Bijlage 10

Evenredigheden bij grootheden en bij gelijkvormigheid

Auteur: Ton Hengeveld (2006)

Over een eerste kennismaking met Evenredigheid

0) Inleiding

In het hierna volgende wordt gepoogd om aan de hand van voorbeelden te laten zien dat evenredigheid bij grootheden voor leerlingen anders is als evenredigheid bij gelijkvormigheid.

1) Evenredigheid bij grootheden: Notatie $B \propto A$

A	B	$\frac{B}{A}$
a_1	b_1	$\frac{b_1}{a_1} = c$
a_2	b_2	$\frac{b_2}{a_2} = c$
a_3	b_3	$\frac{b_3}{a_3} = c$
a_4	b_4	$\frac{b_4}{a_4} = c$
meetdeel		rekendeel

De meting van de grootheden *A* en *B* geeft een reeks bij elkaar behorende waarden.

Omdat de verhouding $\frac{B}{A}$ van de grootheden *A* en *B* constant is heten de grootheden evenredig. In $\frac{B}{A} = c$ heet *c* de *evenredigheidsconstante.*

In de grafiek waarin *B* tegen *A* is uitgezet ontstaat een rechte lijn door de oorsprong. Een dergelijke grafiek heet een *evenredigheidsgrafiek*, met formule $B = c \cdot A$. De helling van de grafiek is de evenredigheidsconstante.

Elementair voorbeeld: $\rho = \frac{m}{V}$

2) Evenredigheid bij gelijkvormige veelhoeken: Notatie $B \cong A$

A is een veelhoek met hoekpunten $P_1, \ldots, P_n$, waarbij voor de zijden wordt genoteerd:
$P_1P_2 = a_1$, $P_2P_3 = a_2$, …. , $P_{n-1}P_n = a_{n-1}$, $P_nP_1 = a_n$
B is een veelhoek met hoekpunten $Q_1, \ldots, Q_n$, waarbij voor de zijden wordt genoteerd:
$Q_1Q_2 = b_1$, $Q_2Q_3 = b_2$, …. , $Q_{n-1}Q_n = b_{n-1}$, $Q_nQ_1 = b_n$

B is gelijkvormig met *A*. Dit levert de verhoudingstabel of *evenredigheidstabel*

B	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_n
A	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_n

De *vergrotingsfactor* van *A* naar *B* is de constante verhouding $k_{A\to B} = \frac{b_1}{a_1} = \cdots = \frac{b_n}{a_n}$. De zijden van de veelhoek *B* heten evenredig met de overeenkomstige zijden van de veelhoek *A*.

Voor de *onderlinge verhouding* van de zijden van *A* vergeleken met de onderlinge verhouding van de overeenkomstige zijden van *B* geldt $\frac{b_j}{b_k} = \frac{a_j}{a_k}$ met $j = 1, \ldots, n$ en $k = 1, \ldots, n$.
"Ouderwetse" notatie voor de evenredigheid bij de onderlinge verhouding
$b_1 : \ldots : b_n = a_1 : \ldots : a_n$

3) Evenredigheid bij gelijkvormige driehoeken: Notatie $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

Voor de zijden van ΔABC geldt $AB = c$, $BC = a$ en $CA = b$
Voor de zijden van ΔPQR geldt $PQ = r$, $QR = p$ en $RP = q$

Gelijkvormigheid levert nu de verhoudingstabel

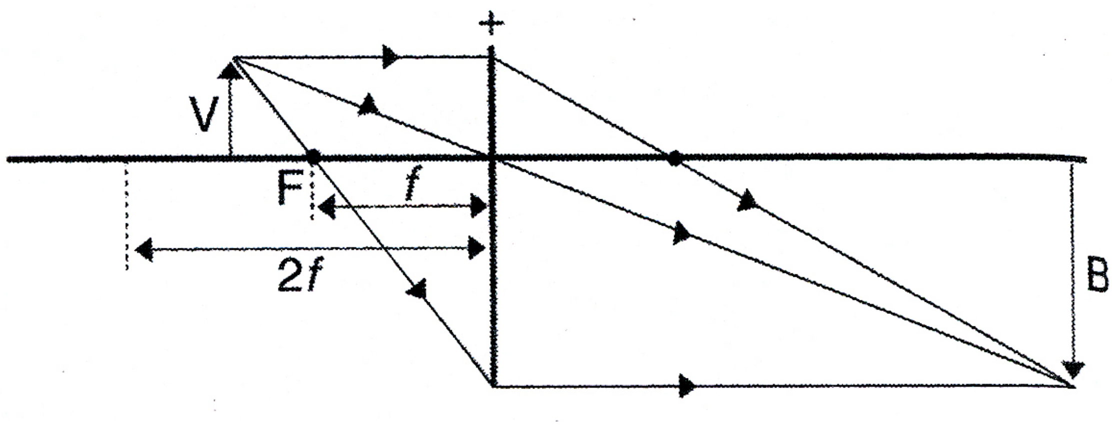
ΔPQR	p	q	r
ΔABC	a	b	c

Vergrotingsfactor van ΔABC naar ΔPQR : $k = \frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c}$

Voor de *onderlinge verhouding* van de zijden van ΔABC vergeleken met de onderlinge verhouding van de overeenkomstige zijden van ΔPQR geldt: $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$, $\frac{p}{r} = \frac{a}{c}$ en $\frac{q}{r} = \frac{b}{c}$.
"Ouderwetse" notatie voor de evenredigheid bij de onderlinge verhouding: $p : q : r = a : b : c$

4) Vergroting bij lenzen

Figuur uit *Samengevat Natuurkunde*:



V = voorwerpgrootte en B = beeldgrootte.
v = afstand voorwerp lens, *b* = afstand beeld lens, *f* = afstand brandpunt F tot lens.

