Bijlage 14

Natuurkundig verlanglijstje voor vectoren bij de wiskunde.

Auteur: Ton Hengeveld (2006)

(Graag behandeld: uiterlijk eerste helft klas 5)

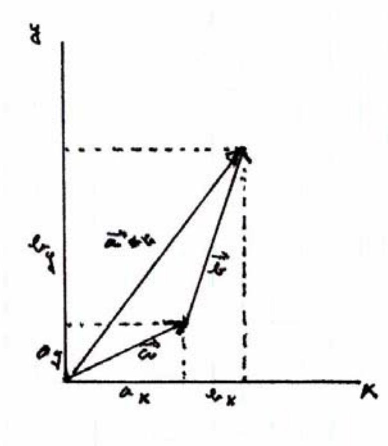
Het begrip vector

Een vector $\vec{a}$ is een *kolom* getallen: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ met als *optelregel*:

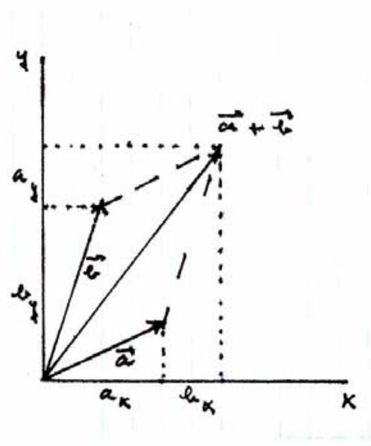
$$p\vec{a} + q\vec{b} = p\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa_x + qb_x \\ pa_y + qb_y \end{pmatrix}$$

Meetkundige betekenis optelling $\vec{a} + \vec{b}$ in een orthonormaal assenstelsel:

Kop-staart

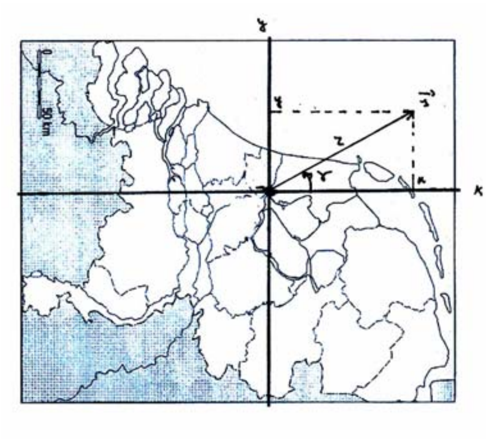


Parallellogram



Lengte of *euclidische norm* $|\vec{a}|$ van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$: $\quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Vectoren en goniometrie



In driehoeken: *”soscastoa”*

Twee manieren om positie laag vliegend vliegtuig t.o.v. Schiphol vast te leggen:

1 Afstand naar noorden en naar westen

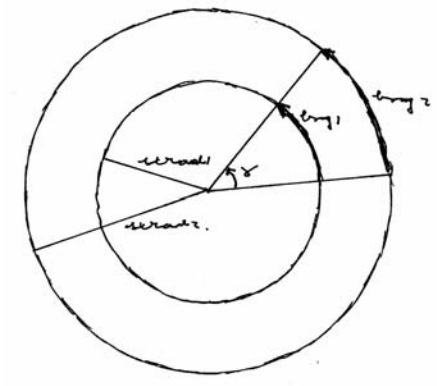
$$\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2 Radarafstand *r* en *draaihoek* γ (kompashoek)

Verband tussen beide manieren

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\gamma$$
$$y = r\sin\gamma$$

Bij dezelfde middelpuntshoek is de verhouding van boog en straal niet afhankelijk van de grootte van de cirkel. Deze verhouding levert een goede maat voor de hoek: de *radiaal.*



$$\text{radiaal} = \frac{\text{boog}}{\text{straal}}$$

Gevolg: boog = straal · hoek (in radialen)

In letters: $s = r \cdot \gamma$

Gonioformules als bijv.:

$$\left.\begin{aligned} \sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) &= \cos\alpha \\ \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) &= \sin\alpha \end{aligned}\right\} \text{ ook via rechthoekige driehoeken}$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Voor een aardige afleiding: zie de appendix.

