

Rijk aan betekenis

Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs

commissie Toekomst WiskundeOnderwijs

**Concept 18 september 2006
ten behoeve van veldraadpleging oktober 2006**



Inhoud

Inleiding

1. Toekomstperspectief
2. Wiskundeonderwijs rijk aan betekenis
3. Gedifferentieerde onderwijsdoelen
4. Wiskundige concepten en denkactiviteiten
5. De docent centraal
6. Didactische vormgeving
7. De rol van ICT
8. Aansluiting en leerlijnen
9. Toetsing en examinering
10. Implementatie, scholing en nascholing

Inleiding

De commissie Toekomst WiskundeOnderwijs cTWO heeft van de minister opdracht gekregen voorstellen te doen voor nieuwe examenprogramma's voor havo en vwo per 2010. Verder is de commissie gevraagd te adviseren over doorlopende leerlijnen wiskunde van primair onderwijs (po) naar voortgezet onderwijs (vo) en hoger onderwijs (ho) en over didactische ontwikkelingen. In dit visiedocument wordt een aantal standpunten geformuleerd die het uitgangspunt vormen voor de uitvoering van deze taakstelling.

Dit document betreft het wiskundeonderwijs *in havo en vwo*, vanaf basisvorming en onderbouw tot en met de examenprogramma's. Over het vmbo spreekt dit visiedocument zich niet uit, al kunnen sommige standpunten vanwege de gemeenschappelijke basis in de eerste leerjaren van het voortgezet onderwijs ook consequenties hebben voor het wiskundeonderwijs in het vmbo. Op basis van dit document worden examenprogramma's ontwikkeld voor de vakken wiskunde A, B en D (havo en vwo) en C (vwo) en wordt experimenteel onderwijs ontworpen en in de schoolpraktijk beproefd. In een vervolgdokument worden de lange leerlijnen voor de wiskundige kernconcepten in de genoemde vakken verder uitgewerkt en worden aanwijzingen gegeven voor de didactische vormgeving van wiskundeonderwijs, die overeenstemmen met de hier geformuleerde visie. Uiteindelijk leidt dit ontwikkelingsproces tot uitgewerkte examenprogramma's voor de lichte 2010 in 4 havo en 4 vwo, gecombineerd met een beschrijving van de gewenste inhoud en didactische vormgeving van onderbouw en bovenbouw havo-vwo. Deze beschrijving dient als handreiking voor docenten, schoolboekenauteurs, examenmakers en lerarenopleiders.

De vernieuwingscommissie cTWO realiseert zich dat er de afgelopen twintig jaar veel in het wiskundeonderwijs is bereikt en spreekt daarom ook bewust van vernieuwd wiskundeonderwijs en niet van nieuw of modern wiskundeonderwijs. Een grootscheepse herziening van het onderwijs in de wiskunde is niet aan de orde. Wel is het noodzakelijk om het wiskundeonderwijs in de basisvorming en de Tweede Fase te evalueren en waar nodig door accentverschuivingen te sturen. Vanuit een samenhangende visie op het vernieuwde wiskundeonderwijs dienen verworvenheden behouden te worden en koerswijzigingen in gang te worden gezet op de punten waar verbetering noodzakelijk en mogelijk is. De commissie heeft dan ook een toekomstvisie voor ogen waarbij kwaliteit en kwaliteitsverbetering voorop staan.

In dit visiedocument wordt deze toekomstvisie beschreven in het eerste hoofdstuk. Vervolgens wordt in de hoofdstukken 2, 3 en 4 ingegaan op betekenis, doel en inhoud van wiskundeonderwijs, waarbij verschillende doelgroepen worden onderscheiden. De culturele en maatschappelijke betekenis van wiskunde voor iedereen, inclusief gecijferdheid, krijgt in de onderbouw voor diverse groepen leerlingen verschillende accenten, verschillende wiskundige inhouden en een diepgang die aansluit bij de talenten van leerlingen. In de bovenbouw havo-vwo vindt vervolgens een differentiatie in doelen plaats, afhankelijk van de aard van elk van de wiskundevakken A, B, C en D.

De hoofdstukken 5, 6 en 7 gaan over de manier waarop deze doelen voor de verschillende groepen leerlingen kunnen worden bereikt. De positie van de leraar staat daarbij centraal. In hoofdstuk 8 komen de aansluitingsproblematiek en de wenselijkheid van goede samenwerking en afstemming op alle grensvlakken aan de orde. Dit betreft de verticale aansluiting po-vo-ho, maar ook de horizontale naar vakken waarin wiskunde kan en moet functioneren. Hoofdstuk 9 gaat over toetsing en examinering, waar de onderwijspraktijk in belangrijke mate door wordt gestuurd. Het laatste hoofdstuk gaat in op de scholing en nascholing van docenten.

1. Toekomstperspectief

De commissie Toekomst WiskundeOnderwijs heeft voor de jaren na 2010 een toekomstperspectief voor ogen waarin gemotiveerde leerlingen onder leiding van enthousiaste leraren werken aan zinvolle wiskundige inhoud door middel van inspirerende didactische werkwijzen.

Leerlingen

Leerlingen van havo en vwo waarderen wiskunde als een interessant vak, waarin zij tot hun intellectueel plafond worden uitgedaagd en waarin recht wordt gedaan aan de verscheidenheid van hun talenten. Zij ontdekken dat wiskunde onmisbaar is in techniek en wetenschap, maar ook nauw verweven is met cultuur (kunst, filosofie, architectuur) en dagelijks leven (hypotheken, verzekeringen, statistiek). Afhankelijk van het gekozen wiskundevak leren zij wiskundige kennis met inzicht te gebruiken in authentieke maatschappelijke, economische en sociaalwetenschappelijke situaties (wiskunde A en C) of in natuurwetenschappelijke en technische toepassingen (wiskunde B en D). Met name bij wiskunde B en D verwerven leerlingen inzicht in wiskundige structuren en krijgen ze een stimulerende vooruitblik op een vervolgstudie in het natuurwetenschappelijk en technisch hoger onderwijs. Wiskunde D biedt getalenteerde leerlingen de kans om zich exemplarisch te verdiepen en wiskundige probleemstellingen te onderzoeken.

Leraren

Kwalitatief goed onderwijs kan alleen worden gerealiseerd door de inzet van enthousiaste leraren – meesters in hun vak – die in het onderwijs ruimte krijgen voor eigen inbreng. Leraren moet in werktijd de gelegenheid worden geboden om zich de vakkennis en didactische inzichten eigen te maken die nodig zijn om het vernieuwde wiskundeprogramma te realiseren. Onder invloed van wetenschappelijke, technologische en maatschappelijke innovaties veranderen de toepassingen van wiskunde doorlopend. Daarom moeten leraren de faciliteiten hebben om contact te houden met de wiskundige gemeenschap in hoger onderwijs, industrie en bedrijfsleven. Een structureel kader van overheid en bedrijfsleven moet de wisselwerking tussen deze sectoren mogelijk maken en uitwisseling van medewerkers faciliteren.

Wiskundige inhoud

Wiskunde – ‘wisconst’, leer der zekerheden – kenmerkt zich door een aantal kernconcepten en denkactiviteiten, die enerzijds gericht zijn op de ontwikkeling van wiskunde als op zichzelf staand abstract bouwwerk en anderzijds op wiskunde als toegepaste en toepasbare discipline. Onderwijs in kernconcepten – de ‘blik naar binnen’ – wordt afgewisseld met een ‘blik naar buiten’, waarin de relevantie van wiskunde in cultuur, maatschappij, andere schoolvakken, vervolgopleidingen, beroep en wetenschap aan de orde komt.

In het nieuwe programma maken leerlingen kennis met de wiskundige denkwijze en de bijdrage daarvan aan onze samenleving. Logisch redeneren, wiskundig modelleren, analyseren en voorspellen van uitkomsten van kwantitatieve processen vormen daarvan essentiële onderdelen. Er wordt een verscheidenheid aan onderwerpen aangeboden om brede groepen leerlingen te interesseren. Uiteraard bouwt het onderwijs in de Tweede Fase voort op de lijnen die de jaren daarvoor zijn ingezet. Verbreding en verdieping helpen de leerling zich bewust te worden van eigen interesses en ambities. De opbouw en inhoud van het programma en de motiverende probleemstellingen doen een beroep op de intellectuele nieuwsgierigheid van leerlingen en dagen hen uit om wiskundekennis op te bouwen: wiskunde als menselijke activiteit.

Didactische werkwijze

De genoemde doelen van het vernieuwde wiskundeonderwijs zijn te realiseren door leerlingen een aantrekkelijk en uitdagend programma te bieden dat door inspirerende leraren wordt verzorgd. Een actieve leerhouding van leerlingen wordt bevorderd door een scala van wiskundige activiteiten zoals benaderen en schatten, modelleren, wiskundig manipuleren, analyseren, onderzoeken, redeneren en bewijzen. Naast een kwalitatief sterke opbouw van het wiskundig netwerk van concepten en vaardigheden, gekoppeld aan uitdagende probleemstellingen, vereist dergelijk onderwijs een breed spectrum van werkvormen, van klassikale instructie tot en met zelfstandig werken met een sterk accent op reflectie en interactie met de leraar om het vereiste denkniveau te bereiken. Behalve de gebruikelijke werkvormen is er ook ruimte voor bijvoorbeeld het geven van voordrachten, het opstellen en toetsen van modellen, het werken aan interdisciplinaire vakoverstijgende projecten, het optreden van gastsprekers, het zelfstandig uitvoeren van een onderzoek.

Toetsing en examinering leveren, in vorm en inhoud, aan alle genoemde aspecten van het wiskundeonderwijs een positieve bijdrage. Centrale examinering, schoolgebonden onderzoeksopdrachten, projecten, mondelinge tentamens en digitale toetsing van parate kennis leiden tot feedback op en eindbeoordeling van kennis van wiskundige begrippen, formulevaardigheden, analytische en kritische denkkraft, probleemoplossend vermogen en zelfstandige kennisverwerking en onderzoeksvaardigheid. Regionale samenwerking tussen scholen en de instellingen van hoger onderwijs versterken de kwaliteit en validiteit van de schoolgebonden toetsing en examinering.

2. Wiskundeonderwijs rijk aan betekenis

Om verschillende redenen is wiskundeonderwijs van betekenis voor de leerling: vanwege de historische en culturele waarde van de wiskunde, vanwege haar maatschappelijke relevantie en vanwege de ontplooiingskansen die wiskunde biedt. Wiskundeonderwijs moet erop gericht zijn deze rijkdom aan betekenis over het voetlicht te brengen door aandacht te besteden aan wiskunde als eigenstandige discipline én als toepasbare wetenschap.

Historische en culturele waarde

Al eeuwenlang heeft wiskunde een prominente plaats in allerlei vormen van algemeen of beroepsgericht onderwijs, omdat wiskunde een essentiële component is in tal van belangrijke innovaties in cultuur, maatschappij en wetenschap. De Griekse wiskunde heeft een belangrijke bijdrage geleverd aan het getalbegrip; denk bijvoorbeeld aan de ontdekking van irrationale verhoudingen van lengten van lijnstukken: irrationale getallen, die geen verhouding van twee natuurlijke getallen bleken te zijn. Sinds Aristoteles en Euclides heeft het logisch redeneren en het opbouwen van een netwerk van waarheden op basis van enkele basisprincipes (axioma's) een belangrijke plaats in de wetenschap ingenomen. De Griekse wiskundigen hebben op deze manier de meetkunde ontwikkeld en geordend.

