Bijlage 11

Een poging tot wiskundig onderzoek naar het gebruik van het begrip evenredig in de natuurkunde

Auteur: Ton Hengeveld (2006)

Definitie

Stel F is een grootheid die afhangt van de onderling verschillende grootheden $G_1,\ldots,G_n$. Dit betekent dat er een functie $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $F = f(G_1,\ldots,G_n)$.
Onder een meting naar de afhankelijkheid van de grootheid F van de grootheid G_1 onder overigens *gelijkblijvende omstandigheden*, verstaat men een meting waarbij men de grootheid G_1 verandert en waarbij ieder van de andere grootheden $G_2,\ldots,G_n$ steeds dezelfde waarde heeft.

We zullen ook spreken van een meting van de grootheid F in relatie tot de grootheid G_1 onder de (*onveranderde*) *meetomstandigheid* $G_2,\ldots,G_n$.

Natuurkundige voorbeelden

1) Metingen om de wet van Ohm vast te stellen.
Bij meting van de stroomsterkte I door een metaaldraad met een Ampèremeter zal deze afhangen van de door een voltmeter gemeten spanning U over de draad, de lengte l van de draad, de doorsnede A van de draad, de temperatuur T ervan en het soort metaal X. Er geldt dus dat I een functie is van U, l, A, T en X:
$I = f(U,l,A,T,X)$. Het functionele verband f tussen I en de grootheden U, l, A, T en X dat uit de metingen volgt heet de wet van Ohm.
Als de stroomsterkte I wordt gemeten in relatie tot de spanning U over de draad dan worden de lengte l en de doorsnede A van de draad niet veranderd en ook niet de temperatuur T. Het soort metaal X wordt tijdens de meting ook niet veranderd. Bij meting van I in verband met U hebben we te maken met de onveranderde meetomstandigheid l, A, T en X.
Vooral het constant houden van de temperatuur T is experimenteel niet eenvoudig. Meet men bijvoorbeeld de stroomsterkte I door een lampje in verband met de spanning U over dat lampje dan zal de temperatuur T wel veranderen. Bij een groter stroomsterkte I wordt meer warmte in de gloeidraad van het lampje ontwikkeld waardoor de temperatuur T ervan groter wordt. Deze hogere temperatuur T uit zich in het meer gloeien van het lampje, dus door een grotere uitstraling van licht bij een grotere stroomsterkte I door het lampje.
In de nader te onderzoeken en vast te stellen formule f voor I zijn de grootheden U, l, A en T continu te veranderen grootheden. Het soort materiaal X valt op te vatten als een discrete variabele.

2) Metingen naar de gaswet van Boyle en de gaswet van Gay-Lussac.
De druk p van een afgesloten hoeveelheid gas zal afhangen van het volume V van dat gas, de temperatuur T ervan, het aantal moleculen n en het soort gas X. Er geldt dus $p = f(V,T,n,X)$. In veel situaties zal het onderzoek naar het functionele verband f tussen p en de grootheden V, T, n en X de ideale gaswet opleveren.
De gaswet van Boyle wordt gevonden bij metingen naar de druk p in verband met het volume V. Tijdens de meting wordt de temperatuur T constant gehouden en omdat het gas afgesloten is verandert ook het aantal moleculen n niet en het soort gas X. Er is dus sprake van een meting van p in verband met V onder de onveranderde meetomstandigheid T, n en X.

De temperatuurwet van Gay-Lussac wordt gevonden bij metingen van de druk *p* in verband met de temperatuur *T* onder de onveranderde meetomstandigheid *V*, *n* en *X*.

In het vervolg zullen we deze twee voorbeelden gebruiken om definities en een stelling toe te lichten.
Overigens is het lang niet altijd duidelijk van welke grootheden een bepaalde grootheid kan afhangen.

