = 2p^3$
>
> $24 \times 24 = (20 \times 20) + (4 \times 4) = 416$
>
> $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$

Redeneren, verantwoorden, argumenteren

Een ander zorgpunt is de afgenomen aandacht voor het *redeneren* in het algemeen, voor het *verantwoorden* van een oplossing en het *argumenteren* op grond van kenmerken. Mede onder invloed van de (multiple choice) toetscultuur, de rekenapparatuur en in het voortgezet onderwijs de beschikbare antwoordenboekjes, schrijven leerlingen alleen maar antwoorden op. Het inzichtelijk *noteren* van de gekozen oplossingsmethode, het *weergeven* van de gevolgde *redenering*, het *verantwoorden* en *controleren* van de werkwijze en het antwoord, het zijn essentiële aspecten van het leren van wiskunde. Ook hierin is de rol van de docent essentieel. De docent die deze zaken stelselmatig vraagt en beoordeelt, blijkt de werkwijze van leerlingen gunstig te kunnen beïnvloeden.

> *Voorbeelden en non-voorbeelden uit de onderwijspraktijk*
>
> Leraar wiskunde vmbo: “In de wiskundelessen probeer ik de leerlingen vier jaar lang op te voeden in het *correct noteren* van hun redenering en berekening. Daarbij let ik dus vooral op ‘breien’: 3 × 6 = 18 /2 = 9, maar ook op zaken als tan ∠A = 4 / 5 = 43° en 5^3 = 125 en 2nd x^2 (25) = 5.”
>
> “Ik breng de leerlingen aan het verstand dat als er in de context gewerkt wordt met grootheden en eenheden, die ook in het antwoord gebruikt moeten worden. Als ze dat niet op de juiste manier doen, trek ik daarvoor punten af. *Ik wil niet alleen losse antwoorden zien.* Sinds het correctievoorschrift van het examen vmbo TL 2005 is geen enkele eenheid of berekening meer verplicht. Echt een non-voorbeeld! Ik leer ze aan dat ze ieder getal dat ze gebruiken en niet rechtstreeks uit de opgave afkomstig is, moeten toelichten.”
>
> “Het grafisch kunnen weergeven van verbanden vind ik een belangrijke vaardigheid. Echter ook de as-indeling en as-aanduiding maken voor mij wezenlijk onderdeel uit van deze vaardigheid. Als leerlingen as-aanduidingen vergeten, een inconsequente assenverdeling hebben of de onafhankelijke en afhankelijke variabele verwisselen, trek

ik hier punten voor af. In examens kunnen leerlingen zich hierin nooit meer vergissen, immers altijd worden de tabellen en assenstelsels voorgedrukt geleverd. In ieder examen *leerlingen één keer zelf laten nadenken* over de grafische weergave en beslissingen laten nemen vind ik wenselijk."

In de onderbouw havo-vwo is het exemplarisch leren *argumenteren* binnen een wiskundige structuur en op basis van kenmerken van objecten of begrippen een waardevolle verdieping. Leerlingen zelf definities laten formuleren, voorbeelden laten geven van iets dat aan de definitie voldoet en iets dat er niet aan voldoet. Dit geeft een goed beeld van de wijze waarop wiskunde werkt. Uiteraard kan dat op verschillende niveaus, afhankelijk van het type leerling.

Nog twee typen voorbeelden uit de uitgave: Algebra om te begrijpen, NVvW 2001.

1. Welke van de onderstaande beweringen zijn soms, altijd, nooit juist? Leg uit!

a $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{xy}$

b $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{x-y}$

c $x+\frac{1}{y}=\frac{xy+1}{y}$

d $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$

e $\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$

f $(x+3).(x+5).(x-3) = x^3+5.x^2-9.x-54$

g $(x-4)^3 = x^4 +90.x-64$

2. Verdeel onderstaande uitdrukkingen in groepen, zo dat alle uitdrukkingen binnen een groep gelijkwaardig zijn. Het is mogelijk dat een of meer uitdrukkingen 'over blijven'

a $\sqrt{x+3}$

b $\sqrt{x}+3$

c x

d $3\sqrt{x}$

e $\sqrt{x+9}$

f $(\sqrt{x})^2$

g $\sqrt{\ }(x+3)$

h $\sqrt{\frac{1}{x}}$

i $\sqrt{9x}$

j $\sqrt{x}+\sqrt{x}$

k $\frac{1}{\sqrt{x}}$

l $\sqrt{3x}$

m $\sqrt{x} + \sqrt{3}$

n $\sqrt{x} + \sqrt{4x}$

o $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

Aanbeveling 4.4 Niveauverhoging
Om tot niveauverhoging te komen moet de trend van alleen maar zelfstandig sommetjes maken worden omgebogen. Er moet meer aandacht worden besteed aan het leren problemen oplossen, overzichten maken, verantwoordingen noteren, redeneren, abstraheren, argumenteren op basis van kenmerken.
Geschikte opdrachten en interactieve werkvormen zijn daarbij noodzakelijk.

4.5 Paraat hebben en onderhouden

De opbouw van het rekenen en de wiskunde kent uit de aard van de discipline een duidelijke hiërarchie in concepten en methoden, waarbij de conceptuele netwerken groeien en de bestudeerde begrippen en methoden deels parate kennis en routines moeten worden. Zij vormen immers het gereedschap voor de volgende uitbreiding van het netwerk. Zowel in het primair onderwijs als in het voortgezet onderwijs bevat het programma rekenen-wiskunde een breed scala aan onderwerpen, die soms uitgebreid aan de orde komen of soms alleen terloops worden aangestipt. Uit de beschrijving van de verschillende programma's en de uitwerking in schoolboeken is niet goed op te maken hoe de leerlijnen lopen, op welke begrippen wordt voortgebouwd en wanneer, hoe goed de vaardigheden moeten worden beheerst, wat de onderlinge samenhang is, enzovoort. Zie bijvoorbeeld ReAL [3)].
Wij constateren dat in het onderwijs het laatste decennium minder aandacht is voor het opbouwen van een basis aan *parate kennis*. Dat geldt ook in het onderwijs in rekenen en wiskunde. Het is van essentieel belang voor het ontwikkelen en toepassen van wiskundige kennis dat leerlingen een solide in inzicht gewortelde basis aan routines, rekenprocedures, feitelijke kennis, inzicht, overzicht en vaardigheden *paraat hebben*. Het gaat daarbij niet om geïsoleerde kennis, snel en afzonderlijk in te trainen, maar om een *breed samenhangend repertoire*, dat leerlingen kunnen oproepen op het moment dat zij dat nodig hebben, in en buiten de school, ook en juist bij andere vakken en gebieden dan rekenen en wiskunde. Op dit moment is het in alle fasen van het po en vo onduidelijk dat er zo'n parate kennisbasis moet zijn en wat die moet inhouden. Een recent in Euclides verschenen artikelenserie *Parate kennis en algebra* [12)] bevat een analyse van dit probleem en werkt voorstellen uit. In hoofdstuk 5 gaan we daar verder op in. Ook in het rapport van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen [1)] wordt uitdrukkelijk uitgesproken dat in het primair en voortgezet onderwijs ten onrechte weinig gewerkt wordt aan het consolideren en onderhouden van feitelijke kennis en routines tot op het beheersingsniveau van *paraat hebben*.

Aanbeveling 4.5 Paraat hebben
Wiskundesecties doen er goed aan om kernen aan feiten en routines te selecteren, deze met inzicht in een interactief leerproces met leerlingen te ontwikkelen en vervolgens die kernen expliciet te onderhouden en regelmatig in gevarieerde situaties te beoordelen of leerlingen die kernen paraat hebben en kunnen gebruiken.

5. Beheersingsniveaus eind 3 havo en 3 vwo

5.1 Getallen

In het visiedocument van cTWO [2] *Rijk aan betekenis* staat over de kern van het subdomein Getallen, onder andere dat het van belang is voor alle leerlingen daar kennis van te nemen. Aspecten die in dit visiedocument genoemd worden zijn onder andere:

- inzicht in de structuur en opbouw van het getalsysteem: natuurlijke getallen, rationale getallen, reële getallen, alle in samenhang met hun bewerkingen.
- rekenen met breuken en verhoudingen (procenten, driehoeksmeetkunde).

Ook wordt in *Rijk aan betekenis* gepleit voor een accentverschuiving:
“Een accentverschuiving in de onderbouw is dat meer nadruk wordt gelegd op rekenen met breuken, structuur en opbouw van het getalsysteem (irrationale getallen) en deelbaarheid.”

De programmacommissie onderbouw stemt in met de aanbevolen accentverschuiving die in termen van hoofdstuk 4 twee verschillende aspecten omvat. Allereerst het vergroten van de vaardigheid in het rekenen met breuken tot het beheersingsniveau van *paraat hebben* van bewerkingen met eenvoudige breuken. Daarnaast het kunnen redeneren over de eigenschappen van soorten van getallen en het kunnen uitleggen van de regels voor de bewerkingen met die getallen (*weten waarom).*
Voorts wijzen wij op het rapport *Over de drempels met rekenen* [1], waarin wordt betoogd dat er veel schort aan de aansluiting van de rekenlijn tussen het primair onderwijs en het voortgezet onderwijs. Ook aan het systematisch onderhouden en gebruiken van de eenmaal verworven rekenvaardigheden wordt in de onderbouw van havo-vwo te weinig gedaan, zie [1] en [3]. De aanbeveling 2.3 geldt met name voor de concepten en vaardigheden uit dit gebied van de *Getallen*.
Hoewel in de onderbouw vanzelfsprekend de rekenmachine wordt ingezet voor het rekenen met (grote) getallen en met bijvoorbeeld meetgegevens, willen we benadrukken dat de leerlingen daarnaast ook ervaring moeten opdoen met het “handmatig” werken met getallen. Een rijk gebied hiervoor is bijvoorbeeld het opsporen van en redeneren over patronen in rijtjes getallen, mede als een goede ondersteuning van de algebralijn. Nederlandse leerlingen doen het daarin internationaal significant slechter dan in vergelijkbare landen, zie Vos [13]

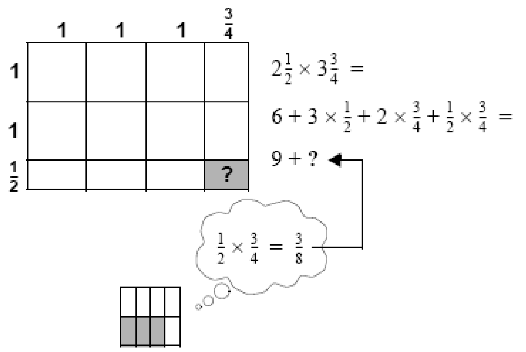
Voorbeeldopgave De getallen in het rijtje 2, 7, 12, 17, 22, … nemen steeds toe met 5. De getallen in het rijtje 3, 10, 17, 24, 31, … nemen steeds toe met 7. Het getal 17 komt in beide rijtjes voor. Als beide rijtjes worden voortgezet, wat is dan het volgende getal dat in beide rijtjes staat?

Hetzelfde geldt voor het onderzoeken van patronen bij het schrijven van breuken in de decimale schrijfwijze. Ook de geschiedenis van de wiskunde geeft rijke voorbeelden van het werken met getallen, zoals bijvoorbeeld het rekenen met de Egyptische stambreuken en de manier waarop de Griekse wiskundigen met getallen rekenden. Het gaat er in alle gevallen om dat leerlingen in een rijke omgeving met getallen blijven werken en leren redeneren, zonder dat ze meteen naar de rekenmachine grijpen. Getallen moeten voor hen *betekenis* krijgen op grond van hun intrinsieke eigenschappen.

Aanbeveling 5.1 Rekenprocedures en redeneren over getallen
Zowel aan het paraat hebben,het gebruiken en onderhouden van en het redeneren over rekenprocedures als aan het redeneren en argumenteren met en over getallen moet in de onderbouw van havo-vwo meer systematisch aandacht worden besteed.

Voorbeelden uit ReAL[3)]:

- Vereenvoudigen van 'letterbreuken' zoals:
  $\frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$, $\frac{m+1}{2m+2} = \frac{1}{2}$, $\frac{5p}{20q} = \frac{p}{4q}$
- Vergelijken van breuken (gelijke noemers of gelijke tellers maken), gebruik van de tekens < en >, ook met simpele algebraïsche expressies.
  Voorbeeld: is $\frac{2}{n}$ groter of kleiner dan $\frac{4}{2n+1}$, waarom? (*n* staat voor een natuurlijk getal).
- Herhalen en formaliseren van de operaties optellen en aftrekken; het gelijknamig maken van breuken, ook weer met 'letterbreuken'.
  $\frac{2}{m} + \frac{3}{m} = \ldots$ $\frac{m}{2} - \frac{m}{3} = \ldots$ $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \ldots$
- Informele en preformele vormen van de operaties vermenigvuldigen en delen herhalen, ook met algebraïsche expressies. Oppervlaktemodel, sprongen op de getallenlijn.
  Voorbeeld oppervlaktemodel:



- Vermenigvuldigen en delen als tegengestelde bewerkingen, delen door $\frac{1}{4}$ levert hetzelfde resultaat als vermenigvuldigen met 4, $\frac{\pi}{4}$ gelijk is aan $\frac{1}{4}\pi$.
  Ook met variabelen:
  $\frac{n}{5} = \frac{1}{5} \times n$, $m : \frac{3}{4} = \frac{4m}{3}$, $\frac{p}{q} \times \frac{q}{p} = 1$
- Onderzoeken en generaliseren van getalpatronen met breuken:
  $4 + 1\frac{1}{3} = 4 \times 1\frac{1}{3}$
  Kun je meer van zulke gelijkheden verzinnen?
  Welke formule hoort daarbij?
- Samengestelde breuken, bordjesmethode:

$$\frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \ldots \qquad \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}} = \ldots \qquad \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}} = \ldots$$

5.2 Verhoudingen

Dit subdomein omvat veel (maatschappelijke) toepassingsproblemen. Het *gebruiken* van rekenen&wiskunde heeft vaak betrekking op verhoudingsproblemen, waarvan het oplossen kennis, vaardigheden en inzicht vraagt op diverse terreinen van het rekenen. Verhoudingen kunnen worden beschreven:

- in *verhoudingentaal*, zoals bij 'één op de tien Nederlanders' of 'het aantal fietsers is twee keer zo groot als het aantal automobilisten';
- in *breukentaal*, bijvoorbeeld 'driekwart van de inwoners is ouder dan 25 jaar';
- met *procenten*, zoals 70 procent van de mensen is voor de aanleg van een randweg.

Begrip van verhoudingen houdt in dat de relatie tussen die verschillende beschrijvingen kan worden gelegd en dat leerlingen dit begrip kunnen inzetten bij het met succes oplossen van verhoudingsvraagstukken.
In het primair onderwijs wordt een begin gemaakt met de opbouw van dit subdomein en in het vmbo en de onderbouw havo-vwo wordt voor het *gebruiken* een stevige basis gelegd. Dat is van belang omdat juist op deze begrippen en methoden in het mbo-hbo (economisch, medisch en technisch rekenen) en in beroepssituaties een beroep wordt gedaan.

Verhoudingen worden gevonden in situatiebeschrijvingen, schema's, tabellen, grafieken, plattegronden en kaarten. Maar ook vaak in situaties uit het dagelijks leven, bijvoorbeeld bij het aanpassen van hoeveelheden in recepten aan het aantal personen. De verhoudingentaal sluit aan bij de terminologie zoals die in het dagelijks leven gebruikt wordt. De voorbeelden hieronder geven een overzicht van hoe en waar verhoudingen zoal voorkomen.

- Hoe langer hoe meer (tijdgerelateerd)
  Snelheid - kilometer per uur - meter per seconde - productie per arbeidsuur.
- Aanwas of groei – bevolkingsaanwas - groei van omzet en omzetdaling - bacteriegroei (aantal per tijd) - landaanslibbing (oppervlak per tijd) - rente in de zin van kapitaalgroei per tijd - loon op basis van stukprijs, op basis van basisloon en bonus per stuk.
- Deel-geheel bij (grote) aantallen – een derde deel van de leerlingen gaat mee - percentage van het nationaal inkomen dat besteed wordt aan de gezondheidszorg.
- Deel-geheel bij mengsels - deze chips bevatten 30% vet - metaallegeringen op basis van vaste verhoudingen, bv. Brons.
- Deel-geheel bij grootheden - de helft van het oppervlak - half zo zwaar
- Meetkundige verhoudingen (ruimtelijk)
  Projecties - schaal (verhouding 1 : 1000) – kopieermachine – schaduw - plattegrond
  Gelijkvormigheid - verhoudingen in een gevel / gezicht / - kleding- en schoenmaten - A0-A1-A2-A3-A4-A5 papiermaten
- Verhoudingen tussen en binnen andere grootheden
  Prijs per ... - benzine met de teller voor liters en prijs - prijs per 0,75 liter wijn - prijs per brood - prijs per vierkante meter - kilometer-rijden
- Dichtheid - bevolkingsdichtheid
- Zakelijke verhoudingen - winst in verhouding tot omzet – BTW – rente - korting
- Vergroten / verkleinen (niet meetkundig) - recepten in het kookboek - bak- braadtijd per kilo.

Inzicht en overzicht

Wegens de veelheid aan situaties en contexten waarin verhoudingen worden gebruikt is het voor leerlingen niet eenvoudig het gemeenschappelijke onderliggende concept en de toe te passen methode te herkennen. Daar komt nog bij dat in verschillende schoolvakken waarin met verhoudingen wordt gerekend veelal heel specifieke rekenprocedures worden toegepast, waarin de bij wiskunde onderwezen, didactisch breed inzetbare, methoden niet zijn te herkennen. De belangrijkste probleemaanpak in contexten met verhoudingen bestaat uit het systematisch weergeven van de gegevens en het gevraagde in een zogenoemde *verhoudingstabel* en het daarin 'verhoudingsgewijs rekenen'. Onderdeel daarvan kan zijn het zoeken van de *vermenigvuldigingsfactor* en het uitvoeren van berekeningen met die factor in de opgestelde verhoudingstabel. Die vermenigvuldigingsfactor of groeifactor speelt onder meer een rol bij vergroten en verkleinen, bij berekeningen met schaal en in al de eerder vermelde situaties. Het is een kernconcept zowel in het subdomein *Verhoudingen* als in het subdomein *Verbanden*. Het belangrijkste leerdoel in dit subdomein is wel dat leerlingen hebben begrepen,en onthouden en kunnen herkennen dat het in al die verhoudingssituaties gaat om het *vermenigvuldigen met een factor* en dat ze waar nodig een systematische *probleemaanpak met een verhoudingstabel* kennen en kunnen inzetten.

