

Rijk aan betekenis

Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs



commissie Toekomst WiskundeOnderwijs

Inhoud

Inleiding

1. Toekomstperspectief [AANVULLEN PAG NRS]
2. Wiskundeonderwijs rijk aan betekenis
3. Gedifferentieerde onderwijsdoelen
4. Wiskundige concepten en denkactiviteiten
5. De docent centraal
6. Didactische vormgeving
7. De rol van ICT
8. Aansluiting en leerlijnen
9. Toetsing en examinering
10. Implementatie, scholing en nascholing

Bijlage A	Samenstelling cTWO
Bijlage B	Bijdragen naar aanleiding van het concept-visiedocument
Bijlage C	Literatuurverwijzingen

Inleiding

De commissie Toekomst WiskundeOnderwijs cTWO heeft van de minister opdracht gekregen voorstellen te doen voor nieuwe examenprogramma's voor havo en vwo met ingang van 2010. Verder is de commissie gevraagd te adviseren over doorlopende leerlijnen wiskunde van primair onderwijs (po) naar voortgezet onderwijs (vo) en hoger onderwijs (ho), en over didactische ontwikkelingen. Voor de uitvoering van deze taken vormen dit visiedocument en de hierin geformuleerde standpunten het uitgangspunt.

Dit document betreft het wiskundeonderwijs *in havo en vwo*, vanaf de nieuwe onderbouw tot en met de examenprogramma's. Over het vmbo spreekt dit visiedocument zich niet uit, al hebben enkele standpunten vanwege de gemeenschappelijke basis in de eerste leerjaren van het voortgezet onderwijs ook consequenties voor het wiskundeonderwijs in het vmbo.

Op basis van dit document worden examenprogramma's ontwikkeld voor de vakken wiskunde A, B en D (havo en vwo) en C (vwo) en wordt experimenteel onderwijs ontworpen dat in de schoolpraktijk wordt beproefd. In een vervolgdokument worden de lange leerlijnen voor de wiskundige kernconcepten in de genoemde vakken verder uitgewerkt. Uiteindelijk leidt dit ontwikkelproces tot uitgewerkte examenprogramma's voor de lichting 2010 in 4 havo en 4 vwo, gecombineerd met een beschrijving van de gewenste inhouden en mogelijke didactische vormgevingen in onderbouw en Tweede Fase van havo en vwo. Deze beschrijving dient als handreiking voor docenten, schoolboekenauteurs, examenmakers en lerarenopleiders.

De vernieuwingscommissie cTWO realiseert zich dat er de afgelopen twintig jaar veel in het wiskundeonderwijs is bereikt en spreekt daarom ook bewust van vernieuwd wiskundeonderwijs en niet van nieuw of modern wiskundeonderwijs. Niettemin is het noodzakelijk om het wiskundeonderwijs in de nieuwe onderbouw en de Tweede Fase te evalueren en waar nodig door accentverschuivingen te sturen. Vanuit een samenhangende visie op het vernieuwde wiskundeonderwijs dienen verworvenheden behouden te worden en koerswijzigingen in gang te worden gezet op de punten waar verbetering mogelijk en noodzakelijk is.

In het eerste hoofdstuk van dit visiedocument beschrijft de commissie haar toekomstvisie. Vervolgens wordt in de hoofdstukken 2, 3 en 4 ingegaan op betekenis, doel en inhoud van wiskundeonderwijs, waarbij verschillende doelgroepen worden onderscheiden. De culturele en maatschappelijke betekenis van wiskunde voor iedereen, inclusief gecijferdheid, krijgt in de onderbouw voor diverse groepen leerlingen verschillende accenten, verschillende wiskundige inhouden en een diepgang die aansluit bij de talenten van leerlingen. In de Tweede Fase havo-vwo vindt vervolgens een differentiatie in doelen plaats, afhankelijk van de aard van elk van de wiskundevakken A, B, C en D.

De hoofdstukken 5, 6 en 7 gaan over de manier waarop deze doelen voor de verschillende groepen leerlingen kunnen worden bereikt. De positie van de leraar staat daarbij centraal; ook komen mogelijke didactische vormgeving en de rol van ICT ter sprake.

In hoofdstuk 8 komen de aansluitingsproblematiek en de afstemming op alle grensvlakken aan de orde. Dit betreft de verticale aansluiting po-vo-ho, maar ook de horizontale naar vakken waarin wiskunde kan en moet functioneren. Hoofdstuk 9 gaat over toetsing en examinering, waar de onderwijspraktijk in belangrijke mate door wordt gestuurd. Het laatste hoofdstuk gaat in op de scholing en nascholing van docenten.

1. Toekomstperspectief

De commissie Toekomst WiskundeOnderwijs heeft voor de jaren na 2010 een toekomstperspectief voor ogen waarin gemotiveerde leerlingen onder leiding van enthousiaste leraren werken aan zinvolle wiskundige inhoud door middel van inspirerende didactische werkwijzen.

Leerlingen

Leerlingen van havo en vwo waarderen wiskunde als een interessant vak dat zij met plezier beoefenen, waarin zij tot hun intellectueel plafond worden uitgedaagd en waarin recht wordt gedaan aan de verscheidenheid van hun talenten. Zij ontdekken dat wiskunde onmisbaar is in techniek en wetenschap, maar ook nauw verweven is met cultuur (kunst, filosofie, architectuur) en dagelijks leven (hypotheeken, verzekeringen, statistiek). Afhankelijk van het gekozen wiskundevak leren zij wiskundige kennis met inzicht te gebruiken in authentieke maatschappelijke, economische en sociaal-wetenschappelijke situaties (wiskunde A en C) of in natuurwetenschappelijke en technische toepassingen (wiskunde B en D). Met name bij wiskunde B en D verwerven leerlingen inzicht in wiskundige structuren en krijgen ze een stimulerende vooruitblik op een vervolgstudie in het natuurwetenschappelijk en technisch hoger onderwijs. Wiskunde D biedt getalenteerde leerlingen de kans om zich verder te verdiepen in wiskundige probleemstellingen.

Leraren

Kwalitatief goed onderwijs kan alleen worden gerealiseerd door de inzet van enthousiaste leraren – meesters in hun vak – die in het onderwijs ruimte voor eigen inbreng krijgen. Leraren moet in werktijd de gelegenheid worden geboden zich de vakkennis en didactische inzichten eigen te maken die nodig zijn om het vernieuwde wiskundeprogramma in praktijk te brengen. Onder invloed van wetenschappelijke, technologische en maatschappelijke innovaties veranderen de toepassingen van wiskunde doorlopend. Daarom moeten leraren de faciliteiten hebben om contact te houden met de wiskundige gemeenschap in hoger onderwijs, industrie en bedrijfsleven. Een structureel kader van overheid en bedrijfsleven moet de wisselwerking tussen deze sectoren mogelijk maken en uitwisseling van medewerkers faciliteren.

Wiskundige inhoud

Wiskunde – ‘wisconst’, leer der zekerheden – kenmerkt zich door een aantal kernconcepten en denkactiviteiten, die enerzijds gericht zijn op de ontwikkeling van wiskunde als op zichzelf staand abstract bouwwerk en anderzijds op wiskunde als toegepaste en toepasbare discipline. Onderwijs in kernconcepten – de ‘blik naar binnen’ – wordt afgewisseld met een ‘blik naar buiten’, waarin wiskunde in cultuur, maatschappij, andere schoolvakken, vervolgopleidingen, beroep en wetenschap aan de orde komt.

In de nieuwe programma’s maken leerlingen kennis met de wiskundige denkwijze en de bijdrage daarvan aan onze samenleving. Logisch redeneren, wiskundig modelleren, analyseren en voorspellen van uitkomsten van kwantitatieve processen vormen daarvan essentiële onderdelen, waarvan de uitwerking is aangepast aan het type onderwijs en het talent van de leerling. Om brede groepen leerlingen te interesseren zijn de onderwerpen gevarieerd. Uiteraard bouwt het onderwijs in de Tweede Fase voort op de lijnen die de jaren daarvoor zijn ingezet. Verbreding en verdieping helpen de leerling zich bewust te worden van eigen interesses en ambities. De opbouw en inhoud van het programma en de motiverende probleemstellingen doen beroep op de intellectuele nieuwsgierigheid van leerlingen en dagen hen uit om wiskundekennis op te bouwen: wiskunde als menselijke activiteit.

Didactische werkwijze

De genoemde doelen van het vernieuwde wiskundeonderwijs zijn te realiseren door leerlingen een aantrekkelijk en uitdagend programma te bieden dat door inspirerende leraren wordt verzorgd. Een actieve leerhouding van leerlingen kan worden bevorderd door een scala van wiskundige activiteiten zoals benaderen en schatten, modelleren, wiskundig manipuleren, analyseren, onderzoeken, redeneren en bewijzen. Naast een kwalitatief sterke opbouw van het wiskundig netwerk van concepten en vaardigheden, gekoppeld aan uitdagende probleemstellingen, is dergelijk onderwijs gebaat bij een breed spectrum van werkvormen, van klassikale instructie tot en met zelfstandig werken, met een sterk accent op reflectie en interactie met de leraar om het vereiste denkniveau te bereiken. Er is ook ruimte voor bijvoorbeeld het geven van voordrachten, het opstellen en toetsen van modellen, het werken aan interdisciplinaire vakoverstijgende projecten, het optreden van gastsprekers, of het zelfstandig uitvoeren van een onderzoek.

Toetsing en examinering leveren, in vorm en inhoud, aan alle genoemde aspecten van het wiskundeonderwijs een positieve bijdrage. Centrale examinering, schoolgebonden onderzoeksopdrachten, projecten, mondelinge tentamens en digitale toetsing van parate kennis leiden tot feedback op en eindbeoordeling van kennis van wiskundige begrippen, formulevaardigheden, analytische en kritische denkkraft, probleemoplossend vermogen en zelfstandige kennisverwerking en onderzoeksvaardigheid. Regionale samenwerking tussen scholen en de instellingen van hoger onderwijs versterken de kwaliteit en validiteit van de schoolgebonden toetsing en examinering.

De verwezenlijking van deze ambitieuze toekomstvisie vraagt inspanningen van alle betrokkenen. Om te beginnen is onderzoek nodig om punten op te helderen waarop kennis tekort schiet. Er is bijvoorbeeld wel een algemeen beeld van het aantal in- en uitstromende docenten (SCP, 2006) maar specifieke gegevens voor wiskunde ontbreken. Ook onderzoek naar de kwaliteit van de lerarenopleidingen, zoals dat in het buitenland wel bestaat (Adler en Davis, 2006), ontbreekt in Nederland. In hoofdstuk 7 wordt gesignaleerd dat het ook voor wat betreft de verdere integratie van ICT ontbreekt aan voldoende kennis. Verder wordt in hoofdstuk 8 opgemerkt dat de deskundigheidsbevordering en professionalisering van docenten prioriteiten zijn, die de nodige inspanning vragen van het onderwijsveld. Ook wordt op verschillende plaatsen in dit visiedocument gepleit voor een groot aantal contacturen tussen leerling en docent. Dit vraagt faciliteiten van overheid en prioriteitsstelling van scholen. Ten slotte is het werk van de vernieuwingscommissie wiskunde ingebed in bredere politieke en maatschappelijke keuzes. Zo is bijvoorbeeld de definitieve keuze voor het aantal profielen van grote invloed op de te ontwikkelen examenprogramma's (Profielcommissie NG/NT & Profielcommissie CM/EM, 2006).

2. Wiskundeonderwijs rijk aan betekenis

Om verschillende redenen is wiskundeonderwijs van betekenis voor de leerling: vanwege de historische en culturele waarde van de wiskunde, vanwege haar maatschappelijke relevantie en vanwege de ontplooiingskansen die wiskunde biedt. Wiskundeonderwijs moet erop gericht zijn deze rijkdom aan betekenis over het voetlicht te brengen door aandacht te besteden aan wiskunde als zelfstandige discipline én als toepasbare wetenschap.

Historische en culturele waarde

Al eeuwenlang heeft wiskunde een prominente plaats in allerlei vormen van algemeen of beroepsgericht onderwijs, omdat het essentieel is in tal van belangrijke culturele, maatschappelijke en wetenschappelijke innovaties. De Griekse wiskunde heeft een belangrijke bijdrage geleverd aan het getalbegrip. Denk bijvoorbeeld aan de ontdekking van irrationale verhoudingen van lengten van lijnstukken: irrationale getallen, die geen verhouding van twee natuurlijke getallen bleken te zijn. Sinds Aristoteles en Euclides heeft het logisch redeneren en het opbouwen van een netwerk van waarheden op basis van enkele basisprincipes (axioma's) een belangrijke plaats in de wetenschap ingenomen. De Griekse wiskundigen hebben op deze manier de meetkunde ontwikkeld en geordend.