Inwendig product

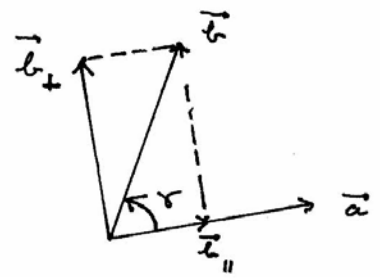
Definitie: Als $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ dan is het inwendig product van deze vectoren het getal $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$

Merk op $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

Eigenschap: Als α de draaihoek is van $\vec{a}$ en β de raaihoek is van $\vec{b}$ en $\gamma = \beta - \alpha$ dan

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}|\cos\alpha \cdot |\vec{b}|\cos(\alpha + \gamma) + |\vec{a}|\sin\alpha \cdot |\vec{b}|\sin(\alpha + \gamma) = \\ &= |\vec{a}||\vec{b}|(\cos\alpha(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma) + \sin\alpha(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma)) \\ &= |\vec{a}||\vec{b}|(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\cos\gamma \\ &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma \end{aligned}$$

Meetkundige betekenis: Als $\vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}$ dan



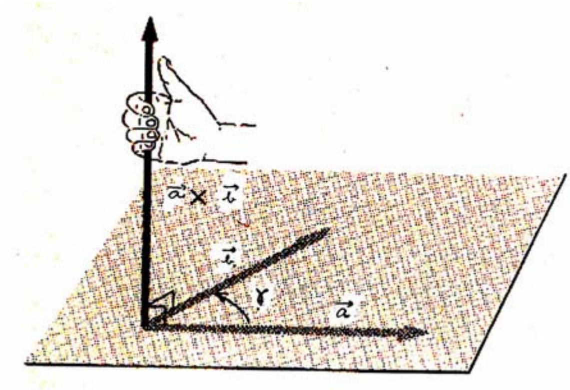
$$b_{\parallel} = \left|\vec{b}\right| \cos \gamma \qquad \text{en}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| b_{\parallel}$$

Vanwege de *arbeid* is het inwendig product in de natuurkunde belangrijk. Wiskundig zijn er veel meetkundige toepassingen

Uitwendig product

Het uitwendig product is natuurkundig van belang in verband met de Lorentz-kracht van een magnetisch veld op een bewegend geladen deeltje. Verdere natuurkundige toepassingen zijn bij de draaiimpuls en het moment van een kracht.
Ook voor ruimtemeetkunde is dit product zinvol.



Aan twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ wordt een nieuwe vector $\vec{a} \times \vec{b}$ toegevoegd loodrecht op de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, waarvan de grootte gelijk is aan het oppervlak van het parallellogram opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$. De rechterhandregel bij draaiing over de kleinste hoek van $\vec{a}$ naar $\vec{b}$ bepaalt de richting.

Voor de grootte van $\vec{a} \times \vec{b}$ geldt

$$\begin{aligned} \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| &= \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \left|\sin \gamma\right| \\ &= \left|\vec{a}\right| \left|b_{\perp}\right| \qquad \text{met} \\ b_{\perp} &= \left|\vec{b}\right| \sin \gamma \end{aligned}$$

De rechterhandregel als getoond in de figuur geldt overigens alleen in een rechtshandig assenstelsel (x, y, z).

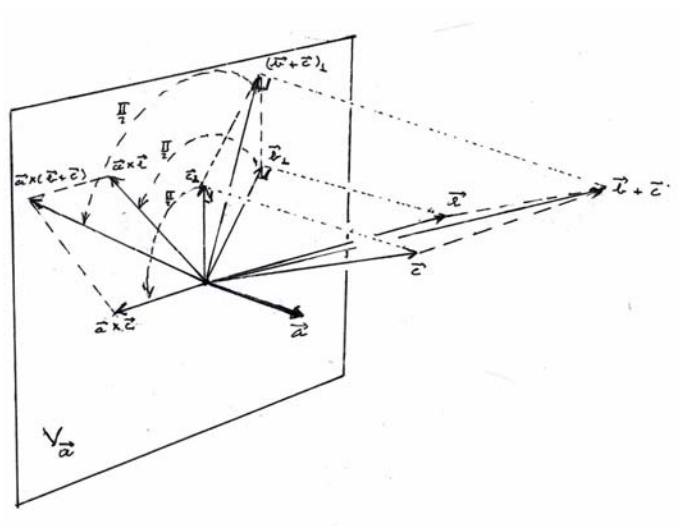
Formule voor het uitwendig product:

$$\text{Als} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Om deze formule te bewijzen wordt eerst bewezen:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Bewijs:
Laat $V_{\vec{a}}$ een vlak loodrecht $\vec{a}$ zijn. Loodrechte projectie van $\vec{b}$, $\vec{c}$ en $\vec{b} + \vec{c}$ in $V_{\vec{a}}$ leveren de resp. vectoren $\vec{b}_{\perp}$, $\vec{c}_{\perp}$ en $(\vec{b} + \vec{c})_{\perp}$ op die loodrecht op $\vec{a}$ staan.
Bij zo'n projectie gaan evenwijdige lijnen over in evenwijdige lijnen, dus gaat een parallellogram over in een parallellogram. Gevolg:



$$(\vec{b}+\vec{c})_\perp = \vec{b}_\perp + \vec{c}_\perp$$

en ook $\qquad |\vec{a}|(\vec{b}+\vec{c})_\perp = |\vec{a}|\vec{b}_\perp + |\vec{a}|\vec{c}_\perp$

Door rotatie in het vlak $V_{\vec{a}}$ over een hoek $\pi/2$ gaat de vector $|\vec{a}|(\vec{b}+\vec{c})_\perp$ over in $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$, de vector $|\vec{a}|\vec{b}_\perp$ gaat over in $\vec{a}\times\vec{b}$ en de vector $|\vec{a}|\vec{c}_\perp$ gaat over in $\vec{a}\times\vec{c}$. Door deze rotatie gaat de laatste formule daarom over in:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$$

Bewijs van de formule:

Laat $\vec{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ en $\vec{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Er geldt $\vec{e}_x\times\vec{e}_x = \vec{0}$, $\vec{e}_x\times\vec{e}_y = \vec{e}_z$, enz.

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z)\times(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z) = \\ &= a_xb_x\vec{e}_x\times\vec{e}_x + a_xb_y\vec{e}_x\times\vec{e}_y + a_xb_z\vec{e}_x\times\vec{e}_z + a_yb_x\vec{e}_y\times\vec{e}_x + a_yb_y\vec{e}_y\times\vec{e}_y + a_yb_z\vec{e}_y\times\vec{e}_z + \\ &\quad a_zb_x\vec{e}_z\times\vec{e}_x + a_zb_y\vec{e}_z\times\vec{e}_y + a_zb_z\vec{e}_z\times\vec{e}_z \\ &= a_xb_x\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + a_xb_y\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + a_xb_z\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + a_yb_x\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + a_yb_y\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + a_yb_z\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_zb_x\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a_zb_y\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + a_zb_z\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dit levert de gewenste formule:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}a_yb_z - a_zb_y\\ a_zb_x - a_xb_z\\ a_xb_y - a_yb_x\end{pmatrix}$$

Snelheid en versnelling bij bewegingen in een vlak (parameterkrommen)

<u>Algemeen</u>:

Positie op tijdstip *t*

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$$

Snelheid op tijdstip *t*

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{s}(t)}{\mathrm{d}t}$$

dus $\qquad \begin{pmatrix}v_x(t)\\v_y(t)\end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} \qquad$ dus $\qquad v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ en $v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$

Versnelling op tijdstip *t*

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}$$

dus $\qquad \begin{pmatrix}a_x(t)\\a_y(t)\end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}v_x(t)\\v_y(t)\end{pmatrix} \qquad$ dus $\qquad a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}$ en $a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}$

Eenparige beweging

$$\vec{a}(t) = \vec{0}$$
$$\vec{v}(t) = \vec{v}$$
$$\vec{s}(t) = \vec{v} \cdot t + \vec{s}(0)$$

Eenparig versnelde beweging

$$\vec{a}(t) = \vec{a}$$
$$\vec{v}(t) = \vec{a} \cdot t + \vec{v}(0)$$
$$\vec{s}(t) = \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2 + \vec{v}(0) \cdot t + \vec{s}(0)$$

Eenparige cirkelbeweging

$$\vec{s}(t) = r\begin{pmatrix} \cos\omega(t-t_o) \\ \sin\omega(t-t_o) \end{pmatrix}$$

$\gamma(t) = \omega(t - t_o)$ is de fasehoek, $p(t) = \dfrac{\gamma(t)}{2\pi} = \dfrac{\omega(t-t_o)}{2\pi}$ is de fase.