In de Arabische tijd realiseerde men zich geleidelijk dat ook met grootheden gerekend kan worden waarvan de waarden onbekend zijn. Dit 'letterrekenen' vormde de inleiding tot de algebra. Het formuleren van problemen in vergelijkingen en formules (algebraïsering) gaf een nieuwe dimensie aan het probleemoplossen en vindt tot op de dag van vandaag toepassing in allerlei disciplines, zoals natuurwetenschappen en economische, technische, medische en sociale wetenschappen.

De geboorte van onze moderne natuurwetenschap en moderne technologie vond plaats toen de wetenschappers zoals Kepler, Newton en Leibniz zich realiseerden dat onze aardse wereld en die van de hemellichamen voldoen aan dezelfde natuurwetten. Die wetten laten zich uitstekend formuleren met behulp van wiskundige (algebraïsche) notatie; de enige manier om de gevolgen van die wetten te bepalen is door wiskundige technieken te ontwikkelen, de differentiaal- en integraalrekening. In wisselwerking met de eerder genoemde wetenschappen heeft deze differentiaal- en integraalrekening (ook wel calculus genoemd) sindsdien een hoge vlucht genomen en ligt ze ten grondslag aan grote vooruitgang op het gebied van medische en andere wetenschappen, technologische ontwikkelingen en maatschappelijke toepassingen.

Sinds het werk van Pascal heeft het redeneren met toeval en kans zich ontwikkeld tot een andere tak van de wiskunde, namelijk de kansrekening en de statistiek. Op basis van verzamelde cijfermatige gegevens worden in maatschappij en wetenschap allerlei beslissingen genomen en voorspellingen gedaan, dikwijls zonder dat de gebruiker zich realiseert dat aan de getrokken conclusies statistische modellen en toevalsprocessen ten grondslag liggen. Talloze voorbeelden van onterechte conclusies op basis van verkeerd begrepen data zijn het gevolg van onbegrip van de onderliggende statistiek.

Bekende moderne takken van wiskunde als wetenschappelijk discipline zijn coderingstheorie en cryptografie (essentieel in de communicatietechniek) en chaostheorie (fractals en dynamische systemen), waarmee leerlingen in het voortgezet onderwijs op dit moment al exemplarisch kennismaken. Andere moderne ontwikkelingen hebben tot nu toe nauwelijks weerslag gevonden in het algemeen vormend onderwijs. Te denken valt aan de speltheorie (Zermelo en Neuman in de twintigste eeuw) die aan de basis ligt van de beschrijving van macro-economische processen, of aan de vruchtbare interactie tussen de moderne wiskunde en de theoretische natuurkunde (kwantummechanica, relativiteitstheorie, snarentheorie).

Maatschappelijke relevantie

Vanuit de invalshoek van de maatschappelijke relevantie gaat het vooral om de vraag wat voor wiskunde leerlingen voor het functioneren in de maatschappij nodig hebben en hoe wiskunde bijdraagt aan hun ontwikkeling tot zelfstandig denkende burgers. Voor alle schoolvakken, en dus ook voor wiskunde, is deze vraag voor de gehele breedte van de populatie niet eenduidig en voor alle tijden te beantwoorden. Sinds de Mammoetwet (1968) benadrukt de politiek het algemeen vormend karakter van het voortgezet onderwijs (nu vmbo, havo, vwo). De verschillende schoolvakken moeten daaraan een bijdrage leveren. In de loop van de tijd variëren de accenten van vormingsideaal van harmonische ontwikkeling tot zelfontplooiing, van nuttigheidsprincipe tot emancipatieprincipe, van competitie-model naar samenwerkingsmodel, van verwerving van vakkennis naar ontwikkeling van algemene vaardigheden.

De nieuwe wet op de onderbouw van het voortgezet onderwijs (2005) noemt drie zaken die het onderwijs dient te ontwikkelen, namelijk:

- Cultureel kapitaal, essentieel voor levenslange en levensbrede persoonlijke ontplooiing en ontwikkeling;
- Sociaal kapitaal, essentieel voor actief burgerschap, integratie en sociale cohesie;
- Menselijk kapitaal met het oog op de inzetbaarheid op de arbeidsmarkt.

In de toelichting op de nieuwe kerndoelen wordt benadrukt dat het ook in het hedendaagse onderwijs om kennisverwerving gaat:

“Kennis als product ontstaat pas in een proces van leren en kan ook pas na zo’n proces functioneren. Het is daarom een misvatting dat een procesmatige beschrijving van de kerndoelen betekent dat vaardigheden of leren leren belangrijker gevonden worden dan kennis.”

In lijn daarmee stelt cTWO zich mede tot doel de wiskundige inhoud van deze kennis opnieuw te formuleren, waarbij rekening wordt gehouden met de desbetreffende doelgroep en de aard van het wiskundevak. In het bijzonder betekent dit dat aandacht besteed wordt aan de ontwikkeling van lange leerlijnen, die in gezet worden in het po en die elke leerling adequaat voorbereiden op vervolgopleiding en beroepspraktijk.

Ontwikkeling van talent

De KNAW bepleit in haar rapport ‘Ontwikkeling van talent in de Tweede Fase’ meer ruimte voor de verscheidenheid van talenten van leerlingen. Ook cTWO is van mening dat het maatschappelijk bijzonder relevant is om veel meer dan de laatste jaren gebruikelijk was in te spelen op de talenten van de leerlingen. Niet het minimale programma of het minimale niveau moet de norm zijn, maar het plafond van de ontwikkelingsmogelijkheden van de leerlingen. Zoals duidelijk blijkt uit de verschillende evaluatierapporten van de basisvorming is dat plafond voor veel leerlingen de laatste jaren lang niet bereikt. De nieuwe wet op de onderbouw laat de scholen de ruimte tot een meer gedifferentieerde invulling van het gemeenschappelijk basisprogramma, waarbij leerlingen bijvoorbeeld ook meer tijd en energie aan wiskunde kunnen besteden. Deze nieuwe structuur van de onderbouw geeft scholen de mogelijkheid om de aansluiting te verbeteren met de vernieuwde Tweede Fase havo-vwo, waar nu ook meer ruimte voor persoonlijke verdieping of verbreding naar keuze mogelijk wordt.

Eigenstandig en toegepast

Wiskunde heeft een duaal karakter, zowel in het onderwijs als in de samenleving als geheel. Enerzijds heeft wiskunde – en schoolwiskunde in het bijzonder – het karakter van een eigenstandige discipline, een bouwwerk van abstracte structuren en redeneringen, dat onafhankelijk is van plaats, tijd, waarnemer, sociale context en andere externe factoren. Anderzijds is wiskunde voor de samenleving van enorm belang door haar universaliteit en haar toepasbaarheid en ontwikkelt ze zich mede door de interactie met de toepassingen in wetenschap

en technologie. Hierin ligt geen intrinsieke tegenstelling: de toepasbaarheid van de wiskunde ligt besloten in de onafhankelijkheid ervan.

In het onderwijs zorgt dit duale karakter van wiskunde voor een zekere spanning. Voor motivatie en zingeving is het belangrijk verbanden te leggen met de belangstellingssfeer van de leerling, met de wiskunde in het vervolgonderwijs en beroepen, met het wetenschappelijk onderwijs en de toepassingen, die vaak een waardevolle bron van intuïtieve kennis vormen.

Aan de andere kant vereisen het aanleren van vaardigheden en het verwerven van intrinsiek wiskundig inzicht een zekere concentratie op de wiskundige inhoud, zonder dat steeds wisselende niet-wiskundige contexten daarvan de aandacht afleiden.

Aan wiskundige concepten en activiteiten liggen abstracties ten grondslag, die leerlingen op één of ander manier moeten hebben begrepen of gegrepen. Bijna een halve eeuw geleden al betoogde Hans Freudenthal dat een eenzijdige nadruk op toepassingen in het wiskundige leerproces leidt tot slecht toepasbare wiskunde. De onderliggende abstractie ontbreekt en transfer naar andere toegepaste situaties blijft achterwege. Te veel aandacht voor het ‘horizontaal mathematiseren’ kan ten koste gaan van het verticale aspect, de aandacht voor wiskunde als bouwwerk van abstracties.

De essentie van dit hoofdstuk laat zich in de volgende twee standpunten samenvatten.

Standpunt 1

Wiskunde is een kernvak in het voortgezet onderwijs vanwege haar historische, culturele en maatschappelijke relevantie. De inhoud dient aangepast te zijn aan de doelgroep en gericht te zijn op de ontwikkeling van de talenten van de betrokken leerlingen, door middel van lange leerlijnen die tevens voorbereiden op vervolgopleidingen.

Standpunt 2

Het wiskundeonderwijs zoekt een balans tussen enerzijds wiskunde als eigenstandige discipline – als denkwijze waarin abstraheren, generaliseren en formeel manipuleren een grote rol spelen – en anderzijds wiskunde als instrument voor het modelleren van probleemsituaties, als hulpmiddel dat toegepast wordt in praktische, technische en wetenschappelijke situaties. De ijking van deze balans zal per schooltype en per profiel verschillen.

3. Gedifferentieerde onderwijsdoelen

Vanuit de in het vorige hoofdstuk gestelde ambitie om talenten van leerlingen optimaal te ontplooien ontstaat de behoefte aan verdergaande differentiatie in onderwijsdoelen.

De leerlingenpopulatie van 12-16 jarigen

Het 'nieuwe' programma van de basisvorming wiskunde kenmerkte zich door een geleidelijke opbouw van begrippen en methoden aan de hand van begrijpelijke, hoewel vaak niet erg realistische, contexten. De winst van dit nieuwe programma is ontegenzeggelijk dat de onderwijsdoelen in de gehele breedte van de populatie vmbo-havo-vwo veel beter haalbaar zijn gebleken, terwijl uit onderzoek naar attitudes van leerlingen in de onderbouw blijkt dat wiskunde één van de meest populaire schoolvakken is geworden. Ook wiskundeleraars van met name vmbo-t willen in geen geval terug naar de voor hun leerlingen onbevredigende situatie van vóór de basisvorming. In vergelijkend internationaal onderzoek blijkt de opbrengst van dit wiskundeonderwijs uit hoge scores voor algemene gecijferdheid en algemene wiskundige vorming. Dat is een bevredigende situatie.

De uniformiteit in gemeenschappelijke doelen, niveau en wiskundige inhoud, waar de basisvorming aanvankelijk van uitging, is echter slecht gebleken voor de ontwikkeling van de talenten van leerlingen van met name havo en vwo. Deze krijgen in de onderbouw te weinig kans om te groeien in wiskundekennis en zo geleidelijk aan inzicht te verwerven in de onderliggende wiskundige concepten. Dit is één van de oorzaken van de slechte aansluiting van onderbouw op bovenbouw. Bovenop de gemeenschappelijke doelen van algemeen wiskundeonderwijs voor de gehele populatie van 12-16 jaar moeten er dan ook duidelijke differentiële doelen komen voor (delen van) de groep havo-vwo leerlingen om een betere aansluiting op de bovenbouw te bevorderen en om de talenten van leerlingen beter te ontwikkelen dan nu het geval is.