In de Arabische tijd realiseerde men zich geleidelijk dat ook met grootheden gerekend kan worden waarvan de waarden onbekend zijn. Dit vormde de inleiding tot de algebra. Het formuleren van problemen in vergelijkingen en formules (algebraïseren) gaf een nieuwe dimensie aan het probleemoplossen en vindt tot op de dag van vandaag toepassing in allerlei disciplines, zoals natuurwetenschappen en economische, technische, medische en sociale wetenschappen.

De geboorte van onze moderne natuurwetenschap en technologie vond plaats toen wetenschappers zoals Descartes en Newton zich realiseerden dat onze aardse wereld en die van de hemellichamen voldoen aan dezelfde natuurwetten. Die wetten laten zich uitstekend formuleren met behulp van wiskundige (algebraïsche) notatie. De gevolgen ervan zijn bepaald door wiskundige technieken te ontwikkelen, de differentiaal- en integraalrekening, ook wel calculus genoemd. Deze heeft sindsdien een hoge vlucht genomen en ligt ten grondslag aan grote vooruitgang op het gebied van medische en andere wetenschappen, technologische ontwikkelingen en maatschappelijke toepassingen.

Sinds het werk van Pascal en Huygens heeft het redeneren met toeval en kans zich ontwikkeld tot een andere tak van de wiskunde, namelijk de kansrekening en de statistiek. Op basis van verzamelde cijfermatige gegevens worden in maatschappij en wetenschap allerlei beslissingen genomen en voorspellingen gedaan, dikwijls zonder dat de gebruiker zich realiseert dat aan de getrokken conclusies statistische modellen en toevalsprocessen ten grondslag liggen. Onterechte conclusies op basis van verkeerd geïnterpreteerde data ontstaan uit onbegrip van de statistiek.

In de moderne wiskunde vullen discrete en continue modellen elkaar aan en vindt een interactie plaats tussen deductief en inductief denken. Belangrijke actuele ontwikkelingen in de wiskunde als wetenschappelijke discipline zijn coderingstheorie, cryptografie (essentieel in de communicatietechniek) en chaostheorie (fractals en dynamische systemen), waarmee leerlingen in het voortgezet onderwijs op dit moment al exemplarisch kennismaken. Andere moderne ontwikkelingen hebben tot nu toe nauwelijks weerslag gevonden in het algemeen vormend onderwijs. Te denken valt aan de speltheorie (Zermelo en Von Neumann in de twintigste eeuw) die aan de basis ligt van de beschrijving van economische processen, of aan de vruchtbare

interactie tussen de moderne wiskunde en de theoretische natuurkunde (kwantummechanica, relativiteitstheorie).

Maatschappelijke relevantie

Vanuit de invalshoek van de maatschappelijke relevantie is de vraag wat voor wiskunde leerlingen nodig hebben om in een kennismaatschappij te functioneren waarin innovatie hoog in het vaandel staat. Hoe draagt wiskunde bij aan hun ontwikkeling tot zelfstandig denkende burgers? Deze vraag is niet eenduidig te beantwoorden voor de gehele breedte van de populatie en voor alle tijden. Sinds de Mammoetwet (1968) benadrukt de politiek het algemeen vormend karakter van het voortgezet onderwijs. De verschillende schoolvakken moeten daaraan een bijdrage leveren. In de loop van de tijd variëren de accenten van vormingsideaal van harmonische ontwikkeling tot zelfontplooiing, van nuttigheidsprincipe tot emancipatieprincipe, van competitie-model naar samenwerkingsmodel, van verwerving van vakkennis naar ontwikkeling van algemene vaardigheden.

De nieuwe wet op de onderbouw van het voortgezet onderwijs (2005) noemt drie zaken die het onderwijs dient te ontwikkelen, namelijk:

- Cultureel kapitaal, essentieel voor levenslange en levensbrede persoonlijke ontplooiing en ontwikkeling;
- Sociaal kapitaal, essentieel voor actief burgerschap, integratie en sociale cohesie;
- Menselijk kapitaal met het oog op de inzetbaarheid op de arbeidsmarkt.

In de toelichting op de nieuwe kerndoelen wordt benadrukt dat het ook in het hedendaagse onderwijs om kennisverwerving gaat:

“Kennis als product ontstaat pas in een proces van leren en kan ook pas na zo’n proces functioneren. Het is daarom een misvatting dat een procesmatige beschrijving van de kerndoelen betekent dat vaardigheden of leren leren belangrijker gevonden worden dan kennis.”

In lijn daarmee stelt cTWO zich tot doel de wiskundige inhoud van deze kennis opnieuw te formuleren, waarbij rekening wordt gehouden met de desbetreffende doelgroep en de aard van het wiskundevak. In het bijzonder betekent dit dat aandacht besteed wordt aan de ontwikkeling van lange leerlijnen, die ingezet worden in het po en die elke leerling adequaat voorbereiden op vervolgopleiding en beroepspraktijk.

Ontwikkeling van talent

De Koninklijke Nederlandse Academie voor Wetenschappen bepleit in haar rapport ‘Ontwikkeling van talent in de Tweede Fase’ meer ruimte voor de verscheidenheid van talenten van leerlingen. Ook cTWO is van mening dat het bijzonder relevant is om meer dan de laatste jaren gebruikelijk was in te spelen op de talenten van de leerling. Niet het minimale programma of het minimale niveau moet de norm zijn, maar het plafond van de ontwikkelingsmogelijkheden van de leerling. Zoals duidelijk blijkt uit de verschillende evaluatierapporten van de ‘oude’ basisvorming is dit plafond voor veel leerlingen de laatste jaren lang niet bereikt. De nieuwe wet op de onderbouw laat de scholen de ruimte tot een meer gedifferentieerde invulling van het gemeenschappelijk basisprogramma, waarbij leerlingen bijvoorbeeld ook meer tijd en energie aan wiskunde kunnen besteden. Deze nieuwe structuur van de onderbouw geeft scholen de mogelijkheid om de aansluiting te verbeteren met de vernieuwde Tweede Fase havo-vwo, zodat meer ruimte voor persoonlijke verdieping en verbreding, en daarmee ook een betere voorbereiding op het vervolgonderwijs, mogelijk worden.

Zelfstandig en toegepast

Wiskunde kent een duaal karakter, zowel in het onderwijs als in de samenleving. Enerzijds heeft wiskunde – en schoolwiskunde in het bijzonder – het karakter van een op zichzelf staande discipline, een bouwwerk van abstracte structuren en redeneringen, dat onafhankelijk is van plaats, tijd, waarnemer, sociale context en andere externe factoren. Anderzijds is wiskunde voor de samenleving van enorm belang door haar universaliteit en haar toepasbaarheid in wetenschap en technologie, waarmee ze zich in interactie ontwikkelt.

In het onderwijs zorgt dit duale karakter van wiskunde voor een zekere spanning. Voor motivatie en zingeving is het belangrijk verbanden te leggen met de belangstellingsfeer van de leerling, met de wiskunde in vervolgonderwijs en beroepen, met het wetenschappelijk onderwijs en met de toepassingen, die vaak een waardevolle bron van intuïtieve kennis vormen.

Aan de andere kant vereisen het aanleren van vaardigheden en het verwerven van intrinsiek wiskundig inzicht een zekere concentratie op de wiskundige inhoud, zonder dat steeds wisselende niet-wiskundige contexten daarvan de aandacht afleiden.

Aan wiskundige concepten en activiteiten liggen abstracties ten grondslag, die leerlingen op één of ander manier moeten hebben begrepen. Freudenthal (1978) betoogde al dat een eenzijdige nadruk op toepassingen in het wiskundige leerproces leidt tot slecht toepasbare wiskunde. Als de onderliggende abstractie ontbreekt, blijft transfer naar andere toegepaste situaties achterwege. Te veel aandacht voor het horizontaal mathematiseren, het gebruik van wiskundige middelen om de wereld om ons heen te organiseren, kan ten koste gaan van het verticale aspect, de aandacht voor wiskunde als bouwwerk van abstracties. Het gaat dus om het vinden van de optimale balans.

De essentie van dit hoofdstuk laat zich in de volgende twee standpunten samenvatten.

Standpunt 1

Wiskunde is een kernvak in het voortgezet onderwijs vanwege haar historische, culturele, wetenschappelijke en maatschappelijke relevantie. De inhoud dient aangepast te zijn aan de doelgroep en gericht te zijn op de ontwikkeling van de talenten van de betrokken leerlingen, door middel van lange leerlijnen die voorbereiden op vervolgopleidingen.

Standpunt 2

Het wiskundeonderwijs zoekt een balans tussen enerzijds wiskunde als zelfstandige discipline – als denkwijze waarin abstraheren, generaliseren en formeel manipuleren een grote rol spelen – en anderzijds wiskunde als instrument voor het modelleren van probleemsituaties, als hulpmiddel dat toegepast wordt in praktische, technische en wetenschappelijke situaties. De ijking van deze balans zal per schooltype en per profiel verschillen.

3. Gedifferentieerde onderwijsdoelen

Vanuit de in het vorige hoofdstuk gestelde ambitie om talenten van leerlingen optimaal te ontplooien ontstaat de behoefte aan verdergaande differentiatie in onderwijsdoelen en -praktijk.

De leerlingenpopulatie van 12-16 jarigen

Het wiskundeprogramma van de nieuwe onderbouw kenmerkt zich door een geleidelijke opbouw van begrippen en methoden aan de hand van begrijpelijke, hoewel vaak niet erg realistische, contexten. De winst van dit nieuwe programma is ontegenzeggelijk dat de onderwijsdoelen in de gehele breedte van de vmbo-havo-vwo populatie veel beter haalbaar zijn gebleken, terwijl uit onderzoek naar attitudes van leerlingen in de onderbouw blijkt dat wiskunde één van de meest populaire schoolvakken is geworden. Ook wiskundeleraren van met name vmbo-t willen in geen geval terug naar de voor hun leerlingen onbevredigende situatie van vóór de basisvorming. In vergelijkend internationaal onderzoek blijkt de opbrengst van dit wiskundeonderwijs uit hoge scores voor gecijferdheid en algemene wiskundige vorming. Dat is een bevredigende situatie.

De uniformiteit in gemeenschappelijke doelen, niveaus en wiskundige inhoud, waarvan de basisvorming aanvankelijk uitging, is echter slecht gebleken voor de ontwikkeling van de talenten van leerlingen van met name havo en vwo. Deze krijgen in de onderbouw te weinig kansen om te groeien in wiskundekennis en zo geleidelijk aan inzicht te verwerven in de onderliggende wiskundige concepten. Dit is één van de oorzaken van de slechte aansluiting van onderbouw op Tweede Fase. Boven op de gemeenschappelijke doelen van algemeen wiskundeonderwijs voor de gehele populatie van 12-16 jaar moeten er dan ook duidelijke differentiële doelen komen voor (delen van) de groep havo-vwo leerlingen. Dit bevordert een betere aansluiting op de Tweede Fase en ontwikkelt de talenten van leerlingen beter dan nu het geval is. In hoofdstuk 8 wordt er dan ook voor gepleit met name in klas 3 van havo en vwo een gedifferentieerd aanbod voor wiskunde te realiseren, overigens zonder dat het wiskundeprogramma voor dit leerjaar overladen mag worden.

De nieuwe Tweede Fase

De vernieuwing van de Tweede Fase van havo en vwo heeft in 1998 niet volledig uitgewerkt zoals aanvankelijk was beoogd. Om verschillende redenen is het eindniveau tegengevallen. Hierboven is al het te lage instroomniveau vanuit de onderbouw genoemd. Een tweede factor is het studiehuis, waarin veel nadruk is gelegd op zelfstandigheid en algemene vaardigheden ten koste van vakkennis. Een derde factor, die daarmee verband houdt, is de overladenheid van de nieuwe wiskundeprogramma's, die mede veroorzaakt wordt door de incongruentie tussen het aan de wiskundevakken op papier toebedeelde aantal studielasturen en het feitelijke aantal contacturen. Een vierde factor is de onduidelijkheid ten aanzien van de implementatie van ICT en de verhouding met de handmatige vaardigheden.

Als gevolg van dit alles laten evaluaties zien dat weinig leerlingen in de Tweede Fase wiskunde leuk of interessant vinden en voldoening ontnemen aan het gevoel 'ik kan het'. Daarnaast klagen vervolgopleidingen uit hbo en wo over een te laag wiskundig niveau van de instromende havo-vwo-leerlingen.