> *Voorbeeld*
>
> Een *auto* van 22.000 euro wordt 20% goedkoper.
> De nieuwe prijs wordt daarna nog eens met 10% verlaagd.
> Wat is het percentage van de totale prijsverlaging?
>
> Leerlingen moeten zich aan het eind van de onderbouw havo-vwo realiseren dat het bij procentuele toename of afname (dus exponentiële groei) altijd gaat om het rekenen met een vermenigvuldigingsfactor. Het beginbedrag wordt met $0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$ vermenigvuldigd, dus het kortingspercentage is 28%.

Het kernconcept *factor* verbindt het subdomein Verhoudingen met het subdomein Verbanden. Het gaat dan om het verwerven van *inzicht* en *overzicht*, waarbij het bijvoorbeeld gaat om de volgende stappen:

1. Contexten met procentuele groei, aangepakt met de vermenigvuldigingsfactor: bij 25% toename hoort de groeifactor 1,25. Zie samengestelde rente.
2. Het kenmerk van exponentiële groei wordt in woorden samengevat: de groeifactor per tijdseenheid is steeds dezelfde.
3. In tabellen die het verband tussen twee grootheden beschrijven wordt onderzocht of er sprake is van exponentiële groei.
4. De exponentiële formule met beginhoeveelheid en groeifactor wordt opgesteld en geïnterpreteerd.

Gelet op het brede toepassingsbereik van de berekeningen met verhoudingen in andere schoolvakken, in het mbo en in tal van beroepssectoren (variërend van technische en economische tot medische beroepssituaties) is een aanbeveling die in het verlengde ligt van aanbeveling 2.3 op zijn plaats.

Aanbeveling 5.2 Gemeenschappelijke aanpak verhoudingen
Schoolbeleid en overleg tussen vaksecties binnen de vo- scholen moeten leiden tot een voor leerlingen herkenbare gemeenschappelijke aanpak van het werken met verhoudingen in de grote variëteit aan toegepaste situaties in schoolvakken en beroepen.

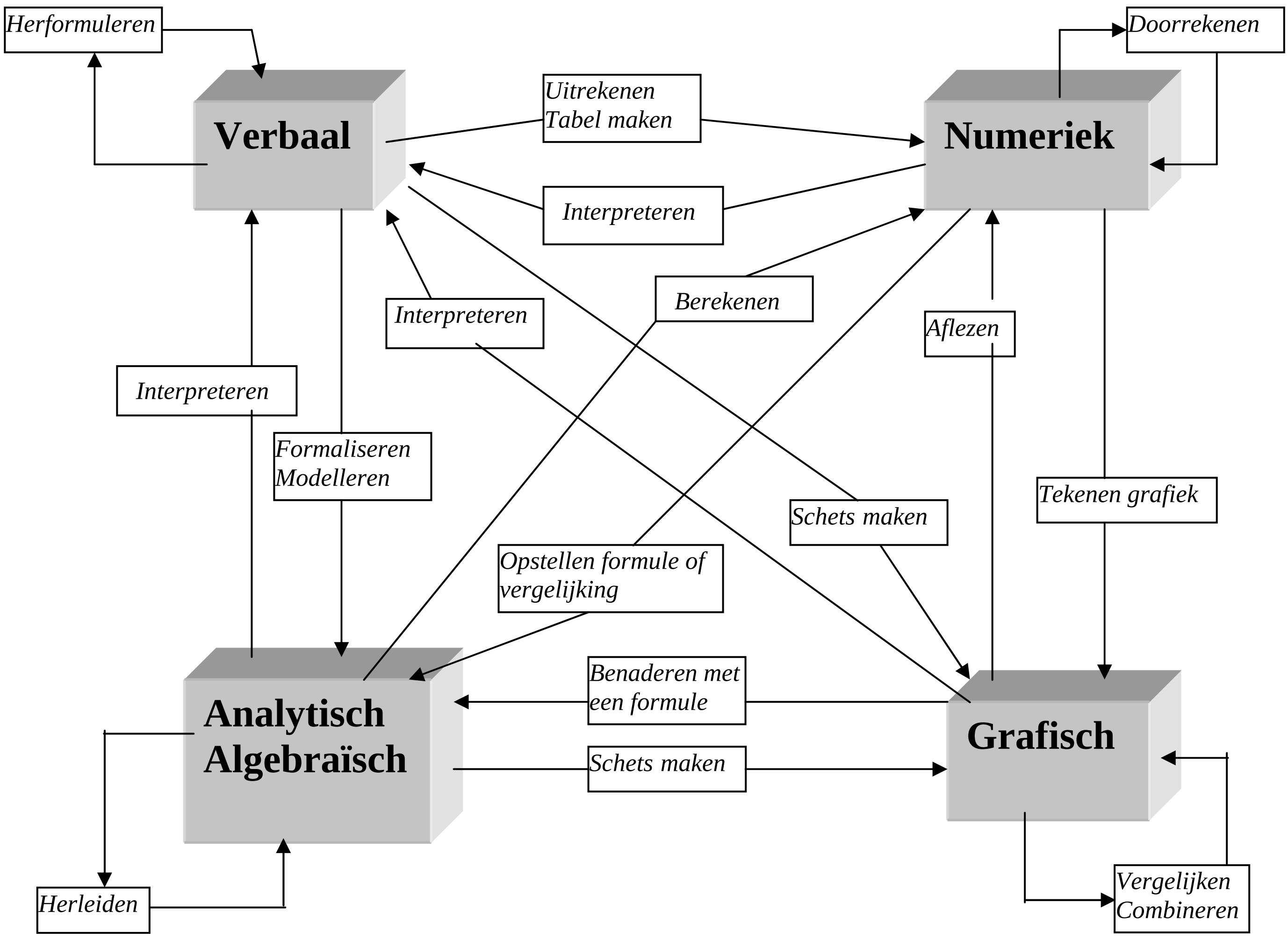
5.3 Verbanden

Oriëntatie

In het basisonderwijs wordt een eerste aanzet gegeven voor het subdomein Verbanden in de vorm van het bestuderen van grafieken en diagrammen die ofwel numerieke gegevens uit tabellen visualiseren ofwel het verband tussen twee grootheden of hoeveelheden in beeld brengen. Ook de overgang naar de informele algebra, zoals het ontdekken en voortzetten van regelmaat in patronen van stippen of blokjes of van getalpatronen of het generaliseren naar een woordformule behoren in het basisonderwijs (voor de betere leerlingen) tot dit gebied. Volgens een analyse van TIMSS-resultaten blijft de opbrengst van het Nederlandse onderwijs hierop duidelijk achter bij vergelijkbare landen [13)].
In het voortgezet onderwijs staan vanaf het eerste leerjaar in het vmbo en de onderbouw van het havo-vwo de *Verbanden* centraal, met als verschijningsvormen de context in woorden (bijvoorbeeld het vergelijken van twee abonnementen op toegang tot een dierentuin), de tabel met twee kolommen gegevens, de grafiek als visualisering van het verband en de (woord)formule met twee of meer variabelen. De meer formelere algebra met het herleiden van algebraïsche expressies en de algoritmen voor het algebraïsch oplossen van vergelijkingen, komt uitgebreider in paragraaf 5.4 aan de orde. In deze paragraaf nemen we nog wel het lezen en interpreteren van betekenisvolle formules mee, zoals die in allerlei vakgebieden voorkomen.
De brede benadering van de studie van verbanden tussen grootheden met de vier representaties (verbaal, numeriek, grafisch, analytisch) heeft in het Nederlandse wiskundeonderwijs voor 12-16 jarigen de plaats ingenomen van de voorheen gebruikelijke smalle benadering van functies die door middel van een functievoorschrift f(x) worden vastgelegd. Het is evident dat die brede benadering meer betekenis heeft voor zowel de brede leerlingenpopulatie van 12-16 jarigen als voor het toepassingsbereik op allerlei gebieden, waarin formules die verbanden tussen allerlei grootheden vastleggen centraal staan. Internationaal is die bredere benadering van functies voor deze leeftijdsgroep eveneens gangbaar geworden. In de veelheid van contexten, representaties en typen verbanden in het huidige programma is het evenwel voor leerlingen niet zo duidelijk wat de onderliggende structuur is, zodat het voor hen moeilijk is om een *overzicht* te krijgen van waar het eigenlijk om gaat. Ook uit de schoolboeken is slecht op te maken wat nu eigenlijk de kernconcepten zijn en welke feitelijke kennis en routines leerlingen *paraat* moeten *hebben* en *houden*.
Wij werken in het vervolg een voorstel uit om in de onderbouw van havo-vwo dit subdomein duidelijker te structureren en sterk te focussen op het repertoire aan begrippen en methoden, waar leerlingen tegen het einde van leerjaar 3 paraat over moeten beschikken. Een sterkere concentratie op het *overzicht* dat leerlingen geleidelijk aan moeten verwerven, kan ruimte scheppen in het programma en in de schoolboeken met de verwarrende hoeveelheid aan onderwerpjes en opgaven.

Schema van vertaalvaardigheden

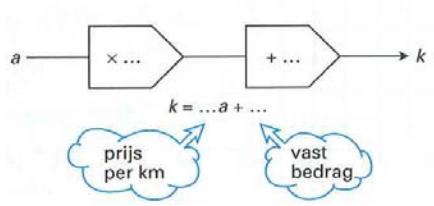
De kennis en vaardigheden om verbanden in verschillende representaties te herkennen en van de ene representatie te herformuleren naar de andere representatie ligt aan de basis van het beheersen van dit subdomein. In navolging van Claude Janvier bevat het rapport *Algebra om te begrijpen* [14)] van de NVvW een nuttig schema om de noodzakelijke structuur in dit subdomein te formuleren en daar de leerdoelen aan te koppelen. Voor de verschillende typen verbanden leggen we daarmee vast wat leerlingen in de onderbouw havo-vwo zouden moeten leren en vooral *paraat hebben*. In de 3D-blokken staan de vier manieren om een verband te beschrijven en de vertaalvaardigheden staan langs de pijlen.



Lineaire verbanden

In de loop van leerjaar 2 havo-vwo moeten leerlingen vlot alle overgangen tussen de verschillende representaties in alle richtingen beheersen. (Eenzelfde eis geldt voor het gehele vmbo-programma TL.). Daarnaast is het van belang dat ze ook van elke representatie de karakteristieken kennen over de typen van verbanden heen. Dus dat ze weten wat een formule is, wat een grafiek is. Dat houdt in dat ze in staat moeten zijn binnen en over elke representatievorm als wiskundig object te redeneren.

Van een context naar ...en vice versa



In een opgave staat bijv. ‘Van twee jaarafrekeningen van eenzelfde gasbedrijf is het verbruik in kubieke meters en de hoogte van de rekening in euro’s bekend’. Leerlingen moeten vlot de vaste kosten en de prijs per kubieke meter kunnen uitrekenen, een formule kunnen maken en een tabel en een grafiek.

In een veelheid aan typen contexten, zoals een reparatie met voorrijkosten en prijs per gewerkt kwartier, moeten zij het vaste deel en het variabele deel kunnen benoemen en berekenen.

Dat vaste deel en de ‘prijs *per* ..’.moeten ze vlot kunnen vertalen naar de grafiek en herkennen dat die terug te vinden zijn in het snijpunt met de verticale as en de helling of richtingscoëfficiënt. Omgekeerd moeten ze vlot een verband dat door een tabel, een grafiek of een formule is beschreven kunnen interpreteren in termen van de grootheden. Dat houdt natuurlijk als eerste stap het onderzoek in naar de vraag of er sprake is van een lineair verband. Het kenmerk van een lineair verband (een vast ‘startgetal’ plus per eenheid een constante toename, of iets dergelijks) moeten leerlingen onder woorden kunnen brengen!

Grafisch interpreteren, vergelijken, combineren
Natuurlijk moeten leerlingen vlot bij een lineaire grafiek de formule kunnen maken en omgekeerd moeten zijn bij een lineaire formule vlot de grafiek schetsen of precies met behulp van een tabelletje tekenen. Daarnaast biedt de grafische weergave de mogelijkheid om (grafieken van) verbanden te vergelijken, waarbij de helling (toenamesnelheid) en het snijpunt (gelijke kosten) een bijzondere rol spelen. Ook het snel relevante vragen over het vergelijken van verbanden kunnen beantwoorden met behulp van grafieken behoort tot het repertoire waarover leerlingen in de loop van het tweede leerjaar moeten beschikken.
De voorgaande doelen vallen allen onder het beheersingsniveau ‘*paraat hebben*’. Dat geldt niet voor het combineren van grafieken, het onderzoeken van families of bundels van grafieken ($y = \mathrm{a}x + 7$), enzovoort. Hier liggen onderzoeksopdrachten meer voor de hand, eventueel met inzet van een grafisch programma. Voor consolidering en verdieping zijn dat type opdrachten heel relevant.

Algebraïsch herleiden
De overgangen van de analytische of algebraïsche representatie van een lineair verband naar de andere drie representaties en vice versa zijn al genoemd. Wat overblijft is het herschrijven van de formules of de bijbehorende eerstegraads vergelijkingen. Eerstegraads vergelijkingen van het type $\mathrm{a}x + \mathrm{b} = \mathrm{c}x + \mathrm{d}$ moeten ook algebraïsch vlot kunnen worden opgelost, terwijl de bijbehorende ongelijkheden in termen van de grafische weergave tot het standaardrepertoire van *paraat hebben* moeten behoren. Herschrijven van formules vindt ook plaats als de ene variabele moet worden uitgedrukt in de andere of als een formule voor een goede interpretatie moet worden omgezet. Dit zijn belangrijke basisvaardigheden voor elke leerling in de onderbouw havo-vwo.

Nog meer voorbeelden van paraat hebben
Van Verbaal naar Numeriek
De monteurs van de firma's Power en Mega repareren wasmachines aan huis. Power rekent 50 euro voorrijkosten en 16 euro per kwartier voor de tijd voor de tijd die de klus vergt. Bij Mega rekenen ze met 75 euro voorrijkosten en 12 euro per uur.
Wanneer is Power duurder dan Mega?
Van Verbaal naar Analytisch
Jannes gaat met 5 euro en drie lege flessen (statiegeld 1 euro) naar de supermarkt om 7Up te kopen. Een blikje 7Up kost 75 cent.
Met welke ongelijkheid kun je uitrekenen hoeveel blikjes Jannes kan kopen?
Van Analytisch naar Analytisch
Het taxibedrijf Sneltax berekent de tarieven met de formule $T = 5 + 2k$, terwijl taxibedrijf Vitatax de formule $T = 3k$ toepast. T is de prijs in euro’s, k het aantal kilometers.
Met welke ongelijkheid kun je uitrekenen wanneer Sneltax goedkoper is dan Vitatax?
Van Verbaal naar Analytisch
Een reclameballon bevat 300 kg heliumgas. De ballon is wat poreus, zodat er elk uur

3,5 kg gas uit de ballon lekt. De hoeveelheid heliumgas (in kg) die na u uren nog in de ballon zit noemen we h.
Wat is de formule voor h uitgedrukt in u?

Van Analytisch naar Numeriek

Voor welke waarden van x geldt : $-3x + 15 < 21$?
Los p op uit $3p - 21 = 7 + 7p$.
Los x op uit $3200 + 21x < 1500 + 23x$.

Van Numeriek naar Analytisch

Een context met een tabel geven en de formule vragen.

Van Grafisch naar Analytisch

Een lijn in een assenstelsel geven en de vergelijking of formule vragen.

Van Analytisch naar Analytisch

Gegeven is de vergelijking $2x - 8y = 24$. Geef de formule die y in x uitdrukt.

Een proefwerkopgave

In dit rapport concentreren we ons op wat leerlingen vlot moeten beheersen, opdat ze wat meer gecompliceerde contexten met behulp van die kennis en vaardigheden kunnen aanpakken. De voorbeelden hierboven zijn dan ook geen proefwerkopgaven, maar toetsopgaafjes om snel de actuele kennis te toetsen. Onderstaande opgave, zie [14)], lijkt meer op een proefwerkopgave.

Een automobilist wil een nieuwe auto kopen. Na veel zoeken heeft hij 2 auto's gevonden waartussen hij zal kiezen. De ene auto rijdt op benzine de andere op diesel. Diesel is per liter goedkoper maar de wegenbelasting is hoger. Zie tabel

	Wegenbelasting	prijs per liter	brandstofverbruik
Diesel	1468	1,56	5 liter per 100 km
Benzine	772	2,30	6 liter per 100 km

Met deze gegevens worden formules gemaakt voor de jaarlijkse kosten:

$$K_{diesel} = 1468 + 0{,}078x$$
$$K_{benzine} = 772 + 0{,}138x$$

Waarbij K de kosten zijn in euro's en x het aantal jaarlijks gereden kilometers

a Men zegt dat 'op diesel rijden goedkoper is als je veel rijdt'
Laat zien dat dit ook uit de formules volgt.

b Leg uit hoe de formule voor K_{diesel} met behulp van de gegevens uit de tabel gemaakt kan worden.

De prijs van benzine verandert voortdurend. Laten we aannemen dat de dieselprijs gelijk blijft.
De formule voor benzine wordt nu: $K_{benzine} = 772 + 0{,}06px$, waarbij p de benzineprijs voor 1 liter is.

c Vanaf welke prijs voor 1 liter benzine is diesel al bij 10 000 km goedkoper dan benzine?

d We kunnen zelfs een formule maken voor het aantal kilometers x waarbij benzine en diesel even duur zijn.
Deze formule ziet er als volgt uit: $x = 696/(0{,}06p - 0{,}078)$
Laat zien hoe deze formule volgt uit de formules voor K_{diesel} en $K_{benzine}$.