De nieuwe Tweede Fase

De Tweede Fase van havo en vwo heeft niet volledig uitgewerkt zoals aanvankelijk was beoogd. Om verschillende redenen is het eindniveau tegengevallen. Hierboven is al het te lage instroomniveau vanuit de onderbouw genoemd. Een tweede factor is het studiehuis, waarin veel nadruk is gelegd op zelfstandigheid en algemene vaardigheden ten koste van vakkennis. Een derde factor die daarmee verband houdt, is de overladenheid van de nieuwe wiskundeprogramma's in het licht van de incongruentie tussen het aan de wiskundevakken op papier toebedeelde aantal studielasturen en het feitelijke aantal contacturen. Een vierde factor is de onduidelijkheid ten aanzien van de implementatie van ICT en de verhouding met de handmatige vaardigheden.

Als gevolg van dit alles laten evaluaties zien dat weinig leerlingen in de Tweede Fase wiskunde leuk of interessant vinden en voldoening ontleen aan het gevoel 'ik kan het'. Daarnaast klagen vervolgopleidingen uit hbo en wo over een te laag wiskundig niveau van de instromende havo-vwo-leerlingen.

Gegeven de reductie per 2010 van de studielast voor wiskunde in een aantal profielen, zal het nodig zijn het aantal onderwerpen te beperken om de kwaliteit van de kennis en vaardigheden te kunnen garanderen. Daarnaast is ook hier differentiatie vereist: het is noodzakelijk om aan elk van de zeven wiskundevakken in havo-vwo een duidelijke, onderling goed te onderscheiden, karakterisering op te leggen. Behalve om de algemene doelen van wiskundeonderwijs gaat het in de zeven vakken om duidelijk omschreven differentiële leerdoelen. Dit heldere onderscheid is noodzakelijk voor de verdere ontwikkeling van de programma's, passend bij de profielen, en

geeft duidelijkheid voor het vervolgonderwijs. Hieronder volgt een karakteristiek van de zeven programma's.

- Wiskunde A havo
Dit vak bereidt voor op opleidingen voor de sociaal-wetenschappelijke beroepspraktijk. De inhoud concentreert zich op toegepaste analyse, statistiek en kansrekening. Ook wordt de verworven gecijferdheid uit de onderbouw onderhouden en uitgediept. De concepten worden opgebouwd vanuit concrete toepassingen, die ook in de toetsing centraal staan.
- Wiskunde B havo
Dit vak bereidt voor op vervolgoopleidingen met een sterk kwantitatieve beschrijvende component, zoals die in de technieksector en de economie gebruikelijk is. Inhoudelijk ligt de nadruk op analyse en meetkunde, met ruime aandacht voor algebraïsche vaardigheden, formulevaardigheden en het inzichtelijk toepassen van een en ander. De concepten worden opgebouwd vanuit de interne samenhang van wiskunde.
- Wiskunde D havo
Wiskunde D biedt verdieping in de wiskunde van het beroepsonderwijs. Inhoudelijk concentreert wiskunde D zich op statistiek en toegepaste analyse; meetkunde en optimalisatie zijn typische keuzeonderwerpen. Een substantieel deel wordt ingevuld in samenwerking met het hbo.
- Wiskunde A vwo
Dit vak bereidt voor op een universitaire vervolgstudie in de sociale, economische en medische wetenschappen. De inhoud concentreert zich op toegepaste analyse, statistiek en kansrekening. De concepten worden opgebouwd vanuit concrete toepassingen.
- Wiskunde B vwo
Dit vak bereidt voor op universitaire vervolgstudies met een sterk kwantitatieve beschrijvende component, zoals bètawetenschappen, technische wetenschappen en econometrie. Inhoudelijk ligt de nadruk op analyse en meetkunde, met ruime aandacht voor algebraïsche vaardigheden, formulevaardigheden, redeneren, bewijzen en toepassen in authentieke situaties. De concepten worden opgebouwd vanuit de interne samenhang van wiskunde.
- Wiskunde C vwo
Wiskunde C bereidt niet voor op een specifieke vervolgoopleiding, maar biedt een algemene wiskundige vorming, die zich richt op wiskundige en statistische gecijferdheid, statistisch redeneren en inzicht in de historische en culturele plaats van de wiskunde in wetenschap en maatschappij.
- Wiskunde D vwo
Wiskunde D biedt verdieping in de technische en wetenschappelijke context. Inhoudelijk concentreert wiskunde D zich op analyse en analytische meetkunde, op formeel redeneren en bewijzen. Complexe getallen is een typisch keuzeonderwerp. Een substantieel deel wordt ingevuld in samenwerking met het wo.

Hoewel de verschillende programma's dus een eigen karakter hebben, is afstemming tussen havo- en vwo-programma's wel van belang in het licht van de aansluiting havo-vwo (zie het rapport 'Betere overgangen in het onderwijs' van de Onderwijsraad, december 2005).

Het bovenstaande leidt tot het volgende standpunt.

Standpunt 3

Elk van de programma's voor de zeven wiskundevakken in havo en vwo heeft een eigen karakterisering in sfeer, doelen, toepassingen en contexten, passend bij de doelgroep en de relevante vervolgstudies. Bij wiskunde B en D heeft diepgang prioriteit boven breedte. Wiskunde A kenmerkt zich door de toepassingsgerichtheid, wiskunde C door een algemene wiskundige vorming met cijfermatige, historische en culturele accenten.

4. Wiskundige concepten en denkactiviteiten

Het onderwijs in de wiskunde laat zich net zoals de wiskunde zelf organiseren rondom concepten en denkactiviteiten. De kernconcepten lopen als een rode draad door de wiskunde, terwijl de denkactiviteiten deze concepten met elkaar en met de contexten verbinden. Het is van belang om deze concepten en activiteiten regelmatig en op een coherente manier door het programma heen vorm te geven in lange leerlijnen.

Standpunt 4

Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze kernconcepten, denkactiviteiten en de bijbehorende vaardigheden moeten als lange leerlijnen door het gehele programma van havo-vwo lopen.

Kernconcepten

Hieronder volgt een korte karakteristiek van de genoemde concepten met de gewenste accentverschuiving ten opzichte van het bestaande programma. In een vervolpublicatie worden de lange leerlijnen met voorbeelden nader uitgewerkt en toegespitst op de positie in de verschillende programma's.

Getal

Onder het getalbegrip valt inzicht in de opbouw van het getalsysteem: natuurlijke getallen, rationale getallen, reële getallen, en in wiskunde D ook complexe getallen, allemaal in samenhang met hun bewerkingen. Rekenen met breuken en verhoudingen (procenten, driehoeksmeetkunde) zijn belangrijke aspecten van dit kernconcept. Het is van belang voor alle leerlingen in de onderbouw, ongeacht de latere profielkeuze.

Een accentwijziging in klas 1, 2 en 3 is dat meer nadruk wordt gelegd op rekenen met breuken, structuur en opbouw van het getallensysteem (irrationale getallen) en deelbaarheid – denk aan het kleinst gemene veelvoud en de grootste gemene deler en aan priemgetallen.

Denkactiviteiten die hierbij een rol spelen zijn redeneren, abstraheren en structureren.

Formule

Onder dit kernconcept valt het inzicht in algebraïsche formules en expressies als beschrijvingen van rekenprocessen maar ook als zelfstandige algebraïsche objecten waarmee men kan redeneren en manipuleren. Ook inzicht in de structuur van formules, in de volgorde en de reikwijdte van operaties, in het relatieve belang van verschillende termen en factoren vallen hieronder. In dit verband wordt van 'symbol sense' gesproken. Tevens omvat het formulebegrip parate kennis van bijvoorbeeld merkwaardige producten. Dit kernconcept hangt sterk samen met het getalbegrip en het functiebegrip en is met name van belang voor wiskunde A, B en D.

Accentwijzigingen in klas 1, 2 en 3 zijn dat er meer nadruk wordt gelegd op het rekenen met wortels en gebroken machten, op merkwaardige producten, op betekenis en afleiding van de abc-formule en dat aandacht wordt besteed aan het nauwkeurig algebraïsch formuleren. In de Tweede Fase is belangrijk dat de verworvenheden van de onderbouw worden onderhouden en waar nuttig met beweringslogica worden ondersteund en verdiept.

Denkactiviteiten die met dit concept zijn verbonden zijn modelleren en algebraïseren, formules manipuleren, logisch redeneren en abstraheren.

Functie

Het kernconcept functie omvat de gehele leerlijn van verbanden tussen twee grootheden tot en met de bestudering van gecompliceerde functies in wiskunde B. Het gaat enerzijds om het beeld van de functie als afbeelding die een invoergetal overvoert in een uitvoergetal en als manier om gekoppelde verandering te beschrijven. Anderzijds is de functie een wiskundig object, dat deel uitmaakt van een klasse van functies die op overstijgend niveau onderzocht kan worden.

Verschillende functierepresentaties, elk met eigen kracht en beperking, geven een verschillende kijk op hetzelfde object. Bij het functiebegrip hoort een overzicht van de verschillende typen functies in hun onderlinge relaties en een exemplarische verdieping van een bepaalde klasse van functies (bijvoorbeeld de exponentiële functies). A-, B- en D-leerlingen moeten de kenmerken van elementaire functies paraat hebben en daarmee vlot handmatig kunnen werken.

Een accentwijziging voor de Tweede Fase kan de invoering van het meer algemene begrip afbeelding zijn, bijvoorbeeld bij de beschrijving van rijen van getallen, isometrieën van het vlak, parameterrepresentaties van krommen, of stochasten.

Denkactiviteiten die met dit concept zijn verbonden zijn modelleren en algebraïseren, en ordenen.

Verandering

Dit kernconcept is nauw verbonden met het functiebegrip en het getalbegrip.

Differentiaalrekening betreft de bestudering van snelheid van verandering in de relatie tussen twee grootheden, een concept dat sinds Newton en Leibniz een grote vlucht heeft genomen. De integraalrekening omvat zowel de studie van de inverse van de afgeleide als een generalisatie van de discrete sommatie. De grote kracht van dit concept is de calculus ervan, die het mogelijk maakt praktisch te rekenen met dit abstracte begrip. Dwarsverbanden zijn er behalve met het functiebegrip ook met meetkunde. Dit concept speelt een grote rol in wiskunde A, B en D.

Een accentwijziging in klas 1, 2 en 3 bestaat eruit dat de begrippen snelheid, verandering en snelheidsgrafiek al informeel geïntroduceerd worden – opdat in klas 4 het begrip afgeleide vlotter kan worden ingevoerd. Voor de Tweede Fase is een accentverschuiving dat differentiëren en de bijbehorende calculus reeds in klas 4 worden ingevoerd en integreren in klas 5 (voor de N-profielen van het vwo). Het programma wiskunde B wordt hierdoor beter afgestemd op het natuurkundeprogramma.

Denkactiviteiten die met dit concept zijn verbonden zijn formules manipuleren, abstraheren, redeneren en bewijzen.

Ruimte

In het kernconcept ruimte draait het om de eigenschappen van meetkundige objecten in het platte vlak en in de driedimensionale ruimte. Dit kernconcept, dat vooral in wiskunde B en D een rol speelt, biedt dwarsverbanden naar algebra (irrationale getallen) en naar functiebegrip (parametriseren). Analytische meetkunde biedt gelegenheid tot het toepassen van algebraïsche vaardigheden. Belangrijke vaardigheden zijn het oplossen van meetkundige problemen, construeren, redeneren en bewijzen en het omgaan met analytische technieken (algebraïseren).