Gegeven de studielast voor wiskunde in de verschillende profielen, zoals met ingang van het schooljaar 2007-2008 opnieuw vastgesteld, zal het nodig zijn het aantal onderwerpen te beperken om de kwaliteit van de kennis en vaardigheden te kunnen garanderen. Daarnaast is ook hier differentiatie vereist: het is noodzakelijk om aan elk van de zeven wiskundevakken in havo-vwo een duidelijke, onderling goed te onderscheiden, karakterisering op te leggen. Behalve om

algemene doelen van wiskundeonderwijs gaat het in deze zeven vakken om duidelijk omschreven differentiële leerdoelen. Dit heldere onderscheid is noodzakelijk voor de verdere ontwikkeling van de programma's, passend bij de profielen, en geeft duidelijkheid voor het vervolgonderwijs. Hieronder volgt een karakteristiek van elk van de zeven programma's.

- Wiskunde A havo
Dit vak bereidt voor op opleidingen voor de economische en (para-)medische sector. De inhoud concentreert zich op toegepaste analyse, statistiek en kansrekening. Ook wordt de in de onderbouw verworven gecijferdheid onderhouden en uitgediept. De concepten worden opgebouwd vanuit concrete toepassingen, die ook in de toetsing centraal staan.
- Wiskunde B havo
Dit vak bereidt voor op vervolgoopleidingen met een sterk kwantitatieve en exacte component, zoals in de technieksector van het hbo. Inhoudelijk ligt de nadruk op analyse en meetkunde, met ruime aandacht voor algebraïsche vaardigheden, formulevaardigheden en de inzichtelijke toepassingen daarvan. De concepten worden opgebouwd vanuit de interne samenhang van wiskunde.
- Wiskunde D havo
Wiskunde D is een profielkeuzevak voor leerlingen die ook wiskunde B volgen en biedt daarop verbreding en verdieping. De verbreding omvat onder meer statistiek en kansrekening; de verdieping richt zich op de bètasector en komt tot uitdrukking in keuzeonderwerpen zoals meetkunde en optimalisatie, die in samenwerking met het hbo kunnen worden ingevuld.
- Wiskunde A vwo
Dit vak bereidt voor op universitaire studierichtingen met een sociaal, economisch en bedrijfskundig karakter. Daarnaast legt het de basis voor studierichtingen in de medisch-biologische wetenschappen. De inhoud concentreert zich op toegepaste analyse, statistiek en kansrekening. De concepten worden opgebouwd vanuit concrete toepassingen.
- Wiskunde B vwo
Dit vak bereidt voor op universitaire vervolgstudies met een exacte signatuur, zoals bètawetenschappen, technische wetenschappen en econometrie. Inhoudelijk ligt de nadruk op analyse en meetkunde, met ruime aandacht voor algebraïsche vaardigheden, formulevaardigheden, redeneren, bewijzen en toepassen in authentieke situaties. De concepten worden opgebouwd vanuit de interne samenhang van wiskunde.
- Wiskunde C vwo
Wiskunde C bereidt voor op universitaire studies in de sociale, juridische, taal- en gedragswetenschappen. Inhoudelijk richt het zich op kansrekenen en statistiek, op toegepaste analyse en op de historische en culturele plaats van de wiskunde in wetenschap en maatschappij.
- Wiskunde D vwo
Wiskunde D is een profielkeuzevak voor leerlingen die ook wiskunde B volgen en biedt daarop verbreding en verdieping. De verbreding omvat onder meer statistiek en kansrekening; de verdieping komt tot uitdrukking in onderwerpen uit technische en wetenschappelijke context, die aanleiding zijn tot formeel redeneren en bewijzen.

Complexe getallen is een typisch keuzeonderwerp. Een deel van wiskunde D kan worden ingevuld in samenwerking met het wo.

De verschillende programma's hebben dus een eigen karakter. Om de route havo-vwo mogelijk te maken, zoals bepleit in het rapport 'Betere overgangen in het onderwijs' van de Onderwijsraad, is afstemming tussen havo- en vwo-programma's wel van belang. Gelet op het feit dat havo in eerste instantie bedoeld is als vooropleiding voor het hbo, is de aansluiting havo-hbo echter de belangrijkste leidraad bij de ontwikkeling van de wiskundeprogramma's voor het havo.

Het bovenstaande leidt tot het volgende standpunt.

Standpunt 3

Elk van de programma's voor de zeven wiskundevakken in havo en vwo heeft een eigen karakterisering in sfeer, doelen, toepassingen en contexten, passend bij de doelgroep en de relevante vervolgstudies. Bij wiskunde B en D heeft diepgang prioriteit boven breedte. Wiskunde A kenmerkt zich door de toepassingsgerichtheid, wiskunde C door een algemene wiskundige en statistische vorming met historische en culturele accenten.

4. Wiskundige concepten en denkactiviteiten

Het onderwijs in de wiskunde laat zich net zoals de wiskunde zelf organiseren rondom concepten en denkactiviteiten. De kernconcepten lopen als een rode draad door de wiskunde, terwijl de denkactiviteiten deze concepten met elkaar en met de contexten verbinden. Het is van belang om deze concepten en activiteiten vorm te geven in lange, coherente leerlijnen door het programma heen.

Standpunt 4

Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze kernconcepten, denkactiviteiten en de bijbehorende vaardigheden moeten als lange leerlijnen door het gehele programma van havo-vwo lopen.

Kernconcepten

Hieronder volgt een korte beschrijving van de genoemde concepten met de gewenste accentverschuiving ten opzichte van het bestaande programma.

Getal

Onder het getalbegrip valt inzicht in de opbouw van het getsysteem: natuurlijke getallen, rationale getallen, reële getallen, en in wiskunde D ook complexe getallen, alle in samenhang met hun bewerkingen. Rekenen met breuken en verhoudingen (procenten, driehoeksmmeetkunde) zijn belangrijke aspecten van dit kernconcept. Het is van belang voor alle leerlingen in de onderbouw, ongeacht de latere profielkeuze.

Een accentwijziging in de onderbouw is dat meer nadruk wordt gelegd op rekenen met breuken, structuur en opbouw van het getallensysteem (irrationale getallen) en deelbaarheid – denk aan het kleinst gemene veelvoud en de grootst gemene deler en aan priemgetallen.

Denkactiviteiten die hierbij een rol spelen zijn redeneren, abstraheren en structureren.

Formule

Onder dit kernconcept valt het inzicht in algebraïsche formules en expressies als beschrijvingen van rekenprocessen maar ook als zelfstandige algebraïsche objecten waarmee men kan redeneren en manipuleren. Ook inzicht in de structuur van formules, in de volgorde en de reikwijdte van operaties, en in het relatieve belang van verschillende termen en factoren vallen hieronder. In dit verband wordt van ‘symbol sense’ gesproken (Arcavi, 2005). Onderzoek toont aan dat dergelijk inzicht zich niet eenvoudig laat verwerven en toepassen en dat het variabelebegrip hierin een grote rol speelt (Malle, 1993).

Het formulebegrip omvat tevens parate kennis van bijvoorbeeld merkwaardige producten. Dit kernconcept hangt sterk samen met het getalbegrip en het functiebegrip en is met name van belang voor wiskunde A, B en D.

Accentwijzigingen in de onderbouw zijn dat meer nadruk wordt gelegd op het rekenen met wortels en gebroken machten, op merkwaardige producten, en op betekenis en afleiding van de abc-formule. Tevens moet aandacht worden besteed aan het nauwkeurig algebraïsch formuleren. In de Tweede Fase is belangrijk dat de verworvenheden van de onderbouw worden onderhouden en waar nuttig in het vwo met beweringslogica worden ondersteund en verdiept.

Denkactiviteiten die met dit concept zijn verbonden zijn modelleren en algebraïseren, formules manipuleren, logisch redeneren en abstraheren.

Functie

Het kernconcept functie omvat de gehele leerlijn van verbanden tussen twee grootheden tot en met de bestudering van gecompliceerde functies in wiskunde B. Het gaat enerzijds om het beeld van de functie als procedure die een invoergetal afbeeldt op een uitvoergetal en als manier om gekoppelde verandering te beschrijven. Anderzijds is de functie een wiskundig object, dat deel uitmaakt van een klasse van functies die op globaal niveau onderzocht kan worden.

Verschillende functierepresentaties, elk met eigen kracht en beperking, geven een verschillende kijk op hetzelfde object. Bij het functiebegrip hoort een overzicht van de verschillende typen functies in hun onderlinge relaties en een exemplarische verdieping van een bepaalde klasse van functies (bijvoorbeeld de exponentiële functies). A-, B- en D-leerlingen moeten de kenmerken van elementaire functies paraat hebben en daarmee vlot handmatig kunnen werken.

Een accentwijziging voor de Tweede Fase, met name in het vwo, kan de invoering van het meer algemene begrip afbeelding zijn, bijvoorbeeld bij de beschrijving van rijen van getallen, isometrieën van het vlak, parametervoorstellingen van krommen, of stochasten.

Denkactiviteiten die met dit concept zijn verbonden zijn modelleren en algebraïseren, en ordenen.

Verandering

Dit kernconcept is nauw verbonden met het functiebegrip en het getalbegrip.

Differentiaalrekening betreft de bestudering van snelheid van verandering in de relatie tussen twee grootheden, een concept dat sinds Newton en Leibniz een grote vlucht heeft genomen. De integraalrekening, die alleen op het vwo aan de orde komt, omvat zowel de studie van het ‘anti-differentiëren’ als de continue generalisatie van de discrete sommatie. De grote kracht van dit concept is de mogelijkheid om met dit abstracte begrip praktisch te rekenen. Dwarsverbanden zijn er behalve met het functiebegrip ook met meetkunde. Het concept verandering speelt een grote rol in wiskunde A, B en D.

Een accentwijziging in de onderbouw bestaat eruit dat de begrippen snelheid, verandering en snelheidsgrafiek al informeel geïntroduceerd worden, opdat in klas 4 het begrip afgeleide vlotter kan worden ingevoerd. Voor de Tweede Fase is een accentverschuiving dat differentiëren en de bijbehorende calculus reeds in klas 4 worden ingevoerd en integreren in wiskunde B van vwo-5. Het programma wiskunde B wordt hierdoor beter afgestemd op het natuurkundeprogramma.

Denkactiviteiten die met dit concept zijn verbonden zijn formules manipuleren, abstraheren, redeneren en bewijzen.

Ruimte

In het kernconcept ruimte draait het om de eigenschappen van meetkundige objecten in het platte vlak en in de driedimensionale ruimte. Dit kernconcept, dat vooral in wiskunde B en D een rol speelt, biedt dwarsverbanden naar algebra (irrationale getallen) en naar het functiebegrip (parametriseren). Analytische meetkunde is aanleiding tot het toepassen van algebraïsche vaardigheden. Belangrijke vaardigheden zijn het oplossen van meetkundige problemen, construeren, redeneren en bewijzen en het omgaan met analytische technieken (algebraïseren).

Accentwijzigingen in de onderbouw bestaan eruit dat de vlakke meetkunde op verschillende manieren wordt opgebouwd: door construeren, meetkundig redeneren en bewijzen. In klas 3 kan

een begin worden gemaakt met de analytische meetkunde in het platte vlak (lijnen en cirkels). In de Tweede Fase biedt meetkunde veel mogelijkheden om per wiskundevak te differentiëren.

Denkactiviteiten die met dit concept zijn verbonden zijn modelleren en algebraïseren, formules manipuleren, structureren, redeneren en bewijzen.

Toeval

Het kernconcept toeval draait om het idee van stochastische processen als tegenhanger van deterministische processen. Bij dit concept staan het modelleren en analyseren van toevalsprocessen centraal, het ermee redeneren en eraan rekenen. Het concept toeval kent twee invalshoeken. Ten eerste is er de statistiek, waarin het gaat om data-analyse, het trekken van conclusies uit onvolledige kwantitatieve gegevens, en het redeneren op basis van statistische modellen. Ten tweede is er de kansrekening: het verloop van toevalsprocessen, het berekenen en voorspellen van kansen, en in een gevorderd stadium het redeneren en onderzoeken op basis van het inzichtelijk gebruikte concept toeval. Het toevalsbegrip speelt een rol bij wiskunde A, C en D, waarbij bij wiskunde C ‘statistical literacy’ centraal staat.