Aanbeveling 5.3.1 Lineaire verbanden
Van de lineaire verbanden moeten de leerlingen in de loop van het tweede leerjaar alle representaties en de overgangen daartussen vlot beheersen, inclusief de algebraïsche herleidingen van lineaire formules en eerstegraads vergelijkingen. Eind klas 3 moeten leerlingen in staat zijn om ook over het lineaire verband als object te redeneren.

Exponentiële verbanden
Een tweede belangrijk verband in de onderbouw is de exponentiële functie, exponentiële groei of het exponentieel verband. Voor een leerling aan het einde van de tweede klas havo-vwo is aan het concept van exponentiële groei al een heel netwerk van contexten, representaties en kenmerken gekoppeld. We komen in de schoolboeken voor het tweede leerjaar bijvoorbeeld het volgende tegen.

Van een context naar ...en vice versa
- Contexten met procentuele groei worden aangepakt met de vermenigvuldigingsfactor, bij 25% toename hoort de factor 1,25.
- Het kenmerk van exponentiële groei wordt in woorden samengevat: de groeifactor per tijdseenheid is steeds dezelfde.
- In tabellen die het verband tussen twee grootheden beschrijven wordt onderzocht of er sprake is van exponentiële groei.
- De exponentiële formule met beginhoeveelheid en groeifactor wordt opgesteld en geïnterpreteerd.

In de onderbouw draait het bij het exponentieel verband om allerlei overgangen van en naar een context. Dat is terecht, omdat exponentiële toename of afname na het lineair verloop het meest voorkomt in allerlei vakgebieden of beroepssituaties. Het interpreteren van een formule stelt stevige eisen aan het begrijpen van hoe de formule in elkaar zit en wat die voorstelt. Zie bijvoorbeeld het volgende deel uit een opgave van het eindexamen wiskunde vmbo GT 2004.

Opgave exponentieel verband
Het geluidsniveau gemeten aan de voet van de windmolen is 65 dB. Hoe verder iemand zich van de windmolen bevindt, hoe lager het geluidsniveau is. Er bestaat een verband tussen het geluidsniveau en de afstand tot de voet van de windmolen. Bij dit verband hoort de volgende formule:

$$G = 65 \times 0{,}83a$$

Hierin is G het geluidsniveau in dB.
En a is de horizontale afstand tot de voet van de windmolen in hectometers.

Met hoeveel procent neemt het geluidsniveau per hectometer af?

Ook hiervoor geldt weer dat er wel van alles in de schoolboeken staat maar dat de kern aan kennis over het maken en interpreteren van een exponentiële formule niet paraat lijkt of blijft. Die kern zal herhaald en beoordeeld moeten worden gedurende het hele derde leerjaar. Met die *parate kennis* beschikken de leerlingen over het denkgereedschap om meer ingewikkelde problemen waarin exponentiële verbanden een rol spelen aan te pakken. Zie het volgende voorbeeld.

> De watervaren Salvinia komt voor in Zuid-Amerika. De exponentiële groei van Salvinia gaat zó snel, dat de plant in korte tijd vijvers en meren kan bedekken. De bladoppervlakte verdubbelt elke 37 uur.
> […….]
> Het meer heeft een oppervlakte van 8000 m2. Op $t = 0$ is 1 m2 van het meer bedekt.
> Na hoeveel dagen en uren is het geheel bedekt ?

Het oplossingsproces kan er in termen van representaties er als volgt uitzien

1. Verbaal: De situatie is in woorden beschreven en moet eerst geherformuleerd worden om een aanpak te kunnen bedenken. Daarbij speelt onder andere een rol of men het verdubbelingproces tot uitgangspunt neemt (en de tijdseenheid dus aanpast), of de groei per etmaal (of per uur).
2. Er zijn nu verschillende oplossingsmethoden denkbaar, zoals.
   - Van *Verbaal* naar *Numeriek*: Systematisch waarden (laten) uitrekenen en daarmee via extra- en interpolatie doorrekenen.
   - Van *Numeriek* naar *Grafisch*: Met behulp van een tabel een grafiek (laten) maken en daarin de oplossing (laten) aflezen. Eerst tekenen van de grafiek, vervolgens aflezen van gewenste waarden..
   - Van *Verbaal* naar *Analytisch* naar *Grafisch*: Het probleem formaliseren met een adequate formule (de meest voor de hand liggende is iets als $O = 2^t$ en vervolgens de grafiek plotten en vervolgens aflezen.
   - Van *Verbaal* naar *Analytisch* naar *Numeriek*: Het probleem formaliseren met een adequate vergelijking bijvoorbeeld $2^t = 8000$ en door inklemmen de oplossing numeriek benaderen.
3. In alle gevallen moeten de resultaten op een juiste wijze geïnterpreteerd worden in termen van de context: terug naar *Verbaa*l.

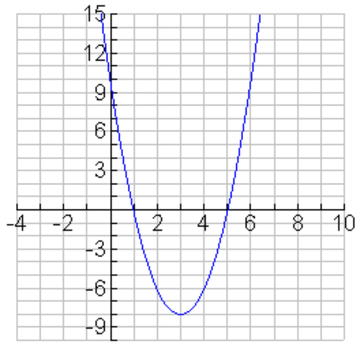
Aanbeveling 5.3.2 Exponentiële verbanden
Leerlingen moeten eind klas 3 in een context met een exponentieel verband elk van de representaties kunnen weergeven en interpreteren in termen van de context en met de karakteristieken van het verband (beginhoeveelheid, groeifactor).

Tweedegraads functies

De kwadratische verbanden of tweedegraads functies lenen zich goed voor het leren interpreteren van een formule in termen van eigenschappen van de bijbehorende grafiek. Het eventueel herleiden van een tweedegraads formule of vergelijking moet betekenis ontlenen aan het doel van die herleiding, de informatie die je over de grafiek wilt verkrijgen. In het schema staan dus bij kwadratische verbanden de algebraïsche en grafische representaties centraal, terwijl de numerieke representatie soms in de vorm van de tabel als tussenstap voorkomt. De verbale representatie in contexten speelt amper een betekenisrijke rol bij dit type functie. Tweedegraads functies vormen een mooie binnenwiskundige context. Het kwadratisch verband zelf (in de verschillende representatievormen) fungeert als object voor het wiskundig handelen. Het is teleurstellend dat leerlingen aan het einde van leerjaar 3 havo-vwo geen overzicht lijken te hebben op die beide representaties van de tweedegraads functie. Hun kennis lijkt fragmentarisch, zodat het grote moeite kost om adequate eigenschappen of oplossingsmethoden op te roepen. Kijken we naar de aanbieding en ordening van die eigenschappen en technieken in het lesmateriaal, dan wekt dat gebrek aan overzicht ook geen verbazing. Een rode draad ontbreekt, overzicht wordt niet geboden of nagestreefd.

Wij stellen voor om het onderwijs in de tweedegraads functies opnieuw te ordenen en wel rond de grafische interpretatie van vier typen formules, waardoor een tweedegraads functie kan worden vastgelegd.

In de loop van 3 havo-vwo moeten alle leerlingen de grafische interpretatie van de vier typen *paraat hebben*. Dat moet het startpunt zijn van de nog te onderwijzen algebraïsche herleidingen.



De vorm $y = 2x^2 - 12x + 10$ toont direct dat het om een dalparabool gaat en geeft het snijpunt met de y-as (0,10)

De vorm $y = 2(x - 5)(x - 1)$ toont direct dat het om een dalparabool gaat en geeft direct de nulpunten (1,0) en (5,0) daaruit volgen de symmetrieas x =3 en de top (3, -8).

De vorm $y = 2(x - 3)^2 - 8$ toont direct dat het om een dalparabool gaat en geeft direct de top (3, -8).

De vorm $y = 2x(x - 6) + 10$ toont direct dat het om een dalparabool gaat en geeft direct de punten (0,10) en (6, 10) en daaruit volgt de symmetrieas x =3 en de top (3, -8).

Enkele toetsopgaven uit het project ReAL voor 3 havo-vwo op gewenst beheersingsniveau 'paraat hebben'

1. De parabool met de vergelijking $y = (x - 2)^2 + 3$ heeft geen snijpunten met de x-as. Hoe kun je dat zeker weten zonder de grafiek te tekenen?

   Leraar: Gehoopt op een antwoord gebaseerd op redeneren met 'topvorm' (structuur van formule) of direct melden dat bij deze dalparabool het laagste punt (2,3) is. Leerlingen gaan rekenen, weinigen geven een adequate redenering of berekening.

2. Verander de vergelijking van vraag 1 zodat de grafiek twee snijpunten met de x-as heeft.

   Leraar: Leerlingen rommelen wat met de tekens, geen enkele havo-leerling redeneert over (verschuiven van) de grafiek of over de top, enkele vwo-leerlingen veranderen +3 in -3, zonder redenering. Anderen veranderen -2 in +2. Teleurstellend.

3. Verander de vergelijking uit vraag 1 zodat de grafiek precies één snijpunt met de x-as heeft.

   Leraar: Deze vraag is verwant aan vraag 2 en wordt zeker zo slecht gemaakt. Twee vwo- leerlingen redeneren expliciet over de top, 1 (vwo) leerling maakt deze opgave volledig goed met uitleg/controle. Twee havo leerlingen geven als formule $y = x^2$!! Slim bedacht.

Aanbeveling 5.3.3 Structuur van tweedegraads formules uitgangspunt
Neem de structuur van de tweedegraads formules met de vier vormen als uitgangspunt voor de opbouw van de kennis over dit type verband en zorg ervoor die kennis tot het beheersingsniveau 'paraat hebben' te consolideren en te onderhouden.

Algebraïsche herleidingen van tweedegraads formules
Nadat de leerlingen de verschillende verschijningsvormen van de formule voor tweedegraads functies kunnen interpreteren in termen van de grafiek en naar behoefte snel een schetsje kunnen maken van de ligging van de parabool, wordt natuurlijk de vraag opgeroepen of je bij *elk* type formule de kenmerken van de bijbehorende parabool kunt opsporen. Dat leidt tot het bekende algebrawerk, zoals het ontbinden in factoren en het kwadraat afsplitsen: ontbinden in factoren om de nulpunten op te sporen, kwadraat afsplitsen voor het berekenen van de coördinaten van de top en/of het berekenen van de nulpunten. Voor het ontwikkelen en onderhouden van algebraïsche vaardigheden is het wenselijk en haalbaar dat alle leerlingen in 3 havo-vwo zowel het ontbinden van de vorm $y = x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ als het kwadraat afsplitsen van die vorm onder de knie krijgen, paraat hebben en onderhouden. Het gaat dan om herleidingen met als doel bepaalde vragen over de grafiek te kunnen beantwoorden! Voor de groep toekomstige B-leerlingen in 3 havo en 3 vwo kan die vaardigheid worden uitgebreid naar vormen van het type $y = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$, waarbij a ook negatief kan zijn..

Voorbeeld van probleemgerichte introductie van kwadraat afsplitsen

Je ziet hier een aantal tweedegraadsvergelijkingen staan, in willekeurige volgorde.
Begin met het zoeken, oplossen en controleren van de eenvoudigste vergelijkingen en gebruik deze om de meer ingewikkelde vergelijkingen op te lossen.
Maak bij elke vergelijking een schetsje van de ligging van de parabool in het linkerlid en de lijn in het rechterlid.

a) $(x-3)^2 = 9$
b) $x^2 = 9$
c) $4(x-3)^2 = 64$
d) $(x-3)^2 - 16 = 9$
e) $9(x+8)^2 = 81$
f) $x^2 + 6x + 9 = 25$
g) $x^2 + 6x = 16$
h) $4x^2 + 24x + 36 = 100$

Aanbeveling 5.3.4 Algebraïsche herleidingen en tweedegraads vergelijkingen
Aan het einde van de onderbouw havo-vwo moeten alle leerlingen vlot eenvoudige vergelijkingen van het type $y = x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ *kunnen ontbinden in factoren, in kwadraat afgesplitste vorm kunnen schrijven en daaruit de relevante conclusies kunnen trekken.*

Allerlei verbanden
Naast een goede beheersing van de eigenschappen van de drie besproken verbanden in de verschillende representaties moeten leerlingen de kenmerken van allerlei verbanden kunnen opsporen en gebruiken met behulp van algemene werkmethoden, zoals het maken van een tabel, het tekenen van grafieken en het plotten met behulp van grafische software. Het gaat hierbij om het adequaat kunnen gebruiken van de beschikbare methoden en niet om het paraat hebben van de eigenschappen van allerlei verbanden. Voorbeelden van typen verbanden die op die manier aandacht kunnen krijgen zijn omgekeerd evenredige verbanden, hogere machtsfuncties, wortelfuncties en dergelijke. In

de bovenbouw havo-vwo moet de parate kennis uit de onderbouw worden onderhouden en afhankelijk van het wiskundevak worden uitgebreid naar een paraat hebben van eigenschappen van meer standaardfuncties.
Met grafische software zijn leerlingen in staat om kenmerken van grafieken zelf op te sporen en bij twijfel weer snel te verifiëren. Hetzelfde geldt voor eenvoudige parametervormen in formules. Snel schetsen van grafieken bij gevarieerde formules draagt bij aan de ontwikkeling van *symbol sense.* Schetsen, controleren, schetsen, controleren en op die manier het gevoel ontwikkelen voor meer complexe formules. Eerst nadenken, dan op de knoppen drukken! En uiteindelijk een stevige kennisbasis bezitten die ook te beoordelen is zonder grafische software. Het onderzoek met behulp van grafische software van families van grafieken, gevolgd door vragen over de relatie tussen de formule en de eigenschappen van de grafiek, draagt bij aan het kunnen interpreteren van formules.

Voorbeelden van te onderzoeken verbanden

$y = a(x + 1)(x - 3)(x + 5)$,

$y = \sqrt{}(x + a)$

$y = x^2 - ax + 6$

$y = (x - 2)(x + b)$.

Aanbeveling 5.3.5 Onderzoek van allerlei verbanden
Voor het onderzoek van allerlei verbanden, al dan niet in een context gerepresenteerd, is het wenselijk *dat leerlingen voor de ontwikkeling van symbol sense regelmatig grafische software gebruiken om de karakteristieken van een verband op te sporen en die te relateren aan de interpretatie van de bijbehorende formule.*

5.4 Algebra

Het gaat om symbol sense

In de internationale literatuur wordt het verstandig kunnen omgaan met variabelen, vergelijkingen en formules meestal symbol sense genoemd. Het formuleren van problemen in vergelijkingen en formules en het interpreteren van die algebraïsche expressies wordt meestal algebraïseren genoemd. Het kunnen algebraïseren is essentieel voor het beschrijven van patronen, verbanden en wetmatigheden in allerlei disciplines (de natuurwetenschappen en de economische, technische, medische en sociale wetenschappen). Het kunnen opstellen van formules, vergelijkingen en functievoorschriften bij toegepaste of wiskundige situaties is een belangrijk leerdoel van algemeen wiskundeonderwijs, dat leerlingen voorbereidt op het opstellen en interpreteren van mathematische modellen in allerlei wetenschappen en technische toepassingen. Vervolgens moet er gerekend worden aan die formules of algebraïsche modellen (de algebraïsche vaardigheden), waarna het resultaat van die berekeningen weer moet worden teruggekoppeld naar het oorspronkelijke toegepaste of wiskundige probleem. Zowel het hebben van een ‘beeld’ bij een formule of expressie als het vlot en routinematig kunnen uitvoeren van een basis aan handmatige herleidingen van algebraïsche expressies, bijvoorbeeld in het proces van oplossen van vergelijkingen of bij het herleiden van formules, zijn twee essentiële onderdelen van het algebraïsch rekenwerk. Dit zijn ook noodzakelijke voorwaarden om zinvol en met overleg ICT-apparatuur te kunnen gebruiken om meer complexe algoritmen te laten uitvoeren.

In oudere didactische publicaties en bijvoorbeeld in “Didactiek van de wiskunde”[15] van Joop van Dormolen (1974) wordt veel werk gemaakt van de verschillende wiskundige en didactische betekenissen van een letter en een variabele. Van Dormolen maakt bijvoorbeeld onderscheid tussen gebonden en vrije variabelen. In *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren, deel 2*[16] (1967) pleit Johan Wansink ervoor om de letter a te introduceren als een willekeurig getal uit de telrij. We zeggen er niet bij welk getal we met de letter *a* op het oog hebben. In de loop van het beginonderwijs in de algebra moet duidelijk onderscheid worden gemaakt tussen een uitspraak als $a \cdot b \cdot c = b \cdot c \cdot a$, die waar is voor alle waarden van *a*, *b* en *c*, en $x^3 - 4x = 0$, die slechts voor enkele waarden van x waar is. Vergelijkingen acht hij daarom ongeschikt voor het beginonderwijs in de algebra. Hij acht de aanpak van Bos en Lepoeter in *Wegwijzer in de algebra* wel bevredigend. Zij beginnen direct met het opstellen van formules die het verband tussen grootheden weergeven en met het introduceren van ingewikkelde formules (bijvoorbeeld voor de draagkracht van een hijsbalk), die door substitueren een betekenis krijgen. Maar, zo merkt Wansink op, “de leerlingen dienen er tijdig voor te worden gewaarschuwd dat in de algebra de letters geen grootheden voorstellen, maar onbenoemde getallen die tevoorschijn komen bij metingen en tellingen.”
In de recente publicatie *Wat a is dat kun je niet weten* [17] geven de auteurs tal van voorbeelden van het leren en onderwijzen van algebra met inzicht, rijk aan betekenissen. Onze conclusie is dat de leraar die steeds weer doorvraagt naar de mogelijke betekenis en getalswaarde van een letter in een formule of een vergelijking op een natuurlijke manier bezig is om het inzicht van leerlingen in de rol van variabelen te versterken.

Aanbeveling 5.4.1 *Algebra: rijk aan betekenis*
Het onderwijs *in de algebra van het onderbouwprogramma moet rijk aan betekenis (zie* [2]*) worden gegeven en zich niet beperken tot algoritmische procedures.*

Routine en/of betekenis?