Accentwijzigingen in klas 1, 2 en 3 bestaan eruit dat de vlakke meetkunde op verschillende manieren wordt opgebouwd: door construeren, meetkundig redeneren en bewijzen. In klas 3 kan een begin worden gemaakt met de analytische meetkunde in het platte vlak (lijnen en cirkels). In de Tweede Fase biedt meetkunde veel mogelijkheden om per profiel te differentiëren.

Denkactiviteiten die met dit concept zijn verbonden zijn modelleren en algebraïseren, formules manipuleren, structureren, redeneren en bewijzen.

Toeval

Het kernconcept toeval draait om het idee van stochastische processen als tegenhanger van deterministische processen. Bij dit concept staan het modelleren en analyseren van toevalsprocessen centraal, en het ermee redeneren en eraan rekenen. Het concept toeval kent twee invalshoeken. Ten eerste is er de statistiek, waarin het gaat om data-analyse en het trekken van conclusies uit onvolledige kwantitatieve gegevens, om het redeneren op basis van statistische modellen. Ten tweede is er de kansrekening: het verloop van toevalsprocessen, het berekenen en voorspellen van kansen, en in een gevorderd stadium het redeneren en onderzoeken op basis van het inzichtelijk gebruikte concept toeval. Het toevalsbegrip speelt een rol bij wiskunde A, C en D, waarbij het CM-leerlingen vooral gaat om ‘statistical literacy’.

Accentwijzigingen in klas 1, 2 en 3 bestaan eruit dat leerlingen al in een vroeg stadium leren redeneren en onderzoeken op basis van het inzichtelijk gebruikte toevalsconcept. In de Tweede Fase ligt een uitdaging in het rekenen aan grote datasets, waarbij ICT-toepassingen bruikbaar zijn – terwijl berekeningen die met de hand kunnen, ook met de hand gedaan zouden moeten worden. Denkactiviteiten die met dit concept zijn verbonden zijn modelleren, abstraheren en redeneren.

Denkactiviteiten

In standpunt 4 zijn als belangrijkste denkactiviteiten genoemd modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Zij vormen de kern van elke wiskundige activiteit. In het wiskundeonderwijs is het van belang dat er een balans bestaat tussen de verschillende denkactiviteiten.

Hieronder wordt toegelicht wat onder elk van deze activiteiten wordt verstaan.

Modelleren en algebraïseren

Modelleren is een praktisch en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald. Leerlingen worden voor een probleemsituatie geplaatst met als doel deze met wiskundige middelen op te lossen. Dit omvat het doorgronden/analyseren van het probleem, het kiezen van variabelen, het opstellen van verbanden, het bepalen van een strategie en het inzetten van wiskundige middelen. Een onderdeel van modelleren is het algebraïseren: het mathematiseren van een realistische of wiskundige situatie door een formule of vergelijking op te stellen. Door de noodzaak om zelf variabelen te benoemen en verbanden wiskundig te formuleren worden algebraïseren en ‘symbol sense’ ontwikkeld.

In echte wiskundige probleemsituaties is modelleren een zeer complexe en moeilijke activiteit; het didactisch geen eenvoudige opgave om leerlingen in het voortgezet onderwijs iets van dit proces te laten ervaren zonder in kunstmatige overgesimplificeerde situaties te vervallen.

Ordenen en structureren

Wiskunde heeft altijd bijgedragen aan het ordenen van de werkelijkheid, aan het classificeren van objecten naar kenmerken, aan het structureren van de eigen discipline en andere disciplines. Het gaat hier om het leren structureren. Ordenen en structureren zijn activiteiten die leiden tot abstractie. Uit de hierboven gegeven beschrijving van de kernconcepten komt naar voren dat ordenen en structureren een rol spelen in alle kernconcepten.

Analytisch denken en probleemoplossen

Deze denkactiviteit betreft de vaardigheid om wiskundige problemen te formuleren, te representeren en op te lossen. Het analytisch denken omvat aspecten van modelleren en redeneren. Bij het probleemoplossen is een repertoire aan heuristische onmisbaar. Analytisch denken en probleemoplossen komen bij elk kernconcept om de hoek kijken.

Formules manipuleren

Het omgaan met algebraïsche formules en expressies is een vaardigheid waaraan denkactiviteiten ten grondslag liggen. Het gericht omvormen van formules vraagt om inzicht in de structuur van de formule en om overzicht op het te volgen oplossingsproces. Daarnaast dient de leerling over handmatige vaardigheden te beschikken om deze processen correct uit te voeren. Het gaat dus om een combinatie van ‘symbol sense’ en formulevaardigheid.

Het huidige onderwijs schiet op beide aspecten tekort. Veel leerlingen beheersen de algebraïsche basistechnieken (rekenen met machten, wortels en breuken, werken met haakjes, ontbinden in factoren, rekenen met rationale uitdrukkingen) niet meer met de hand; daarnaast kunnen velen niet inzichtelijk omgaan met variabelen, formules en vergelijkingen.

Formulevaardigheid dient inzichtelijk verworven te worden en moet dan op een routineniveau uitgevoerd kunnen worden – met inzicht, gegeneraliseerd, doelbewust, snel en zonder haperen. Per schooltype en wiskundevak wordt een aantal nader te definiëren basistechnieken vastgesteld. Leerlingen moeten in hun lange termijn geheugen beschikken over een repertoire aan algebraïsche kennis voor het aanpakken van echte problemen en het zinvol inzetten van apparatuur. Dat repertoire moet afzonderlijk worden getoetst op een hoog niveau van beheersing. Eenmaal geautomatiseerd is formulevaardigheid de vaardigheid om symbolen formeel te manipuleren. In dit formeel manipuleren, vooral nuttig in combinatie met algebraïseren en logisch redeneren, ligt een deel van de abstractie en de kracht van de wiskunde – bij het manipuleren maakt het immers niet uit wat de betekenis van de symbolen is. Bij dit manipuleren is van groot belang dat kwaliteitseisen worden gesteld aan correcte en heldere algebraïsche formuleringen. Het belang van correcte formuleringen en notaties kan niet snel onderschat worden. Onvoldoende aandacht hiervoor leidt tot problemen in het vervolgonderwijs, zowel in de wiskundige als in de toegepaste vakken, doordat vage en informele formuleringen een te zwakke basis vormen voor concepten die op de schoolwiskunde voortbouwen.

Abstraheren

Abstractie is het wezen en de kracht van wiskunde en maakt het leren en begrijpen van wiskunde makkelijker. Leerlingen groeien in hun vermogen abstracties te vatten en zelf te abstraheren. De commissie acht het in de ontwikkeling van wiskundeonderwijs van groot belang dat centrale wiskundige concepten, ingebed in de leerlijnen van de kernconcepten, van begin af aan zo worden begrepen dat zij verdere abstractie bevorderen en zeker niet in de weg staan. Bijvoorbeeld is het voor de ontwikkeling van een abstract getalbegrip nodig om onderwerpen te behandelen als deelbaarheid van gehele getallen, breuken, decimale voorstellingen en andere representaties van getallen en irrationaliteit (bijvoorbeeld bij wortels).

Logisch redeneren en bewijzen

Logisch redeneren en bewijzen zijn fundamenteel in de wiskunde, waar de waarheid van beweringen op basis van een aantal aannames vast staat en navolgbaar moet zijn voor anderen. Het leren logisch te redeneren blijft dan ook niet beperkt tot de bovenbouw van het vwo, maar zal bij alle kernconcepten in de gehele leerlijn vanaf klas 1 een plaats krijgen. Denk aan lokale redeneringen en bewijzen in de leerlijn meetkunde, logisch redeneren in de opbouw van de leerlijn rond het getalbegrip en het redeneren met statistische begrippen in het kernconcept toeval. Ook in de ontwikkeling van de concepten in de leerlijn Differentiaalrekening speelt het logisch redeneren een rol.

Aan de redeneringen van leerlingen en de formulering daarvan moeten kwaliteitseisen worden gesteld. Goede definities, nette argumentatie en nauwkeurige formulering zijn basiselementen van wiskunde. Zich precies en logisch correct kunnen uitdrukken draagt bij aan het zelfvertrouwen en de zelfstandigheid van de leerling. Correct redeneren en formuleren wordt een natuurlijk en geïntegreerd onderdeel van de wiskundeactiviteit van leerlingen. De commissie stelt

zich voor dit in overleg met de vereniging van wiskundeleraren, de auteursgroepen van schoolboeken en de centrale examencommissies nader uit te werken.

5. De docent centraal

Gebaseerd op de studiehuisfilosofie heeft menig docent zich onder druk van schoolmanagement en gereduceerde contacttijd teruggetrokken op de rol van individuele begeleider. Anderen (auteurs, uitgevers) hebben in dit licht leermiddelen ontwikkeld met uitwerkingen en software; de sectie maakt studiewijzers volgens een schoolformat (veelal spoorboekjes voor de leerlingen). Vervolgens lopen leerlingen en leraar dit voorgeprogrammeerde pad samen af. In deze vormgeving van het studiehuis komt weinig terecht van niveauverhoging door middel van interactief en activerend onderwijs. Er is geen sprake van de leraar als rolmodel voor het leren oplossen van problemen en het leren leren of van de leraar als intermediair om te komen tot niveauverhoging. In plaats daarvan doen leerlingen hun best zo snel mogelijk van A naar Z te komen door reeksen kleine opdrachten te maken. Deze praktijk gaat ten koste van de interactie met en tussen leerlingen en van het bereiken van hogere leerdoelen, waarvoor interactieve reflectie en het expliciteren van concepten en denkmethoden noodzakelijk zijn. Ook het reguliere lesmateriaal, geschikt gemaakt voor zelfstandig werken door opsplitsing in kleine hapklare brokjes en voorzien van uitwerkingen, leent zich niet voor het bereiken van deze hogere leerdoelen.

Kennis en begrip van wiskunde ontstaan niet vanzelf, maar komen tot stand door interactie tussen docent en klas. Dit is een broos proces van voorzichtige en geleidelijke groei, waarin leerlingen continu begeleid moeten worden. Interactie is niet alleen een nodige voorwaarde voor het ontstaan van inzicht, ook voor het verwerven van vaardigheden is het cruciaal. Daarom is voor goed wiskundeonderwijs uitgebreide contacttijd nodig. Zelfstudie en zelfstandig werken zijn alleen effectief mits goed begeleid.

Standpunt 5

Wiskunde is een vak met grote conceptuele uitdagingen. Leerlingen kunnen zich wiskunde alleen eigen maken via uitgebreide interactie met hooggekwalificeerde docenten. Inhoudelijke interactie is essentieel voor het leren van wiskunde. Dientengevolge is een meer dan modaal aantal contacturen noodzakelijk voor een goede leeropbrengst.

Het is wenselijk dat docenten zich niet beperken tot de rol van uitvoerder, maar als professionele vakmensen het eigen onderwijs mede ontwerpen. Zelf actief werken aan niveauverhoging, onderzoeksopdrachten maken, practica ontwerpen, nieuwe mogelijkheden met computersoftware aanpassen voor het eigen onderwijs, een digitale leeromgeving opzetten, duidelijke niveaueisen stellen en leerlingen daarop beoordelen, het aldus ontwerpen van eigen onderwijs verrijkt het didactisch repertoire en het vakmanschap van de docent. De leerling werkt aan geschikte opdrachten en problemen – individueel, in duo's of kleine groepen – en neemt deel aan klassengesprekken. De docent geeft regelmatig feedback, vraagt door, verheldert, belicht achtergronden en verzorgt de meer individuele begeleiding.