Accentwijzigingen in de onderbouw bestaan eruit dat leerlingen al in een vroeg stadium leren redeneren en onderzoeken op basis van het inzichtelijk gebruikte toevalsconcept. In de Tweede Fase ligt een uitdaging in het rekenen aan grote datasets, waarbij ICT-toepassingen bruikbaar zijn, terwijl berekeningen die met de hand kunnen ook met de hand gedaan zouden moeten worden.

Denkactiviteiten die met dit concept zijn verbonden zijn modelleren, abstraheren en redeneren.

Denkactiviteiten

In standpunt 4 zijn als belangrijkste denkactiviteiten genoemd modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Zij vormen de kern van elke wiskundige activiteit. In het wiskundeonderwijs is het van belang dat er een balans bestaat tussen de verschillende denkactiviteiten.

Hieronder wordt toegelicht wat onder elk van deze activiteiten wordt verstaan, zonder dat de volgorde ook een ordening in het leerproces wil suggereren.

Modelleren en algebraïseren

Modelleren is een praktisch en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald. Leerlingen worden voor een probleemsituatie geplaatst met als doel deze met wiskundige middelen op te lossen. Dit omvat het doorgronden en analyseren van het probleem, het kiezen van variabelen, het opstellen van verbanden, het bepalen van een strategie en het inzetten van wiskundige middelen. Visualiseren, schematiseren en representeren maken hiervan in belangrijke mate deel uit. Een ander essentieel onderdeel van modelleren is het algebraïseren: het mathematiseren van een realistische of wiskundige situatie door een formule of vergelijking op te stellen. Door de noodzaak om zelf variabelen te benoemen en verbanden wiskundig te formuleren worden algebraïseren en ‘symbol sense’ ontwikkeld.

In echte wiskundige probleemsituaties is modelleren een zeer complexe en moeilijke activiteit; het is didactisch geen eenvoudige opgave om leerlingen in het voortgezet onderwijs iets van dit proces te laten ervaren zonder in kunstmatige overgesimplificeerde situaties te vervallen.

Ordenen en structureren

Wiskunde heeft altijd bijgedragen aan het ordenen van de werkelijkheid, aan het classificeren van objecten naar kenmerken, aan het structureren van de eigen discipline en andere disciplines. Het gaat hier om het leren structureren. Ordenen en structureren zijn activiteiten die leiden tot abstractie. Uit de hierboven gegeven beschrijving van de kernconcepten komt naar voren dat ordenen en structureren een rol spelen in alle kernconcepten.

Analytisch denken en probleemoplossen

Deze denkactiviteit betreft de vaardigheid om wiskundige problemen te formuleren, te representeren en op te lossen. Het analytisch denken omvat aspecten van modelleren en redeneren. Bij het probleemoplossen is een repertoire aan heuristische onmisbaar. Analytisch denken en probleemoplossen komen bij elk kernconcept om de hoek kijken.

Formules manipuleren

Het omgaan met algebraïsche formules en expressies is een vaardigheid waaraan denkactiviteiten ten grondslag liggen. Het gericht omvormen van formules vraagt om inzicht in de structuur van de formule en om zicht op het te volgen oplossingsproces als geheel. Daarnaast dient de leerling over handmatige vaardigheden te beschikken om deze processen correct uit te voeren. Het gaat dus om een combinatie van ‘symbol sense’ en formulevaardigheid.

Het huidige onderwijs schiet op beide aspecten tekort. Veel leerlingen beheersen de algebraïsche basistechnieken (rekenen met machten, wortels en breuken, werken met haakjes, ontbinden in factoren, rekenen met rationale uitdrukkingen) niet meer met de hand; daarnaast kunnen velen niet inzichtelijk omgaan met variabelen, formules en vergelijkingen.

Formulevaardigheid dient inzichtelijk verworven te worden en moet dan op een routineniveau uitgevoerd kunnen worden – met inzicht, gegeneraliseerd, doelbewust, snel en zonder haperen. Per schooltype en wiskundevak wordt een repertoire aan basistechnieken voor het aanpakken van echte problemen en het zinvol inzetten van apparatuur vastgesteld, waarover leerlingen moeten beschikken. Dit repertoire moet afzonderlijk worden getoetst op een hoog niveau van beheersing.

Eenmaal geautomatiseerd is formulevaardigheid de vaardigheid om symbolen formeel te manipuleren. In dit formeel manipuleren, vooral nuttig in combinatie met algebraïseren en logisch redeneren, ligt een deel van de abstractie en de kracht van de wiskunde; bij het manipuleren maakt het immers niet uit welke betekenis de gesymboliseerde getallen hebben. Hierbij is zeker op het vwo van belang dat kwaliteitseisen worden gesteld aan correcte en heldere algebraïsche formuleringen. Onvoldoende aandacht hiervoor leidt tot problemen in het vervolgonderwijs, zowel in de wiskundige als in de toegepaste vakken, doordat vage en informele formuleringen een te zwakke basis vormen voor concepten die op de schoolwiskunde voortbouwen.

Abstraheren

Abstractie is het wezen en de kracht van wiskunde en maakt het leren en begrijpen van wiskunde makkelijker. Leerlingen groeien in hun vermogen abstracties te vatten en zelf te abstraheren. Het is van groot belang dat centrale wiskundige concepten, ingebed in de leerlijnen van de kernconcepten, van begin af aan zo worden begrepen dat zij verdere abstractie bevorderen en zeker niet in de weg staan. Bijvoorbeeld is het voor de ontwikkeling van een abstract getalbegrip nodig om onderwerpen te behandelen als zodeelbaarheid van gehele getallen, breuken, decimale voorstellingen en andere representaties van getallen en irrationaliteit (bijvoorbeeld bij wortels). Met name bij wiskunde B en D dient abstraheren een grotere plaats te krijgen.

Logisch redeneren en bewijzen

Logisch redeneren en bewijzen zijn fundamenteel in de wiskunde, waar de waarheid van beweringen op basis van een aantal aannames vast staat en navolgbaar moet zijn voor anderen. Het leren logisch te redeneren blijft dan ook niet beperkt tot de Tweede Fase van het vwo, maar zal bij alle kernconcepten in de gehele leerlijn vanaf klas 1 een plaats krijgen. Denk aan lokale redeneringen en bewijzen in de leerlijn meetkunde, logisch redeneren in de opbouw van de leerlijn rond het getalbegrip en het redeneren met statistische begrippen in het kernconcept toeval. Ook in de ontwikkeling van de concepten in de leerlijn differentiaalrekening speelt het logisch redeneren een rol.

Aan de redeneringen van leerlingen en de formulering daarvan moeten kwaliteitseisen worden gesteld. Goede definities, nette argumentatie en nauwkeurige formulering zijn basiselementen van wiskunde en dragen bij aan het zelfvertrouwen en de zelfstandigheid van de leerling.

5. De docent centraal

Gebaseerd op de studiehuisfilosofie is op veel scholen de contacttijd gereduceerd en heeft menig docent zich teruggetrokken op de rol van individuele begeleider. Uitgeverijen hebben hierop ingespeeld door leermiddelen te ontwikkelen die geschikt zijn voor zelfstandig werken: opgaven zijn in reeksen kleine, ‘hapklare’ deelopdrachten opgesplitst en uitwerkingen worden meegeleverd. Wiskundesecties hebben studiewijzers gemaakt, die veel weg hebben van ‘spoorboekjes’. Vervolgens lopen leerlingen en leraar dit voorgeprogrammeerde pad samen af en doen leerlingen hun best zo snel mogelijk van A naar Z te komen.

In deze vormgeving van het studiehuis komt weinig terecht van niveauverhoging door middel van interactief en activerend onderwijs. De leraar is niet langer rolmodel voor het leren oplossen van problemen. Interactie met en tussen leerlingen, voorwaarde voor het bereiken van hogere leerdoelen waarvoor interactieve reflectie en het expliciteren van concepten en denkmethoden noodzakelijk zijn, komt weinig voor.

Kennis en begrip van wiskunde ontstaan niet vanzelf, maar komen tot stand door interactie tussen docent en klas. Dit is een broos proces van voorzichtige en geleidelijke groei, waarin leerlingen continu begeleid moeten worden. Interactie is niet alleen een noodzakelijke voorwaarde voor het ontstaan van inzicht, ook voor het verwerven van vaardigheden is het cruciaal. Daarom is voor goed wiskundeonderwijs uitgebreide contacttijd nodig. Als vuistregel dient elk uur studielast in minimaal $\frac{3}{4}$ uur contacttijd op jaarbasis te worden vertaald. Zelfstudie en zelfstandig werken zijn alleen effectief indien goed begeleid.

Standpunt 5

Inhoudelijke interactie met docenten is essentieel voor het leren van wiskunde. Dientengevolge vraagt een goede leeropbrengst om een meer dan modaal aantal contacturen.

Het is wenselijk dat docenten zich niet beperken tot de rol van uitvoerder, maar als professionele vakmensen het eigen onderwijs mede ontwerpen. Denk bijvoorbeeld aan het actief werken aan eigen niveauverhoging, het ontwerpen van onderzoeksopdrachten en practica, het aanpassen van computersoftware aanpassen voor het eigen onderwijs, het opzetten van een digitale leeromgeving, en het stellen van duidelijke niveaueisen en het beoordelen van leerlingen. Dergelijke activiteiten verrijken het didactisch repertoire en het vakmanschap van de docent. De leerling werkt aan geschikte opdrachten en problemen – individueel, in duo’s of kleine groepen – en neemt deel aan klassengesprekken. De docent geeft regelmatig feedback, vraagt door, verheldert, belicht achtergronden en verzorgt de meer individuele begeleiding.

Professionaliteit en competentie van de docent hangen nauw samen met een grote vakkennis, toegepast in het didactisch handelen. Het ontwikkelen en onderhouden van vakkennis en didactisch handelen zijn daarom belangrijke aandachtspunten. Op dit moment bestaat er in de Tweede Fase al een tekort aan eerstegraads docenten. In de komende jaren zullen veel eerstegraads docenten met pensioen gaan. Veel nieuwe eerstegraads docenten studeren er niet af, noch in het hbo noch aan de universiteiten. Het wiskundeonderwijs zal te maken krijgen met veel zij-instromers, waarvan de vraag is of ze voldoende inhoudelijke en didactische scholing hebben. Het is dus zaak te bevorderen dat er in de Tweede Fase voldoende docenten zullen zijn die inhoudelijk en didactisch sterk genoeg in hun schoenen staan om de voorgestelde vernieuwingen te realiseren. Daarom zal veel aandacht, tijd en geld besteed moeten worden aan de bij- en nascholing van de zittende wiskundedocenten. Hierin zal aandacht besteed moeten worden aan de brede context van de wiskunde: een wiskundedocent in de Tweede Fase moet leerlingen

kunnen vertellen wat er bij andere vakken en in het hoger onderwijs met wiskunde zoal gedaan wordt. Op basis van de eigen vakkennis zal de wiskundedocent in staat moeten zijn om adequate didactische werkwijzen en onderwijsvormen te ontwerpen om de geformuleerde onderwijsdoelen te kunnen realiseren. Daarover meer in hoofdstuk 10.

Standpunt 6

De docent is de professional in de klas en de expert van het onderwijsleerproces. Essentieel zijn een brede en diepe vakkennis en het vermogen om die te vertalen in adequaat en didactisch verantwoord onderwijs. Een succesvolle implementatie van het vernieuwde wiskundeonderwijs vraagt om ruime faciliteiten van vakinhoudelijke en vakdidactische scholing.

6. Didactische vormgeving

Consensus over de resultaten van internationaal leerpsychologisch en didactisch onderzoek naar het leren en onderwijzen van vakkennis is de laatste jaren door psychologen, wiskundigen, wiskundedidactici en onderwijskundigen samengevat in standaardwerken zoals *How People Learn* (Bransford et al., 2000) en *Adding it up* (Kilpatrick et al., 2001). Centraal in de aanbevelingen staat de noodzaak om leerlingen systematisch en gericht te helpen in hun lange termijn geheugen een samenhangend netwerk van begrippen, methoden en situaties op te bouwen. De conclusies voor de wiskunedidactiek, hierna in het kort samengevat, sporen heel goed met de publicaties van Skemp, Van Dormolen en Van Hiele, die in de jaren tachtig van de vorige eeuw in Nederland veel invloed hadden.

Aan de hand van voorbeelden en opdrachten bouwen leerlingen een netwerk (cognitief schema, kennisgraaf) op dat met behulp van interactie (expliciteren, reflecteren) leidt tot de abstractie van het onderliggende begrip of principe. De wendbaarheid van die kennis, waaruit het inzicht blijkt, wordt zowel bepaald door het begrijpen en kunnen verwoorden van de onderliggende abstractie als door de diversiteit van de bestudeerde situaties. Het nieuwe aspect van het Nederlandse wiskundeonderwijs in de laatste decennia is dat de breedte aan situaties en contexten sterk is toegenomen. Waar dat ten koste is gegaan van het abstraheren uit die situaties heeft dat niet geleid tot de gewenste brede toepasbaarheid van de verworven wiskundige kennis.