Bij voorwerp en beeld <u>evenwijdig</u> aan de lens geldt: $\text{beeld} \cong \text{voorwerp}$,

met (lineaire) *vergroting*: $N = \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{V}}$.

De gelijkvormige driehoeken gevormd door met de constructiestraal door het midden van de lens en de hoofdas leveren $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{V}} = \dfrac{b}{v}$, dus algemeen gesteld $N = \left|\dfrac{b}{v}\right|$.

Opmerkingen

1) Hoewel dat niet gebruikelijk is in de lessen, valt de lenzenformule voor dunne lenzen ook uit gelijkvormige driehoeken af te leiden.
Neem de driehoeken rechts van de lens gevormd door de constructiestraal door het rechter brandpunt en de hoofdas. Uit gelijkvormigheid volgt:

$$\frac{b-f}{f} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{V}}$$

In combinatie met de formule voor de vergroting levert dit:

$$\frac{b-f}{f} = \frac{b}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{f} - 1 = \frac{b}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} - \frac{1}{b} = \frac{1}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b}$$

2) Voor een ideale dunne lens geldt dat bij elk voorwerpspunt een scherp beeldpunt hoort. In de figuur vertaalt zich dit door de eis dat als de drie constructiestralen vanuit één voorwerpspunt naar de lens toegaan ook geldt dat de bijbehorende uittredende stralen door één punt gaan.
Met behulp van de afleiding van de lenzenformule valt in te zien dat de brandpuntsafstanden links en rechts van de lens gelijk moeten zijn.
Immers

Via de constructiestraal door het midden $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{V}} = \left|\dfrac{b}{v}\right|$

Via de constructiestraal door het rechter brandpunt: $\dfrac{1}{f_r} = \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{b}$

Via de constructiestraal door het linker brandpunt: $\dfrac{1}{f_l} = \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{b}$

Gevolg: $\dfrac{1}{f_l} = \dfrac{1}{f_r} \quad \Rightarrow \quad f_r = f_l$

3) Bij projecties speelt de lineaire vergroting een centrale rol, bij optische instrumenten als loep, kijker en microscoop de zogenoemde hoekvergroting.

5) Een korte discussie

a) Om de evenredigheid bij grootheden uit **1)** te vergelijken met evenredigheid bij gelijkvormigheid gaan we uit van de veelhoeken bij **2)** in plaats van de driehoeken bij **3)**. De vergelijking van evenredigheid bij grootheden met evenredigheid bij gelijkvormigheid wordt aldus doorzichtiger .
Uit deze vergelijking blijkt

- Wat de evenredigheidsconstante is bij grootheden is de vergrotingsfactor bij gelijkvormigheid

- In eerste instantie blijft de evenredigheid van de onderlinge verhoudingen bij gelijkvormigheid buiten beschouwing in de overeenkomstige evenredigheid bij grootheden.
- De tabel bij grootheden, die op de natuurkunde is georiënteerd werkt van boven naar beneden en de conclusie van evenredigheid wordt naar rechts afgelezen.
  De overeenkomstige verhoudingstabel voor veelhoeken werkt van links naar rechts voor de evenredigheid van de onderlinge verhoudingen en van boven naar onder voor de vergrotingsfactor.
  Dus wat in een groothedentabel van boven naar onder gebeurt, gebeurt in de overeenkomstige tabel bij gelijkvormigheid van links naar rechts.

b) Een belangrijk verschil tussen de evenredigheidsconstante bij grootheden en de vergrotingsfactor bij gelijkvormigheid is dat de eerste een eenheid heeft en de laatste niet. De waarde van de evenredigheidsconstante kan veranderen bij verandering van eenheden. Dit geldt niet voor de vergrotingsfactor. De evenredigheidsconstante kan niet in % worden uitgedrukt, de vergrotingsfactor en de onderlinge verhouding wel.

c) Bij evenredige grootheden is een evenredigheidsgrafiek zinvol, bij gelijkvormigheid wordt zo'n grafiek nooit gebruikt.

d) Er valt een vergelijking te trekken met de behandeling van % in de lagere klassen en de behandeling van evenredigheid. Bij procenten zijn er drie van elkaar te onderscheiden situaties: groeifactor (procentuele vergroting), groeivoet (procentuele toename) en fractie (procentuele verhouding t.o.v. een geheel).
Ook bij evenredigheden zijn er drie situaties: evenredigheidsconstante (bij grootheden), vergrotingsfactor (bij gelijkvormigheid) en onderlinge verhouding (bij gelijkvormigheid en mogelijk, gebruikelijk bij grootheden).

