**Bijlage 18**

**Raaklijn en oppervlak bij natuurkundige grafieken in klas 4**

**Auteur: Ton Hengeveld** (2006)

---

## Fysisch startpunt

In auto's zijn afstand- en snelheidsmeters geplaatst. Met een tachograaf valt te maken:

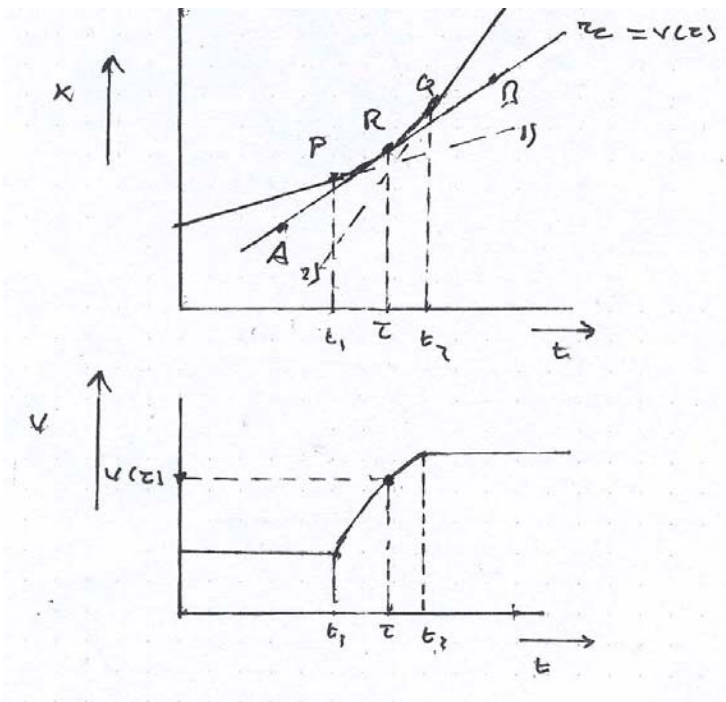
- Een (positie, tijd) diagram ( $(x,t)$ diagram)
- Een (snelheid, tijd) diagram ( $(v,t)$ diagram)

De snelheidsmeter in een auto meet de *momentane* snelheid.
De vroegere methode van de politie met twee draden op de weg levert de *gemiddelde* snelheid.
Positie, momentane snelheid en gemiddelde snelheid zijn dus grootheden eenvoudig uit de meting worden verkregen en die voor leerlingen niet al te veel toelichting vragen.

De *vraag* is:
Hoe staan $(x,t)$ diagram en $(v,t)$ diagram met elkaar in verband?

## Voorbeeld: Een optrekkende auto

Een auto rijdt met constante snelheid, trekt vervolgens op tussen de tijdstippen $t_1$ en $t_2$ om daarna weer met constante snelheid te rijden.
Dit wordt weergeven in de volgende diagrammen:




In de les kan ondermeer aan het volgende aandacht worden besteed:

- Heeft het $(v,t)$ diagram betrekking op de momentane of op de gemiddelde snelheid?

Bij *constante* snelheid (eenparige beweging):
- Er is geen verschil tussen de waarde van de gemiddeld en de momentane snelheid
- De snelheid is de richtingscoëfficiënt van de rechte lijn in het $(x,t)$ diagram

Gedurende het *optrekken*:
- Momentane en gemiddelde snelheid zijn over het algemeen niet hetzelfde in waarde
- In *P* raakt de lijn 1) aan de kromme tussen *P* en *Q*
- Betekenis van 1): weergave van de beweging die er zou zijn geweest na $t_1$ als de wagen niet had opgetrokken en de snelheid dus niet was veranderd
- In *Q* raakt de lijn 2) aan de kromme tussen *P* en *Q*
- Betekenis van 2): weergave van de beweging die er zou zijn voor $t_2$ als de wagen voor $t_2$ niet had opgetrokken en de snelheid dus niet was veranderd

Dit motiveert:
- De *raaklijn* op $t = \tau$, dus in *R*, aan de grafiek in het $(x,t)$ diagram geeft de situatie weer als de snelheid gedurende de gehele beweging de waarde $v(\tau)$ zou hebben gehad, en dus niet was veranderd.
- Daarom is de momentane snelheid $v(\tau)$ op $t = \tau$ de steilheid van deze raaklijn