Contexten en concepten

Betekenisrijke contexten worden in de vakdidactiek opgevat als situaties, problemen, vraagstellingen, uitspraken die voor leerlingen betekenis krijgen terwijl ze er mee aan het werk gaan. Goede contexten worden gekenmerkt door een groot potentieel aan relaties met ervaringen van leerlingen binnen of buiten het wiskundeonderwijs en vormen aanleiding tot wiskundige conceptvorming. Ze zijn afkomstig uit de leefwereld, uit andere disciplines of uit de wiskunde zelf, zijn bedoeld om het ontwikkelen en begrijpen van een concept of methode voor te bereiden, en krijgen door de opgeroepen activiteiten betekenis voor leerlingen. Dergelijke contexten functioneren, mits goed gekozen, als denkmodel of ankerpunt voor het geheugen, waardoor leerlingen in hun lange termijn geheugen toegang krijgen tot het daaraan gekoppelde netwerk van mathematische begrippen, methoden en situaties. Centraal in dat netwerk staat het onderliggende wiskundige concept, dat uit de verschillende voorbeelden is geabstraheerd. Dankzij het verworven inzicht is de leerling in staat om in analoge of nieuwe situaties (toegepast of wiskundig van aard) de toepasbaarheid van het concept te herkennen en te benutten. Uiteraard zullen in het algemeen ook andere contexten, problemen en vraagstellingen in de verwerkingsfase worden gepresenteerd om dat proces van herkennen en toepassen te oefenen.

Deze kijk op de rol van contexten sluit aan bij de theorie van realistisch wiskundeonderwijs, die de afgelopen decennia in Nederland school heeft gemaakt, maar waarvan de verwezenlijking in de praktijk van het voortgezet onderwijs weerbarstig blijkt te zijn. Ook correspondeert deze visie op het gebruik van contexten met de zogeheten context-concept benadering, die bij de huidige vernieuwing van de exacte vakken als uitgangspunt dient. Daarnaast wijzen ook onderzoekers op het belang van wat 'situated cognition' wordt genoemd (Noss en Hoyles, 1996).

In hoofdstuk 4 van dit visiedocument is abstraheren beschreven als een van de wezenlijke denkactiviteiten van de wiskunde. De commissie constateert een zekere spanning tussen het gebruik van contexten en abstractie. Het gebruik van contexten schiet zijn doel voorbij als aan abstractie niet wordt toegekomen. 'Horizontaal mathematiseren', het gebruik van wiskundige

middelen om de wereld om ons heen te organiseren, zonder ‘verticaal mathematiseren’, waarin het bouwwerk van de wiskunde ontstaat door abstractie, is in het algemeen ongewenst.

De verschillende wiskundevakken vragen om een eigen didactiek, die ook gevolgen heeft voor de rol en de aard van contexten. Contexten zijn er in verschillende typen:

- didactische contexten;
- maatschappelijke contexten;
- wiskundige contexten;
- toepassingen, bijvoorbeeld gericht op vervolgopleiding en beroepspraktijk, of gericht op andere schoolvakken.

Contexten bij wiskunde A en C hebben overwegend een didactisch en maatschappelijk karakter en worden gezocht in belevingswereld van leerlingen en in maatschappelijke situaties of levenswetenschappen; denk bijvoorbeeld aan populatiedynamica en exponentiële groei. De kracht van wiskundige concepten kan blijken uit hun toepasbaarheid in diverse contexten.

Bij wiskunde B en D zijn wiskundige en toegepaste contexten van belang, die bijdragen aan de versterking van interne structuur en samenhang van de verschillende onderdelen van de wiskunde. In dit verband pleit de commissie voor een aantal grote, diep uitgewerkte contexten, die een intuïtief denkmodel vormen bij een concept of methode (paradigmatische voorbeelden, Freudenthal, 1978). Zulke contexten zijn afkomstig uit natuurwetenschappelijke domeinen zoals mechanica of optica. Daarnaast zijn er didactische contexten die sterk gestileerd kunnen zijn zonder aan kracht te verliezen; denk bijvoorbeeld aan het vaasmodel in de kansrekening. In het algemeen kan bij wiskunde B en D, zeker op het vwo, directer op het doel van de abstractie worden afgestevend.

Uiteindelijk is het de docent die de rol en de aard van contexten in het wiskundeonderwijs bepaalt en de didactiek afstemt op de mogelijkheden en behoeften van de leerlingen. Verder zij nog opgemerkt dat contexten van belang zijn in het leerproces, maar dat de rol van contexten in de toetsing een ander kwestie is. Daarop wordt in hoofdstuk 9 nader ingegaan.

Standpunt 7

In de didactische vormgeving van de curricula staat een intern-wiskundig samenhangend netwerk van concepten centraal. Wiskundige of toegepaste contexten kunnen daaraan een bijdrage leveren. Niet-authentieke contexten kunnen als metafoor fungeren, maar dienen in het algemeen te worden vermeden, evenals ‘verhaaltjessommen’.

Wiskunde en toepassingen

In hoofdstuk 2 is het duale karakter van wiskunde als zelfstandige discipline en als universeel toepasbare wetenschap besproken. Beide aspecten dienen in de verschillende curricula een eigen onderscheiden rol te krijgen.

In de onderbouw van havo-vwo wordt de basis gelegd voor een netwerk aan concepten, gekoppeld aan situaties die voor leerlingen herkenbaar zijn en betekenis geven aan de intern wiskundige concepten. Gelet op de diversiteit aan talenten in de onderbouw havo-vwo is het daar noodzakelijk om een gemeenschappelijk en dus breed programma aan te bieden met de mogelijkheid om leerlingen aanvullende wiskundige activiteiten te laten uitvoeren, passend bij hun eigen belangstelling en aanleg.

In de Tweede Fase van havo en vwo kiezen we daarentegen voor sterk onderscheiden curricula van de verschillende examenvakken, elk met een eigen karakteristieke balans tussen de intern wiskundige structuur en de toepassingsgerichtheid (zie Standpunt 3). In de vakken wiskunde B staat de opbouw van de intern wiskundige samenhang van de concepten centraal en

worden deze concepten in echte natuurwetenschappelijke en technische toepassingen gebruikt. In de vakken wiskunde A worden de concepten opgebouwd vanuit concrete toepassingen en moeten leerlingen deze in echte maatschappelijke en economische situaties kunnen toepassen. De nagestreefde accenten in wiskunde D variëren per onderwerp van intern wiskundig tot toegepast. In het algemeen ligt het zwaartepunt in vakken in het havo meer op de praktijk en de toepasbaarheid en in het vwo meer op de theorievorming.

Standpunt 8

Elk van de zeven examenvakken in havo-vwo kent een eigen balans tussen intern-wiskundige structuur en authentieke toepassingen. Die karakteristieken volgen uit de verschillen in doelgroep en doorstroomkwalificaties. In de programmabeschrijving van elk vak wordt de karakteristiek expliciet geformuleerd.

Blik naar buiten

Naast de bovengeschetste karakteristieken binnen de zeven curricula dient er in elk vak expliciete aandacht te komen voor een ‘blik naar buiten’. Het gaat hierbij om de relevantie van de schoolwiskunde, om de rol die wiskunde in de maatschappij heeft en om de positie van wiskunde na de middelbare school. Hiermee wordt een link gelegd tussen de onderwerpen uit de schoolwiskunde en de hedendaagse maatschappij; daarnaast krijgen leerlingen zicht op actuele toepassingen en op de wiskunde in vervolgonderwijs en beroep.

De ‘blik naar buiten’ is een levend curriculumonderdeel, dat voortdurend door school en docenten in te vullen en te actualiseren is. Voorbeelden zijn samenwerking met andere vakken binnen de eigen school (bijvoorbeeld NLT), moderne toepassingen, theoretische opdrachten zoals het doorwerken van een Zebraboekje, geschiedenis van de wiskunde, praktische opdrachten en profielwerkstukken. De ‘blik naar buiten’ biedt ook ruimte voor extra-curriculaire verdiepende wiskunde (bijvoorbeeld een praktische opdracht over π). De ‘blik naar buiten’ biedt gelegenheid voor Jet-Net-activiteiten, aansluitingsactiviteiten met het vervolgonderwijs, de Kangoeroewedstrijd, het tijdschrift Pythagoras en de verschillende O- en A-lympiades.

De ‘blik naar buiten’ wordt binnen het schoolexamen afgesloten. In de uitvoering van deze programmaonderdelen zijn de scholen vrij.

Standpunt 9

In elk van de curricula wordt aandacht besteed aan de brede betekenis van de wiskunde. Hiertoe wordt in de programma’s geormerkte studielast gereserveerd voor een zogenaamde ‘blik naar buiten’. Deze ruimte wordt ingevuld door docenten en vaksecties, die hierbij samenwerken met bedrijfsleven, instellingen voor hoger onderwijs en landelijke initiatieven.

7. De rol van ICT

In samenleving en beroepspraktijk heeft informatie- en communicatietechnologie (ICT) een steeds grotere plaats, die het onderwijs niet kan en mag negeren. Maar wat is de rol van ICT in het leerproces? De inzet van moderne ICT-middelen in de wiskunde en in het wiskundeonderwijs bevindt zich in de beginfase. Hoewel deze nieuwe onderwijsvormen mogelijk maken, is een weloverwogen koers nog niet uitgekristalliseerd.

Om verschillende redenen is de implementatie van ICT tot op heden niet altijd succesvol geweest. In dit hoofdstuk analyseren we eerst de achtergronden van deze problemen waarbij de invoering van de grafische rekenmachine als casus fungeert; daarna zetten we lijnen uit naar de toekomst.

Terugblik op de invoering van de grafische rekenmachine

Het meest invloedrijke ICT-hulpmiddel in de wiskundeles sinds 1998 is de grafische rekenmachine. De toelating daarvan op het Centraal Examen heeft een sterke, niet altijd positieve, invloed uitgeoefend op het voorafgaand onderwijs. We noemen drie ongewenste effecten.

Ten eerste is bij docenten en leerlingen onduidelijkheid ontstaan over de verschillende status van exacte oplossingen en benaderingen. Leerlingen denken dat een oplossing van een probleem (bijvoorbeeld het berekenen van de snijpunten van twee grafieken) die wordt verkregen met behulp van de grafische rekenmachine gelijkwaardig is aan een oplossing verkregen met exact (algebraïsch) rekenwerk. In de opgaven komen de verschillen slechts in subtiel woordgebruik tot uitdrukking, bijvoorbeeld in ‘bereken’ versus ‘bereken langs algebraïsche weg’. Wiskundige argumenten worden vervangen door verwijzingen naar de grafische rekenmachine en de behoefte aan een wiskundige berekening of redenering ontbreekt.

Ten tweede bestaat het gevaar dat leerlingen de verantwoordelijkheid voor de ‘waarheid’ externaliseren zonder de resultaten van de grafische rekenmachine kritisch te toetsen aan het eigen inzicht. Ze grijpen snel naar de grafische rekenmachine zonder eerst zelf na te denken. Dat is geen goed uitgangspunt voor wiskundig denken, zoals dat bijvoorbeeld in vervolgoopleidingen wordt gevraagd.

Ten derde biedt de huidige generatie rekenmachines de mogelijkheid programma's te schrijven of te importeren. Op die manier kunnen allerlei standaardprocedures in de rekenmachine worden opgeslagen, zoals de berekening van nulpunten met de abc-formule, berekening van integralen en volumina van omwentelingslichamen, bepaling van raaklijnen en uiteenlopende statistische toetsen. Door toename van opslagcapaciteit en rekenkracht is dit fenomeen moeilijk beheersbaar of controleerbaar. De vraag rijst dan wat een eindexamen waarbij de grafische rekenmachine wordt gebruikt precies meet.

Uit onderzoek van onder andere Van Streun en anderen (1997) blijkt dat de grafische rekenmachine met name zwakkere leerlingen steun biedt. De vraag is echter of het onderwijs erin is geslaagd een dergelijk apparaat in het onderwijs en het curriculum te integreren op een manier die het wiskundige denken en de vaardigheid van de leerlingen bevordert. Hier moet wellicht ook een onderscheid gemaakt worden tussen havo, waar toepassingen een grote rol spelen, en vwo, waar een meer wetenschappelijke benadering past.