Onlangs heeft Pauline Vos in Euclides [13] geanalyseerd of uit internationaal vergelijkend onderzoek (TIMSS) blijkt dat de Nederlandse kinderen van 14 jaar gemiddeld de laatste twintig jaar slechter zijn gaan presteren op ‘kale’ algebrasommen. Dus op dat type opgaven waar politici en (wiskundige) opiniemakers zich druk over maken. Voor die leeftijdsgroep geldt dat voor de volle breedte van vmbo-havo-vwo “de gemiddelde 14-jarige leerling hier niet veel van bakt, onafhankelijk of deze leerling les heeft gehad in Nederland of in het veel abstractere onderwijs in een ander land.” De prestaties van de gemiddelde 14-jarige Nederlandse leerling op het gebied van algebra zijn niet verbeterd, maar ook niet verslechterd. Aan de andere kant zijn er uit het (vervolg)onderwijs wel duidelijke signalen dat met name de leerlingen van havo-vwo minder inzicht en vaardigheid in het werken met algebraïsche expressies lijken te hebben verworven dan voorheen. Omdat de basis voor de algebra wordt gelegd in de onderbouw is het de moeite waard om nader op de problematiek van de algebraïsche vaardigheden in te gaan. Die problematiek is niet nieuw! De didactiekcommissie van de NVvW spreekt in 1975 in het boekje *Vaardigheden* [18] over een “verontrustend tekort aan wiskundige routines” Dat geluid horen we nu weer uit het hbo en wo.

Een voorbeeld uit een eerstejaars toets van de TU Delft, in 2004 gemaakt door 1500 studenten.

Waar is $a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{-2}$ gelijk aan?

Bijna 40% kiest het goede alternatief $\frac{1}{\sqrt[5]{a^7}}$

31% kiest voor $a^{-\frac{6}{5}}$

11% voor $\sqrt[7]{a^5}$

9% voor $\sqrt[5]{a^7}$.

Na zes jaar wiskundeonderwijs in het vwo mag men verwachten dat de wiskundige top van onze leerlingen heeft begrepen dat vermenigvuldigen van machten neerkomt op het optellen van de exponenten. Heeft het kiezen van een fout antwoord dus niet meer te maken met een tekort aan begrip van de betekenis van deze symbolen dan met een tekort aan routine?

De eerder genoemde didactiekcommissie schreef in 1975 ook over dit type voorbeelden:

> "Een leerling (leerjaar 1 of 2) schrijft in zijn schrift: $(ab)^3 = a^3b^3$ en dan $(2p)^3 = 2p^3$. De leraar vraagt of hij zich bij het tweede antwoord niet heeft vergist en de leerling reageert aarzelend: "Moet die 2 ook tot de derde?" "

Het commentaar in Vaardigheden is nog steeds relevant:

> "De leerling reageert hier alleen op het beeld van de tekens en niet op hun betekenis. Zijn kennis is verbalistisch. Er is ook geen logisch verband tussen zijn kennis van machten en zijn andere kennis. Hij heeft om de een of ander reden klakkeloos een regel geleerd: Je moet het drietje boven elke letter zetten. Dat is niet logisch maar willekeurig. We merken nog op dat zelfs als het tweede sommetje goed was geweest, er nog steeds de mogelijkheid was geweest dat er klakkeloos een regel was uitgevoerd. Verder merken we op dat uit de vraag van de leerling blijkt dat deze bereid is zijn kennis klakkeloos uit te breiden, hij vroeg niet naar een logisch maar naar een willekeurig verbalistisch verband."

In een poging om het gesignaleerde tekort aan routine op te lossen, ligt het voor de hand om (nog meer) rijtjes sommen in te zetten om algebraïsche technieken te oefenen. De publicatie Vaardigheden wijdt heel wat woorden aan de manier waarop goede routine niet en wel kan worden verworven. Enkele uitspraken:

- Oefenen op een lange rij gelijksoortige sommetjes leert een leerling om geroutineerd een regel uit te voeren in standaardsituaties, maar de leerling is machteloos bij een voor hem nieuw probleem.
- Het leren met inzicht en dus ook het verwerven van vaardigheden kost meer tijd dan het klakkeloos leren en inoefenen van trucs.
- Het inoefenen van een vaardigheid kan pas met vrucht gebeuren, nadat inzicht in die vaardigheid is verkregen.
- Aanwezig inzicht gaat verloren door het drillen met gelijksoortige sommetjes.
- Routine doe je op door oefenen met gevarieerde situaties en op wisselend niveau.
- Vaardigheden moeten regelmatig en tijdig worden geactualiseerd.

De aanbevelingen van de auteurs van Vaardigheden (o.l.v. Joop van Dormolen) zijn stevig gefundeerd op het werk van bekende onderwijspsychologen en didactici zoals Pierre van Hiele, Richard Skemp, Ausubel, Kohnstam en anderen. Nu, dertig jaar later, blijft de

waarde van die aanbevelingen nog onverminderd overeind. Zie ook het al eerder geciteerde standaardwerk Adding it Up [10].
Rijk oefenmateriaal voor het gevarieerd en betekenisvol oefenen van algebraïsche vaardigheden is te vinden bij het project ReAL[3], in Wat a is kun je niet weten[17], in Oefeningen in algebra[19] en in applets op het WisWeb[20]

Voorbeeldopgave uit Algebra om te begrijpen [14]
Zijn de volgende beweringen waar, soms waar, nooit waar? Leg uit!

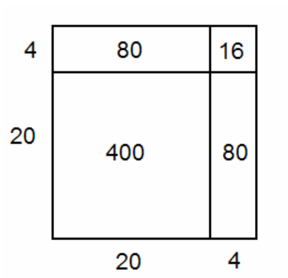
$n + 5 = 11$	$q + 2 = q + 16$	$2n + 3 = 3 + 2n$
$2t - 3 = 3 - 2t$	$3 + 2y = 5y$	$p + 12 = s + 12$
$4p > 9 + p$	$n + 5 < 20$	
$2(x + 3) = 2x + 3$	$2(3 + s) = 6 + 2s$	

Aanbeveling 5.4.2 Algebraïsche vaardigheden
Het is noodzakelijk om een kern aan algebraïsche vaardigheden te consolideren en te onderhouden door middel van gevarieerd oefenen, waarbij de betekenis levend en actueel moet worden gehouden.

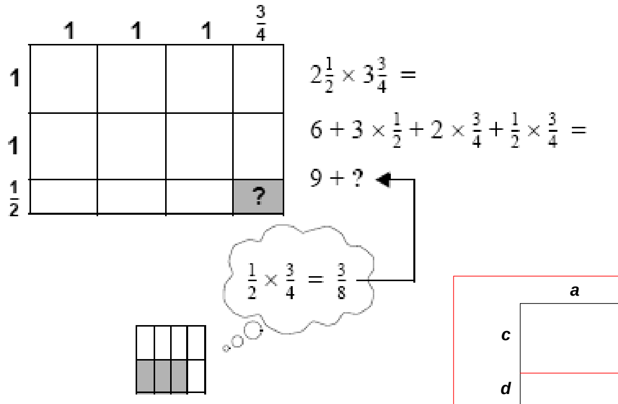
Het rechthoekmodel als voorbeeld
In de ogen van leerlingen en ook voor een buitenstander die belangstellend in de schoolboeken voor het primair en voortgezet onderwijs op zoek is naar doorlopende leerlijnen is het lastig om een rode draad en een structuur in alle algebraprocedures te ontdekken. Ogenschijnlijk is het nog niet goed gelukt om met het loslaten van de oude structuur, gedicteerd door de formele wiskundige inhouden, een nieuwe didactische lijn te ontwikkelen, waar leerlingen en leraren steeds een beroep op kunnen doen. Het ligt niet op de weg van onze programmacommissie om daar de ultieme oplossing voor aan te dragen, maar we zijn wel op het spoor gekomen van een mogelijke rode draad, die in veel buitenlandse schoolboeken wordt benut. Omdat wij die rode draad veelbelovend vinden, werken we er een exemplarisch uit en volgen daarmee een van de opbrengsten van het project ReAL [3]. Zie verder de producten van dat project.

Voorbeeld uitwerking

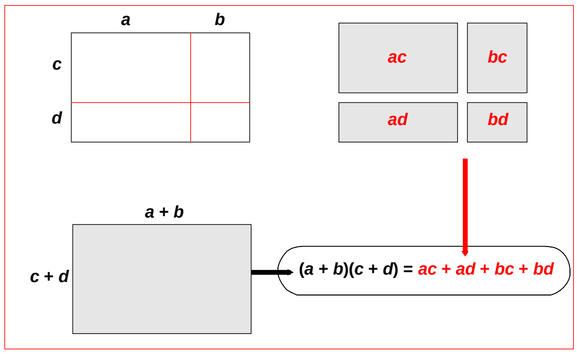
Een bekende misconceptie is dat
$24 \times 24 = (20 \times 20) + (4 \times 4) = 416$.
Een rechthoekmodel kan helpen de onjuistheid hiervan in te zien.



Met hetzelfde model kan vermenigvuldigen met breuken worden ondersteund.



Ook bij het vermenigvuldigen en ontbinden van algebraïsche expressies is het model bruikbaar



	x^2	$2x$	3
x	x^3	$2x^2$	$3x$
5	$5x^2$	$10x$	15

Na verloop van tijd wordt de overgang naar de tabel gemaakt

x	x^2	$2x$	3
x	x^3	$2x^2$	$3x$
5	$5x^2$	$10x$	15

5.5 Meten en Meetkunde

Overzicht

Aan de beide subdomeinen *Meten* en *Meetkunde* wordt in het basisonderwijs de nodige aandacht besteed, met name aan het meten van lengte, oppervlakte, inhoud, en gewicht. Gelet op de toepassingswaarde van *Meten* in allerlei schoolvakken, in maatschappelijke situaties en beroepssituaties is het de moeite waard om ook in de onderbouw van havo-vwo na te gaan of leerlingen de basisvaardigheden op dit gebied voldoende beheersen. Dat kan binnen het wiskundeonderwijs goed door het toepassen ervan in het subdomein *Meetkunde* dat in het programma een onomstreden belangrijke plaats inneemt. Het zwaartepunt ligt bij het beschrijven van de ruimte om ons heen en het rekenen aan meetkundige vormen. De berekeningen van lengte (onder andere met de stelling van Pythagoras en goniometrie), oppervlakte en inhoud en het rekenen met hoeken en met verhoudingen bij gelijkvormige figuren vormen de kern van dit subdomein. Er is enige aandacht voor het tekenen van ruimtelijke vormen (perspectief) en aanvankelijk wordt er iets gedaan aan kijkmeetkunde. Allemaal onderwerpen die de moeite waard zijn, die veelal decennia zo worden onderwezen, maar die weinig onderlinge samenhang vertonen. Een alternatief ligt niet voor de hand.

Vanouds werd de intrinsieke waarde van *Meetkunde* ontleend aan de mogelijkheid om met behulp van de Euclidische meetkunde te leren redeneren met eigenschappen van figuren, hieruit volgde het leren argumenteren en tenslotte het bewijzen. Sinds de nieuwe wiskundeprogramma's van 1968 (invoering havo-vwo) is dat aspect grotendeels uit de onderbouw verdwenen. Na het opnemen van de Euclidische meetkunde in het vak wiskunde B_{12} bovenbouw vwo is er ook in de onderbouwboeken vwo weer een beperkt aanbod aan redeneren en bewijzen binnen de meetkunde opgenomen. Zodra de aandacht in de bovenbouw vwo voor het redeneren en bewijzen in de Euclidische meetkunde weer verflauwt, heeft dat zijn effecten op de onderbouw.

Onze analyse van het meetkundeprogramma is, dat er over het geheel weinig reden is om het op dit moment te wijzigen. Wel zijn we van mening dat gelet op de inhoud van de nieuwe wiskundevakken in de bovenbouw havo-vwo, met name voor de aansluiting op wiskunde B enkele meetkundemodulen voor 3 havo en 3 vwo moeten worden ontwikkeld om de leerlingen met voldoende aanleg en interesse meer uitdaging en betere ontwikkelingsmogelijkheden te bieden dan dat het huidige standaardprogramma biedt. In de volgende paragrafen wordt een schets gegeven voor een module waarin redeneren centraal staat en een schets voor een module waarin de verbinding tussen algebra en meetkunde, analytische meetkunde, wordt aangezet.

> *Aanbeveling 5.5.1*　　　　*Het meetkundeprogramma*
> *Het gehele onderbouwprogramma meetkunde is zinvol en haalbaar, maar voor de aanstaande B-leerlingen is het gewenst een tweetal verdiepende meetkundemodulen te ontwikkelen op het gebied van redeneren met constructies en van de analytische meetkunde.*

Redeneren met constructies

Vanouds, zeg maar sinds Euclides, speelden de constructies (met passer een liniaal) een belangrijke rol in het redeneren met meetkundige eigenschappen. In de jaren voor de invoering van de mammoetwet startten veel meetkundeboeken het onderwijs in de meetkunde ook met constructies. (Zie Bos en Lepoeter [21)].) Ook het toepassen van de eigenschappen van meetkundige plaatsen (puntverzamelingen) maakt helder redeneren noodzakelijk. In het kader van deze module is de inzet van een uitdagend en dynamisch meetkundeprogramma als Cabri zinvol. Leerlingen kunnen dan uitgedaagd worden om meetkundige plaatsen op te sporen en te bewijzen.

Redeneren wordt in deze module ingebed in een meetkundig netwerk van begrippen en eigenschappen. Dat vormt het gereedschap waarmee wordt geredeneerd en al redenerende wordt dat netwerk opgebouwd en uitgebreid. Type redeneringen die werkende weg aan de orde kunnen komen zijn van het principe "Als A dan B", wat de kans biedt om noties als noodzakelijke en voldoende voorwaarden en het omkeren van beweringen aan de orde te laten komen. Als het goed wordt opgezet, kan de aanwezige intuïtieve kennis in deze module worden gesystematiseerd in een samenhangend netwerk van meetkundige relaties, aan de hand waarvan leerlingen leren redeneren en typen redeneringen leren beoordelen.

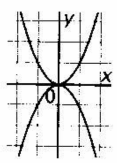
Voorbeeld van een mogelijke uitwerking
Met de passerconstructie als didactisch hulpmiddel classificeren we eerst de driehoeken op basis van de lengten van hun zijden. “Drie lengten van mogelijke zijden zijn gegeven, welke driehoek volgt daar uit?” Niet elk drietal lijnstukken levert een driehoek op, hieruit komt de driehoeksongelijkheid naar voren. Vervolgens gaan we naar de vierhoeken, te kenmerken door de lengten van hun zijden. De constructie op basis van vier lijnstukken is niet eenduidig, het vervormen ligt op tafel. We stappen over naar vouwen, dus onderzoek van de symmetrieassen, redeneren op basis van lengten (passerconstructies) en lijnsymmetrie (vouwen). Leerlingen moeten onderzoeken en beredeneren wat de relatie is tussen de classificatie op basis van lengten en die op basis van lijnsymmetrie. De noodzakelijke en voldoende voorwaarden (onze terminologie) rollen er vanzelf uit. De rechthoek en het vierkant komen nu tevoorschijn, zonder dat we nog met hoeken hebben gewerkt.
Vervolgens gaan we kijken naar de rol van de hoeken, weer met de passerconstructie als een goed didactisch hulpmiddel. Existentie, eenduidigheid, classificatie op basis van hoeken, de relatie tussen verschillende classificaties zijn boeiende opties. Combinaties als ZZH zijn een mooie aanleiding tot redeneren. Een verdieping naar gelijkvormigheid ligt in de lijn.

> *Aanbeveling 5.5.2 Module meetkundig redeneren*
> *De ontwikkeling van een module “Redeneren met constructies” is gewenst om een samenhangende leerlijn voor het leren redeneren en bewijzen te realiseren.*

Analytische meetkunde
In het huidige onderbouwprogramma is er een geringe verbinding tussen de algebra en de meetkunde. Een verbinding die vanouds door de algebraïsche of analytische meetkunde inhoud kreeg. In de voorgestelde nieuwe examenprogramma’s voor de vakken wiskunde B in de bovenbouw havo-vwo heeft die analytische meetkunde weer een plaats gekregen, wat een argument is om te bekijken of er voor die specifieke doelgroep (dus voor de toekomstige wiskunde B- leerlingen) in de onderbouw een module Analytische Meetkunde kan worden ontwikkeld. In de onderbouw havo-vwo was voorheen eveneens een aanzet voor de analytische meetkunde opgenomen, die bestond uit:
- stelsels van 2 lineaire vergelijkingen met 2 onbekenden
- grafische weergave van die stelsels
- vlakdelen vastgelegd door een ongelijkheid met 2 onbekenden
- eenvoudige lp-contexten
- snijden van lijnen en parabolen

Voorbeeld van een mogelijke uitwerking
Aansluitend bij de aanwezige voorkennis kan het zwaartepunt liggen bij het berekenen van snijpunten van lijnen en parabolen. De substitutiemethode staat daarbij centraal, terwijl de berekening wordt gekoppeld aan en gecontroleerd door de grafische voorstelling van de situatie. De overgang naar ongelijkheden en vlakdelen tekenen ligt binnen bereik. Zie de volgende opgave uit een examen mavo D 1987.

Hiernaast zijn de parabolen $y = x^2$ en $y = -x^2$ getekend.
Arceer de verzameling van alle punten (x, y) waarvoor geldt $y \leqq x^2 \wedge y \geqq -x^2$.



Hoe ziet de figuur eruit?

Aanbeveling 5.5.3 Module analytische meetkunde
De ontwikkeling van een module "Analytische meetkunde" is gewenst om de toekomstige B-leerlingen beter voor te bereiden op het bovenbouwprogramma.

5.6 Gegevensverwerking

Over de resterende onderwerpen in het huidige onderbouwprogramma kunnen we kort zijn. Geen van onze respondenten in het voortgezet onderwijs heeft een positieve waardering over de leeropbrengst van de losse hoofdstukjes over informatieverwerking, beschrijvende statistiek en kans. Dat is jammer want juist die onderwerpen zijn maatschappelijk gezien van groot belang en zouden de leerlingen moeten oriënteren op de CM- en EM-profielen en de plaats van de wiskunde in de betreffende vakgebieden.
Wij stellen dan ook voor om een intern samenhangend deelprogramma te ontwerpen met als thema *Gegevensverwerking*, waarin het verwerken en analyseren van data centraal staat, met daarbij inbegrepen de centrale concepten uit de beschrijvende statistiek die kenmerkend zijn voor een dataverzameling. Goede voorbeelden, zoals het grote project van het CBS met de NVvW en het FI de Nationale Doorsnede, zijn zeker te vinden. Er moet natuurlijk ook aansluiting gezocht worden bij de ontwikkeling van het nieuwe statistiekprogramma in de bovenbouw havo-vwo.