e) De vraag is of leerlingen er baat bij hebben er op gewezen te worden dat evenredigheid zich in verschillende vormen voordoet. Mijn ervaring met het overeenkomstige geval van procenten leert dat het daar wel verhelderend werkt.

f) Mijn aanbeveling is om de *deelstreepnotatie* voor bij de evenredigheidsconstante te gebruiken en bij de vergrotingsfactor en de "ouderwetse" *dubbele punt notatie* bij de evenredigheid van de onderlinge verhouding. Verder is bij evenredigheid van grootheden het gebruik van het symbool $\propto$ in de wiskunde aan te bevelen, omdat het in de natuurkunde gebruikelijk is.

g) Bij de natuurkunde komen lenzen aan de orde. De nadruk ligt daar echter op het oog en op optische instrumenten. Er vallen echter ook veel wiskundige vragen te stellen. De beschouwing over de lenzenformule is daarvan een voorbeeld. Ook interessant is de vraag: Wat betekent het wiskundig dat een beeld zich vertekent bij scheve projectie? Wanneer zijn de onderlinge verhoudingen wel gehandhaafd en wanneer niet?
Misschien liggen hier mogelijkheden voor een kort samenwerkingsverband tussen wiskunde- en natuurkunde-collega's

Aanhangsel: Over tripel-evenredigheden (reactie op Kees Rijke)

Een suggestie voor de notatie van dat een grootheid *A* tripel-evenredig is met de grootheden *G* en *H*:

$$A \underset{H}{\propto} G \qquad \text{en} \qquad A \underset{G}{\propto} H$$

De *stelling* die bewezen moet worden luidt dan:

$$A \underset{H}{\propto} G \quad \text{en} \quad A \underset{G}{\propto} H \quad \Rightarrow \quad A \propto G \cdot H$$

Er zijn mij drie enigszins verschillende bewijzen bekend.

Bewijs met behulp van *onderlinge verhouding*:

Stel A, G en H hebben eerst de resp. waarden a_1, g_1 en h_1 en later de resp. waarden a_2, g_2 en h_2. We gebruiken een tussensituatie a_*, g_1 en h_2. Dus

$$a_1, g_1, h_1 \quad \to \quad a_*, g_1, h_2 \quad \to \quad a_2, g_2, h_2$$

Wegens $A \underset{G}{\propto} H$: $\quad a_1 : a_* = h_1 : h_2$

Wegens $A \underset{H}{\propto} G$: $\quad a_* : a_2 = g_1 : g_2$

Gevolg

$$(a_1 : a_*) \cdot (a_* : a_2) = (g_1 : g_2) \cdot (h_1 : h_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 : a_2 = (g_1 \cdot h_1) : (g_2 \cdot h_2)$$

Dus $\quad A \propto G \cdot H$

Q.E.D.

Bewijs vanuit de *betekenis* van de *evenredigheidsconstante*

Stel A, G en H hebben eerst de waarden a_1, g_1 en h_1 en later de waarden a_2, g_2 en h_2
We gebruiken een tussensituatie a_*, g_1 en h_2. Dus

$$a_1, g_1, h_1 \quad \to \quad a_*, g_1, h_2 \quad \to \quad a_2, g_2, h_2$$

Wegens $A \underset{G}{\propto} H$: $\quad \dfrac{a_1}{h_1} = \dfrac{a_*}{h_2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a_1}{g_1 \cdot h_1} = \dfrac{a_*}{g_1 \cdot h_2}$

Wegens $A \underset{H}{\propto} G$: $\quad \dfrac{a_*}{g_1} = \dfrac{a_2}{g_2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a_*}{g_1 \cdot h_2} = \dfrac{a_2}{g_2 \cdot h_2}$

Gevolg: $\quad \dfrac{a_1}{g_1 \cdot h_1} = \dfrac{a_2}{g_2 \cdot h_2} \quad$ en dus $\quad A \propto G \cdot H$

Q.E.D.

Bewijs direct met de *evenredigheidsfactor*

Wegens $A \underset{G}{\propto} H$: $\quad \dfrac{A}{H} = c(G) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{A}{G \cdot H} = \dfrac{c(G)}{G}$

Wegens $A \underset{H}{\propto} G$: $\quad \dfrac{A}{G} = k(H) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{A}{G \cdot H} = \dfrac{k(H)}{H}$

Gevolg $\quad \dfrac{c(G)}{G} = \dfrac{k(H)}{H} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{c(G)}{G} = C$ en $\dfrac{k(H)}{H} = C$

Resultaat $\quad \dfrac{A}{G \cdot H} = C \quad$ en dus $\quad A \propto G \cdot H$

Q.E.D.

Opmerking:

In essentie is het eerste bewijs het bewijs van Kees. Mijn didactisch bezwaar daartegen is dat het uitgaat van onderlinge verhoudingen die juist niet op de voorgrond staan bij evenredigheid van grootheden. De beide andere bewijzen gaan direct uit van de evenredigheidsconstante die in de definitie van evenredige grootheden voorkomt.