Uiteraard is de grafische rekenmachine een krachtig didactisch hulpmiddel om snel de grafiek van een functie te onderzoeken, om een tabel door te rekenen of om een antwoord te controleren. Dit is het ‘use to learn’-gebruik dat de commissie voorstaat. De implementatie is echter te zeer

gericht geweest op het leren gebruiken van het apparaat, 'learn to use'. Inmiddels, na een klein decennium grootschalig gebruik, is het duidelijk dat het belang hiervan wordt overschat; de leerlingen hebben relatief weinig ondersteuning en stimulering nodig voor ICT-gebruik.

Vooruitblik

Met deze ervaringen met de grafische rekenmachine in het achterhoofd wenden we ons nu tot de toekomst, een toekomst waarin ICT op een vanzelfsprekende manier in de wiskundeles is geïntegreerd en een bijdrage levert aan het verwezenlijken van de onderwijsdoelen. De commissie onderscheidt in het wiskundeonderwijs drie soorten gebruik van ICT.

Allereerst is er ICT voor *communicatie* en samenwerking: email, MSN, elektronische leeromgevingen en internet. Het gevolg hiervan is een toegenomen toegankelijkheid tot kennis en tot anderen, voor zowel leerling als docent. In het bijzonder kan een docent nu ook buiten lestijd in contact staan met leerlingen.

Ten tweede kan ICT functioneren als – al dan niet docentgestuurd – *leermiddel*. Voor een docent die ondersteund wordt door voldoende hard- en software betekent de moderne technologie een uitbreiding van de beschikbare leermiddelen. Met een op een beamer aangesloten computer in het lokaal kunnen tal van wiskundige concepten dynamisch gevisualiseerd worden. Met oefenapplets, zoals bijvoorbeeld beschikbaar op www.wisweb.nl, kunnen leerlingen oefenen en automatisch worden voorzien van feedback, en kan de docent op afstand de vorderingen van de leerlingen volgen. De meest verregaande vorm van ICT als leermiddel in het wiskundeonderwijs is de ICT-gebaseerde wiskundemethode zoals bijvoorbeeld Ratio.

Ten derde komen er steeds meer ICT in de vorm van kant-en-klaar *rekengereedschap* in de handen van de leerling: de grafische rekenmachine, statistische pakketten en computeralgebra. Deze tools zijn meer dan de ICT-leermiddelen didactiekvrij en staan de leerlingen in principe voortdurend ter beschikking: de grafische rekenmachine is altijd onder handbereik en computerapplicaties kunnen draaien op de schoolcomputer of op de PC thuis.

In de visie van de commissie dient ICT in handen van de leerling verrijking en verdieping. Geavanceerde technologieën kunnen werk uit handen nemen en concentratie op hoofdzaken bevorderen. Het is echter van groot belang dat hiervan geen negatieve invloed uitgaat op de begripvorming en de beheersing van basisvaardigheden. Een zekere mate van basisvaardigheid en parate kennis is onontbeerlijk voor het wiskundig inzicht en voor een efficiënte probleemaanpak. Het instrumenteel ICT-gebruik mag de ontwikkeling en onderhoud van deze basisvaardigheden niet naar de achtergrond dringen. De organisatie van toetsing is hierbij van groot belang. Het ICT-gebruik dient gericht te zijn op 'use to learn' en heeft een zelfstandige leerling voor ogen die op de aangeleerde wiskundige methoden vertrouwt.

Standpunt 10

De rol van educatieve software moet zijn 'use to learn' en niet 'learn to use'. Het gebruik van ICT staat ten dienste van het onderwijsproces, van het leren van wiskunde. Bij het gebruik van ICT als rekengereedschap is het zaak ervoor te zorgen dat dit de ontwikkeling en het onderhoud van de basisvaardigheden niet in de weg staat. In dit licht is een heroverweging van het huidige gebruik van de grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs gewenst.

Hiermee is nog lang niet alles gezegd – er zijn nog praktische problemen genoeg en een aantal fundamentele vragen is niet beantwoord. De vraag is bijvoorbeeld hoe leerlingen kunnen leren ICT op een verstandige manier bij het wiskundige werk te betrekken, zeg maar het 'use to apply'. Of hoe 'learn to use' en 'use to learn' op een natuurlijke manier hand in hand gaan en aanleiding

zijn tot het verwerven van wiskundig inzicht en vaardigheid. Daarnaast is het onderscheid tussen rekenmachine en computer snel aan het vervagen. Er is alle reden om aan te nemen dat in 2010 draagbaar materieel gebruikt zal kunnen worden dat meer lijkt op de huidige computers dan op de huidige grafische rekenmachine. De vraag is hoe de onderwijspraktijk daarvan het best kan profiteren.

Om deze en andere vragen te beantwoorden zijn toegepast didactisch onderzoek en goed gecontroleerde onderwijsexperimenten noodzakelijk die leiden tot een eenduidige wijze van inzet en bijbehorende nomenclatuur.

Standpunt 11

Onderzoek en experimenten op het gebied van een verantwoord gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs zijn noodzakelijk. Het voorgestelde onderzoek moet zich richten op

- a. het ontwikkelen van een ICT-didactiek die zich toespitst op 'use to learn';*
- b. het tegengaan van de genoemde neveneffecten van de huidige generatie rekenmachines;*
- c. het bestuderen van de mogelijkheden en onmogelijkheden van rekenmachines met faciliteiten voor symbolische manipulatie zoals computeralgebra.*

8. Aansluiting en leerlijnen

Bij het leren zijn doorlopende leerlijnen van groot belang. Cruciaal daarin is de aansluiting bij ‘scharnierpunten’ in de loopbaan van de leerling, zoals de overgang van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs, de overgang van onderbouw naar Tweede Fase en de overgang van voortgezet naar hoger onderwijs. Ook de leerroutes vmbo-mbo-hbo en havo-vwo vragen de nodige aandacht. Daarnaast is de aansluiting tussen wiskunde en andere schoolvakken een factor van betekenis.

Een goede aansluiting omvat meer dan continuïteit in de programmalijnen. We onderscheiden de volgende aspecten.

- *Programmatisch-inhoudelijke doorloop* van kennis en vaardigheden, inclusief de eindtermen uit de vooropleiding. Hebben de leerlingen voldoende wiskunde gehad, is het beheersingsniveau voldoende en kennen opleiders uit vervolgopleidingen de voorkennis van hun instroom?
- *Pedagogisch-didactische continuïteit*, zoals bijvoorbeeld de mogelijke verschuivingen van aandacht voor contexten naar interne wiskundige structuren en van inductief naar deductief onderwijs; maar evenzeer de manier waarmee wiskunde in andere vakken functioneert, inclusief het gebruik van andere notaties, methoden en symbolen.
- *Andere leeromgeving* waarin de leerling terecht komt. Denk bijvoorbeeld aan de vertrouwde grafische rekenmachine die in het hoger onderwijs geen plaats heeft; maar ook aan de wijze van toetsen en beoordelen, de vorm van en het taalgebruik in de leermiddelen, het werken in projecten, het onderwijstempo en de omvang van de leertaken. Ook de overgang van de onderbouw naar de Tweede Fase kent dit type aansluitaspecten: andere docenten, andere roosters en studieruimten, andere soorten opdrachten, etc.
- *Verwachtingen over de nieuwe opleiding*: is de instromer bekend met wat hem in de vervolgfases te wachten staat, zijn eigen rol en verantwoordelijkheden in het nieuwe onderwijsproces, de vereiste voorkennis, vaardigheden, capaciteiten?

De overgang van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs, die van cruciaal belang is omdat in het basisonderwijs de doorlopende leerlijnen een aanvang nemen, komt in een vervolgdocument aan de orde; hieronder bespreken we kort de aansluitingsproblematiek van de andere ‘scharnieren’.

Onderbouw – Tweede Fase

Als gevolg van het programma van de ‘oude’ basisvorming voor de gehele breedte van de leerlingpopulatie heeft de wiskunde in de onderbouw havo-vwo op dit moment overwegend een formeel karakter en wordt er weinig aandacht besteed aan abstractie. Elementaire algebraïsche vaardigheden worden veelal te weinig geoefend of toegepast en het ontbreekt de leerling aan parate kennis. In de vierde klas, met name in de N-profielen, nemen de abstractie en het werktempo abrupt toe. Dit zorgt voor ongewenste aansluitingsproblemen, wat op sommige scholen momenteel een reden is om leerlingen de N-profielen af te raden. De onderbouw moet havo- en vwo-leerlingen in deze zin beter voorbereiden op de Tweede Fase; een juist beeld van wat wiskunde is en wat het aan vaardigheden vereist kan de keuze ervoor stimuleren. Het onderhoud en de beheersing van geleerde elementaire vaardigheden zijn daarbij essentieel.

Wiskunde kent, ook als schoolvak, een sterk gestapelde structuur. Elk nieuw concept bouwt voort op het gebruik van en inzicht in eerder geleerde begrippen. Daarom zijn zorgvuldig

vormgegeven doorlopende leerlijnen van groot belang. In het bijzonder betekent dit dat deze lange leerlijnen al moeten aanvangen in de nieuwe onderbouw. Hetzelfde geldt voor de routinematig te beheersen vaardigheden en de parate kennis van eigenschappen en begrippen die op hun beurt weer bouwstenen vormen voor nieuw te ontwikkelen concepten.

Versterking van de wiskunde in de onderbouw heeft consequenties voor toekomstige M- en N-leerlingen. Die zullen daardoor geleidelijk zwaarder belast worden, culminerend in de derde klas. De commissie pleit daarom voor een geleidelijke differentiatie in leerjaar 3, zonder dat dit tot een overladen programma of onomkeerbare keuzes leidt. Geschikte onderwerpen stellen leerlingen in staat zich in klas 3 een adequaat beeld te vormen van de wiskunde in de verschillende profielen van de Tweede Fase en maken een oriëntatie op en determinatie voor de nieuwe wiskundevakken in het vierde leerjaar mogelijk. Een kloof tussen verwachtingen en werkelijkheid wordt daarmee voorkomen.

Standpunt 12

Onderbouw en Tweede Fase van havo-vwo moeten in elk van de genoemde opzichten – programmatisch, didactisch, qua leeromgeving en verwachtingen - beter op elkaar aansluiten. Zowel het programma als de didactiek moeten als een continue lijn door het voortgezet onderwijs lopen. De herprogrammering van lange leerlijnen vanuit de onderbouw moet hand in hand gaan met een geleidelijke niveauperhoging en differentiatie naar te kiezen wiskundevakken in het vierde leerjaar.

vmbo-mbo-hbo

Meer dan 60% van de mbo-abituriënten op niveau 4 stroomt direct of indirect door naar het hbo. Alle studenten met een middenkader opleiding in het mbo (bol4, theoretische leerweg) zijn volgens de wet drempelloos toelaatbaar in het hbo, ongeacht de sector. Vooral in de sector techniek van het hbo, het htvo, wordt een groot beroep op wiskunde gedaan, zowel qua kennis als vaardigheden. In de overige sectoren gaat het vooral om statistiek en gecijferdheid, met name in de economische hbo-opleidingen.

De route vmbo-mbo-hbo kent echter veel aansluitingsproblemen. In veel gevallen komt de leerling in het mbo niet meer in aanraking met wiskunde. Het is geen examenvak en het ooit zo succesvolle doorstroomprofiel mto-htvo, met onder andere gewaarborgde wiskunde deexamens, bestaat formeel niet meer. Om dit te ondervangen wordt op sommige mbo-instellingen nog wel wiskunde aangeboden aan degenen die willen doorstromen naar het hbo; ook zijn er hbo-instellingen die bijspijker cursussen organiseren. Dit zijn echter geen structurele oplossingen voor de gesignaleerde aansluitproblematiek.

Hoewel dit punt strikt genomen buiten de taakstelling van cTWO valt, pleit de commissie voor een structurele plaats voor wiskunde in het mbo, zodat de route vmbo-mbo-hbo weer levensvatbaar wordt. Het te ontwikkelen programma wiskunde B havo kan model staan voor de inhoud van wiskunde op het mbo.

Voortgezet onderwijs – hoger onderwijs

Vrijwel alle leerlingen van havo en vwo vervolgen na het eindexamen hun opleiding in het hoger onderwijs. Wiskunde is daarvoor een niet te onderschatten kennis- en vaardigheidsgebied. Een goede aansluiting in wiskunde is daarom essentieel voor een soepele overgang naar de vervolgopleiding. Het schoolvak wiskunde en wiskunde in het vervolgonderwijs moeten één lange leerlijn vormen; daarom is het van belang dat zij qua stijl en qua filosofie goed op elkaar aansluiten.