Professionaliteit en competentie van de docent hangen nauw samen met een brede vakkennis, toegepast in het didactisch handelen. Het ontwikkelen en onderhouden van vakkennis en didactisch handelen zijn daarom belangrijke aandachtspunten. Op dit moment bestaat er in de Tweede Fase al een tekort aan eerstegraads docenten. In de komende jaren zullen veel eerstegraads docenten met pensioen gaan. Veel nieuwe eerstegraads docenten studeren er niet af, niet in het hbo en zeker niet aan de universiteiten. Het wiskundeonderwijs zal te maken krijgen met veel zij-instromers, waarvan de vraag is of ze voldoende inhoudelijke en didactische scholing hebben. Het is dus zaak te bevorderen dat er in de Tweede Fase voldoende docenten zullen zijn die inhoudelijk en didactisch sterk genoeg in hun schoenen staan om de voorgestelde vernieuwingen te realiseren. Daarom zal met de komende vernieuwingen ook veel aandacht, tijd

en geld besteed moeten worden aan de bij- en nascholing van de zittende wiskundedocenten. In de bij- en nascholing zal aandacht besteed moeten worden aan (het behoud van) de brede context van de wiskunde: een wiskundedocent in de Tweede Fase moet leerlingen kunnen vertellen wat er bij andere vakken en in het hoger onderwijs met wiskunde zoal gedaan wordt. Op basis van de eigen vakkennis zal de wiskundedocent in staat moeten zijn om adequate didactische werkwijzen en onderwijsvormen te ontwerpen om de door ons geformuleerde onderwijsdoelen te kunnen bereiken. Daarover meer in hoofdstuk 10.

Standpunt 6

De docent is de professional in de klas en de expert van het onderwijsleerproces. Essentieel zijn een brede en diepe vakkennis en de competentie om voor het eigen onderwijs een adequate en verantwoorde didactische werkwijze te ontwerpen en te realiseren. Voor een succesvolle implementatie van het vernieuwde wiskundeonderwijs zijn ruime faciliteiten van de overheid en de scholen voor nadere scholing noodzakelijk.

6. Didactische vormgeving

Consensus over de resultaten van internationaal leerpsychologisch en didactisch onderzoek naar het leren en onderwijzen van vakkennis is de laatste jaren door vooraanstaande wetenschappers (psychologen, wiskundigen, wiskundendidactici, onderwijskundigen) samengevat in standaardwerken zoals 'How People Learn' en 'Adding it up' (National Research Council). Centraal in de aanbevelingen staat de noodzaak om leerlingen systematisch en gericht te helpen in hun lange termijn geheugen een samenhangend netwerk van begrippen, methoden en situaties op te bouwen. De conclusies voor de wiskundendidactiek, hierna in het kort samengevat, sporen heel goed met de publicaties van Skemp, Van Dormolen en Van Hiele, die tegen 1980 in Nederland veel invloed hadden.

Aan de hand van voorbeelden en opdrachten bouwen leerlingen een netwerk (cognitief schema, kennisgraaf) op dat met behulp van interactie (expliciteren, reflecteren) leidt tot de abstractie van het onderliggende begrip of principe. De wendbaarheid van die kennis, waaruit het inzicht blijkt, wordt zowel bepaald door het begrijpen en kunnen verwoorden van de onderliggende abstractie als door de diversiteit van de bestudeerde situaties. Het nieuwe aspect van het Nederlandse wiskundeonderwijs in de laatste decennia is dat de breedte aan situaties en contexten sterk is toegenomen. Waar dat ten koste is gegaan van het abstraheren uit die situaties heeft dat niet geleid tot de gewenste brede toepasbaarheid van de verworven wiskundige kennis.

Contexten en concepten

Betekenisrijke contexten worden in de vakdidactiek opgevat als situaties, problemen, vraagstellingen, uitspraken die voor leerlingen betekenis krijgen, terwijl ze er mee aan het werk gaan. Goede contexten worden gekenmerkt door een groot potentieel aan relaties met ervaringen van leerlingen binnen of buiten het wiskundeonderwijs en vormen aanleiding tot wiskundige conceptvorming. Contexten, te kiezen uit de leefwereld, uit andere disciplines of uit de wiskunde zelf, zijn bedoeld om het ontwikkelen en begrijpen van een concept of methode voor te bereiden en krijgen door de opgeroepen activiteiten betekenis voor leerlingen. De hier bedoelde contexten functioneren, mits goed gekozen, als denkmodel of ankerpunt voor het geheugen, waardoor leerlingen in hun lange termijngeheugen toegang krijgen tot het daaraan gekoppelde netwerk van mathematische begrippen, methoden en situaties. Centraal in dat netwerk staat het onderliggende wiskundige concept, dat uit de verschillende voorbeelden is geabstraheerd. Dankzij het verworven inzicht is de leerling in staat om in analoge of nieuwe situaties (toegepast of wiskundig) de toepasbaarheid van het concept te herkennen en te benutten. Uiteraard zullen in het algemeen ook andere contexten, problemen en vraagstellingen in de verwerkingsfase worden gepresenteerd om dat proces van herkennen en toepassen te verwerken. Deze kijk op de rol van contexten sluit aan bij de theorie van realistisch wiskundeonderwijs, die de afgelopen decennia in Nederland school heeft gemaakt, maar waarvan de verwezenlijking in de praktijk van het voortgezet onderwijs weerbarstig blijkt te zijn. Ook correspondeert deze visie op het gebruik van contexten met de zogeheten context-concept benadering, die bij de huidige vernieuwing van de exacte vakken als uitgangspunt dient.

In hoofdstuk 4 van dit visiedocument is abstraheren beschreven als een van de wezenlijke denkactiviteiten van de wiskunde. De commissie constateert een zekere spanning tussen het gebruik van contexten en abstractie. Het gebruik van contexten schiet zijn doel voorbij als aan abstractie niet wordt toegekomen. 'Horizontaal mathematiseren', het gebruik van wiskundige middelen om de wereld om ons heen te organiseren, zonder 'verticaal mathematiseren', waarin het bouwwerk van de wiskunde ontstaat door abstractie, is ongewenst in het wiskundeonderwijs.

De wiskunde van de verschillende profielen vraagt om een eigen didactiek. Ook met betrekking tot de rol van contexten heeft het zin om onderscheid te maken tussen de M- en de N-profielen. Contexten zijn er in verschillende typen:

- didactische contexten;
- maatschappelijke contexten;
- wiskundige contexten;
- toepassingen, bijvoorbeeld gericht op vervolgopleiding en beroepspraktijk, of gericht op andere schoolvakken.

Contexten bij wiskunde A en C hebben overwegend een didactisch en maatschappelijk karakter en worden gezocht in belevingswereld van leerlingen en in maatschappelijke situaties of levenswetenschappen – denk aan populatiedynamica en exponentiële groei. De kracht van wiskundige concepten kan blijken uit hun toepasbaarheid in diverse contexten.

Bij wiskunde B en D zijn wiskundige en toegepaste contexten van belang, die bijdragen aan de versterking van interne structuur en samenhang van de verschillende onderdelen van de wiskunde. In dit verband pleit de commissie voor een aantal grote, breed en diep uitgewerkte contexten, die een intuïtief denkmodel vormen bij een concept of methode (vergelijk de ‘paradigmatische voorbeelden’ van Freudenthal). Zulke contexten zijn bijvoorbeeld afkomstig uit mechanica, optica en andere natuurkundige domeinen; denk ook aan het vaasmodel in de kansrekening, dat goed demonstreert dat een didactische context sterk gestileerd kan zijn zonder aan kracht te verliezen. In het algemeen kan bij wiskunde B en D directer op het doel van de abstractie worden afgestemd.

Uiteindelijk is het de docent die de rol en de aard van contexten in het wiskundeonderwijs bepaalt en afstemt op de mogelijkheden en behoeften van de leerlingen. Verder zij nog opgemerkt dat contexten van belang zijn in het leerproces, maar dat de rol van contexten in de toetsing een ander kwestie is. Daarop wordt in hoofdstuk 9 nader ingegaan.

Standpunt 7

In de didactische vormgeving staat het verwerven van een sterke intern-wiskundige samenhang van het netwerk aan concepten in de curricula centraal. Brede contexten (wiskundig of toegepast) kunnen daar als denkmodellen een bijdrage aan leveren. Niet-authentieke ‘contexten’ en ‘verhaaltjessommen’ moet worden vermeden.

Wiskunde en toepassingen

In hoofdstuk 2 is het duale karakter van wiskunde als eigenstandige discipline en als universeel toepasbare wetenschap besproken. Beide aspecten dienen in de verschillende curricula een eigen onderscheiden rol te krijgen.

In de onderbouw van havo-vwo wordt de basis gelegd voor een netwerk aan concepten, gekoppeld aan situaties die voor leerlingen herkenbaar zijn en betekenis geven aan de intern wiskundige concepten. Gelet op de diversiteit aan talenten in de onderbouw havo-vwo is het daar noodzakelijk om een gemeenschappelijk en dus breed programma aan te bieden met de mogelijkheid om leerlingen daarenboven aanvullende wiskundige activiteiten te laten uitvoeren, passend bij hun eigen belangstelling en aanleg.

In de bovenbouw havo-vwo kiezen we daarentegen voor sterk onderscheiden curricula van de verschillende examenvakken, elk met een eigen karakteristieke balans tussen de intern wiskundige structuur en de toepassingsgerichtheid (zie Standpunt 3). In de vakken wiskunde B staat de opbouw van de intern wiskundige samenhang van de concepten centraal en worden die concepten in echte natuurwetenschappelijke en technische toepassingen gebruikt. In de vakken wiskunde A worden de concepten opgebouwd vanuit concrete toepassingen en moeten leerlingen laten zien dat zij die in echte maatschappelijke en economische situaties kunnen toepassen. De nagestreefde diepgang in wiskunde D varieert per onderwerp, soms intern wiskundig soms

toegepast. In het algemeen ligt het zwaartepunt in vakken in het havo meer op de praktijk en de toepasbaarheid en in het vwo meer op de theorievorming.

Standpunt 8

Elk van de zeven examenvakken in havo-vwo heeft een eigen karakteristieke verdeling tussen de aandacht voor de intern wiskundige structuur en de rijkdom aan authentieke toepassingen. Die karakteristieken volgen uit de verschillende samenstelling van de doelgroepen en de verschillende doorstroomkwalificaties. In de programmabeschrijving van elk vak wordt de karakteristiek expliciet geformuleerd.