Voorbeeld van een mogelijke uitwerking
Arthur Bakker 23) heeft in samenwerking met onder anderen Gravemeijer en Cobb onderwijs ontworpen, waarin vanaf het begin van de beschrijvende statistiek het begrip verdeling wordt opgebouwd. Leerlingen leren gegevens adequaat te representeren en daarover te redeneren. In deze module kan dat uitmonden in de bekende grafische representaties, centrale maten en spreidingsmaten, gekoppeld aan een eerste begrip van kansverdelingen, maar dit alles dan in een betekenisrijke context in plaats van de losse sommetjes die nu in de onderbouw havo-vwo aan de orde komen.

Aanbeveling 5.6 Gegevensverwerking
De ontwikkeling van een module "Gegevensverwerking" is gewenst om een samenhangende leerlijn voor het verwerken en analyseren van gegevens met behulp van beschrijvende statistiek te realiseren.

6 Implementatie

De programmacommissie onderbouw stelt voor om in de komende jaren veel energie te steken in het bespreken van de implicaties van onze voorstellen met het grondvlak van het onderwijs, de wiskundesecties in de scholen. Wij stellen voor om een groep experts uit de onderwijspraktijk in de onderbouw havo-vwo (leraren en ontwikkelaars) in het leven te roepen, die werkconferenties met wiskundesectie op de scholen inhoud geeft. Daarnaast en in samenwerking met dat team worden enkele kleine ontwikkelgroepen (ontwikkelaars en leraren) in het leven geroepen die de hierna te noemen ontwikkelopdrachten gaan uitvoeren en in pilots gaan testen. Het gaat dus om een implementatieteam en een ontwikkelteam met een stevige personele overlap. Samenwerking met FI, SLO en APS voor de uitvoering en organisatie van (een deel van) deze taken ligt voor de hand.

6.1 Implementatie

1. De cTWO stuurt dit rapport (of een samenvatting daarvan) onder andere naar schooldirecties en wiskundesecties met het aanbod om samen met die wiskundesecties en aanverwante groepen twee één -daagse schoolconferenties te organiseren over de eigen onderbouw havo-vwo. Aandachtspunten zijn:
    - de eigen problematiek tegen het licht van het rapport
    - de aansluitingsproblematiek vanuit PO en naar de bovenbouw
    - focus op doorlopende leerlijnen
    - schoolbeleid t.a.v. basiskennis rekenen in andere vakken
    - werkvormen om gewenste doelen te bereiken
    - aanbevelingen uit dit rapport
2. De cTWO belegt conferenties met auteursteams. Aandachtspunten zijn;
    - doorlopende leerlijnen vanuit PO en naar de bovenbouw
    - aanscherping leerlijnen in methoden
    - nieuwe modulen
    - aanbevelingen uit dit rapport

6.2 Ontwikkelen

De cTWO stelt een ontwikkelteam in dat de volgende taken krijgt:

- De drie voorgestelde modulen ontwikkelen en in scholen beproeven.
- Voorbeeldmatig toetsen per leerjaar ontwikkelen op het gebied van paraat hebben van vaardigheden en feitelijke kennis.

6.3 Randvoorwaarden

- Het voorgestelde programma onderbouw is gebaseerd op minimaal 10 lesuren over drie leerjaren, zoals in de meeste scholen gebruikelijk is. Met minder lesuren worden de doelen niet gehaald.
- Leraren in de onderbouw moeten, in het belang van de leerlingen, de ruimte krijgen om zich verder te scholen/ontwikkelen in hun professie als vakdocent.
- Wiskundesecties moeten, in het belang van de leerlingen, de ruimte en de faciliteiten hebben om hun hoofdtaak uit te voeren namelijk het sectiebreed ontwerpen van doorlopende, eigentijdse, leerlijnen op het gebied van gerealiseerde leerdoelen en didactische werkwijzen.

Verwijzingen

[1] Zie http://www.minocw.nl/documenten/4322.pdf
Eindrapport Expertgroep: *Over de drempels met taal en rekenen*. SLO 2008.
http://www.taalenrekenen.nl/Algemeen/Nieuws/00002/Hoofdrapport.pdf/
Deelrapport rekenen&wiskunde: *Over de drempels met rekenen*. SLO 2008.
http://www.taalenrekenen.nl/Algemeen/Nieuws/00002/Rekenrapport.pdf/

[2] Zie http://www.ctwo.nl/
en http://www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/Rijkaanbetekenisweb.pdf?

[3] Zie *Leerlijnen* op de site van het project ReAL:
http://www.slo.nl/real/

[4] *Raamwerk rekenen/wiskunde mbo*. Freudenthal Instituut, 2007.
http://www.fi.uu.nl/mbo/raamwerkrekenenwiskunde/

[5] Zie http://www.fi.uu.nl/bps/ voor artikelen over verhoudingstabellen in verschillende vakken.

[6] In het Salvo-project van FIsme is samenhangend lesmateriaal ontwikkeld voor wiskunde en science. Zie: http://www.cdbeta.uu.nl/vo/salvo/

[7] *Winst*. Zie www.fi.uu.nl/winst/

[8] Door de SLO worden in 2008 enkele pilots uitgevoerd waarin op het niveau van vmbo en havo-vwo voorbeeldactiviteiten rond voortgezet rekenen centraal staan.

[9] Zie "Het denken bevorderen" als pdf-file te vinden op:
http://www.rug.nl/fwn/voorzieningen/ido/betadidactiek/Onderzoek/onderzoekers/annevanstreun/VanStreunOratie.pdf

[10] Mathematics Learning Study Committee(Eds.), *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. National Research Council, 2001.

[11] *Wiskundige geletterdheid volgens PISA*. Freudenthal Instituut, CITO, 2006.

[12] A. van Streun Parate kennis en Algebra, in: *Euclides* 2007, 82, 53-54, 111-112, 151-152, 183-184, 232-233, 274-276, 321-323.

[13] *P. Vos*, Algebraprestaties van tweedeklassers. In: *Euclides* 82-4, 2007.

[14] *Algebra om te begrijpen*. NVvW, 2001.

[15] J. van Dormolen, *Didactiek van de wiskunde*, Oosthoek, 1974.

[16] J. Wansink, *Didactische Orientatie II*, Wolters, 1967.

[17] Drijvers. P. (Red.) *Wat a is dat kun je niet weten*. Freudenthal Instituut, 2006.

[18] NVvW, *Vaardigheden.* 1975.

[19] Kindt, M. *Oefeningen in algebra*. Freudenthal Instituut, 2004.

[20] Applets op www.wisweb.nl

[21] Bos, W.J. en P.E. Lepoeter, *Wegwijzer in de meetkunde*, Meulenhof 1954.
Bos, W.J. , *Het aanvangsonderwijs in de meetkunde*. Euclides, 1955, 31.

Aanbevelingen

Aanbeveling 2.1 Samenhang in onderwijsbeleid
Samenhangend sectoroverstijgend onderwijsbeleid is noodzakelijk voor een versterking van de basis aan kennis, inzicht en vaardigheden op het gebied van het rekenen en de wiskunde. De expertise en de producten van de verschillende commissies en projecten op het gebied van doorlopende leerlijnen en programmavernieuwing moeten op elkaar worden afgestemd.

Aanbeveling 2.2 Prioriteit voor de basisvakken
De prioriteit voor het verwerven en onderhouden van de noodzakelijke basis aan kennis, inzicht en vaardigheden op het gebied van rekenen&wiskunde moet in het vo leiden tot meer aandacht, ruimte en studietijd voor dit leergebied.

Aanbeveling 2.3 De aansluiting op het basisonderwijs
Opdat er echt sprake kan zijn van een doorlopende leerlijn, is het, gelet op de variëteit tussen basisscholen, noodzakelijk dat de inhoudelijke afstemming voor rekenen&wiskunde tussen de ontvangende scholen voor voortgezet onderwijs en het toeleverende basisonderwijs per regio worden geïntensiveerd.

Aanbeveling 2.4 Differentiatie in bovenbouw basisonderwijs
In de bovenbouw van basisonderwijs moet meer rekening worden gehouden met verschillen, zowel gericht op de beide uitstroomniveaus van de Expertgroep als op de verrijking en verdieping voor de groep leerlingen die (veel) meer aan kan.

Aanbeveling 2.5 Rekenvaardigheden onderhouden in en buiten het vak wiskunde
Het onderhouden van vaardigheden en geleerde procedures op het gebied van het rekenen, en de wiskunde moet voor een belangrijk deel plaats vinden tijdens het toepassen en functioneel gebruiken in andere vakken. De aanpak die in rekenen&wiskunde is aangeleerd moet bij de docenten van andere vakken bekend zijn en indien mogelijk worden gebruikt.

Aanbeveling 2.6 Differentiatie in 3 havo
In de tweede helft van het leerjaar 3 havo is het wenselijk om een differentiatie toe te passen met het oog op een betere oriëntatie en voorbereiding op wiskunde A of wiskunde B, zodat de aansluiting tussen 3 havo en 4 havo wordt verbeterd.

Aanbeveling 3.1 De marges van het programma onderbouw havo-vwo
Binnen de beschikbare ruimte aan lestijd en studielast zijn de marges voor een wijziging in het onderbouwprogramma havo-vwo klein. Accentverschuivingen in het vigerende programma moeten mede worden onderbouwd met argumenten ontleend aan de aansluiting op de verschillende wiskundevakken in 4 havo en 4 vwo.

Aanbeveling 3.2 Voortzetting van de rekenlijn
De rekenlijnen in havo-vwo moeten meer systematisch worden onderhouden en verbreed, terwijl speciaal werk moet worden gemaakt van het functioneel gebruik van geleerde rekenprocedures in de andere schoolvakken. Aandacht voor het toegepast rekenen in de andere vakken lijkt noodzakelijk.

Aanbeveling 3.3 Aansluiting onderbouw-bovenbouw havo-vwo
Binnen de school moeten bindende afspraken worden gemaakt over het gemeenschappelijke uitstroomniveau van de onderbouw havo-vwo en over de differentiële leerdoelen gericht op aansluiting bij wiskunde A of wiskunde B.

Aanbeveling 3.4 Aansluiting vmbo TL op 4 havo
Het is de moeite waard om landelijk, bijvoorbeeld in overleg met de auteurs van schoolboeken, een additioneel wiskundeprogramma vast te stellen – of te actualiseren- voor leerlingen die na vmbo TL gaan instromen in 4 havo. Zowel voor de doorstroom naar wiskunde A als naar wiskunde B is een dergelijk programma gewenst.

Aanbeveling 4.1 Balans tussen vaardigheden, concepten en denkactiviteiten
In het wiskundeonderwijs van de onderbouw havo-vwo wordt een balans nagestreefd tussen het ontwikkelen van wiskundige begrippen, routines en denkactiviteiten, waarbij inzicht de basis vormt voor routinevorming.

Aanbeveling 4.2 Verkennen van begrippen en methoden
In de onderbouw havo-vwo moeten de leerlingen aan de hand van geschikte vragen en probleemstellingen ruim de gelegenheid krijgen om nieuwe begrippen en methoden te verkennen en te koppelen aan het al eerder verworven eigen netwerk aan kennis en vaardigheden.

Aanbeveling 4.3 Gebruik van kennis en vaardigheden
Voor het functioneel leren gebruiken en toepassen van wiskundige kennis en vaardigheden moeten in de fasen van opbouw en verwerking van die wiskundige begrippen en methoden voorstelbare situaties en toepassingen, zowel van buiten als van binnen de wiskunde, worden opgenomen.

Aanbeveling 4.4 Niveauverhoging
Om tot niveauverhoging te komen moet de trend van alleen maar zelfstandig sommetjes maken worden omgebogen. Er moet meer aandacht worden besteed aan het leren problemen oplossen, overzichten maken, verantwoordingen noteren, redeneren, abstraheren, argumenteren op basis van kenmerken. Geschikte opdrachten en interactieve werkvormen zijn daarbij noodzakelijk.

Aanbeveling 4.5 Paraat hebben
Wiskundesecties doen er goed aan om kernen aan feiten en routines te selecteren, deze met inzicht in een interactief leerproces met leerlingen te ontwikkelen en vervolgens die kernen expliciet te onderhouden en regelmatig in gevarieerde situaties te beoordelen of leerlingen die kernen para*at* hebben en kunnen gebruiken.

Aanbeveling 5.1 Rekenprocedures en redeneren over getallen
Zowel aan het paraat hebben,het gebruiken en onderhouden van en het redeneren over rekenprocedures als aan het redeneren en argumenteren met en over getallen moet in de onderbouw van havo-vwo meer systematisch aandacht worden besteed.

Aanbeveling 5.2 Gemeenschappelijke aanpak verhoudingen
Schoolbeleid en overleg tussen vaksecties binnen de vo- scholen moeten leiden tot een voor leerlingen herkenbare gemeenschappelijke aanpak van het werken met verhoudingen in de grote variëteit aan toegepaste situaties in schoolvakken en beroepen.

Aanbeveling 5.3.1 Lineaire verbanden
Van de lineaire verbanden moeten de leerlingen in de loop van het tweede leerjaar alle representaties en de overgangen daartussen vlot beheersen, inclusief de algebraïsche herleidingen van lineaire formules en eerstegraads vergelijkingen. Eind klas 3 moeten leerlingen in staat zijn om ook over het lineaire verband als object te redeneren.

Aanbeveling 5.3.2 Exponentiële verbanden
Leerlingen moeten eind klas 3 in een context met een exponentieel verband elk van de representaties kunnen weergeven en interpreteren in termen van de context en met de karakteristieken van het verband (beginhoeveelheid, groeifactor).

Aanbeveling 5.3.3 Structuur van tweedegraads formules uitgangspunt
Neem de structuur van de tweedegraads formules met de vier vormen als uitgangspunt voor de opbouw van de kennis over dit type verband en zorg ervoor die kennis tot het beheersingsniveau ‘paraat hebben’ te consolideren en te onderhouden.

Aanbeveling 5.3.4 Algebraïsche herleidingen en tweedegraads vergelijkingen
Aan het einde van de onderbouw havo-vwo moeten alle leerlingen vlot eenvoudige vergelijkingen van het type $y = x^2 + bx + c$ kunnen ontbinden in factoren, in kwadraat afgesplitste vorm kunnen schrijven en daaruit de relevante conclusies kunnen trekken.

Aanbeveling 5.3.5 Onderzoek van allerlei verbanden
Voor het onderzoek van allerlei verbanden, al dan niet in een context gerepresenteerd, is het wenselijk dat leerlingen voor de ontwikkeling van symbol sense regelmatig grafische software gebruiken om de karakteristieken van een verband op te sporen en die te relateren aan de interpretatie van de bijbehorende formule.

Aanbeveling 5.4.1 Algebra: rijk aan betekenis
Het onderwijs in de algebra van het onderbouwprogramma moet rijk aan betekenis (zie [2)]) worden gegeven en zich niet beperken tot algoritmische procedures.

Aanbeveling 5.4.2 Algebraïsche vaardigheden
Het is noodzakelijk om een kern aan algebraïsche vaardigheden te consolideren en te onderhouden door middel van gevarieerd oefenen, waarbij de betekenis levend en actueel moet worden gehouden.

Aanbeveling 5.5.1 Het meetkundeprogramma
Het gehele onderbouwprogramma meetkunde is zinvol en haalbaar, maar voor de aanstaande B-leerlingen is het gewenst een tweetal verdiepende meetkundemodulen te ontwikkelen op het gebied van redeneren met constructies en van de analytische meetkunde.

Aanbeveling 5.5.2 Module meetkundig redeneren
De ontwikkeling van een module “Redeneren met constructies” is gewenst om een samenhangende leerlijn voor het leren redeneren en bewijzen te realiseren.

Aanbeveling 5.5.3 Module analytische meetkunde
De ontwikkeling van een module “Analytische meetkunde” is gewenst om de toekomstige B-leerlingen beter voor te bereiden op het bovenbouwprogramma.

Aanbeveling 5.6 Gegevensverwerking

De ontwikkeling van een module “Gegevensverwerking” is gewenst om een samenhangende leerlijn voor het verwerken en analyseren van gegevens met behulp van beschrijvende statistiek te realiseren.

Bijlage

LEERSTOFGEBIEDEN EN VOORBEELDOPGAVEN VOOR DE BETERE LEERLINGEN VAN GROEP 7 EN 8

1. Enkele inleidende opmerkingen

In de opgavenverzameling hieronder gaat het niet in de eerste plaats om een indicatie gaat van wat 'alle' betere leerlingen zouden moeten bereiken. Het gaat om het afbakenen van een *streefniveau* dat door sommigen helemaal gehaald kan worden, en door anderen ten dele.
Bij het omschrijven van 'extra leerstof' voor betere leerlingen zijn uiteenlopende *keuzes* te maken. Als de gangbare reken-wiskundemethoden en allerlei additionele verrijkingsmaterialen[1] op nageslagen worden, gebeurt dat ook. Daarbij maken leraren vaak nog weer hun eigen keuzes, puttend uit velerlei materialen en methoden die men in de kast heeft liggen. De betreffende leerstof hoeft lang niet altijd even zinvol te zijn, en het is soms twijfelachtig wat de meerwaarde ervan ten opzichte van de reguliere leerstof is. Dit geldt met name voor wat te boek staat als traditionele bovenbouwleerstof rond bepaalde formele procedures rond het opereren met kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen. Zo kan men zich afvragen in hoeverre het ontwikkelen van een standaardprocedure voor het vermenigvuldigen van kommagetallen (14,7 x 3,15 = ..) inclusief regels voor het plaatsen van de komma, een zinvolle vorm van verrijking is. Veel van dergelijke typen opgaven worden naderhand vrijwel uitsluitend nog op de rekenmachine gedaan, en het lijkt weinig zinvol om de betere leerlingen hiermee op te zadelen als verrijkingsstof. Tenzij in het ontwikkelen van dergelijke procedures een duidelijke wiskundige meerwaarde als mathematiseringsproces is gelegen.

