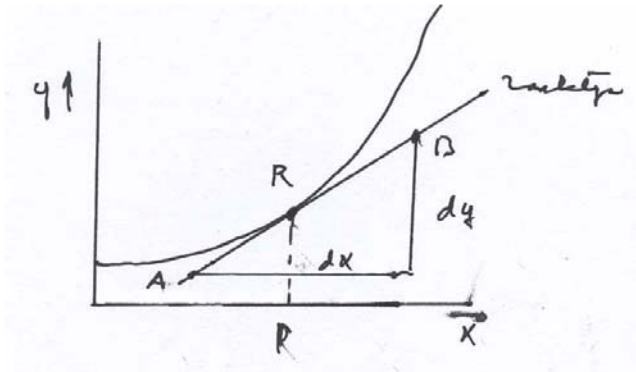
Bijlage 17

Over de introductie van de afgeleide

Auteur: Ton Hengeveld (2006)

Start in klas 4 met de grafiek van $y = f(x)$



1) Neem als primitief begrip het begrip raaklijn (een lijn die tegen de kromme aan ligt).

Veranderingen volgens de raaklijn, notatie d.., heten *differentialen*

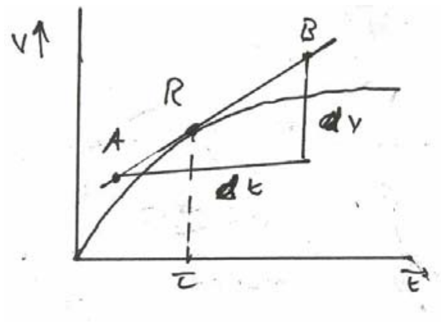
$$dy = y_B - y_A$$
$$dx = x_B - x_A$$

Differentiaalquotiënt in $x = p$: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_p$

Dit is de steilheid van de raaklijn in $x = p$ .Het differentiaalquotiënt geeft de *graad van verandering* van de grafiek in $x = p$. (Liever niet”snelheid van verandering.)

Natuurkundig voorbeeld

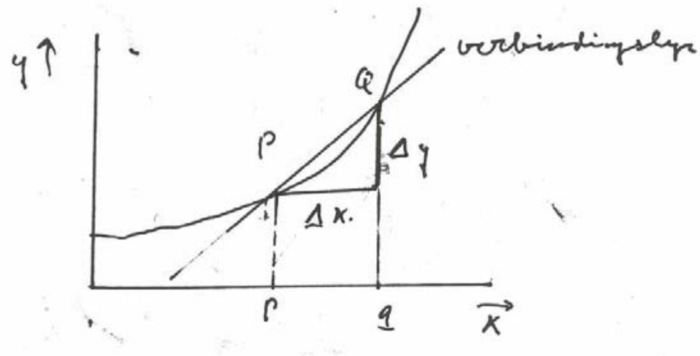
$$a(\tau) = \left.\frac{dv}{dt}\right|_\tau = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A}$$



Opmerking
Bij natuurkundigen bestaat verzet tegen het begrip differentiaal als eindige grootheid. Zij willen d*v* en d*t* zien als “oneindig klein” (infinitésimaal).
Echter in mijn ervaring hebben leerlingen geen enkel probleem met de eindige differentiaal

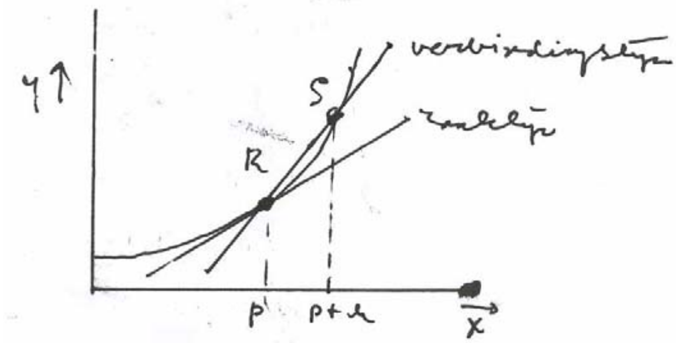
2) Veranderingen op de grafiek, notatie $\Delta..$, heten *differenties*

$$\Delta y = f(q) - f(p)$$
$$\Delta x = q - p$$



Het *differentiequotiënt* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(q) - f(p)}{q - p}$ is de steilheid van de verbindingslijn. Het differentiequotiënt geeft de *gemiddelde graad van verandering* van de grafiek van $x = p$ naar $x = q$

3) Na enige oefening met $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_p$ en $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ in grafieken



Als $h \to 0$ dan $S \to R$ over de grafiek.

Notatie $S \underset{h\to o}{\to} R$

Dus verbindingslijn $\underset{h\to o}{\to}$ raaklijn

Dus $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \underset{h\to o}{\to} \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_p$

Dus $\dfrac{f(p+h)-f(p)}{h} \underset{h\to o}{\to} \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_p$

4) Het quotiënt $\dfrac{f(p+h)-f(p)}{h}$ kan worden omgeschreven tot

$$\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \underbrace{f'(p)}_{\text{uitdrukking zonder } h} + \underbrace{\varepsilon(h)}_{\text{uitdrukking met } h}$$

Voorbeelden:

Als $f(x)=3x^2$: $\dfrac{f(p+h)-f(p)}{h}=9p^2+\varepsilon(h)$ met $\varepsilon(h)=9ph+3h^2$

Als $f(x)=\dfrac{1}{x}$: $\dfrac{f(p+h)-f(p)}{h}=-\dfrac{1}{p^2}+\varepsilon(h)$ met $\varepsilon(h)=\dfrac{h}{(p+h)p^2}$

Als geldt $\varepsilon(h) \underset{h\to o}{\to} 0$ dan heet $f'(p)$ de *afgeleide* van $f(x)$ in $x=p$

5) Uit 3) en 4) volgt

$$f'(p)+\varepsilon(h) \underset{h\to o}{\to} \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_p$$

Conclusie $f'(p)=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_p$

6) Merk op dat de limietnotatie $f'(p)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(p+h)-f(p)}{h}$ hier is vermeden

In mijn ogen compliceert deze notatie onnodig de introductie van het begrip van afgeleide

De hier gehanteerde definitie voor afgeleide is verwant met de definitie van Fréchet-afgeleide in Banach-ruimtes

Voor de Euler-benadering bij dynamische systemen is nuttig

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\varepsilon(h)h$$