Blik naar buiten

Naast de bovengeschetste karakteristieken binnen de zeven curricula dient er in elk vak expliciete aandacht te komen voor een 'Blik naar Buiten'. Het gaat hierbij om de relevantie van de schoolwiskunde, om de rol die wiskunde in de maatschappij heeft, om de positie van wiskunde na de middelbare school. Het doel hiervan is enerzijds om een link te leggen tussen de onderwerpen uit de schoolwiskunde en de hedendaagse maatschappij en anderzijds om leerlingen zicht te geven op actuele toepassingen en op de wiskunde in vervolgonderwijs en beroep. De 'Blik naar Buiten' is een levend curriculumonderdeel, dat voortdurend door school en docenten in te vullen en te actualiseren is. Voorbeelden zijn samenwerking met andere vakken binnen de eigen school (bijvoorbeeld NLT), moderne toepassingen, theoretische opdrachten zoals het doorwerken van een Zebraboekje, geschiedenis van de wiskunde, praktische opdrachten en profielwerkstukken. De 'Blik naar Buiten' biedt ook ruimte voor extra-curriculaire verdiepende wiskunde (bijvoorbeeld een praktische opdracht over π). De 'Blik naar Buiten' biedt gelegenheid voor Jet-Net-activiteiten, aansluitingsactiviteiten met het vervolgonderwijs, Kangoeroe, Pythagoras en de verschillende O- en A-lympiades. De 'Blik naar Buiten' wordt binnen het schoolprogramma afgesloten. In de uitvoering van deze programmaonderdelen zijn de scholen vrij.

Standpunt 9

In elk van de curricula wordt aandacht besteed aan de brede betekenis van de wiskunde. Hiertoe wordt in de programma's geormerkte studielast gereserveerd voor een zogenaamde 'Blik naar Buiten'. Deze ruimte wordt ingevuld door docenten en vaksecties, die hierbij samenwerken met bedrijfsleven, instellingen voor hoger onderwijs en landelijke initiatieven.

7. De rol van ICT

In samenleving en beroepspraktijk speelt ICT een steeds grotere rol. Maar wat is de rol van ICT in het onderwijs? De inzet van moderne ICT-middelen in de wiskunde en in het wiskundeonderwijs bevindt zich nog maar in de beginfase. Nieuwe ICT-middelen maken nieuwe onderwijsvormen mogelijk. Een weloverwogen koers is echter nog niet uitgekristalliseerd. Om verschillende redenen is de implementatie van ICT-middelen tot op heden niet altijd succesvol geweest. In dit hoofdstuk analyseren we eerst de achtergronden van deze problemen; daarna zetten we lijnen naar de toekomst uit.

Terugblik

Het meest invloedrijke ICT-hulpmiddel sinds 1998 is de grafische rekenmachine (GRM). De toelating daarvan op het centraal examen heeft een sterke, niet altijd positieve, invloed uitgeoefend op het voorafgaand onderwijs, waarbij onduidelijkheid is ontstaan over de verschillende status van exacte oplossingen en benaderingen. Op veel plaatsen wordt de suggestie gewekt dat een oplossing die wordt verkregen met behulp van de GRM gelijkwaardig is aan een oplossing verkregen zonder de GRM (bijvoorbeeld in het woordgebruik ‘bereken’ versus ‘bereken langs algebraïsche weg’). Het berekenen van de snijpunten van twee grafieken via de GRM of langs algebraïsche weg is niet gelijkwaardig en leerlingen zijn zich daar onvoldoende van bewust. Wiskundige argumenten worden vervangen door verwijzingen naar de GRM en de behoefte aan een wiskundige berekening of redenering ontbreekt. Daarnaast blijken leerlingen de verantwoordelijkheid voor de ‘waarheid’ te externaliseren zonder de resultaten van de GRM kritisch te toetsen aan het eigen inzicht en grijpen ze snel naar de GRM zonder eerst na te denken. Dat is geen goed uitgangspunt voor een vervolgstudie. De huidige generatie rekenmachines biedt de mogelijkheid programma’s te schrijven of te importeren. Op die manier kunnen allerlei standaardprocedures in de rekenmachine worden opgeslagen, zoals abc-formule, berekening van integralen, volumina van omwentelingslichamen, raaklijnen aan grafieken en krommen en uiteenlopende statistische toetsen. De vraag rijst dan wat een eindexamen waarbij de GRM wordt gebruikt precies meet. Door toename van opslagcapaciteit en rekenkracht ontstaat het gevaar dat deze ontwikkeling onbeheersbaar en oncontroleerbaar wordt en daarmee een onwenselijke invloed uitoefent op het leerproces. Een visie op het gebruik van ICT moet hiermee rekening houden. Overigens zou in dit verband ook het functioneren van de formulekaart op het centraal examen moeten worden herbezien. Uiteraard is de GRM een prachtig didactisch hulpmiddel om snel even de grafiek van een functie te onderzoeken, om een tabel door te rekenen of om een antwoord te controleren. Dit is het ‘use to learn’-gebruik dat de commissie voorstaat. De implementatie is echter te zeer gericht geweest op het leren gebruiken van het apparaat, ‘learn to use’. Inmiddels, na een klein decennium grootschalig gebruik, is het duidelijk dat het belang hiervan wordt overschat; de leerlingen hebben relatief weinig ondersteuning en stimulering nodig voor ICT-gebruik.

Vooruitblik

Met deze kritische noten ten aanzien van de ervaring met de GRM in het achterhoofd wenden we ons nu tot de toekomst. De commissie onderscheidt in het wiskundeonderwijs drie soorten gebruik van informatie- en communicatietechnologie. Allereerst is er ICT voor communicatie en samenwerking: email, MSN, elektronische leeromgevingen en internet. Het gevolg hiervan is een toegenomen toegankelijkheid tot kennis en tot anderen, voor zowel leerling als docent. In het bijzonder kan een docent nu ook buiten lestijd in contact staan met leerlingen.

Ten tweede kan ICT functioneren als - al dan niet docentgestuurd - leermiddel. Voor een docent die ondersteund wordt door voldoende hard- en software betekenen de moderne ICT-tools een uitbreiding van de beschikbare leermiddelen. Met een op een beamer aangesloten computer in het lokaal kunnen tal van wiskundige concepten dynamisch gevisualiseerd worden. Met oefenapplets kunnen leerlingen oefenen en automatisch worden voorzien van feedback en kan de docent op afstand de vorderingen van de leerlingen volgen (Wisweb).

Ten derde komen er steeds meer ICT-tools in de vorm van kant-en-klaar rekengereedschap in de handen van de leerling: GRM, statistiekpakketten en computeralgebra. Deze tools zijn meer dan de ICT-leermiddelen didactiekvrij en staan de leerlingen in principe voortdurend ter beschikking: De GRM is altijd onder handbereik en computerapplicaties kunnen draaien op de schoolcomputer of op de PC thuis. De meest verre gaande vorm van ICT-toepassing in het wiskundeonderwijs zijn ICT-gebaseerde wiskundemethodes (Ratio, Matrix).

In de visie van de commissie dienen ICT-gereedschappen in handen van de leerling als verrijking en verdieping. Geavanceerde ICT-tools kunnen werk uit handen nemen en concentratie op hoofdzaken bevorderen. Het is echter van groot belang dat hiervan geen negatieve invloed uitgaat op de beheersing van basisvaardigheden. Een zekere mate van basisvaardigheid en parate kennis is onontbeerlijk voor het wiskundig inzicht en voor een efficiënte probleemaanpak. Het instrumenteel ICT-gebruik mag de ontwikkeling en onderhoud van deze basisvaardigheden niet naar de achtergrond dringen. De organisatie van toetsing is hierbij van groot belang. Het ICT-gebruik dient gericht te zijn op 'use to learn' en heeft een zelfstandige leerling voor ogen die op de geleerde wiskundige methoden vertrouwt.

Standpunt 10

De rol van educatieve software moet zijn 'use to learn' en niet 'learn to use'. Anders gezegd: het gebruik van ICT staat ten dienste van het onderwijsproces, van het leren van wiskunde. Bij het gebruik van ICT als rekengereedschap is het zaak ervoor te zorgen dat dit de ontwikkeling en het onderhoud van de basisvaardigheden met pen en papier niet hindert maar juist ondersteunt. In dit licht is een heroverweging van het huidige gebruik van de grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs gewenst.

Hiermee is nog lang niet alles gezegd – er zijn nog praktische problemen genoeg en een aantal fundamentele vragen is niet beantwoord. De huidige vorm van de GRM is op dit moment technisch al achterhaald; het onderscheid tussen rekenmachine en computer is snel aan het vervagen. Er is alle reden om aan te nemen dat in 2010 draagbaar materieel gebruikt zal kunnen worden dat meer lijkt op de huidige computers dan op de huidige GRM. Toegepast didactisch onderzoek en goed gecontroleerde onderwijsexperimenten zijn dan ook noodzakelijk.

Standpunt 11

Onderzoek en experimenten op het gebied van een verantwoord 'Use to learn' gebruik van educatieve software zijn noodzakelijk. Het voorgestelde onderzoek moet zich richten op

- a. het onderzoeken/ontwikkelen van een ICT-didactiek die zich focust op 'Use to learn';*
- b. het tegengaan van de genoemde neveneffecten van de huidige generatie rekenmachines;*
- c. het in dit licht bestuderen van de mogelijkheden en onmogelijkheden van rekenmachines met faciliteiten voor symbolische manipulatie (computeralgebra).*

8. Aansluiting en leerlijnen

Bij het leren zijn doorlopende leerlijnen van groot belang. Cruciaal daarin is de aansluiting bij ‘scharnierpunten’ in de loopbaan van de leerling, zoals de overgang van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs, de overgang van onderbouw naar Tweede Fase en de overgang van voortgezet naar hoger onderwijs. Daarnaast is de aansluiting tussen wiskunde en andere schoolvakken een factor van betekenis.

Een goede aansluiting omvat meer dan continuïteit in de programmaliijnen. We onderscheiden de volgende aspecten.

- *Programmatisch- inhoudelijke doorloop* van kennis en vaardigheden, inclusief het beheersniveau van de eindtermen uit de vooropleiding. Hebben de leerlingen voldoende wiskunde gehad en kennen opleiders uit vervolgopleidingen de voorkennis?
- *Pedagogisch-didactische continuïteit*, zoals bijvoorbeeld de mogelijke verschuivingen van aandacht voor contexten naar interne wiskundige structuren en van inductief naar deductief onderwijs; maar evenzeer de manier waarmee wiskunde in andere vakken functioneert, inclusief het gebruik van andere notaties en symbolen.
- *Andere leeromgeving* waarin de leerling terecht komt. Denk bijvoorbeeld aan de vertrouwde grafische rekenmachine die in het hoger onderwijs geen plaats heeft; maar ook aan de wijze van toetsen en beoordelen, de vorm en het taalgebruik van de leermiddelen, het werken in projecten, het onderwijstempo en de omvang van de leertaken.
- *Verwachtingen over de nieuwe opleiding*: is de instromer bekend met wat hem te wachten staat, zijn eigen rol en verantwoordelijkheden in het nieuwe onderwijsproces?

Met uitzondering van de overgang van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs, die elders aan de orde komt, bespreken we hieronder kort de genoemde aansluitingsproblematiek.

Onderbouw – Tweede Fase

Als gevolg van het ‘oude’ programma van de basisvorming voor de gehele breedte van de leerlingpopulatie heeft de wiskunde in de onderbouw havo-vwo op dit moment overwegend een formeel karakter en wordt er weinig aandacht besteed aan abstractie. Elementaire algebraïsche vaardigheden worden veelal te weinig geoefend of toegepast en het ontbreekt de leerling aan parate kennis. In de vierde klas, met name in de N-profielen, nemen de abstractie en het werktempo abrupt toe. Dit zorgt voor ongewenste aansluitingsproblemen, wat op sommige scholen momenteel een reden is om leerlingen de N-profielen af te raden. De onderbouw moet havo- en vwo-leerlingen daarom beter voorbereiden op de Tweede Fase.