Hoe bepaal je dus in het $(x,t)$ diagram de momentane snelheid op $t = \tau$?
- Teken de raaklijn aan de grafiek op $t = \tau$
- Lees op deze raaklijn van twee punten *A* en *B* de resp. coördinaten $(t_A, x_A)$ en $(t_B, x_B)$ af
- Bereken de *differentialen* (zie wiskunde!)

$$\mathrm{d}t = t_B - t_A$$
$$\mathrm{d}x = x_B - x_A$$

- De momentane snelheid op $t = \tau$ is dan

$$v(\tau) = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{\tau} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$

Dit differentiaalquotiënt is de steilheid van de raaklijn

**De betekenis bij de natuurkunde van de notatie voor differentialen en differenties**

- Veranderingen volgens de raaklijn zijn differentialen en worden aan gegeven met het symbool $\mathrm{d}\cdots$. De notatie met *differentialen* geeft altijd aan dat er sprake is van een *momentane* grootheid
- Veranderingen volgens de grafiek zijn differenties en worden aan gegeven met het symbool $\Delta\cdots$. De notatie met *differenties* geeft altijd aan dat er sprake is van een *gemiddelde* grootheid

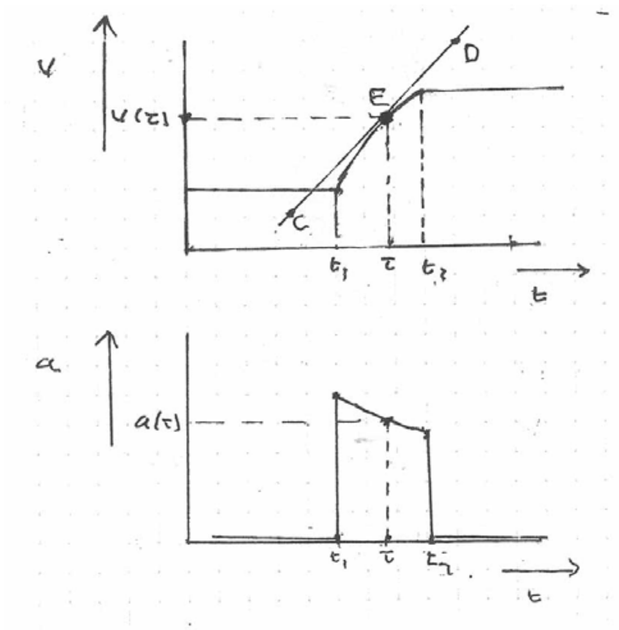
## Over de versnelling

Een veel voorkomende opgave in de natuurkunde is om met behulp van een (snelheid, tijd) diagram een (versnelling, tijd) diagram (een $(a,t)$ diagram) te maken. De versnelling in het $(a,t)$ diagram is een *momentane* grootheid.

Bij het voorbeeld van de optrekkende auto wordt de versnelling op $t=\tau$ als volgt bepaald:

- Teken de raaklijn op $t=\tau$, dus in $E$
- Lees de coördinaten af van twee punten op deze raaklijn (hier aangegeven met $C$ en $D$)
- Op $t=\tau$ is dan de versnelling

$$a(\tau)=\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{\tau}=\frac{v_D-v_C}{t_D-t_C}$$




*Opmerking*

Natuurkundig gezien is de gemiddelde versnelling $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ weinig van betekenis.

Immers in de *tweede wet van Newton* $F_{\mathrm{res}}=m\cdot a$ komt de *momentane versnelling* voor en niet de gemiddelde versnelling.

Het verdient daarom *aanbeveling* om de gemiddelde versnelling geheel buiten beschouwing te laten en dus de notatie $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ te vermijden.

## Een kanttekening

Uit het voorgaande blijkt dat in de natuurkunde de begrippen snelheid en versnelling *vooral* via *manipulatie van grafieken* wordt geïntroduceerd. Het *manipuleren van formules* wordt tot een *minimum* beperkt.