In hoofdstuk 3 is al opgemerkt dat de Tweede Fase niet volledig heeft uitgewerkt zoals was beoogd. Wellicht heeft destijds de wens van het hoger onderwijs om de zelfstandigheid van de leerling te bevorderen, te veel gewicht gekregen en is het belang van algemene vaardigheden, los van vakkennis, te eenzijdig benadrukt. Overigens geven de ontwikkelingen in het hoger onderwijs sinds de invoering van de Tweede Fase een gemengd beeld: veel hbo-opleidingen zetten in op competentiegericht projectgestuurd onderwijs; universitaire opleidingen zijn eerder schoolser geworden en blijven zich op fundamentele vakkennis richten. Tegen deze achtergrond en de hierboven geschetste brede opvatting van aansluiting is de commissie van mening dat het van groot belang is dat het voortgezet en het hoger onderwijs nauw met elkaar samenwerken om een goede aansluiting te bewerkstelligen. Contacten tussen docenten uit beide “werelden” is daarbij van essentieel belang, evenals kenniscirculatie. De balans tussen aandacht voor algemene vaardigheden en vakkennis van (in ons geval) wiskunde moet worden hersteld.

Standpunt 13

Een goede voorbereiding op de verschillende vervolgttrajecten is een belangrijke randvoorwaarde voor de inrichting van de verschillende wiskundevakken in de Tweede Fase. Samenwerking tussen het voortgezet onderwijs, het middelbaar beroepsonderwijs en het hoger onderwijs is noodzakelijk om per wiskundevak de balans te bepalen tussen vaardigheid, wiskundige inhoud en toepasbaarheid. In deze samenwerking dienen ook de pedagogisch/didactische continuïteit, de verandering van leeromgeving en het scheppen van juiste studieverwachtingen een plaats te krijgen.

Wiskunde en andere schoolvakken

In de huidige situatie komen wiskundige concepten veelal in andere vakken terug zonder dat leerlingen het verband zien. Omgekeerd komen in de wiskundeles contexten uit andere vakken aan de orde, met vaak afwijkende notatie en terminologie, eveneens zonder door leerlingen als zodanig herkend te worden. Beide situaties zijn verwarrend voor de leerlingen, schetsen een verkeerd beeld van de samenhang tussen kennisgebieden terwijl goede toepassingen van wiskunde onbenut blijven.

Dit probleem is hardnekkig. Het cultuurverschil tussen bijvoorbeeld het wiskunde- en het natuurkundeonderwijs is de laatste decennia sterk toegenomen. Ook leraren hebben er moeite mee de verbanden nog te zien. De aansluiting tussen wiskunde en economie en aardrijkskunde heeft eveneens zorgvuldige aandacht nodig.

De samenhang met andere vakken dient te verbeteren, onder andere door goede afstemming met de betreffende vakvernieuwingscommissies. Daadwerkelijke afstemming kan slechts tot stand komen als de programma's en leerlijnen in samenhang beschouwd en ontwikkeld worden. Dit draagt ook bij aan een adequate voorbereiding op vervolgoopleidingen, waar wiskunde immers ook in andere disciplines functioneert.

Het lijkt de commissie verstandig dit aansluitingsprobleem in zijn algemeenheid in kaart te brengen, zodat methodeontwikkelaars een basisschema hebben voor de tijdsfasering van de onderwerpen. Hierdoor kunnen onderwerpen bijvoorbeeld tijdig bij wiskunde worden geïntroduceerd voordat ze bij een ander vak aan de orde komen. Hier is ook een adviestaak weggelegd voor de profielcommissies.

havo-vwo

De aansluiting in de wiskunde bij de overgang van het havo naar het vwo verdient ook de aandacht. Het dient voor havo-abituriënten mogelijk te zijn om de overstap naar vwo-5 te maken. Echter, het belang van een goede aansluiting tussen vo en wo heeft de prioriteit. In alle gevallen

moet een havo-leerling die doorstroomt naar het vwo weten waar hij voor wat betreft wiskunde aan begint, wat hij daarvoor extra moet doen en hoe de school hem daarbij ondersteunt.

Standpunt 14

In de ontwikkeling van de vernieuwde vakken van de Tweede Fase moet de samenhang tussen de verschillende wiskundevakken en andere vakken worden verbeterd, evenals de onderlinge afstemming. Het gaat daarbij niet uitsluitend om de exacte vakken, maar ook bijvoorbeeld om economie en aardrijkskunde. Bij programmatische keuzes en/of dilemma's voor verbetering van de horizontale overstap van havo naar vwo ten opzichte van de verbetering van de aansluiting vo-ho heeft de laatste het primaat.

9. Toetsing en examinering

Het Centraal Examen (CE) is in Nederland in praktijk een richtinggevende standaard voor het niveau van het schoolexamen en het onderwijs als geheel – scholen richten zich met het schoolexamen immers veelal op het CE. Daarmee bepaalt het voor een belangrijk deel de invulling van de eindtermen. Voor wat betreft het Centraal Examen is een heroverweging gewenst waar het gaat om de norm voor algebraïsche vaardigheden, notatie en formulering, hulpmiddelen en het gebruik van contexten.

Norm voor algebraïsche vaardigheden

Op verschillende plaatsen in dit stuk is al gewezen op de aansluitingsproblematiek vo-ho met betrekking tot algebraïsche vaardigheden. Docenten uit het hoger onderwijs die de eindtermen van het huidige wiskunde A en B bezien, tonen zich daarmee tevreden – er vanuit gaande dat de eindexamenkandidaten zich deze inderdaad met een redelijke mate van beheersing eigen hebben gemaakt. De praktijk is echter anders, omdat de norm in de huidige examens te laag wordt gelegd. Voor rekenfouten worden vaak weinig punten afgetrokken, terwijl beheersing op het niveau van 55% in het vervolgonderwijs niet volstaat. In het hoger onderwijs, met name in de bèta-technieksector en op de pabo, worden dan ook ‘reparatiecursussen’ geïntroduceerd. Het hoeft geen betoog dat leerlingen die slagen voor het eindexamen voldoende toegerust moeten zijn voor het vervolgonderwijs.

Om het gewenste hogere beheersingsniveau te bereiken, vallen er verschillende wegen te bewandelen. Van het grootste belang is een samenhangend programma, waarin reken- en algebraïsche vaardigheden in alle leerlijnen zoveel mogelijk terugkomen en zodoende op een natuurlijke manier bijgehouden worden. Een ander idee is het invoeren van gestandaardiseerde jaartoetsen, waarbij per jaarlaag de voortgang in elementaire reken- en algebraïsche vaardigheden bijgehouden wordt en landelijk of regionaal door de scholen zelf wordt vergeleken. De basis moet worden gelegd in de onderbouw. Ook het CE kan hieraan bijdragen door algebraïsche en formulevaardigheden expliciet en met voldoende diepgang te toetsen. De normen hiervoor dienen te worden heroverwogen. Uiteraard geldt ook voor dit aspect van het wiskundeonderwijs dat er per examenvak verschillende wiskundige vaardigheden aan de orde zijn.

Standpunt 15

Het beheersingsniveau van geautomatiseerde wiskundige en in het bijzonder algebraïsche vaardigheden vereist een voortdurende en zorgvuldige toetsing. Deze vaardigheden dienen ook op het Centraal Examen getoetst te worden, waarbij aan de beheersing hoge eisen worden gesteld.

Notatie en formulering

Bij het bespreken van kernconcepten en denkactiviteiten is in hoofdstuk 4 gepleit voor aandacht voor het wiskundig correcte formuleren en redeneren. In samenhang met het vorige standpunt betekent dit dat een leerling ook in toetssituaties zelfstandig een complete wiskundige redenering op moet kunnen schrijven, voorzien van een adequate wiskundige terminologie en notatiewijze.

Standpunt 16

De beheersing van correcte wiskundige terminologie en notatie is een aspect van het wiskundeonderwijs dat een structurele plaats verdient – door het hele onderwijs heen tot en met de eindexamens.

Hulpmiddelen bij het CE

In hoofdstuk 7 over ICT is de rol van de grafische rekenmachine in het CE aan de orde gekomen. Mede door de beschikbaarheid van de grafische rekenmachine is de toetsing van algebraïsche vaardigheden op het CE in het verleden niet uit de verf gekomen, al geven de examens wiskunde B1 en B12 van 2006 een gunstiger beeld. Daarnaast is de kwestie aangeroerd van de verschillende mogelijkheden die de grafische rekenmachines hebben, doordat leerlingen er verschillende aanvullende informatie en programmatuur op hebben gezet.

De vraag is hoe het Centraal Examen hiermee om moet gaan. Een optie is om algebraïsche vaardigheden expliciet te toetsen, dan wel sterker in de opgaven in te bouwen. Ook kan de mogelijkheid overwogen worden om een deel van het examen technologievrij af te nemen, zoals in sommige andere landen het geval is.

Een aparte discussie is nodig over het gebruik van rekenmachines die in staat zijn formules symbolisch te manipuleren. Op dit moment zijn deze op het eindexamen niet toegestaan. De aanwezigheid van een dergelijke rekenmachine op het eindexamen maakt het moeilijker om handmatige vaardigheden te toetsen zoals differentiëren, vergelijkingen exact oplossen, haakjes wegwerken, of breuken optellen. De commissie pleit daarom voor terughoudendheid in het toestaan van symbolische rekenmachines bij het examen.

Ten slotte over de rol van de formulekaart in het CE. De invoering van de formulekaart is destijds ingegeven door het beeld van een leerling die de formules wel kent, maar wie de precieze details even ontschoten zijn. De realiteit is echter dat een groot aantal leerlingen de formules niet meer uit het hoofd leert en daarom ook niet herkent. De rol en de omvang van de huidige formulekaart moeten dan ook heroverwogen worden. Gezien de praktijk in veel hbo-opleidingen om de formulekaart wel toe te laten, is het goed mogelijk dat deze heroverweging voor het havo tot andere conclusies leidt dan voor het vwo.

Standpunt 17

Hulpmiddelen, zoals ICT en de formulekaart, mogen datgene dat getoetst wordt (bijvoorbeeld algebraïsche vaardigheden) niet in de weg staan. Heroverweging van de plaats van de grafische rekenmachine en de formulekaart op het CE is noodzakelijk.

Contexten bij het CE

In hoofdstuk 6 is aangegeven dat de nadruk in het wiskundeonderwijs ligt op concepten die zich ontwikkelen vanuit authentieke toepassingen die aansluiten bij de karakteristiek van het vak. De vraag is nu welke plaats contexten hebben in het CE.

De commissie ziet een belangrijk verschil in de rol van contexten tussen de examens wiskunde A/C en wiskunde B (en mogelijk op termijn wiskunde D). In de examens wiskunde A bestaat er een traditie van opgaven waarin de context essentieel is voor de vraag: de context *is* feitelijk de vraag. De commissie beschouwt dit als een goede situatie en ziet graag een vergelijkbare stijl van examenvragen voor wiskunde C.

De contexten in de huidige examens wiskunde B zijn – met uitzondering van kansrekening en statistiek – dikwijls niet relevant voor de getoetste kennis en vaardigheden; zulke contexten verlenen de examenvragen geen extra betekenis of zin, maar leiden vooral af en maken het de kandidaat alleen maar lastiger (Kleijne, 2006). Voor wiskunde B (en op termijn mogelijk voor wiskunde D) pleit de commissie er dan ook voor om buitenwiskundige contexten alleen te gebruiken wanneer de aard van de opgave daar specifiek om vraagt. Gezien het meer praktische karakter van de wiskunde op het havo kan in wiskunde B van het havo meer accent op toepassingen worden gelegd dan op het vwo.

Standpunt 18

Een herbezinning op de rol van contexten in het CE is gewenst. Daarbij dient het karakter van de verschillende wiskundevakken betrokken te worden.

10. Implementatie, scholing en nascholing

Het opstellen van examenprogramma's is slechts een onderdeel van de vernieuwing van het wiskundeonderwijs. De werkelijke vernieuwing staat of valt met de implementatie, waarin de (na)scholing van docenten een cruciale factor is.

Ontwikkeling van de programma's

De periode 2006-2009 wordt gebruikt voor het ontwikkelen van lesmateriaal dat inspirerende voorbeelden zal bevatten. Het lesmateriaal wordt ontwikkeld door docenten, met steun van deskundigen uit het vak en de vakdidactiek. Om de haalbaarheid en onderwijsbaarheid te onderzoeken wordt het materiaal uitgetest op een aantal proefscholen. Samenwerking met het hoger onderwijs wordt gestimuleerd via regionale steunpunten. Het Platform Bèta Techniek ondersteunt dit proces met middelen uit het Universumprogramma. Door middel van artikelen, voordrachten en veldraadplegingen houdt de commissie in de komende periode met alle betrokkenen contact over de vorderingen.