Wiskunde kent, ook als schoolvak, een sterk gestapelde structuur. Elk nieuw concept bouwt voort op het gebruik van en inzicht in eerder geleerde begrippen. Vandaar het belang van zorgvuldig vormgegeven doorlopende leerlijnen. In het bijzonder betekent dit dat deze lange leerlijnen al moeten aanvangen in de basisvorming. Hetzelfde geldt voor de routinematig te beheersen vaardigheden en de parate kennis van eigenschappen en begrippen die op hun beurt weer bouwstenen vormen voor nieuw te ontwikkelen concepten.

Versterking van de wiskunde in de onderbouw heeft consequenties voor toekomstige M- en N-leerlingen. Die zullen daardoor geleidelijk zwaarder belast worden, culminerend in de derde klas. De commissie pleit daarom voor een geleidelijke differentiatie in leerjaar 3. Geschikte onderwerpen stellen leerlingen in staat zich in klas 3 een adequaat beeld te vormen van de wiskunde in de verschillende profielen van de Tweede Fase en maken een oriëntatie op en determinatie voor de nieuwe wiskundevakken in het vierde leerjaar mogelijk. Een ‘misfit’ tussen verwachtingen en werkelijkheid wordt daarmee voorkomen.

Standpunt 12

Onder- en bovenbouw van havo-vwo moeten in elk van de vier genoemde aspecten beter op elkaar aansluiten. Zowel het programma als de didactiek moeten als een continue lijn door het voortgezet onderwijs lopen. De herprogrammering van lange leerlijnen vanuit de onderbouw moet hand in hand gaan met een geleidelijke niveauverhoging en differentiatie naar te kiezen wiskundevakken in het vierde leerjaar.

Voortgezet onderwijs – hoger onderwijs

Vrijwel alle leerlingen van havo en vwo vervolgen na het eindexamen hun opleiding in het hoger onderwijs. Wiskunde is daarvoor een niet te onderschatten kennis- en vaardigheidsgebied. Een goede aansluiting in wiskunde is daarom essentieel voor een soepele overgang naar de vervolgopleiding. Het schoolvak wiskunde en wiskunde in het vervolgonderwijs moeten één lange leerlijn vormen; daarom is het van belang dat zij qua stijl en qua filosofie goed op elkaar aansluiten.

In hoofdstuk 3 is al opgemerkt dat de Tweede Fase niet volledig heeft uitgewerkt zoals was beoogd. Wellicht is de wens, destijds, van het hoger onderwijs om de zelfstandigheid van de leerling te bevorderen, simpelweg overschat en is het belang van algemene vaardigheden, los van vakkennis, te eenzijdig benadrukt. Overigens geven de ontwikkelingen in het hoger onderwijs sinds de invoering van de Tweede Fase een gemengd beeld: veel hbo-opleidingen zetten in op competentiegericht projectgestuurd onderwijs; universitaire opleidingen zijn eerder schoolser geworden en blijven zich op fundamentele vakkennis richten. Tegen deze achtergrond en de hierboven geschetste brede opvatting van aansluiting is de commissie van mening dat het van groot belang is dat het voortgezet en het hoger onderwijs nauw met elkaar samenwerken om een goede aansluiting te bewerkstelligen. Contacten tussen docenten uit beide “werelden” is daarbij van essentieel belang, evenals kenniscirculatie. De balans tussen aandacht voor algemene vaardigheden en vakkennis van (in ons geval) wiskunde moet worden hersteld.

Bijzonder aandacht in dit verband verdient ook de route po-vo-mbo-hbo. Met name is het zaak dat het mbo een adequate voorbereiding vormt voor het hbo.

Standpunt 13

Een goede voorbereiding op de verschillende vervolgtrajecten is een belangrijke randvoorwaarde voor de inrichting van de verschillende wiskundevakken in de Tweede Fase. Samenwerking tussen het voortgezet en het hoger onderwijs is noodzakelijk om per wiskundevak de balans te bepalen tussen vaardigheden, wiskundige inhoud en toepasbaarheid. In deze samenwerking dienen ook de pedagogisch/didactische continuïteit, de verandering van leeromgeving en het scheppen van juiste studieverachtingen een plaats te krijgen.

Wiskunde en andere schoolvakken

In de huidige situatie komen wiskundige concepten veelal in andere vakken terug zonder dat leerlingen het verband zien. Omgekeerd komen in de wiskundeles contexten uit andere vakken aan de orde, met vaak afwijkende notatie en terminologie, eveneens zonder door leerlingen als zodanig herkend te worden. Beide situaties zijn verwarrend voor de leerlingen, schetsen een verkeerd beeld van de samenhang tussen kennisgebieden terwijl goede toepassingen van wiskunde onbenut blijven.

Dit probleem is hardnekkig. Het cultuurverschil tussen bijvoorbeeld het wiskunde- en het natuurkundeonderwijs is de laatste decennia sterk toegenomen. Ook leraren hebben er moeite mee de verbanden nog te zien. De aansluiting wiskunde-economie heeft eveneens zorgvuldige aandacht nodig

De samenhang dient te verbeteren door goede afstemming met de andere vakken. Serieuze en concrete pogingen tot afstemming moeten worden gemaakt en in de praktijk gestalte krijgen. Daadwerkelijke afstemming kan slechts tot stand komen als de programma's en leerlijnen in samenhang beschouwd en ontwikkeld worden. Dit draagt ook bij aan een adequate voorbereiding op vervolgopleidingen, waar wiskunde immers ook in andere disciplines functioneert. Het lijkt de commissie verstandig dit aansluitingsprobleem in zijn algemeenheid in kaart te brengen, zodat methodeontwikkelaars een basisschema hebben voor de planning-in-tijd van de onderwerpen, zodat bijvoorbeeld onderwerpen tijdig bij wiskunde zijn geïntroduceerd voordat ze bij een ander vak aan de orde komen. Hier is ook een taak weggelegd voor de profielcommissies.

Standpunt 14

In de ontwikkeling van de vernieuwde vakken van de Tweede Fase moet de samenhang tussen de verschillende wiskundevakken en andere vakken worden verbeterd, evenals de onderlinge afstemming. Het gaat daarbij niet uitsluitend om de exacte vakken, maar ook bijvoorbeeld om economie en aardrijkskunde.

9. Toetsing en examinering

Het Centraal Examen (CE) is in Nederland een instituut dat in praktijk normbepalend is voor het niveau van het schoolexamen en het onderwijs als geheel – scholen richten zich met het schoolexamen immers veelal op het CE. Daarmee bepaalt het CE voor een belangrijk deel de invulling van de eindtermen. Voor wat betreft het Centraal Examen is een heroverweging gewenst waar het gaat om de norm voor algebraïsche vaardigheden, notatie en formulering, hulpmiddelen en het gebruik van contexten.

Norm voor algebraïsche vaardigheden

Op verschillende plaatsen in dit stuk is al gewezen op de aansluitingsproblematiek vo-ho met betrekking tot algebraïsche vaardigheden. Docenten uit het hoger onderwijs die de eindtermen van het huidige wiskunde A en B bezien, tonen zich daarmee best tevreden – er vanuit gaande dat de eindexamenkandidaten zich inderdaad die eindtermen met een redelijke mate van beheersing eigen hebben gemaakt. De praktijk is echter anders, omdat de norm in de huidige examens te laag worden gelegd. Voor ‘rekenfouten’ worden vaak weinig punten afgetrokken, terwijl beheersing op het niveau van 55% in het vervolgonderwijs niet volstaat. In het hoger onderwijs, met name in de bèta-technieksector en op de pabo, worden dan ook ‘reparatiecursussen’ geïntroduceerd. Het hoeft geen betoog dat het ongewenst is dat leerlingen die slagen voor het eindexamen onvoldoende zijn toegerust voor het vervolgonderwijs.

Om het gewenste hogere beheersingsniveau te bereiken, vallen er verschillende wegen te bewandelen. Van het grootste belang is een samenhangend programma, waarin reken- en algebraïsche vaardigheden in alle leerlijnen zoveel mogelijk terugkomen en zodoende op een natuurlijke manier bijgehouden worden. Een ander idee is het invoeren van gestandaardiseerde jaartoetsen, waarbij per jaarlaag de voortgang in elementaire reken- en algebraïsche vaardigheden bijgehouden wordt en landelijk of regionaal door de scholen zelf wordt vergeleken. De basis moet worden gelegd in de onderbouw.

Maar ook het CE, in Nederland nog altijd een sterke richtinggevende standaard, kan hieraan bijdragen door algebraïsche en formulevaardigheden expliciet en met voldoende diepgang toetsen. De normen hiervoor dienen te worden heroverwogen. Uiteraard geldt ook voor dit aspect van het wiskundeonderwijs dat er per examenvak verschillende wiskundige vaardigheden aan de orde zijn.

Standpunt 15

Het automatiseren van wiskundige en in het bijzonder algebraïsche vaardigheden vereist een voortdurende en zorgvuldige toetsing van het beheersingsniveau. Deze vaardigheden dienen ook op het Centraal Examen getoetst te worden, waarbij de cesuur hoger ligt dan de gangbare 55%.

Notatie en formulering

Bij het bespreken van kernconcepten en denkactiviteiten is in hoofdstuk 4 gepleit voor aandacht voor het wiskundig correcte formuleren en redeneren. In samenhang met het vorige standpunt betekent dit dat een leerling ook in toetsituaties zelfstandig een complete wiskundige redenering op moet kunnen te schrijven, voorzien van een adequate wiskundige terminologie en notatiewijze.

Standpunt 16

De beheersing van correcte wiskundige terminologie en notatie is een aspect van het wiskundeonderwijs dat structureel getoetst moet worden – door het hele onderwijs heen tot en met de eindexamens.

Hulpmiddelen bij het CE

In hoofdstuk 7 over ICT is de rol van de grafische rekenmachine in het CE aan de orde gekomen. Mede door de beschikbaarheid van de GRM is de toetsing van algebraïsche vaardigheden op het CE gedurende een aantal jaren niet uit de verf gekomen, al geven de examens wiskunde B1 en B12 van 2006 een gunstiger beeld. Daarnaast is de kwestie aangeroerd van de verschillende mogelijkheden die de grafische rekenmachines hebben, doordat leerlingen er verschillende aanvullende informatie en programmatuur op hebben gezet.

De vraag is hoe het centrale examen hiermee om moet gaan. Bijvoorbeeld kan de mogelijkheid overwogen worden om een deel van het examen technologievrij af te nemen, zoals in sommige andere landen het geval is.

Een aparte discussie is nodig over het gebruik van rekenmachines die in staat zijn formules symbolisch te manipuleren. Op dit moment zijn deze op het eindexamen niet toegestaan. De aanwezigheid van een dergelijke rekenmachine op het eindexamen maakt het moeilijker om handmatige vaardigheden te toetsen zoals differentiëren, vergelijkingen exact oplossen, haakjes wegwerken, of breuken optellen. De commissie pleit daarom voor terughoudendheid in het toestaan van symbolische rekenmachines bij het examen.