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{s}(t)}{\mathrm{d}t} = r\omega\begin{pmatrix} -\sin\omega(t-t_o) \\ \cos\omega(t-t_o) \end{pmatrix} \quad \text{dus} \quad |\vec{v}(t)| = r|\omega|$$

Omdat $\vec{s}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$ geldt $\vec{v}(t) \perp \vec{s}(t)$.

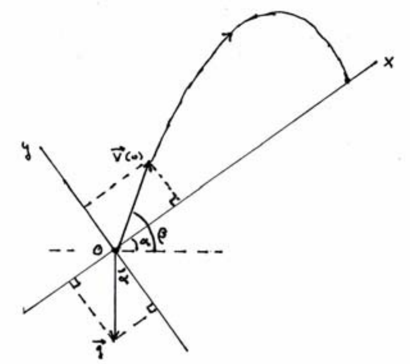
$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2\begin{pmatrix} \cos\omega(t-t_o) \\ \sin\omega(t-t_o) \end{pmatrix} \quad \text{dus} \quad \vec{a}(t) = -\omega^2\vec{s}(t)$$

Dit laatste levert de formule voor de centripetale versnelling $|\vec{a}(t)| = r \cdot \omega^2$.

Voorbeelden van mogelijk gebruik van vectoren in de mechanica

Tot zover de wensen voor de wiskunde vanuit de natuurkunde. In het volgende worden voorbeelden geven van een eventueel gebruik van vectoren in de natuurkundelessen van klas 5 en klas 6 .

Schootsafstand bij een schuine helling



Een kanon schiet een kogel af met een snelheid $v(0) = 120$ ms^{-1} onder een elevatiehoek $\beta = 59^0$ ten opzichte van het aarde oppervlak aan het begin van een helling met hellinghoek $\alpha = 26^0$

Gevraagd: De schootsafstand en de grootste afstand tot de helling

Oplossing

Kies een assenstelsel (x ,y) met de oorsprong in het kanon en de *x*-as langs de helling.

Ten opzichte van dit assenstelsel geldt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -g\sin\alpha \\ -g\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9{,}81\sin 26^0 \\ -9{,}81\cos 26^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}30\ \mathrm{ms^{-2}} \\ -8{,}82\ \mathrm{ms^{-2}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v(0)\cos(\beta-\alpha) \\ v(0)\sin(\beta-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120\cos 33^0 \\ 120\sin 33^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101\ \mathrm{ms^{-1}} \\ 65\ \mathrm{ms^{-1}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gevolg $$\vec{v}(t) = \vec{a}\cdot t + \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} -4{,}30t + 101 \\ -8{,}82t + 65 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}\cdot t^2 + \vec{v}(0)\cdot t + \vec{s}(0) = \begin{pmatrix} -2{,}15t^2 + 101t \\ -4{,}41t^2 + 65t \end{pmatrix}$$

Inslag $y(t) = 0 \;\Rightarrow\; -4{,}41t^2 + 65t = 0 \;\Rightarrow\; t = 0\ \mathrm{s}$ of $t = 14{,}7\ \mathrm{s}$

Schootsafstand $x(14{,}7) = 1020\ \mathrm{m}$

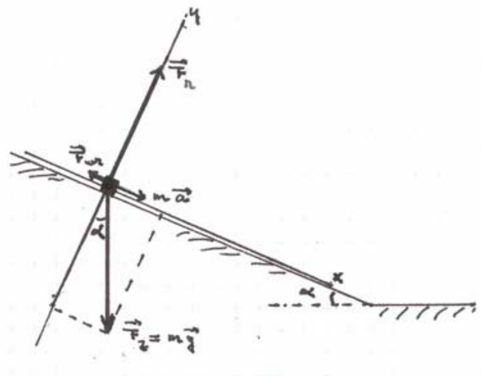
Grootste afstand tot helling: $\vec{v}(t)$ evenwijdig x-as, dus $v_y(t) = 0$