Definitie
Stel *F* is een grootheid die afhangt van de onderling verschillende grootheden $G_1,\dots,G_n$. Er bestaat dus een functie $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ zodanig dat $F = f(G_1,\dots,G_n)$.
We zeggen dat de grootheid *F* (*recht*) *evenredig* is met de grootheid G_1, notatie $F\propto G_1$, als er een functie $c_1:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $f(G_1,\dots,G_n)=c_1(G_2,\dots,G_n)\cdot G_1$, dus als geldt $\dfrac{F}{G_1}=c_1(G_2,\dots,G_n)$.
M.a.w. $F\propto G_1$ als $\dfrac{F}{G_1}$ niet afhangt van G_1, maar alleen van de andere grootheden $G_2,\dots,G_n$.

Toelichting op de definitie
Als een natuurkundige zegt $F\propto G_1$, dus dat *F* evenredig is met de grootheid G_1, dan wordt bedoeld dat welke onveranderde meetomstandigheid $G_2,\dots,G_n$ er ook mag zijn, in elk van deze omstandigheden blijkt dat $\dfrac{F}{G_1}$ constant is. De evenredigheidsconstante $c_1(G_2,\dots,G_n)$ kan in de verschillende constante meetomstandigheden $G_2,\dots,G_n$ wel een andere waarde aannemen.

Definitie
Als geldt $F\propto\dfrac{1}{G_1}$, dus als geldt $F\cdot G_1=c_1(G_2,\dots,G_n)$, heet de grootheid *F* *omgekeerd* evenredig met G_1.
Als geldt $F\propto G_1^{\,2}$, dus als geldt $\dfrac{F}{G_1^{\,2}}=c_1(G_2,\dots,G_n)$, heet de grootheid *F* *kwadratisch* evenredig met G_1.
Als geldt $F\propto\sqrt{G_1}$, dus als geldt $\dfrac{F}{\sqrt{G_1}}=c_1(G_2,\dots,G_n)$, heet de grootheid *F* *wortel* evenredig met G_1.

De natuurkundige voorbeelden

1) De wet van Ohm
Bij meting van de stroomsterkte *I* in verband met de spanning *U* wordt gevonden $I\propto U$. De evenredigheid tussen *I* en *U* hangt nog af van de verschillende

constante meetomstandigheden *l*, *A*, *T* en *X*, dus geldt $\frac{I}{U} = \gamma(l, A, T, X)$. De evenredigheid tussen *I* en *U* wordt de wet van Ohm genoemd.
De grootheid $\Gamma = \frac{I}{U}$ wordt de *geleiding* van de metaaldraad genoemd, en $R = \frac{U}{I}$ de *weerstand* (dus $\Gamma = \frac{1}{R}$). De geleiding Γ hangt nog af van de lengte *l*, de doorsnede *A*, de temperatuur *T* en het soort metaal *X*: $\Gamma = \gamma(l, A, T, X)$.
Verdere metingen leveren op

$$\Gamma \propto A \qquad \text{dus} \qquad \frac{\Gamma}{A} = \alpha(l, T, X)$$

en

$$\Gamma \propto \frac{1}{l} \qquad \text{dus} \qquad \Gamma \cdot l = \beta(A, T, X)$$

De wiskundige vraag die nu rijst is:
Wat valt te concluderen uit het feit dat de geleiding Γ recht evenredig blijkt met de doorsnede *A* en omgekeerd evenredig met de lengte *l* van de metaaldraad?

2) Wet van Boyle en wet van Gay-Lussac
Bij constante temperatuur *T*, aantal moleculen *n* en soort gas *X* wordt voor het verband tussen druk *p* en volume *V* gevonden

$$p \propto \frac{1}{V} \qquad \text{dus} \qquad p \cdot V = c(T, n, X)$$

Dit is de gaswet van Boyle.
Bij constant volume *V*, aantal moleculen *n* en soort gas *X* wordt gevonden

$$p \propto T \qquad \text{dus} \qquad \frac{p}{T} = k(V, n, X)$$

Dit is de temperatuurwet van Gay-Lussac. Het is een bijzonder experimenteel gegeven dat wat het volume *V* ook is, welk aantal moleculen *n* er ook mag zijn en met welk gas *X* er ook wordt gewerkt, er wordt altijd een evenredigheid gevonden tussen de druk *p* en de absolute temperatuur *T*.
Ook nu rijst de wiskundige vraag:
Wat valt te concluderen uit het feit dat de druk *p* omgekeerd evenredig is met het volume *V* en recht evenredig is met de absolute temperatuur *T*?