Aldus hoeft een leerling niet een afgeleide functie te kunnen bereken om tot een begrip van momentane snelheid en momentane versnelling te komen. In het geheel is de *raaklijn* een *primitief visueel concept.*

**Over steilheid, helling en richtingscoëfficiënt**

Het gebruik van deze begrippen is in de wiskunde- en natuurkundeboeken niet eenduidig. Echter het volgende lijkt de meest voorkomende conventie:

In alle gevallen is er sprake van

$$\frac{\text{verticale verandering}}{\text{horizontale verandering}}$$

Bij de helling is er sprake van een concrete situatie van een heuvel, een berg, een stijgende of dalende weg. De helling wordt vaak uitgedrukt in procenten. Verder geldt

helling = tangens (hellinghoek)

Richtingscoëfficiënt en steilheid worden gebruikt in grafieken. Bij de richtingscoëfficiënt zijn de horizontale en verticale as van dezelfde soort. Bij steilheid zijn de assen ongelijksoortig. Voor de richtingscoëfficiënt geldt

rico = tangens (hoek met de horizontale as)

Een dergelijke relatie is onzinnig voor de steilheid. Immers de hoek hangt af van de keuze van de schaal bij de horizontale as en van de keuze van de schaal bij de verticale as.

**Een opmerking over de notatie van de hoofdstelling van de integraalrekening**

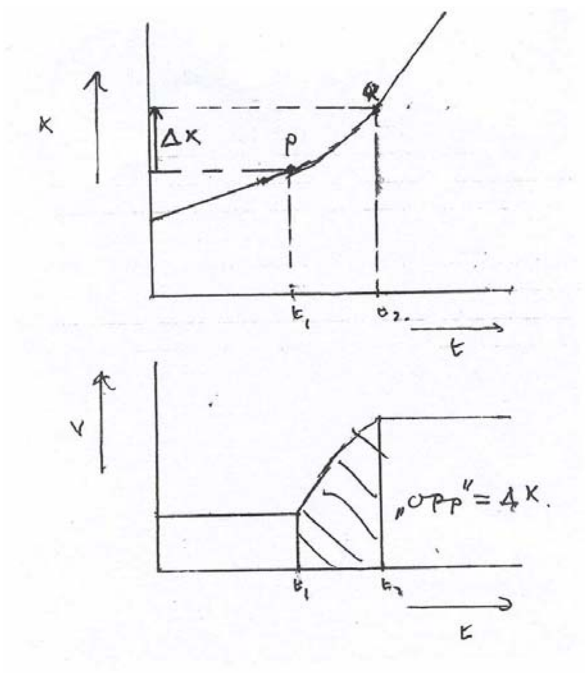
Tot nu toe is nagegaan hoe vanuit een $(x,t)$ diagram een $(v,t)$ diagram ontstaat en vanuit een $(v,t)$ diagram een $(a,t)$ diagram.

Vanuit het $(v,t)$ diagram kan men ook naar het $(x,t)$ diagram gaan.
Er geldt

"Oppervlak" in het $(v,t)$ diagram = verplaatsing

In het voorbeeld van de optrekkende auto geldt voor de verplaatsing tijdens het optrekken

$$\Delta x = x_Q - x_P$$



Leerlingen hoeven geen integraalrekening te kennen vanuit het $(v,t)$ diagram de verplaatsing $\Delta x$ te bepalen. Kennen zij toch integraalrekening dan betekent het bovenstaande

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\ \mathrm{d}t = \underset{t_1}{\overset{t_2}{\Delta}} x(t)$$

Waarbij de notatie $\underset{a}{\overset{b}{\Delta}} f(t) = f(b) - f(a)$ wordt gebruikt.

Dit leidt tot de volgende *aanbeveling* voor de *notatie van de hoofdstelling van de integraalrekening* in de wiskunde:

$$\int_{a_1}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x = \underset{a}{\overset{b}{\Delta}} F(x)$$

waarbij $F(x)$ een primitieve van $f(x)$ is

Met deze notatie is de connectie met de natuurkunde meer direct in te zien dan met de meer gebruikelijke “haken”notatie. Bij praktische berekeningen levert deze notatie geen problemen. Bijvoorbeeld:

$$\int_{3}^{6}(6x - x^2)\mathrm{d}x = \underset{3}{\overset{6}{\Delta}}(3x^2 - \frac{1}{3}x^3) = (3\cdot 6^2 - \frac{1}{3}\cdot 6^3) - (3\cdot 3^2 - \frac{1}{3}\cdot 3^3) = 36 - 18 = 18$$