$-8{,}82t + 65 = 0 \;\Rightarrow\; t = 7{,}37\ \mathrm{s}$

$y(7{,}37) = 240\ \mathrm{m}$

Versnelling van een voorwerp dat naar beneden glijdt langs een helling

Een voorwerp gaat een helling met hellinghoek α af. Op het voorwerp werken de zwaartekracht $\vec{F}_z = m\vec{g}$, de normaalkracht $\vec{F}_n$ en de wrijvingskracht $\vec{F}_{wr}$. Voor de wrijvingskracht geldt $|\vec{F}_{wr}| \le \mu|\vec{F}_n|$, terwijl bij beweging geldt $|\vec{F}_{wr}| = \mu|\vec{F}_n|$



Volgens de tweede wet van Newton

$$m\vec{a} = \vec{F}_z + \vec{F}_n + \vec{F}_{wr}$$

Bij keuze van de *x*-as langs de helling levert dit:

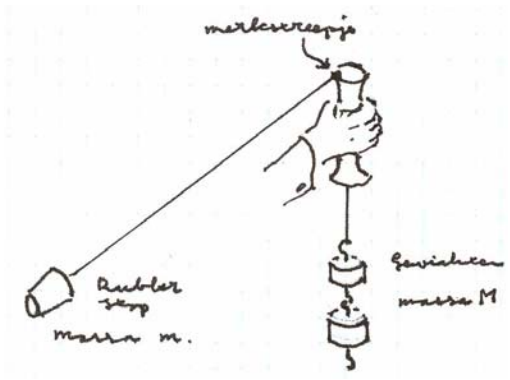
$$m\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu|\vec{F}_n| \\ 0 \end{pmatrix}$$

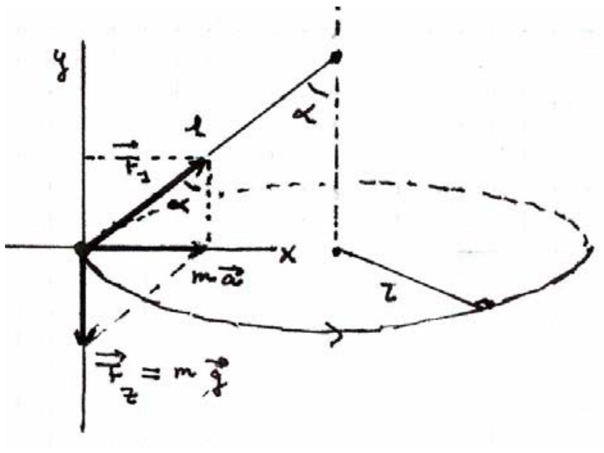
Gevolg: $ma = mg\sin\alpha - \mu|\vec{F}_n|$ en $F_n = mg\cos\alpha$

Resultaat: $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

Proef: Cirkelbeweging

Een rubberen stop wordt volgens een cirkel in een horizontaal vlak rondgezwaaid. Gemeten worden de massa *m* van de stop, de massa *M* van de gewichten, de lengte *l* van het rondraaiende koord en de omlooptijd *T* in de cirkelbaan.





Op de stop werken de zwaartekracht $\vec{F}_z = m\vec{g}$ en de spankracht $\vec{F}_s$ die in grootte gelijk is aan de grootte van de zwaartekracht Mg op de gewichten.
Volgens de tweede wet van Newton geldt

$$m\vec{a} = \vec{F}_z + \vec{F}_s$$

In het gekozen assenstelsel betekent dit

$$m\begin{pmatrix} r\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Mg\sin\alpha \\ Mg\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Gevolg $\qquad mr\omega^2 = Mg\dfrac{r}{l}$

en omdat geldt $\qquad |\omega|T = 2\pi \qquad$ leidt dit tot:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{M}\frac{l}{g}}$$

Andere mogelijkheden om in de natuurkundelessen vectoren te gebruiken

Impulsbehoud bij botsingen van deeltjes: $\vec{p} = m\vec{v}$ is de *impuls* van een deeltje met massa m en snelheid $\vec{v}$.

Transversale golven als vectorverschijnsel. Polarisatie van licht, bijvoorbeeld bij reflectie tegen een wateroppervlak. Polaroidbril.

Het veldbegrip:
Men spreekt van een *veld* als aan elk punt van de ruimte een natuurkundige grootheid is toegevoegd.

Voorbeelden van *scalaire* velden
Drukveld, temperatuurveld, potentiaalveld, het veld van de massadichtheid van lucht.