Stelling
Stel *F* is een grootheid die afhangt van de onderling verschillende grootheden $G_1, \ldots, G_n$. Stel $F \propto G_1$ en $F \propto G_2$. Dan geldt $F \propto G_1 \cdot G_2$.
Bewijs
Er bestaan functies $c_1 : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ en $c_2 : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ zodanig dat

$$\frac{F}{G_1} = c_1(G_2, \ldots, G_n) \qquad \text{en} \qquad \frac{F}{G_2} = c_2(G_1, G_3, \ldots, G_n)$$

Gevolg

$$\frac{F}{G_1 \cdot G_2} = \frac{c_1(G_2, \ldots, G_n)}{G_2} \qquad \text{en} \qquad \frac{F}{G_1 \cdot G_2} = \frac{c_2(G_1, G_3, \ldots, G_n)}{G_1}$$

Dus welke waarden G_1 en G_2 ook mogen aannemen, altijd geldt

$$\frac{c_1(G_2, \ldots, G_n)}{G_2} = \frac{c_2(G_1, G_3, \ldots, G_n)}{G_1}$$

Dit kan alleen als er een functie $c_{1,2}:\mathbb{R}^{n-2}\to\mathbb{R}$ bestaat zodanig dat

$$\frac{c_1(G_2,\dots,G_n)}{G_2}=\frac{c_2(G_1,G_3,\dots,G_n)}{G_1}=c_{1,2}(G_3,\dots,G_n)$$

Resultaat $F\propto G_1\cdot G_2$ want $\dfrac{F}{G_1\cdot G_2}=c_{1,2}(G_3,\dots,G_n)$

Q.E.D.

De natuurkundige voorbeelden

1) De wet van Ohm

Omdat voor de geleiding geldt

$\Gamma\propto A$ dus $\dfrac{\Gamma}{A}=\alpha(l,T,X)$

en $\Gamma\propto\dfrac{1}{l}$ dus $\Gamma\cdot l=\beta(A,T,X)$

levert toepassing van de stelling

$\Gamma\propto A\cdot\dfrac{1}{l}$ dus $\dfrac{\Gamma\cdot l}{A}=s(T,X)$

De grootheid $\sigma=\dfrac{\Gamma\cdot l}{A}$ heet de *geleidingscoëfficiënt* (en $\rho=\dfrac{1}{\sigma}$ de *soortelijke weerstand*).

Al met al wordt de wet van Ohm

$I=\sigma\cdot\dfrac{A}{l}\cdot U$ met $\sigma=s(T,X)$

De geleidingscoëfficiënt σ hangt alleen af van de temperatuur T en het soort metaal X. In tabellen met eigenschappen van metalen vindt men meestal de soortelijke weerstand $\rho=\dfrac{1}{\sigma}$.

2) De ideale gaswet

Volgens Boyle geldt

$p\propto\dfrac{1}{V}$ met $p\cdot V=c(T,n,X)$

Volgens Gay-Lussac geldt

$p\propto T$ met $\dfrac{p}{T}=k(V,n,X)$

Toepassing van de stelling levert

$p\propto\dfrac{1}{V}\cdot T$ dus $\dfrac{p\cdot V}{T}=C$ met $C=\gamma(n,X)$

Dit is de ideale gaswet. De gasconstante C van het afgesloten gas blijkt evenredig te zijn met het aantal moleculen n van het afgesloten gas:

$C\propto n$ dus $C=\kappa(X)\cdot n$

Het blijkt ten slotte dat de evenredigheidsconstante $\kappa(X)$ voor alle gassen X dezelfde waarde heeft. De constante wordt genoteerd als k_B en heet de constante van Boltzmann. Al met al luidt de ideale gaswet

$p\cdot V=n\cdot k_B\cdot T$

De hierboven gegeven beschouwingen zal een fysicus veel te omslachtig vinden. Hij zal alle afleidingen veel korter willen:

1) De wet van Ohm

Experimenteel is gevonden

$$I \propto U\ ,\ I \propto A \text{ en } I \propto \frac{1}{l} \text{ dus } I \propto \frac{A}{l} \cdot U$$

M.a.w. $I = \sigma(T, X) \cdot \frac{A}{l} \cdot U$

De geleidingscoëfficiënt hangt σ alleen af van de temperatuur *T* en het soort metaal *X* zoals ook duidelijk wordt gemaakt in de formule.