Ten slotte over de rol van de formulekaart in het CE. De invoering van de formulekaart was destijds ingegeven door het beeld van een leerling die de formules wel kent, maar wie de precieze details even ontschoten zijn. De realiteit is echter dat een groot aantal leerlingen de formules niet meer uit het hoofd leert en daarom ook niet herkent. De rol en de omvang van de huidige formulekaart moet dan ook heroverwogen worden.

Standpunt 17

Hulpmiddelen, zoals ICT en de formulekaart, mogen datgene dat getoetst wordt (bijvoorbeeld algebraïsche vaardigheden) niet in de weg staan. Heroverweging van de plaats van de GRM en de formulekaart op het CE is noodzakelijk.

Contexten bij het CE

In hoofdstuk 6 is aangegeven dat de nadruk in het wiskundeonderwijs ligt op concepten die zich ontwikkelen vanuit authentieke toepassingen aansluitend bij de karakteristiek van het vak en het profiel. De vraag is nu welke plaats contexten hebben in het CE.

De commissie ziet een belangrijk verschil in de rol van contexten tussen de examens wiskunde A/C en wiskunde B (en mogelijk op termijn wiskunde D). In de examens wiskunde A bestaat er een traditie van opgaven waarin de context essentieel is voor de vraag: de context *is* feitelijk de vraag. De commissie beschouwt dit als een goede situatie en ziet graag een vergelijkbare stijl van examenvragen voor wiskunde C.

De contexten in de huidige examens wiskunde B zijn – met uitzondering van kansrekening en statistiek – dikwijls niet relevant voor de getoetste kennis en vaardigheden; zulke contexten verlenen de examenvragen geen extra betekenis of zin, maar leiden vooral af en maken het de kandidaat alleen maar lastiger (zie ‘Contexten in de examens wiskunde B’, Wim Kleijne, Euclides 2006). Voor wiskunde B (en op termijn mogelijk voor wiskunde D) pleit de commissie er daarom voor buitenwiskundige contexten alleen te gebruiken wanneer de aard van de opgave daar specifiek om vraagt.

Standpunt 18

Een herbezinning op de rol van contexten in het CE is gewenst. Daarbij dient het karakter van de verschillende wiskundevakken betrokken te worden.

10. Implementatie, scholing en nascholing

Het opstellen van examenprogramma's is slechts een onderdeel van de vernieuwing van (wiskunde)onderwijs. De werkelijke vernieuwing staat of valt met de implementatie, waarin de (na)scholing van docenten een cruciale factor is.

Ontwikkeling van de programma's

De periode 2006-2009 wordt gebruikt voor het ontwikkelen van lesmateriaal dat inspirerende voorbeelden zal bevatten. Het lesmateriaal wordt ontwikkeld door docenten, met steun van deskundigen uit het vak en de vakdidactiek. Om de haalbaarheid en onderwijsbaarheid te onderzoeken wordt het materiaal uitgetest op een aantal proefscholen. Samenwerking met het hoger onderwijs wordt gestimuleerd via regionale steunpunten. Het Platform Bèta Techniek ondersteunt dit proces met middelen uit het Universumprogramma. Door middel van artikelen en voordrachten op conferenties houdt de commissie in de komende periode alle betrokkenen op de hoogte van de vorderingen.

Tijdens het werken aan bovengenoemde taken zal de commissie intensief overleggen met het veld van wiskundeleraren in havo-vwo en regelmatig de aansluitende opleidingen in het hoger beroepsonderwijs en het wetenschappelijk onderwijs consulteren. Ook wordt afstemming nagestreefd met de commissies en instellingen die parallel aan het werk zijn met de leerplannen voor andere vakgebieden. In de geplande experimenteerperiode kunnen op geselecteerde proefscholen experimentele examens worden afgenomen op basis van het vernieuwde en voorlopige curriculum, dat de leerlingen feitelijk hebben doorlopen. De evaluatie van dit lesmateriaal zal in 2009 resulteren in een eindrapportage, samen met voorstellen voor nieuwe wiskundeprogramma's voor havo en vwo.

De initiële opleiding van wiskundeleraren

Zoals al in hoofdstuk 5 is uiteengezet is een sterke expertise van de wiskundedocent een cruciale voorwaarde voor succesvolle implementatie en adequate invulling van het vernieuwde wiskundeonderwijs. Niet alleen moet die wiskundedocent de didactische ruimte en faciliteiten krijgen om een dergelijk kwalitatief sterk programma uit te voeren, maar die expertise moet in de initiële opleiding en nascholing ook worden verworven. Over de kwaliteit van een deel van de initiële lerarenopleidingen maakt de commissie zich op grond van signalen uit het onderwijsveld ernstig zorgen. In de hbo-opleidingen staan vakinhoud en vakdidactiek al jarenlang onder druk, vooral omdat dit specialistisch onderwijs voor kleine aantallen studenten is en dus duur. In de wet op de Beroepen In het Onderwijs (BIO, 2006) vormen vakinhoud en vakdidactiek samen slechts één van de zeven competenties van een docent. De andere zes competenties zijn niet vakspecifiek. De commissie is verre van gelukkig met deze ontwikkeling en acht die ook in strijd met het beleid van de overheid in wetten en actieplannen om in het onderwijs prioriteit te geven aan de ontwikkeling van een toppositie voor Nederland als kennisland. Kennisaspecten, gerepresenteerd door vakinhoud en vakdidactiek, dienen niet ondergeschikt te worden gemaakt aan algemene sociale en pedagogische vaardigheden. Het beleid van de overheid zal in dat opzicht duidelijker gericht moeten worden op een versterking van de vakinhoudelijke en vakdidactische component in de praktijk van de lerarenopleidingen. Een leraar in het voorgezet onderwijs is naast pedagoog ook vakleraar.

Standpunt 19

Een goede vakinhoudelijke en vakdidactische scholing van aankomende docenten is essentieel voor de kwaliteit van het toekomstig wiskundeonderwijs. Dit betreft zowel de hbo tweedegraads opleidingen, de post-hbo eerstegraads opleidingen als de universitaire eerstegraads opleidingen.

Een probleem bij de hbo-opleidingen is dat de vaksecties klein zijn en weinig invloed hebben binnen de instelling. De steun voor een sterkere inbreng van vakinhoud en vakdidactiek zal daarom van buiten het hbo moeten komen. Een nauwere samenwerking tussen hbo en wo, zoals indertijd bij de start van de nieuwe tweedegraads lerarenopleidingen (NLO's) het geval was, lijkt gewenst. Voor de post-hbo eerstegraads opleidingen en de universitaire lerarenopleidingen is een structurele samenwerking, zoals die in sommige plaatsen regionaal is gegroeid, noodzakelijk. De vakinhoudelijke en vakdidactische expertise van de universiteiten gecombineerd met de pedagogische en didactische inbreng van de post-hbo eerstegraads opleidingen kunnen leiden tot een kwalitatieve en kwantitatieve versterking van de eerstegraads lerarenopleidingen. De universitaire eerstegraads opleidingen zijn op dit moment opleidingen op master- of master+-niveau en leveren maar heel weinig studenten af. Deze opleidingen zouden aantrekkelijker gemaakt kunnen worden, bijvoorbeeld door ze te verkorten door middel van flexibele leerroutes en een royelere toelating van anders opgeleide afgestudeerden van hbo en wo (zij-instromers).

Standpunt 20

De commissie pleit ervoor het vakinhoudelijk niveauverschil tussen post-hbo eerstegraads lerarenopleidingen en de universitaire eerstegraads lerarenopleiding te verkleinen en door structurele samenwerking de kwaliteit en kwantiteit van de uitstroom van gekwalificeerde eerstegraads wiskundeleraren te vergroten.

Nascholing van zittende docenten

Gezien de leeftijdsopbouw van het lerarencorps gaat een hoog percentage aan gekwalificeerde eerstegraads bevoegde wiskundeleraren de komende jaren met pensioen. Op tal van scholen geven tweedegraads wiskundeleraren les in de bovenbouw havo-vwo, terwijl steeds meer onbevoegde leraren wiskundelessen in de onderbouw overnemen. Ook bij de op zichzelf waardevolle recente zij-instroom van leraren met een andere beroepsachtergrond schort het niet alleen aan ervaring maar ook aan vakinhoudelijke of vakdidactische expertise. Gelet op de eerder gesignaleerde centrale rol van de leraar bij een goede implementatie van het vernieuwde wiskundeonderwijs is een uitgebreide en permanente nascholing van zittende wiskundeleraren noodzakelijk. Het nascholingsplan van de Nederlandse Vereniging voor wiskundeleraren beoogt een impuls te geven voor kwalitatief sterke nascholing, aansluitend bij de noodzakelijke expertise voor het vernieuwde wiskundeonderwijs. De commissie zal zich bij de Minister inzetten voor financiële ondersteuning van deze nascholing.

Standpunt 21

De invoering van de nieuwe programma's per 2010 behoeft per profiel een permanente landelijke nascholing in relevante vakinhouden en achtergronden, goede didactische werkwijzen, uitwisseling van goede onderrwijservaringen, van toetsing en praktische opdrachten.

Stimulans voor professionele ontwikkeling

Al decennia lang kent het voorgezet onderwijs een sterke stroom van onderwijsgeevenden die zich door vakinhoudelijke scholing in hun vrije tijd opwerken van leraar in het basisonderwijs tot tweedegraads leraar in het voortgezet onderwijs en vervolgens tot eerstegraads leraar. De zo gekwalificeerde leraren combineren een zeer ruime pedagogische ervaring met vakinhoudelijke expertise en zijn bijzonder waardevolle leden van hun vaksectie. Een gevolg van het recent ingevoerde functiewaarderingssysteem en de wet BIO is dat een docent niet extra betaald krijgt als hij zich vakspecifiek ontwikkelt omdat het salarispectief van een tweedegraads wiskundedocent in de onderbouw precies hetzelfde is als dat van een eerstegraads wiskundedocent. Ook de competente vakleraar, die veel tijd en energie investeert in het zich bekwamen in nieuwe verworvenheden, versterkt daarmee niet zijn carrièreperspectief.

Onderwijskwaliteiten van goede leraren, die hun vakinhoudelijke en vakdidactische competentie op peil brengen of houden, worden in scholen onvoldoende gehonoreerd. De commissie stelt zich vierkant op achter de analyse en het standpunt van de onderwijsbonden uit 2006:

“Het vak van docent in het voortgezet onderwijs is toe aan een forse opwaardering. De docent als professional moet weer meer ruimte (en tijd) krijgen om zelf het onderwijs vorm te geven.”

In de toelichting schrijven de bonden:

“Aanleiding voor het voorstel is de tendens tot downgrading van de functie van leraar in het voortgezet onderwijs. Terwijl er maar mondjesmaat LC-functies (schaal 11) worden uitgereikt, dreigt het aantal LD-functies (schaal 12) steeds verder af te nemen. De grote meerderheid van de docenten in het voortgezet onderwijs blijft steken in een LB-functie (schaal 10).”

Deze algemene situatie heeft repercussies voor de uitvoering van onze taak. Dit leidt tot het volgende standpunt:

Standpunt 22

De meeste scholen bieden in de context van de wet Beroepen in het Onderwijs geen enkele stimulans voor docenten om zich in te zetten voor een versterking van hun vakinhoudelijke en vakdidactische competentie, die onder meer noodzakelijk is voor de implementatie van de voorgestelde onderwijsvernieuwingen. Maatregelen van OCW moeten hier in positieve zin verandering in te brengen.