Wat is dan wel zinvolle leerstof? Dat is nog niet zo eenvoudig te zeggen. Belangrijk lijkt het in ieder geval om vast te stellen dat het om leerstof gaat met een *hoger abstractieniveau* dan de gemiddelde en zwakkere leerling aankan -- leerstof die in sterkere mate een beroep doet op het vermogen om op een meer formeel niveau tot wiskundig redeneren en rekenen te komen, en die ook in meer algemene zin van waarde is voor de wiskundige ontwikkeling van leerlingen. Het gaat dan om het verkennen en doorzien van wiskundige structuren, wetmatigheden, procedures en relaties die veelal in het verlengde liggen van wat in de kern van het reken-wiskundeprogramma aan bod komt, maar daar op enigerlei wijze bovenuit stijgen, bijvoorbeeld doordat de relatie met de alledaagse realiteit steeds losser wordt en de leerling steeds meer op basis van wiskundige eigenschappen en wetmatigheden dient te redeneren. Zoals uit de voorbeelden hieronder zal blijken, heeft dergelijke leerstof niet zelden een enigszins leergangmatig aspect in de zin dat het met name via het doorlopen van een didactisch gerangschikte opeenvolging van activiteiten en situaties is dat leerlingen verder komen.
Daarnaast gaat het om leerstof die een sterk beroep doet op het *probleemoplossend vermogen* van leerlingen. Dit betreft niet in de eerste plaats abstracte leerstof, maar meer leerstof met een sterk puzzel- of raadselachtig karakter waarbij het erop aankomt dat een leerling zelf op zoek gaat naar geschikte wiskundige redeneringen, deze uitprobeert en zo nodig bijstelt, en zo meer. Zulke problemen kunnen betrekking hebben op zeer uiteenlopende leerstof zoals meten, meetkunde, getalpatronen, schattend rekenen, hoofdrekenen, informele getaltheorie, enzovoorts. Zie de twee voorbeelden hieronder.

Twee woestijnreizigers willen hun laatste fles drinken met 80 cl water verdelen. Ze hebben daarbij nog twee lege blikjes van 30 cl en van 50 cl. Hoe kunnen zij het drinken eerlijk verdelen?
(Probleem afkomstig uit *Wis en Reken*, Varia-extraboek 7b)

[1] Door A. Noteboom is enige jaren geleden voor de SLO een inventarisatie gemaakt van allerlei additionele verrijkingsmaterialen. Deze inventarisatie, die regelmatig geactualiseerd wordt, is te vinden op de website *www.infohoogbegaafd.nl* onder leermiddelen.

Puzzelachtige opgave uit een toets van Van den Heuvel-Panhuizen en Bodin-Baarends, voorgelegd aan een groep van 152 goede gr. 8 leerlingen (Van den Heuvel-Panhuizen & Bodin-Baarends, 2004). De goedscore was 26%.


Vind het getal

Het is *kleiner* dan 100.
Als je het *deelt* door 7 is er geen rest.
Als je het *deelt* door 3 is de rest 2.
Als je het *deelt* door 5 is de rest 1.

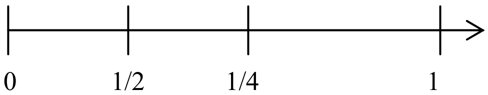
Hoewel deze problemen geordend kunnen worden in reeksen verwante problemen, zijn ze veelal ook goed als losse opgaven voor leerlingen aan te pakken. Een gevaar kan overigens schuilen in een al te hoog heuristisch gehalte: als een leerling op het eerste gezicht helemaal geen aanknopingspunten ziet om tot een passende redenering te komen (zoals bij beide hierboven gegeven problemen nogal eens het geval is), is de kans groot dat hij/zij het verder voor gezien houdt en, op termijn, een aversie tegen dit soort problemen ontwikkelt.
Bij het samenstellen van de verzameling opgaven die hieronder wordt weergegeven, is niet in de eerste plaats gelet op de vraag in hoeverre bepaalde typen opgaven thans reeds ruimschoots in het VO-programma zijn opgenomen. Het lijkt aan te bevelen om nader te onderzoeken in hoeverre een eventuele overlap tussen PO- en VO-leerstof op bezwaren stuit.

2. Leerstofgebieden en voorbeeldopgaven

Hieronder volgt een korte beschrijving van een aantal leerstofgebieden met bijbehorende voorbeeldopgaven die een indicatie geven van wat betere leerlingen in de groepen 7 en 8 verkend, onderzocht, geoefend en begrepen zouden kunnen hebben. Het accent ligt daarbij op opgaven die ondergebracht kunnen worden in een soort mini-sequenties met een enigszins leergangmatig karakter.

2.1 Gelijkwaardigheid van breuken, formele procedures voor optellen en aftrekken

Het gaat hier om gelijkwaardigheid als structuurkenmerk van de breuken-getallenwereld, en het idee dat je breuken in klassen van gelijkwaardige getallen (equivalentieklassen) kunt indelen die even groot zijn en dus op dezelfde plaats op de getallenlijn thuishoren. En verder om het idee dat je de bewerkingen optellen en aftrekken met breuken kunt uitvoeren door geschikte representanten uit die equivalentieklassen te kiezen. Bijvoorbeeld:

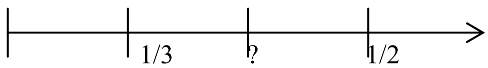


* Bedenk bij 1/2 nog drie breuken die op dezelfde plaats op de getallenlijn thuishoren.
Doe hetzelfde voor 1/4.
Welke breuken met noemer 100 zijn even groot als resp. 1/2 en 1/4?

* Vereenvoudig:
20/50 = ..
45/60 = ..
95/100 = ..
125/1000 = ..

* Wie ben ik?
Ik ben even groot als 3/5 en mijn noemer is 100.

* Welke breuk ligt op de getallenlijn midden tussen 1/3 en 1/2?



* Optellen en aftrekken
Reken uit:
3/4 + 7/10 = ..
5/6 - 3/4 = ..

Probeer daarna te beschrijven welke regels je kunt gebruiken om zulke opgaven op te lossen.

* Mike wil 1 liter vlaflip maken. Hij gebruikt 1/10 l limonade-siroop en 3/4 l yoghurt, en vult dit aan met vanillevla.
Hoeveel vanillevla moet hij er nog bijdoen?

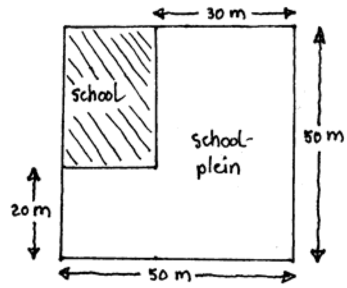
* Bedenk een handige manier
1/3 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + 1/30 + 1/60 = ..
1 - 1/3 - 1/6 - 1/12 - 1/20 - 1/30 - 1/60 = ..

Dit is een leerstofgebied dat eigenlijk op de grens van het kerncurriculum en het 'buitengebied' zit. Van oudsher vormde het een onderdeel van het kerncurriculum, maar doordat het weinig praktische relevantie bezit en ook van niet al te grote waarde voor het vervolgonderwijs is (operaties met breuken komen veelal pas in klas 2 van het vo aan bod), wordt het steeds meer als extra stof beschouwd. Deze stof is niettemin als verrijkingsstof heel geschikt omdat het fraaie mogelijkheden biedt voor leerlingen om kennis te maken met een meer formele manier van wiskundig redeneren waarbij de bron van het inzicht niet direct tot de alledaagse realiteit te herleiden is, maar meer tot de wiskundige realiteit die daaruit is voortgekomen.

2.2 Oppervlakte- en inhoudberekeningen van niet-rechthoekige figuren en vormen

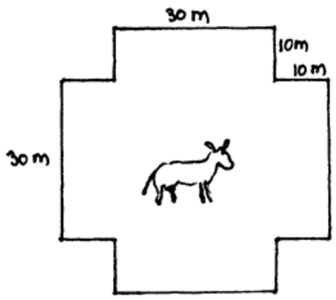
Hier gaat het om het idee dat je de oppervlakte van allerlei vlakke figuren zoals een driehoek, een trapezium en een parallellogram alsmede de inhoud van allerlei ruimtelijke vormen zoals een cakevorm, een huis of een kruiwagen kunt bepalen via handig onderverdelen of omstructureren. Ruimtelijk redeneren op een steeds hoger niveau neemt daarbij een centrale plaats in. Daarnaast gaat het om het afleiden van formules voor de meest elementaire vlakke figuren, in het bijzonder de rechthoekige driehoek en de willekeurige driehoek, en het gebruik van deze formules bij het bepalen van de inhoud van de genoemde ruimtelijke vormen.
Op een meer basaal niveau komen de genoemde onderwerpen veelal in groep 6 t/m 8 aan bod in situaties waarbij bijvoorbeeld de oppervlakte van eenvoudige rechthoekige figuren berekend moet worden zoals bij onderstaande schoolplein.
Behalve een element van rekenen bevatten zulke opgaven ook een element van redeneren doordat er gezocht moet worden naar geschikte onderverdelingen met behulp waarvan rechthoeken gemaakt kunnen worden waarvan de oppervlakte eenvoudig bepaald kan worden.

Hoe groot is de oppervlakte van het schoolplein?



Op een hoger niveau kunnen de leerlingen naderhand onderzoeken hoe je opgaven zoals hieronder kunt oplossen:

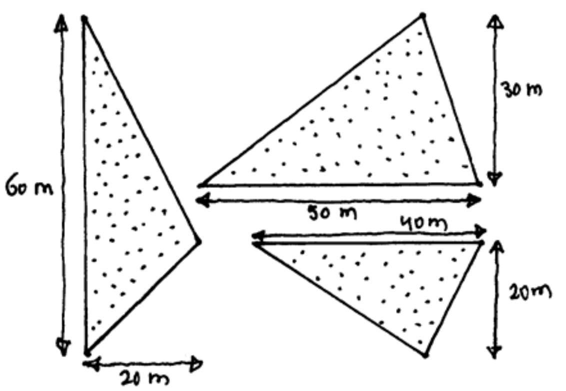
* Hoe groot is de oppervlakte van dit landje?
En hoe groot is de omtrek?



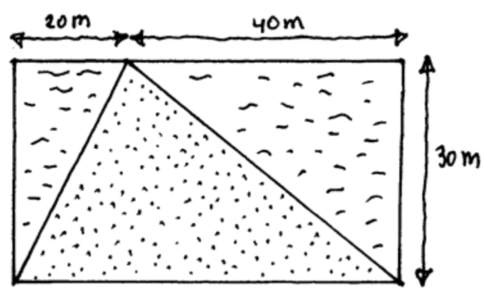
* Bedenk een landje dat dezelfde omtrek heeft maar een grotere oppervlakte. Bedenk ook een landje met dezelfde omtrek dat een kleinere oppervlakte heeft.

* Boer Van den Broek heeft een draad van 200 m lengte.
Hoe kan hij met deze draad het beste een landje omspannen waarvan de oppervlakte maximaal is?

* Bereken de oppervlakte van deze drie driehoekige tuinen.



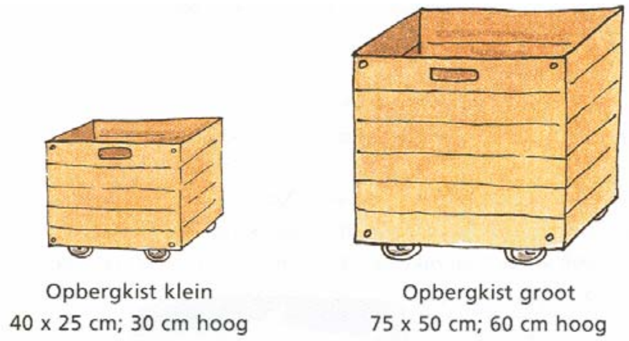
* Deze tuin bestaat voor een deel uit grasland, en voor een deel uit water. Hoe groot is de oppervlakte van beide delen?



***Tip**: Teken er net als bij het grasland hierboven een rechthoek om heen.*

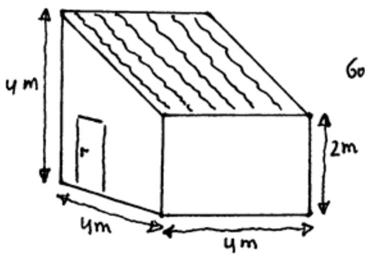
Het berekenen van inhoud beperkt zich in de kern van het programma veelal tot het bepalen van de inhoud van rechthoekige vormen zoals een koffer, aquarium of container. Soms zijn dergelijke problemen nog wat complexer doordat er naar liters omgerekend moet worden. Bijvoorbeeld:

Hoeveel liter is de inhoud van deze opbergkisten? (Opgaven afkomstig uit Wis en Reken, wisboek 8a)

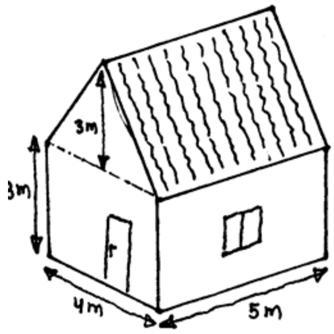


In het verlengde hiervan kunnen de betere leerlingen naderhand onderzoeken hoe je opgaven als hieronder kunt oplossen:

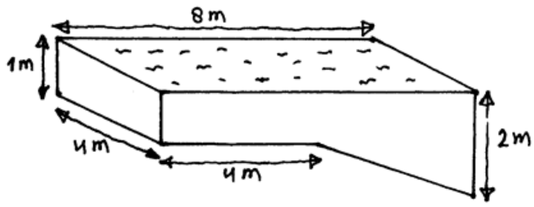
* Hoeveel m³ is de inhoud van deze schuur?



* En hoeveel m³ is de inhoud van dit huis?



* Hoeveel m³ water zit er in dit zwembad?



2.3 Informeel algebraïsch redeneren en rekenen

Hierbij kunnen eenvoudige verschijnselen onderzocht worden waarbij sprake is van veranderlijke getallen, cq. variabelen. Zulke verschijnselen kunnen bijvoorbeeld betrekking hebben op alledaagse situaties zoals taxikosten, uitleenkosten, arbeidskosten, stapelaantallen en productiekosten, maar ook op meetkundige patronen, getalpatronen of rekenraadsels. Het gaat in zulke situaties niet in de eerste plaats om het rekenen en om het oplossen van 'sommen', maar meer het opsporen van relaties en verbanden, het verkennen van veranderlijken, taalontwikkeling, en informele handelingen die met veranderlijken uitgevoerd kunnen worden. Bijvoorbeeld:

* Taxikosten:

Taxi Zoeff	Taxi Vroemm
Starttarief: € 3,40	Starttarief: € 2,50
Per km: € 1,25	Per km: € 1,40

- Wat betekenen die getallen? Waarom rekenen ze zo?
- Wat betaal je bij Zoeff voor een rit van 5 km? En bij Vroemm?
- Idem voor een rit van 10 km?
- Bedenk een rit waarvoor de prijs bij Zoeff en bij Vroemm precies gelijk is.
- Bedenk een 'formule' voor de prijs die je bij Zoeff betaalt. Idem bij Zoemm.

* Ballpoints met opdruk

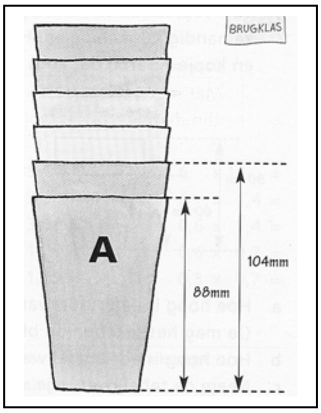
Recla-aanbiedingen

Wij produceren uw ballpoints met elke gewenste opdruk.

Prijzen:		
	‹ 100 ballpoints:	€ 25,- + € 0,45 p.st.
	100 – 500 ballpoints:	€ 25,- + € 0,35 p.st.
	› 500 ballpoints:	€ 25,- + € 0,25 p.st.

- Wat betaal je voor 50 ballpoints met opdruk? En voor 150? En voor 750?
- Wat wordt de prijs per stuk bij 50, bij 150 en bij 750 ballpoints?
- Anne kocht een flink aantal ballpoints met Ctwo-opdruk. Hij moest € 130,- betalen. Hoeveel zou hij er gekocht hebben?
- bedenk een 'formule' voor de prijs onder de 100, tussen de 100 en 500, en boven de 500.

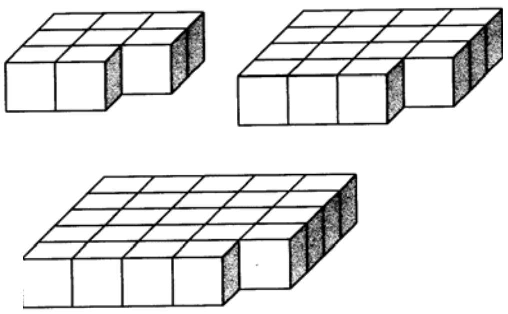
* Stapelhoogte



- Hoe hoog is de stapel links in het echt? En hoe hoog zou een stapel zijn van 10 bekers? Vul de tabel hieronder verder in.
- De keukenkast van Leon heeft planken met een hoogte van 35 cm. Hoeveel bekers zou je daarop kunnen stapelen?
- Bedenk een 'formule' voor de stapelhoogte van bekers A.

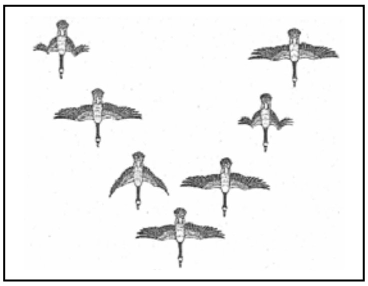
	1	2	4	5	10	...	...
stapelhoogte bekers A	88	104					

* Blokkenbouwsels



- Bepaal het aantal blokken van deze drie bouwsels. Hoe reken je dat handig uit?
- Teken een bouwsel met dezelfde vorm dat 8 blokken lang en breed is, en bepaal weer het aantal blokken.
- Andries heeft in totaal 200 blokken. Wat is het grootste bouwsel dat hij kan maken met dezelfde vorm als de bouwsels op het plaatje? Hoe lang en hoe breed is dat bouwsel?
- Bedenk een 'formule' waarmee je het aantal blokken uit een willekeurig bouwsel kunt bepalen.