2) De ideale gaswet

Experimenteel is gevonden

$$p \propto \frac{1}{V} \text{ (Boyle) },\quad p \propto T \quad \text{(Gay-Lussac) en} \quad p \propto n$$

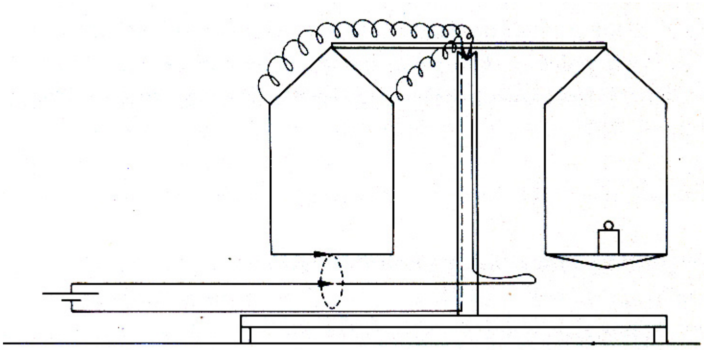
Gevolg $p \propto \frac{1}{V} \cdot T \cdot n$ of $p = k_B \cdot \frac{1}{V} \cdot T \cdot n$

Herschrijven levert

$$p \cdot V = n \cdot k_B \cdot T$$

Het blijkt dat de evenredigheidsconstante k_B voor alle soorten gas dezelfde waarde heeft. De constante heet de constante van Boltzmann.

Een mooi voorbeeld van hoe fysici met evenredigheden werken vormt de definitie van de eenheid van stroomsterkte, de Ampère:



Bepaling van de kracht tussen twee stroomdraden

De definitie van de Ampère gaat met behulp van een *stroombalans*. Er zijn twee evenwijdige stroomvoerende draden aan de linkerkant van de balans. De onderste is "oneindig" lang en heeft stroomsterkte I_1 de bovenste heeft lengte *l* en heeft stroomsterkte I_2. De afstand tussen de stroomvoerende draden is *R*. De aantrekkende kracht *F* die de bovenste draad van de onderste ondervindt wordt gemeten met de balans.

Experimenteel blijkt $F \propto I_1$, $F \propto I_2$, $F \propto l$ en $F \propto \frac{1}{R}$.

Volgens de stelling geldt $F \propto \frac{I_1 \cdot I_2}{R} \cdot l$ of $F = \mu \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{R} \cdot l$.

De evenredigheidsconstante μ heet de *magnetische permeabiliteit* van het medium tussen de stroomvoerende draden. Is er vacuüm tussen de stoomdraden dan wordt deze magnetische permeabiliteit genoteerd als μ_0

De hier gevonden wet wordt gebruikt om de eenheid van de stroomsterkte, de Ampère, te definiëren. Per definitie geldt voor de magnetische permeabiliteit in vacuüm $\mu_0 = 2 \cdot 10^{-7}$ N A^{-2} . Als $I_1 = I_2 = I$ kan uit de gemeten kracht *F* (in N), de lengte *l* en de onderlinge afstand *R* de stroomsterkte *I* in Ampère via deze wet worden berekend.

Een nuttige stelling voor het rekenen met evenredigheden is de volgende:

Stelling
Stel $A \propto B$ onder allerhande constante meetomstandigheden $G_1,\ldots,G_n$. Dan geldt voor alle $p \in \mathbb{R}$ dat $A^p \propto B^p$ onder dezelfde onveranderde meetomstandigheid $G_1,\ldots,G_n$.