Tijdens het werken aan bovengenoemde taken zal de commissie intensief overleggen met het veld van wiskundeleraren in havo-vwo, en de aansluitende opleidingen in het hoger onderwijs consulteren. Ook wordt afstemming nagestreefd met de commissies en instellingen die parallel aan het werk zijn met de leerplannen voor andere vakgebieden. In de geplande experimenteerperiode kunnen op geselecteerde proefscholen experimentele examens worden afgenomen op basis van het vernieuwde, voorlopige curriculum, dat de leerlingen feitelijk hebben doorlopen. De evaluatie van dit lesmateriaal zal in 2009 resulteren in een eindrapportage en eindvoorstellen voor nieuwe wiskundeprogramma's voor havo en vwo.

De initiële opleiding van wiskundeleraren

Zoals al in hoofdstuk 5 is uiteengezet is een sterke expertise van de wiskundedocent een cruciale voorwaarde voor succesvolle implementatie en adequate invulling van het vernieuwde wiskundeonderwijs. Niet alleen moet die wiskundedocent de didactische ruimte en faciliteiten krijgen om een dergelijk kwalitatief sterk programma uit te voeren, ook moet die expertise in de initiële opleiding en nascholing worden verworven. Over de kwaliteit van een deel van de initiële lerarenopleidingen maakt de commissie zich op grond van signalen uit het onderwijsveld ernstig zorgen. In de hbo-opleidingen staan vakinhoud en vakdidactiek al jarenlang onder druk, vooral omdat dit specialistisch onderwijs is voor kleine aantallen studenten, en daarmee dus duur. In de wet op de Beroepen in het Onderwijs (BIO, 2006) vormen vakinhoud en vakdidactiek samen slechts één van de zeven competenties van de docent. De andere zes competenties zijn niet vakspecifiek. De commissie is verre van gelukkig met deze ontwikkeling en acht ze ook in strijd met het beleid van de overheid in wetten en actieplannen om in het onderwijs prioriteit te geven aan de ontwikkeling van een toppositie voor Nederland als kennisland. Kennisaspecten, gerepresenteerd door vakinhoud en vakdidactiek, dienen niet ondergeschikt te worden gemaakt aan algemene sociale en pedagogische vaardigheden. Het beleid van de overheid zal in dat opzicht duidelijker gericht moeten worden op een versterking van de vakinhoudelijke en vakdidactische component in de praktijk van de opleiding tot leraar, die behalve pedagoog immers ook vakleerkracht is.

Standpunt 19

De vakinhoudelijke en vakdidactische scholing van aankomende docenten is essentieel voor de kwaliteit van het toekomstig wiskundeonderwijs. Dit betreft zowel de hbo tweedegraads opleidingen, de post-hbo eerstegraads opleidingen als de universitaire eerstegraads opleidingen.

Een probleem bij de hbo-opleidingen is dat de vaksecties klein zijn en weinig invloed hebben binnen de instelling. De steun voor een sterkere inbreng van vakinhoud en vakdidactiek zal daarom van buiten het hbo moeten komen. Een nauwere samenwerking tussen hbo en wo, zoals indertijd bij de start van de nieuwe tweedegraads lerarenopleidingen (NLO's) het geval was, lijkt gewenst. Voor de post-hbo eerstegraads opleidingen en de universitaire lerarenopleidingen is een structurele samenwerking, zoals die in sommige plaatsen regionaal is gegroeid, noodzakelijk. De vakinhoudelijke en vakdidactische expertise van de universiteiten gecombineerd met de pedagogische en didactische inbreng van de post-hbo eerstegraads opleidingen kan leiden tot kwalitatieve en kwantitatieve versterking van de eerstegraads lerarenopleidingen. De universitaire eerstegraads opleidingen op master- of master+-niveau leveren maar weinig studenten af. Deze opleidingen zouden aantrekkelijker gemaakt kunnen worden, bijvoorbeeld door ze te verkorten door middel van flexibele leerroutes en door toelating van anders opgeleide afgestudeerden van hbo en wo (zij-instromers), onder voorwaarde van voldoende vakinhoudelijke deskundigheid.

Standpunt 20

Het vakinhoudelijk niveauverschil tussen post-hbo eerstegraads lerarenopleidingen en de universitaire eerstegraads lerarenopleiding dient te worden verkleind; door structurele samenwerking kan de kwaliteit en kwantiteit van de uitstroom van gekwalificeerde eerstegraads wiskundeleraren worden vergroot.

Nascholing van zittende docenten

Uit de leeftijdsopbouw van het huidige lerarencorps blijkt dat een hoog percentage aan gekwalificeerde eerstegraads bevoegde wiskundeleraren de komende jaren met pensioen zal gaan. Op tal van scholen geven tweedegraads wiskundeleraren les in de Tweede Fase van havo en vwo, terwijl steeds meer onbevoegde leraren wiskundelessen in de onderbouw overnemen. Ook bij de op zichzelf waardevolle recente zij-instroom van leraren met een andere beroepsachtergrond schort het niet alleen aan ervaring maar ook aan vakinhoudelijke of vakdidactische expertise. Gelet op de eerder gesignaleerde centrale rol van de leraar bij een goede implementatie van het vernieuwde wiskundeonderwijs is een uitgebreide en permanente nascholing van zittende wiskundeleraren noodzakelijk. Het nascholingsplan van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren beoogt een impuls te geven voor kwalitatief sterke nascholing, aansluitend bij de noodzakelijke expertise voor het vernieuwde wiskundeonderwijs. De commissie zal zich bij de minister inzetten voor financiële ondersteuning van deze nascholing en stelt voor om dergelijke nascholing op een zodanige wijze af te ronden (denk aan een toets of een eindopdracht) dat het effect voor de docent aantoonbaar is.

Standpunt 21

De invoering van de nieuwe programma's per 2010 heeft een permanente landelijke nascholing. De inhoud daarvan betreft voor de lespraktijk relevante vakinhouden en achtergronden, didactische werkwijzen, en uitwisseling van ervaringen met onderwijs en toetsing.

Stimulans voor professionele ontwikkeling

Al decennia lang kent het voorgezet onderwijs een sterke stroom van onderwijsgeevenden die zich door vakinhoudelijke scholing in hun vrije tijd opwerken van leraar in het basisonderwijs tot tweedegraads leraar in het voortgezet onderwijs en vervolgens tot eerstegraads leraar. De zo gekwalificeerde leraren combineren een zeer ruime pedagogische ervaring met vakinhoudelijke expertise en zijn bijzonder waardevolle leden van de vaksectie. Een gevolg van het recent

ingevoerde functiewaarderingssysteem en de wet BIO is dat een docent niet extra betaald krijgt als hij zich vakspecifiek ontwikkelt omdat het salarisperspectief van een tweedegraads wiskundedocent in de onderbouw precies hetzelfde is als dat van een eerstegraads wiskundedocent. Ook de competente vakleraar, die veel tijd en energie investeert in het zich bekwamen in nieuwe verworvenheden, versterkt daarmee niet zijn carrièreperspectief. Onderwijskwaliteiten van goede leraren, die hun vakinhoudelijke en vakdidactische competentie op peil brengen of houden, worden in scholen onvoldoende gehonoreerd. De commissie stelt zich vierkant op achter de analyse en het standpunt van de onderwijsbonden uit 2006:

“Het vak van docent in het voortgezet onderwijs is toe aan een forse opwaardering. De docent als professional moet weer meer ruimte (en tijd) krijgen om zelf het onderwijs vorm te geven.”

In de toelichting schrijven de bonden:

“Aanleiding voor het voorstel is de tendens tot downgrading van de functie van leraar in het voortgezet onderwijs. Terwijl er maar mondjesmaat LC-functies (schaal 11) worden uitgereikt, dreigt het aantal LD-functies (schaal 12) steeds verder af te nemen. De grote meerderheid van de docenten in het voortgezet onderwijs blijft steken in een LB-functie (schaal 10).”

Deze algemene situatie heeft repercussies voor de uitvoering van onze taak. Dit leidt tot het volgende standpunt:

Standpunt 22

De wet Beroepen in het Onderwijs stimuleert scholen en docenten niet om zich in te zetten voor een versterking van de vakinhoudelijke en vakdidactische kwaliteiten, die onder meer noodzakelijk zijn voor de implementatie van de voorgestelde onderwijsvernieuwingen. Maatregelen van OCW moeten hierin in positieve zin verandering brengen.

Bijlage A

Samenstelling cTWO

De commissie Toekomst WiskundeOnderwijs is als volgt samengesteld.

- Roel van Asselt, Saxion Hogeschool Enschede / LICA
- Frits Beukers, hoogleraar wiskunde UU
- Jan Blankespoor, leraar hbo
- Henk Broer, hoogleraar wiskunde RUG, voorzitter kamer Wiskunde VSNU
- Paul Drijvers (secretaris), onderwijsontwikkelaar Freudenthal Instituut
- Swier Garst, leraar wiskunde
- Carel van de Giessen, leraar wiskunde
- Rainer Kaenders, vakdidacticus RUN
- Wim Kleijne, oud-inspecteur onderwijs, lid van beide profielcommissies
- Marian Kollenveld, leraar wiskunde en voorzitter NVvW
- Mark Peletier, hoogleraar wiskunde TUE
- Dirk Siersma (voorzitter), hoogleraar wiskunde Universiteit Utrecht, voorzitter NOCW
- Anne van Streun, emeritus hoogleraar en vakdidacticus RUG
- Chris Zaal, docent wiskunde-educatie en onderwijsontwikkelaar UvA

Bijlage B

Bijdragen naar aanleiding van het concept-visiedocument

Een groot aantal personen en instanties heeft gereageerd op eerdere versies van dit visiedocument dan wel op andere wijze meegedacht. Ook zijn middels de door het SLO georganiseerde veldraadpleging (11 oktober 2006) en op het forum van www.ctwo.nl veel reacties binnengekomen. De commissie heeft veel baat gehad bij deze talrijke bijdragen en dankt alle respondenten, waaronder in het bijzonder:

- J. van de Craats, voorzitter Resonansgroep wiskunde
- A. de Graaf, directeur HBO-raad
- E.M. d'Hondt, voorzitter VSNU
- M.C. van Hoorn, oud-docent wiskunde en redacteur Euclides
- W. Kuipers, secretaris NVvW
- W. Laaper, veldadviseur SLO
- J.A. van Maanen, hoogleraar-directeur Freudenthal Instituut
- J. Steenbrink, voorzitter Kamer Wiskunde VSNU
- P. Vos, coördinator wiskunde D

Een aantal van deze reacties is gepubliceerd op www.ctwo.nl.

Bijlage C

Literatuurverwijzingen

- Adler, J. & Davis, Z. (2006), Opening Another Black Box: Researching Mathematics for Teaching in Mathematics Teacher Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36, 270 - 296.
- Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 42-47.
- Bransford, J.D., Brown, A.L. & Cocking, R.R. (Eds.) (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School Committee on Developments in the Science of Learning*. National Academy Press.
- Dormolen, J. van (1974). *Didactiek van de wiskunde*. Oosthoek.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing - Preface to a Science of Mathematical Education*. Kluwer Academic Publishers.
- Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht, werkboek van de wiskundendidactiek*. Purmerend: Muusses.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up*. National Academy Press.
- Kleijne, W. (2006). Contexten in de examens wiskunde B. *Euclides*, 82(1), 20-22.
- KNAW-klankbordgroep voortgezet onderwijs (2003). *Ontwikkeling van talent in de Tweede Fase*. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg.
- Noss, R. and Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings*. Kluwer Academic Publishers.
- Onderwijsraad (2005). *Betere overgangen in het onderwijs*. www.onderwijsraad.nl.
- Profielcommissie Natuur en Techniek/Natuur en Gezondheid & Profielcommissie Economie en Maatschappij/Cultuur en Maatschappij (2006). *Bruggen tussen Natuur en Maatschappij, ontwerpadvies*.
- Sociaal Cultureel Planbureau (2006). *Wie werken er in het onderwijs?*
- Skemp, R.R. (1986). *The psychology of learning mathematics*. Penguin.
- Streun, A. van, Harskamp, E. en Suhre, C. (1997). Integratie van de grafische rekenmachine. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 16(3), 14-19.