* Vliegpatronen

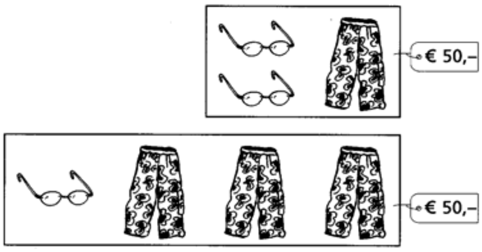


(Voorbeeld afkomstig uit Drijvers (red.), 2006, p.35)

- Bepaal het aantal ganzen in een patroon 3 rijen (V=3). En in een patroon met 4 rijen. En in een patroon met 20 rijen.
- Hoeveel ganzen vliegen er in een patroon met n rijen?
- Mirjam zag een vlucht met 120 ganzen. Kan dit een perfect V-patroon geweest zijn?
- Ans zag twee vluchten ganzen die allebei een V-patroon hadden en beide uit 10 rijen bestonden. Kunnen die samen ook weer een V-patroon vormen?

V-nummer	aantal ganzen
1	3
2	5
3	5
4	..
5	..
..	..
n	..

* Rekenraadsels



Zoek uit wat een bril en een broek kosten als je bovenstaande gegevens weet.

► Neem een getal onder de 100 in gedachten (of schrijf het op).
► Vermenigvuldig het met 4.
► Tel er 20 bij op.
► Deel dat getal door 2.
► Trek er het oorspronkelijke getal twee keer vanaf.

Wat houd je over? En wat houden de andere leerlingen over? Probeer een verklaring te vinden!

Belangrijk is dat er in dergelijke activiteiten een soort wisselwerking plaatsvindt waarbij afwisselend aan taalontwikkeling wordt gewerkt, aan het oplossen van rekenproblemen, en aan het informeel algebraïsch redeneren (Zie ook het schema afkomstig uit het rapport van de NVvW, geciteerd in Van Streun, 2007). Belangrijk is verder dat er een soort blikwisseling bij de leerlingen plaatsvindt in de zin dat ze zich steeds meer gaan realiseren dat het rekenen hier niet doel op zich is, maar meer een middel om greep te krijgen op wiskundige begrippen van een andere c.q. hogere orde (variabele, vergelijking, functie).

2.4 Samenhang breuken-kommagetallen-procenten-verhoudingen

Van oudsher ligt de nadruk in de bovenbouw van het PO op het inoefenen van rekenprocedures zoals het optellen en aftrekken van kommagetallen, het werken met procenten als operator (17% van € 128,- is ..) en het vermenigvuldigen en delen met breuken (2/5x3/4= ; 1 2/3 : 3/8 =). Geleidelijk aan is daar verandering in aan het komen doordat beheersing van dergelijke procedures minder belangrijk gevonden wordt in het tijdperk van computer en rekenmachine, en doordat het veel belangrijker geacht wordt om een goed begrip van de betreffende getalsoorten te hebben en van de samenhang daartussen. Leerlingen dienen bijvoorbeeld te begrijpen waarom 20% evenveel is als 1/5 deel. Tevens dienen ze te weten dat deze relatie ook kan worden aangeduid als '1 op de 5'. Deze accentverschuivingen hebben in de meest recente reken-wiskundemethoden min of meer hun beslag gekregen met dien verstande dat men zich veelal beperkt tot het verkennen van samenhang op een elementair niveau terwijl onderliggende wetmatigheden en relaties nog buiten beschouwing blijven. En soms is het toch vooral nog een kwestie van het inoefenen van weetjes en minder van het begrijpen waarom deze gelden. Dit lijkt overigens wel weer te sporen met de wijze waarop aspecten van samenhang in VO-methoden aan de orde komen, bijvoorbeeld als 'verordonneerd' wordt dat je een breuk in een kommagetal omzet door deze als deling op de rekenmachine uit te rekenen. Dat je kunt begrijpen waaróm dit een correcte aanpak is, en dat je die zelfs grotendeels zelf kunt ontdekken, is niet (altijd) aan de orde. Hieronder een aantal voorbeelden van opgaven die de betere leerlingen in ieder geval zouden moeten kunnen oplossen, en dan bij voorkeur op basis van een goed inzicht in de genoemde samenhang. De opgaven vallen enigszins uiteen in twee categorieën: een categorie waarbij het vooral om de samenhang tussen breuken en kommagetallen gaat, en een categorie waarbij het met name om de samenhang tussen procenten, breuken en verhoudingen gaat.

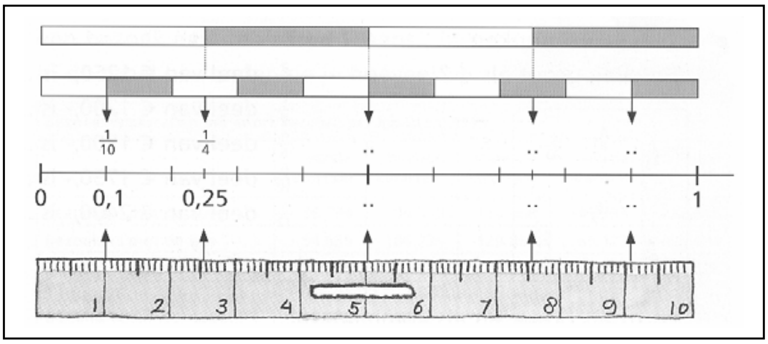
* Welke deling, breuk en kommagetal horen bij elkaar?

1 : 5 = $\frac{3}{8}$ 2 : 5 = 0,4 3 : 8 =

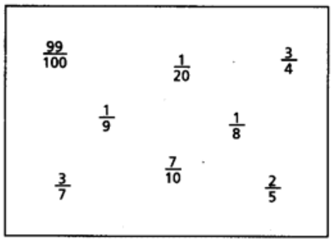
0,7 1 : 8 = $\frac{7}{10}$ 7 : 10 = $\frac{1}{5}$

0,375 $\frac{2}{5}$ 0,2 0,125 $\frac{1}{8}$

* Welke breuken en kommagetallen horen bij de pijlen?



* Van welke breuk uit het vak zie je zo welk kommagetal erbij hoort? Noteer die in je schrift.
Gebruik voor de overige breuken je rekenmachine.



* Verklaar waarom de breuk 3/4 en het kommagetal 0,75 even groot zijn (en dus op dezelfde plaats thuishoren op de getallenlijn).

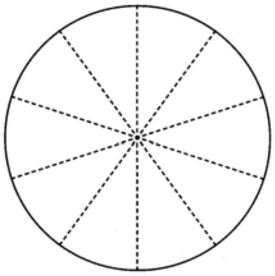
* Fatma heeft zes breuken op de rekenmachine omgezet in een kommagetal. Welke breuken kunnen dat geweest zijn?

* Welke breuk hoort er bij het percentage?

25% = ... deel
20% = ... deel
5% = ... deel
3% = ... deel
75% = ... deel
60% = ... deel
1% = ... deel
0,2% = ... deel

* Resultaten van een onderzoekje:
- 15% van de ondervraagden is voor de aanleg van de nieuwe randweg;
- 20% weet het nog niet;
- 35% is tegen;
- de rest heeft geen mening.

Beschrijf alle percentages in de procentencirkel



* Snelheidscontrole op de ringweg: van de 500 gecontroleerde auto's bleken er 28 te hard te rijden. Hoeveel procent is dat (ongeveer)?

* Lees het krantenartikel hiernaast. Hoeveel procent van de mensen gaat op een andere manier naar het werk?


OPENBAAR, HO MAAR ...

Uit onderzoek blijkt dat maar liefst de helft van de mensen met de auto naar het werk gaat. 25% gaat met de fiets en 1 op de 10 met het openbaar vervoer. De rest gaat op een ander manier. Aan het onderzoek deden 5000 mensen mee.

* Omdat drogisterij ‘De kruidhoorn’ 15 jaar bestaat, wordt er op alle artikelen 15% korting gegeven. Fatma wil op haar rekenmachine snel uitrekenen wat de nieuwe prijzen worden. Onderzoek hoe ze dat het beste kan doen…

2.5 Getallen en getalrelaties: informele getaltheorie

Het leerstofdomein ‘getallen en getalrelaties’ is de afgelopen tien jaar in toenemende mate van belang geworden. Dat betreft in de eerste plaats basaal inzicht in de verschillende betekenissen van getallen, de plaats op de getallenlijn, de decimale structuur, tellen met sprongen langs de telrij, en dergelijke. Er wordt vanuit gegaan dat een goede verkenning van dit domein van grote waarde is als grondslag voor het rekenen. Zo vindt in veel rekenmethoden voorafgaand aan de verkenning van het optellen en aftrekken tot 10 en tot 20 een verkenning van dit getaldomein als zodanig plaats, en hetzelfde geldt voor het optellen en aftrekken tot 100 en tot 1000.
Op een minder basaal niveau worden tot dit leerstofdomein ook een aantal nogal uiteenlopende activiteiten gerekend waarin het gaat om het verkennen van deelbaarheid, priemgetallen, kwadraten en wortels, ontbinden in factoren, en dergelijke. Dergelijke activiteiten, die onder de noemer ‘informele getaltheorie’ gerekend kunnen worden, hebben natuurlijk minder praktische waarde, maar stellen de leerlingen wel in staat om wiskundig tot verdieping en verrijking te komen. Het gaat dan om het onderkennen van bepaalde wetmatigheden, het bedenken van efficiënte procedures, het onderzoeken van vermoedens over onderliggende patronen, het ‘bewijzen’ van het al dan niet juist zijn van beweringen, enzovoorts. Een aantal voorbeelden van opgaven en activiteiten is uitgewerkt in de TAL-brochure *Kinderen leren rekenen*, p.28-33. Hieronder een selectie daaruit, aangevuld met eigen ideeën en opgaven uit de methode *Wis en Reken.*

* Deelbaarheid door 10, 5 en 2
Hiernaast een ‘veld’ met de getallen 1 t/m 100. Geef met een kleurtje aan welke daarvan deelbaar zijn door 10. Doe hetzelfde voor de getallen deelbaar door 5 en de getallen deelbaar door 2.
Onderzoek daarna hoe je bij een willekeurig getal (zoals 765 of 1392) snel kunt zien of het deelbaar door 10, door 5 of door 2 is.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

* Deelbaarheid door 3, 6 en 9
Hieronder een ‘veld’ met de getallen 1 t/m 60. Geef aan welke getallen deelbaar zijn door resp. 3, 6 en 9.
Onderzoek daarna hoe je bij een willekeurig getal (zoals 165 of 672) snel kunt zien of het deelbaar door 3, door 6 of door 9.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

* De negenproef
Volgens een oude regel kun je bepalen of een getal deelbaar door 9 is door de cijfers waaruit dat getal bestaat, bij elkaar op te tellen, en te kijken of het getal dat dan ontstaat, deelbaar door 9 is.
► Zoek van een aantal getallen uit of deze regel inderdaad geldt.
► Probeer daarna te bewijzen waaróm deze regel geldt.

* Waar of niet waar?
Onderzoek of de volgende beweringen waar of niet waar zijn. Leg uit waarom!

- Als een getal deelbaar is door 10, dan is het ook deelbaar door 5.
- Als een getal deelbaar is door 3, is het ook deelbaar door 6.
- Om te weten of een getal deelbaar is door 20, hoef je alleen maar naar de laatste twee cijfers van dat getal te kijken.

* Priemgetallen
Onderzoek welke getallen tussen 1 en 30 je alleen door 1 en door zichzelf kunt delen. Dat zijn priemgetallen!
Welke van de getallen uit de twee rijen hieronder zijn priemgetallen?

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110

1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010

* Een raadselsom
Welk getal tussen 200 en 250 is deelbaar door 2, 3, 4, 5 en 6? Schrijf op hoe je dat kunt achterhalen.

* Het grootste aantal delers
Het getal 6 heeft als delers (getallen waardoor je 6 kunt delen) 2 en 3. Evenzo heeft het getal 12 als delers 2, 3, 4 en 6, terwijl 24 als delers 2, 3, 4, 6, 8 en 12 heeft.
Welk getal onder de 100 heeft het grootste aantal delers?

* Priemgetallen: een snelle manier
Hiernaast een rij van zes getallen. Zoek uit welke daarvan priem zijn, en welke niet.
Lees daarna de uitspraak van Nikita eronder. Leg uit waarom zij gelijk heeft!
Zoek tenslotte uit welke van de getallen hieronder priem zijn.

400 401 402 403 404 405

1000 1001 1002 1003 1004 1005

* Welke priemgetallen zijn gebruikt?

2 3 5 7 11

Schrijf de opgaven met de juiste getallen erin in je schrift.

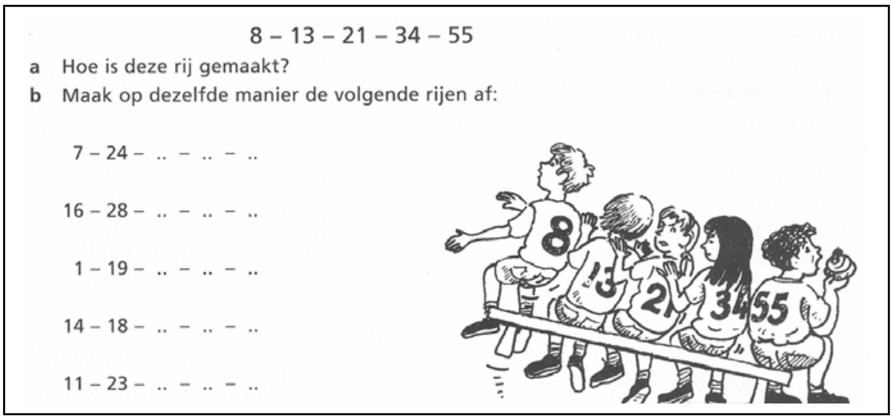
.. x .. x .. = 8
.. x .. x .. = 12
.. x .. x .. = 18
.. x .. x .. = 20
.. x .. x .. = 27

.. x .. x .. = 75
.. x .. x .. = 98
.. x .. x .. = 99
.. x .. x .. = 125
.. x .. x .. = 147

* Waar of niet waar? (Leg uit waarom!)

- Als een getal deelbaar door 10 is, eindigt het altijd op een nul.
- Als een getal deelbaar is door 2, kan het nooit een priemgetal zijn.
- De som van twee priemgetallen is ook altijd een priemgetal.
- Twee priemgetallen kunnen nooit naast elkaar in de telrij liggen.
- Elk even getal onder de 100 is te schrijven als som van twee priemgetallen.

* Bijzondere getalrijen
Hiernaast een rij van vijf getallen. Zoek uit hoe de rij is opgebouwd, en maak de rijen eronder af. Probeer een soortgelijke rij van vijf getallen te vinden waarbij het vijfde getal 100 is. Hoeveel van zulke rijen zijn er in totaal?



8 – 13 – 21 – 34 – 55

a Hoe is deze rij gemaakt?
b Maak op dezelfde manier de volgende rijen af:

7 – 24 – .. – .. – ..

16 – 28 – .. – .. – ..

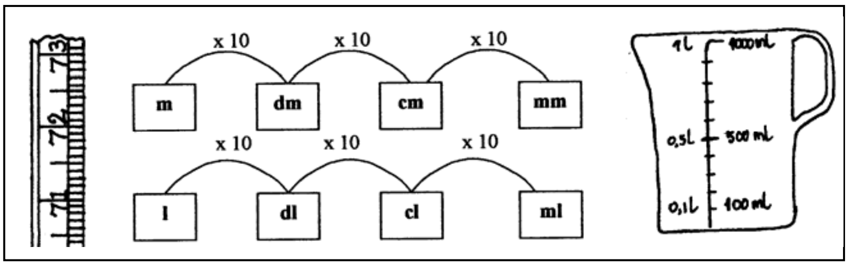
1 – 19 – .. – .. – ..

14 – 18 – .. – .. – ..

11 – 23 – .. – .. – ..

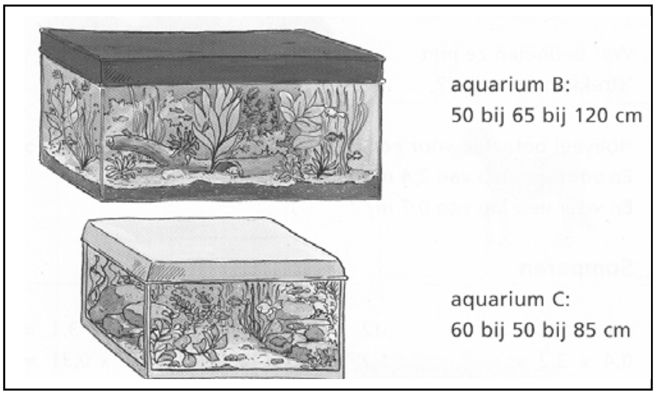
2.6 Inhoud en volume bepalen

Het gebied van het meten van inhoud en volume krijgt in het basisonderwijs niet veel aandacht. Veelal worden er enige activiteiten met een maatbeker gedaan, en worden aan de hand daarvan de ‘litermaten’ geïntroduceerd: l t/m ml. Soms wordt de analogie van deze reeks maten met de kleine lengtematen (m t/m mm) verduidelijkt waarbij ook op de taalkwestie wordt ingegaan (deci: tiende; centi: honderdste; milli: duizendste). Zie het voorbeeld hieronder afkomstig uit het aangepaste leertraject voor zwakke rekenaars in groep 7 en 8 (SLO, 2007).