Bewijs
Er geldt $\frac{A}{B} = c(G_1,\ldots,G_n)$ met $c:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Gevolg $\frac{A^p}{B^p} = k(G_1,\ldots,G_n)$ waarbij voor de functie $k:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ geldt
$k(G_1,\ldots,G_n) = c^p(G_1,\ldots,G_n)$

Q.E.D.

Natuurkundig voorbeeld: Derde wet van Kepler
Volgens de derde wet van Kepler geldt voor de omloopstijd T van een planeet om de zon

$$T^2 \propto r^3.$$

Hierbij is $r = ½\cdot(r_{\min} + r_{\max})$, waarbij $r_{\min}$ de kleinste afstand is van de planeet tot de zon en $r_{\max}$ de grootste afstand tot de zon. Omdat de baan van een planeet een ellips is met de zon in één van de brandpunten (eerste wet van Kepler) is *r* de halve lange as van de ellipsbaan.
Volgens de stelling

$$(T^2)^{\frac{1}{2}} \propto (r^3)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{dus} \qquad T \propto r^{\frac{3}{2}}.$$

Dus een planeet met een *k* keer zo grote lange as heeft een $k^{\frac{3}{2}}$ zo grote omloopstijd.

Stelling
Als $A \propto B$ en $C \propto D$ onder dezelfde onveranderde meetomstandigheid $G_1,\ldots,G_n$ dan geldt dat $A \cdot C \propto B \cdot D$ onder dezelfde meetomstandigheid $G_1,\ldots,G_n$.

Bewijs
Er geldt $\frac{A}{B} = m(G_1,\ldots,G_n)$ met $m:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $\frac{C}{D} = n(G_1,\ldots,G_n)$ met $n:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Gevolg $\frac{A\cdot C}{B\cdot D} = k(G_1,\ldots,G_n)$ waarbij voor de functie $k:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ geldt
$k(G_1,\ldots,G_n) = m(G_1,\ldots,G_n)\cdot n(G_1,\ldots,G_n)$.

Q.E.D.

Natuurkundig voorbeeld: Omloopsnelheid van een planeet in een cirkelbaan rond de zon.
Er geldt $v = \frac{2\pi r}{T}$ dus $v \propto r \cdot \frac{1}{T}$.
Omdat $r \propto r$ en $\frac{1}{T} \propto \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}$ (derde wet van Kepler) levert de stelling $r \cdot \frac{1}{T} \propto r \cdot \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}$

Gevolg $$v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Een diagram waarin de omloopsnelheid *v* van de verschillende planeten wordt uitgezet tegen $1/\sqrt{r}$ levert een mooie bevestiging van de derde wet van Kepler.

Een inconsistentie?

Volgens de eerste stelling die hier bewezen is geldt

$$A \propto B \quad \text{en} \quad A \propto D \quad \Rightarrow \quad A \propto B \cdot D$$

Volgens de laatste stelling geldt

$$A \propto B \quad \text{en} \quad A \propto D \quad \Rightarrow \quad A^2 \propto B \cdot D$$

Het verschil zit in de <u>meetomstandigheden</u>.

Bij de eerste stelling geldt $A \propto B$ onder de onveranderde meetomstandigheid $D, G_1, \ldots, G_k$ en $A \propto D$ onder de onveranderde meetomstandigheid $B, G_1, \ldots, G_k$.

De evenredigheden $A \propto B$ en $A \propto D$ zijn dus <u>niet</u> onder dezelfde meetomstandigheid bij de eerste stelling.

Bij de laatste stelling geldt $A \propto B$ onder de onveranderde meetomstandigheid $G_1, \ldots, G_n$ en $A \propto D$ onder de onveranderde meetomstandigheid $G_1, \ldots, G_n$.

De evenredigheden $A \propto B$ en $A \propto D$ zijn nu dus <u>wel</u> onder dezelfde meetomstandigheid bij de laatste stelling.

Bij het laatste natuurkundige voorbeeld van de cirkelbanen rond de zon is stilzwijgend gebruik gemaakt van de volgende stelling:

Stelling

Evenredigheid onder overigens gelijkblijvende omstandigheden is een *equivalentierelati*e.