Voorbeelden van *vector*velden:
Snelheidsveld van een stromende vloeistof, elektrisch veld, magnetisch veld, gravitatieveld

Kracht op een puntdeeltje met lading q in een elektrisch veld met veldsterkte $\vec{E}$ ter plekke

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Lorentz-kracht op een puntdeeltje met lading q met snelheid $\vec{v}$ in een magnetisch veld met veldsterkte $\vec{B}$ ter plekke

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Een elektrisch veld $\vec{E}$ heet *conservatief* als er een scalair potentiaalveld V bestaat zodanig dat

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

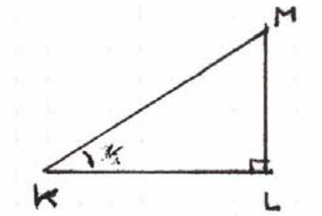
of

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} V$$

De operator $\vec{\nabla}$ heet de *gradiënt*

Appendix: Twee verschillende afleidingen van gonioformules

1) *Het geval* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *en* $\alpha + \beta < 90^0$
(met dank aan collega Jan Klooster)

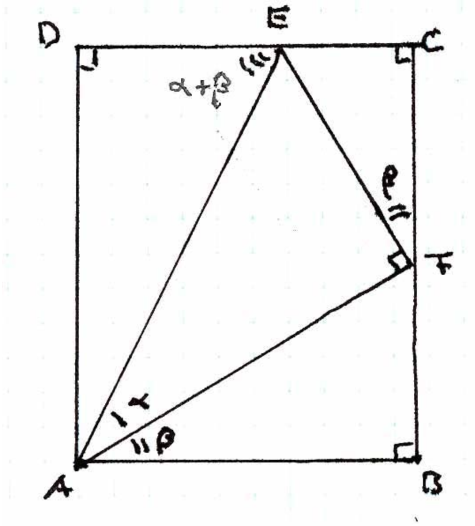


In ΔKLM :

$$\frac{KL}{KM} = \cos\kappa \;\Rightarrow\; KL = KM\cos\kappa$$

$$\frac{LM}{KM} = \sin\kappa \;\Rightarrow\; LM = KM\sin\kappa$$

Dit wordt toegepast in de volgende figuur met $AE = 1$:



In ΔADE :

$$DE = AE\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)$$
$$AD = AF\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$$

In ΔAFE :

$$AF = AE\cos\alpha = \cos\alpha$$
$$FE = AF\sin\alpha = \sin\alpha$$

In ΔABF :

$$AB = AF\cos\beta = \cos\alpha\cos\beta$$
$$BF = AF\sin\beta = \cos\alpha\sin\beta$$

In ΔEFC:

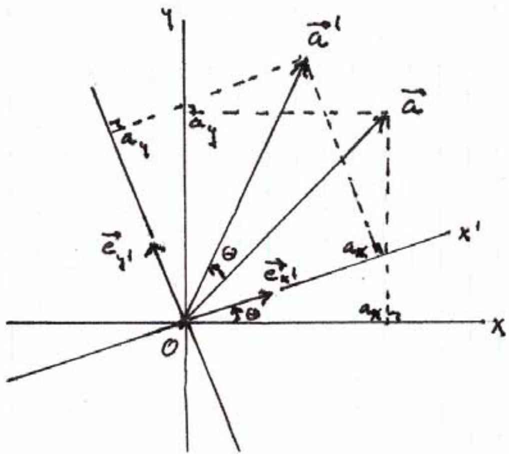
$$FC = AF\cos\beta = \sin\alpha\cos\beta$$
$$EC = EF\sin\beta = \sin\alpha\sin\beta$$

Er geldt $DE = AD - EC$:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Er geldt $AB = BF + FC$:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$



2) *Via actieve rotatie van een vector*

Rotatie van een vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ over een hoek θ levert de vector $\vec{a}\,'$:

$$\vec{a}\,' = a_x \vec{e}_{x'} + a_y \vec{e}_{y'} = a_x \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \cos\theta - a_y \sin\theta \\ a_x \sin\theta + a_y \cos\theta \end{pmatrix}$$

Symbolisch weergegeven

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \xrightarrow[R_\theta]{} \begin{pmatrix} a_x \cos\theta - a_y \sin\theta \\ a_x \sin\theta + a_y \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotatie van de vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ over α en dan over β levert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_\alpha]{} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[R_\beta]{} \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

en
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_{\alpha+\beta}]{\qquad\qquad\qquad} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Gevolg:
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$