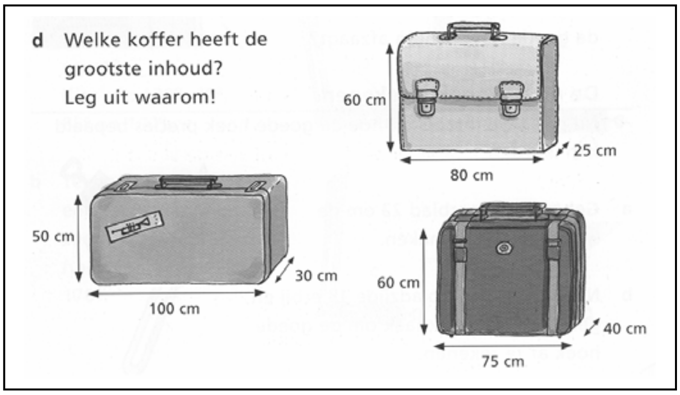
Veelal worden enige tijd later ook de ‘kubieke inhoudsmaten’ geïntroduceerd, met name de m³, de dm³ en de cm³. Daarbij wordt gewoonlijk een relatie gelegd tussen de liter en de dm³, bijvoorbeeld door experimenteel vast te stellen dat de inhoud van een literpak melk precies past in een bakje van 1 bij 1 bij 1 dm (verbazing gegarandeerd). In het verlengde hiervan worden dan opgaven aangeboden die net als sommige andere leerstof uit voorgaande gebieden op de rand van het kerncurriculum zit: het bepalen van de inhoud van objecten in liters waarvan de afmetingen in lengtematen gegeven zijn, en waarbij dus omgerekend moet worden van kubieke maten naar litermaten. Hieronder een aantal voorbeelden afkomstig uit *Wis en Reken*.

* Hoeveel liter water gaat er in deze aquaria?

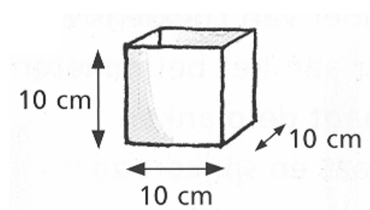


* Hoe hoog is de laadruimte?

* Drie koffers: welke heeft de grootste inhoud?



* Een lange smalle doos
Een doos van 10 bij 10 bij 10 cm heeft een inhoud van 1 dm³ oftewel 1 liter. Hoe hoog moet je een doos met een grondvlak van 1 bij 1 cm maken om een inhoud van 1 liter te krijgen? En een doos met een grondvlak van 1 bij 1 mm?

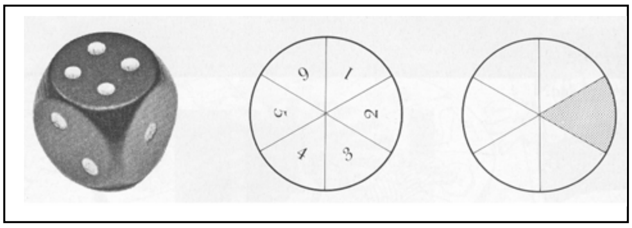


2.7 Kijk op kans

Kansrekening en statistiek werden in de jaren ’70 door wiskobas gelanceerd als belangrijk nieuw leerstofgebied dat wiskundig veel te bieden heeft en bovendien maatschappelijk steeds relevanter aan het worden is. In verschillende leerplanpublicaties werden uitvoerige voorbeelden van mogelijke activiteiten(reeksen) gegeven. Ook werd er een speciaal programma *Kijk op kans* bij de NOT (Onderwijstelevisie) ontwikkeld olv. P. Scholten, een programma dat enige jaren zeer populair was. Deze leerstof is evenwel nooit goed in het curriculum van de basisschool doorgedrongen. Kennelijk zijn de wiskundige ervaringen en inzichten die dit gebied kan opleveren, toch niet belangrijk genoeg om een stabiele plaats in het curriculum te verwerven. Tegenwoordig zijn opgaven uit dit gebied nog marginaal in methoden te vinden, en dan nog voornamelijk als verrijkingsstof. Hieronder een aantal voorbeelden afkomstig uit genoemde programma en uit het verrijkingsmateriaal bij *Wis en Reken*.

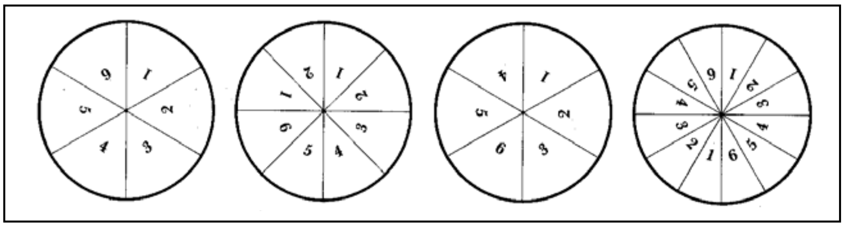
* Dobbelsteentollen
Van een dobbelsteen kun je een kanstol maken. Daar kun je mooi op zien hoe groot de kans is om bijvoorbeeld 6 te gooien: ‘1 op de 6’, oftewel 1/6.

Hoe groot is de kans om een 1 te gooien? En om een even getal te gooien? En om een getal groter dan 4 te gooien?



* Experimenteren
Gooi 100 keer met een dobbelsteen of draai 60 keer met de dobbelsteenkanstol. Voorspel van tevoren hoeveel keer je ongeveer 6 moet gooien. Voer daarna het experiment uit. Komt je voorspelling uit?
Stel dat je 1000 keer zou gooien of draaien; hoeveel keer zou je dan 6 moeten hebben? Zou je voorspelling dan beter kunnen uitkomen?

* Welke van de dobbelsteenkanstollen hiernaast zijn eerlijk? Welke niet? Leg uit waarom!



* Hieronder twee draaischijven zoals je op de rommelmarkt of kermis wel eens tegenkomt. Je kunt een drop, een spek, een schaar of een zaklantaarn winnen.
Bepaal hoe groot de kans is op een spek, een drop, een zaklantaarn en een schaar bij beide schijven. Controleer de resultaten met een echt kansexperiment.

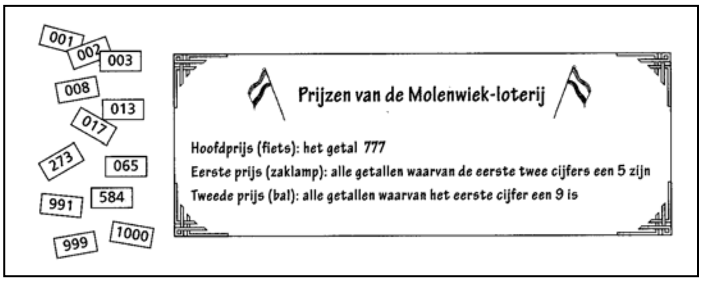
* Weetkans en zweetkans
Hieronder een tabel die je kunt gebruiken om te berekenen hoe groot de kans is dat je, als je met twee dobbelstenen gooit, bijvoorbeeld 2 ogen, 8 ogen of 10 ogen gooit.

dobbelsteen A

dobbelsteen B	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3				
⚁	3	4				
⚂						
⚃						
⚄						
⚅						

Doe nu een experiment waarbij je bijvoorbeeld 100 keer met twee dobbelstenen gooit. Noteer de resultaten in een tabel en bepaal na afloop hoe groot de kans bij dit experiment was dat je 2 ogen, 8 ogen of 10 ogen gooide.
Onderzoek de verschillen met de berekende kansen!

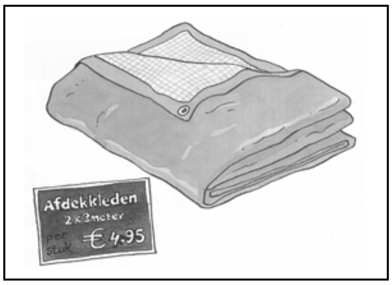
* Loterij
Bij een loterij worden in totaal 1000 loten verkocht, genummerd van 1 t/m 1000. Na rijp beraad worden de hiernaast weergegeven prijzen vastgesteld.
Hoe groot is de kans op resp. de 1e , 2e en 3e prijs als je 1 lot koopt?



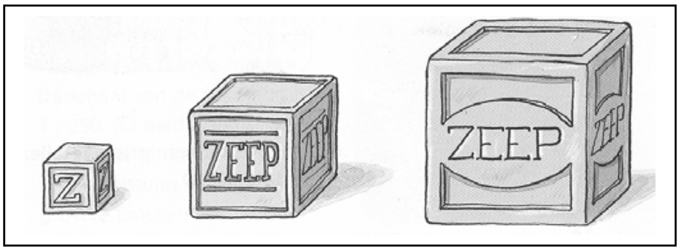
2. 8 Machtsverbanden

Dit verschijnsel doet zich op een basaal niveau voor in allerlei situaties waarbij sprake is van twee- of driedimensionale groei, zoals wanneer een kleed 2 keer zo lang en 2 keer zo breed gemaakt wordt, een blok hout 2 keer zo lang, breed en hoog gemaakt wordt, enzovoorts. Voor veel leerlingen in groep 7 en 8 is moeilijk te doorgronden wat daarbij precies gebeurt met zaken als oppervlakte, inhoud en gewicht. Maar voor sommige leerlingen kan dit een rijke bron van leerervaringen opleveren. Hieronder enkele voorbeelden van opgaven uit *Wis en Reken*.

* Afdekkleden
Een afdekkleed van 2 bij 3 meter kost € 4,95. Wat zou een kleed van 4 bij 6 meter kosten? En een kleed van 8 bij 12 meter? Verklaar je antwoord!

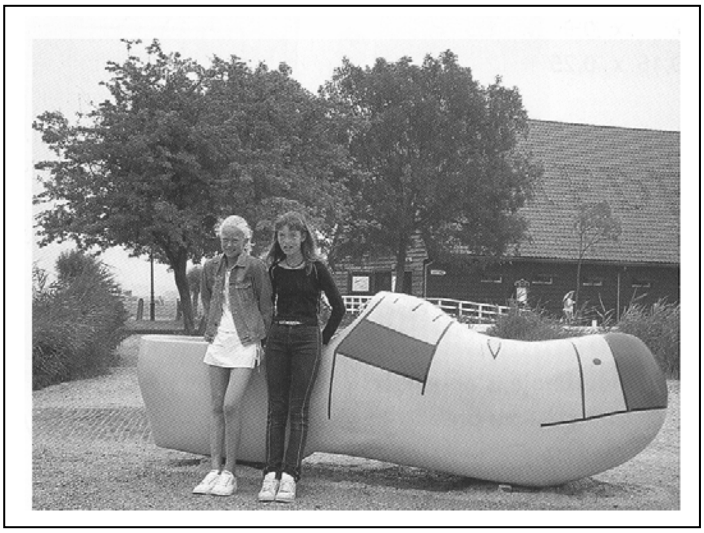


* Blokken zeep
De drie blokken zeep hieronder hebben de vorm van een kubus. Het kleine blok weegt 100 gram. Hoe zwaar zijn de andere twee?



* Olifanten
Een moederolifant is ongeveer 3 keer zo lang, breed en hoog als een babyolifantje. Hoe zwaar zou de moeder zijn als de baby ongeveer 120 kg weegt?

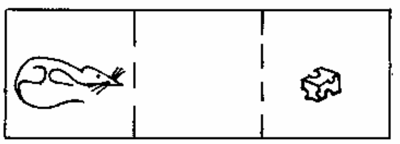
* De reuzenklomp
Hiernaast een foto van twee meisjes uit groep 8 naast een reuzenklomp bij de Zaanse Schans. Hoe zwaar zou een reus ongeveer zijn die deze klomp past? (De meisjes wegen ongeveer 50 kg)



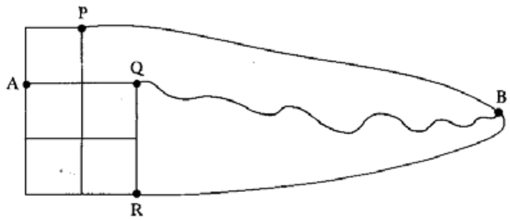
2.9 Combinatoriek

Dit was eveneens een van de nieuwe leerstofgebieden die door wiskobas werden geïntroduceerd. Het speelde in zoverre een sleutelrol bij het verduidelijken van de diepere bedoelingen van wiskobas, dat het begrip mathematiseren aan de hand van een aantal inmiddels klassiek geworden combinatorische problemen werd uiteengezet. Ook voor dit gebied geldt dat het eigenlijk nooit vaste grond onder de voeten in het leerplan heeft gekregen. Enerzijds heeft dit waarschijnlijk te maken met de zeer beperkte toepasbaarheid, anderzijds met de complexiteit van sommige problemen. Hieronder een aantal voorbeelden afkomstig uit het wiskobasmateriaal, en uit *Wis en Reken*.

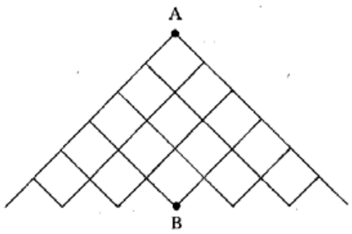
* Muis en kaas
Hoeveel verschillende routes kan de muis volgen om bij de kaas te komen?



* Pendelaar
Hoeveel verschillende kortste routes kan de pendelaar (A) volgen om op z'n werk (B) te komen?



* Routes op het stadsplan
Hoeveel verschillende kortste routes zijn er om van A naar B te komen?



* T-shirt en broek
Rens kan kiezen uit 4 T-shirts en 3 broeken om te dragen. Hoeveel verschillende combinaties kan hij maken?

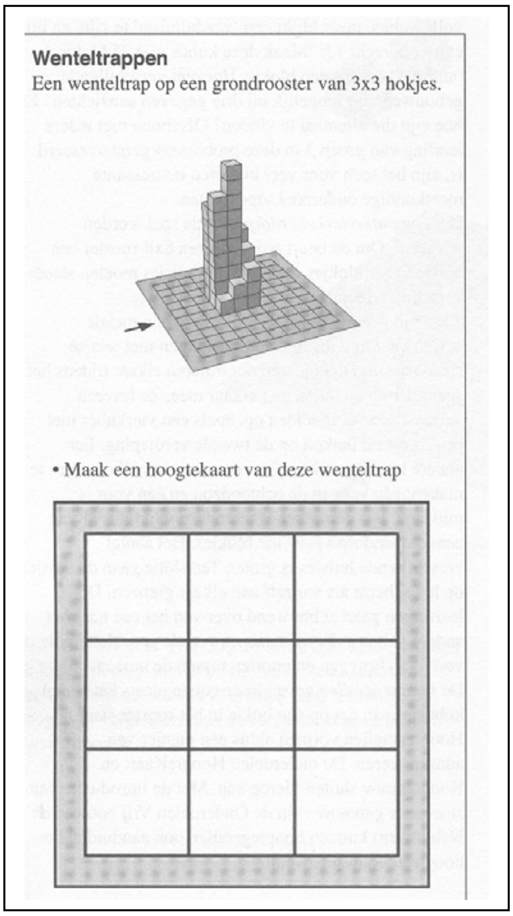
* Handen schudden
Op de vergadering van ijsclub De Gladde IJzers komen 6 personen die elkaar allemaal een hand geven. Hoeveel keer wordt er in totaal handen geschud?

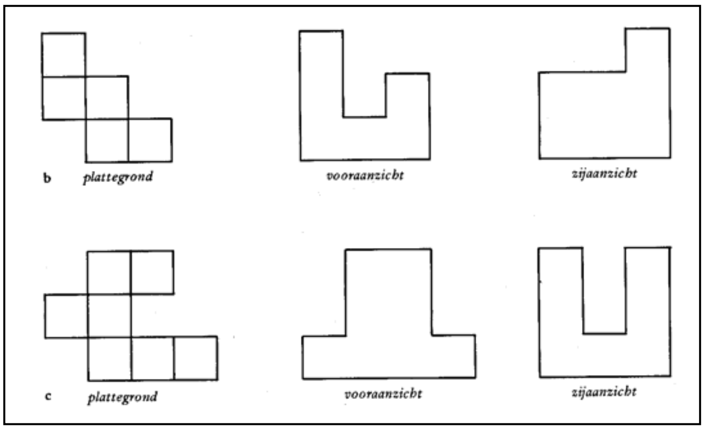
* Menu's
Hoeveel verschillende 3-gangen-menu's kun je samenstellen met 3 voorafjes, 5 hoofdgerechten en 4 toetjes?

* Prijsvechter Sky-high onderhoudt rechtstreekse luchtvaartverbindingen tussen zes grote Europese steden. Hoeveel verbindingen zijn dat in totaal?
En hoeveel zouden het er worden als ook Berlijn en Madrid nog worden opgenomen?

* Bij ijssalon Nova Zembla hebben ze ijs in tien verschillende smaken. Hoeveel verschillende soorten ijsjes met twee verschillende smaken kunnen ze maken? En hoeveel soorten met drie verschillende smaken?

2.10 Meetkunde: werken met plattegronden met hoogtegetallen, voor- en zijaanzichten
Op dit gebied, eveneens gelanceerd door wiskobas, zijn enorm veel mogelijkheden voor meetkundig redeneren. Onlangs zijn deze mogelijkheden nog eens verder uitgewerkt via het computerprogramma *De computer als blokkendoos* van J. van den Brink en P. Boon. Hieronder een voorbeeld uit het wiskobasmateriaal, en een voorbeeld uit het genoemde computerprogramma.





* Plattegrond maken
Hiernaast de plattegrond, een vooraanzicht en een zijaanzicht van twee bouwsels. Bouw de bouwsels na en vul daarna de plattegrond met hoogtegetallen.

* Hoogtekaart
Maak een hoogtekaart van de afgebeelde wenteltrap.

3. Besluit: inbedding in het onderwijs
Het hierboven weergegeven overzicht is natuurlijk verre van volledig. Er zijn allerlei uitbreidingen mogelijk. Ook is buiten beschouwing gelaten wat voor oplossingswijzen leerlingen zoal kunnen ontwikkelen, wat voor relaties ontdekt kunnen worden, enzovoorts. Hoe ver leerlingen met de beschreven leerstof komen, hangt in hoge mate af van de vraag in hoeverre ze daarbij begeleiding en instructie krijgen. In de praktijk werken ze er voornamelijk zelfstandig aan terwijl de leraar zich meer richt tot de grote groep middelmatige of zwakke leerlingen. Het zal echter duidelijk zijn, dat de leereffecten beduidend zullen verbeteren naarmate er sprake is van intensievere begeleiding. Wat dat betreft lijkt het aan te bevelen om in de groepen 7 en 8 naar een onderwijsorganisatie over te gaan waarbij een beperkt deel van de leerstof met de hele groep samen wordt doorgewerkt, terwijl daarnaast sprake is van differentiële leertrajecten die door groepen zwakke en goede leerlingen afzonderlijk worden doorlopen. Dit vraagt van de leraar echter heel wat flexibiliteit, en als je dan nog dertien andere vakken ook moet geven, dan zal dit wellicht niet zo eenvoudig te realiseren zijn.

Kees Buijs, SLO