Dit betekent dat voor de grootheden *A*, *B* en *C* geldt, onder allerhande verschillende constante meetomstandigheden $G_1, \ldots, G_n$:

$$A \propto A$$
$$A \propto B \quad \Rightarrow \quad B \propto A$$
$$A \propto B \quad \text{en} \quad B \propto C \quad \Rightarrow \quad A \propto C$$

Bewijs

<u>Het geval</u> $\quad A \propto A$

Dit betekent dat moet gelden $\dfrac{A}{A} = c(G_1, \ldots, G_n)$. Voor de functie $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wordt uiteraard gekozen $c(G_1, \ldots, G_n) = 1$.

<u>Het geval</u> $\quad A \propto B \quad \Rightarrow \quad B \propto A$

Stel $A \propto B$. Dan geldt $\dfrac{A}{B} = m(G_1, \ldots, G_n)$ met $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Gevolg $\dfrac{B}{A} = n(G_1, \ldots, G_n)$ waarbij voor $n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ geldt $n(G_1, \ldots, G_n) = \dfrac{1}{m(G_1, \ldots, G_n)}$. En dus $B \propto A$.

<u>Het geval</u> $\quad A \propto B \quad \text{en} \quad B \propto C \quad \Rightarrow \quad A \propto C$

Stel $A \propto B$, dus $\dfrac{A}{B} = m(G_1, \ldots, G_n)$ met $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Stel $B \propto C$, dus $\dfrac{B}{C} = n(G_1, \ldots, G_n)$ met $n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Vanwege $\dfrac{A}{C} = \dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{B}{C}$ volgt hieruit $\dfrac{A}{C} = k(G_1, \ldots, G_n)$ waarbij voor $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ geldt $k(G_1, \ldots, G_n) = m(G_1, \ldots, G_n) \cdot n(G_1, \ldots, G_n)$. Dus dan geldt $A \propto C$.

Q.E.D.

Natuurkundig voorbeeld: <u>Afleiding van de gravitatiewet van Newton</u>

Laat M de massa van de zon zijn en m de massa van een planeet die onder de invloed van de gravitatiekracht $F_{M\to m}$ van de zon op de planeet rond gaat in een cirkel met straal r en omloopstijd T. Voor de centripetale versnelling geldt $a_{cp} = r\cdot(\frac{2\pi}{T})^2$ en in combinatie met de tweede wet van Newton $F_{M\to m} = m\cdot a_{cp}$ levert dit

$$F_{M\to m} = m\cdot r\cdot(\frac{2\pi}{T})^2$$

In combinatie met de derde wet van Newton en de derde wet van Kepler levert deze relatie de gravitatiewet van Newton.

Volgens de derde wet van Kepler ligt de omloopstijd T vast als de afstand r tot de zon vast ligt, ongeacht de massa m van de planeet. Dit betekent dat uit de relatie volgt

$$F_{M\to m} \propto m \qquad (1)$$

Omgekeerd zal voor de kracht $F_{m\to M}$ van de planeet op de zon gelden $F_{m\to M} \propto M$. Wegens $\text{actie} = -\text{reactie}$ (derde wet van Newton) geldt $F_{m\to M} = F_{M\to m}$. Dus geldt ook

$$F_{M\to m} \propto M \qquad (2)$$

Bij vaste M en m levert de relatie

$$F_{M\to m} \propto r\cdot\frac{1}{T^2}$$

Uit $r \propto r$ en $\frac{1}{T^2} \propto \frac{1}{r^3}$ (derde wet van Kepler) volgt

$$r\cdot\frac{1}{T^2} \propto r\cdot\frac{1}{r^3}$$

Omdat de evenredigheid onder vaste M en m een equivalentierelatie is betekent dit

$$F_{M\to m} \propto \frac{1}{r^2} \qquad (3)$$

Samen met de eerste stelling leveren (1), (2) en (3)

$$F_{M\to m} \propto \frac{m\cdot M}{r^2}$$

Of

$$F_{M\to m} = G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}$$

Dit is de gravitatiewet van Newton. De constante G heet de universele gravitatieconstante.