Abstracts / Résumés

« Fighting with numbers », from medieval to modern times
François Goichot (IREM de Lille)

Rithmomachia is a sophisticated medieval game, which was created to help learning arithmetics. We have used a simplified version with pupils of age 12-14. We shall outline this historical journey, and participants will be able to play the game, in order to figure out its potentialities for classroom.

« Combattre avec les nombres », du Moyen-âge à nos jours
François Goichot (IREM de Lille)

Rithmomachia est un jeu médiéval sophistiqué, qui a été créé pour aider à apprendre l'arithmétique. Nous avons utilisé une version simplifiée avec des élèves âgés de 12 à 14 ans. Nous esquisserons ce parcours historique, et les participants seront en mesure de jouer le jeu, afin de comprendre ses potentialités pour la salle de classe. bicylinder peut jouer un rôle intéressant dans les cours de mathématiques pour les élèves âgés entre 15 et 18 ans, pour rendre les cours de mathématiques plus culturels et polyvalents sans passer beaucoup de temps supplémentaire.

Giving meaning to operations on negative numbers through an « integrated historical approach » inspired by Freudenthal
Mariza Grand'Henry-Krysinska (GEM)

To construct negative numbers means to define addition and multiplication operations on negative quantities. This task comes up against an epistemological obstacle which is linked to the appearance of numbers in the context of magnitudes.
To cross it, we can be inspired by the history of negative numbers, which shows that the need to use negative numbers appeared in concomitance with the development of algebraic thought in the 18th and 19th century, or more precisely, as Freudenthal points out, with the interest to have an algebraic complete description of geometrical figures and relations. According to H. Freudenthal, this idea called by him *the geometrical algebraic permanence principle* deserves to be exploited didactically.
The starting point of the proposal presented to teach operations on negative numbers are the formulas associated with straight lines.

Donner du sens aux opérations sur les nombres négatifs par une « approche historique intégrée » inspirée de Freudenthal
Mariza Grand'Henry-Krysinska (GEM)

Construire les nombres négatifs signifie définir les opérations d'addition et de multiplication sur des quantités négatives. Cette tâche se heurte à un obstacle épistémologique qui est lié à l'apparition des nombres dans le contexte des grandeurs. Pour le franchir, on peut s'inspirer de l'histoire des nombres négatifs qui montre que la nécessité d'utiliser les nombres négatifs est apparue en concomitance avec le développement de la pensée algébrique aux XVIII^{e} s. et XIX^{e} s., ou plus exactement, comme le souligne Freudenthal, avec l'intérêt de disposer d'une description algébrique complète des relations géométriques. Selon H. Freudenthal, cette idée appelée *principe géométrique de la permanence algébrique* mériterait d'être exploitée didactiquement.
Le point de départ de la proposition présentée pour enseigner les opérations sur les nombres négatifs sont les formules associées aux droites.

Freudenthal H., The Implicit Philosophy of Mathematics History and Education , in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, August 16-24, 1983, Warszawa

---

The bicylinder or birdcage or móuhéfāng gài
Michel Roelens (Uitwiskeling)

In this workshop I will present an object that allows combining many goals of mathematics education. It is a solid figure that challenges the spatial imagination. The calculation of its volume and surface area is a good exercise in integral calculus, but other methods are also possible and have been used in history. It appears in technology and in architecture. And it has a very rich history, from Archimedes via Liú Huī and Zǔ Chōngzhī to C.P. Steinmetz and others. It even plays a role in a bit of ‘fake news’ on a French website. Several historical mathematicians have given it different names: bicylinder, móuhéfānggài, birdcage, equidomoid, Steinmetz’ solid… We will discover how the bicylinder can play an interesting role in mathematics courses for students between the ages of 15 and 18, to make the mathematics courses more cultural and versatile without spending much extra time.

Le bicylindre ou la cage à oiseaux ou móuhéfāng gài
Michel Roelens (Uitwiskeling)

Dans cet atelier, je présenterai un objet qui permet de combiner plusieurs objectifs de l'enseignement des mathématiques. C'est une figure solide qui défie l'imagination spatiale. Le calcul de son volume et de sa surface est un bon exercice de calcul intégral, mais d'autres méthodes sont également possibles et ont été utilisées dans l'histoire. Elle apparaît dans la technologie et dans l'architecture. Et son histoire est très riche, d'Archimède à C.P. Steinmetz en passant par Liú Huī et Zǔ Chōngzhī et d'autres. Il fait même l’objet de 'fausses nouvelles' sur un site français. Plusieurs mathématiciens historiques lui ont donné des noms différents : bicylindre, móuhéfānggài, cage à oiseaux, équidomoïde, solide de Steinmetz... Nous découvrirons comment le bicylindre peut jouer un rôle intéressant dans les cours de mathématiques pour les étudiants âgés entre 15 et 18 ans, pour rendre les cours de mathématiques plus culturels et polyvalents sans passer beaucoup de temps supplémentaire.

Workshop about a drawing instrument to find reflection points
Henk Hietbrink (Freudenthal Instituut)

The subject of reflection of light in reflecting surfaces is an age-old subject that sometimes comes back in a modern way. In the Dutch magazine *Euclides* of the mathematical teacher society, it is treated around 1977 as the question of billiards on a round billiard table. In optics, it is called the problem of Ibn al Haytam, but our Christiaan Huygens also thought about it.
Given the position of the eye and the position of the light: where is the reflection point on a circular object? Or at the position of two billiard balls on a circular table: where does the first ball have to hit the edge to hit the second ball?
The mathematics behind this is not that simple, but with Geogebra it can be made transparent. Leonardo Da Vinci has come up with an amazing, non-mathematical solution with an equally simple and ingenious instrument.
After a brief historical introduction and after a serious problem exploration, the participants themselves make the instrument from cardboard to find reflection points (plural) on a sphere, elliptical or otherwise curved object.

Atelier sur un instrument de dessin pour trouver des points de réflexion
Henk Hietbrink (Freudenthal Instituut)

L’étude de la réflexion de la lumière sur les objets est un sujet séculaire qui revient parfois de manière moderne. Dans la revue néerlandaise *Euclides* de la société des professeurs de mathématiques, il est abordé vers 1977 à l’aide de billards à table circulaire. En optique, on l'appelle le problème d'Ibn al Haytam, mais notre Christiaan Huygens y avait également pensé.
Compte tenu de la position de l'œil et de la position de la lumière : où se trouve le point de réflexion sur un objet circulaire donné ? Ou bien, les positions de deux boules de billard sur une table circulaire étant données : où la première boule doit-elle frapper le bord pour atteindre la deuxième boule ?
Les mathématiques nécessaires pour aborder ces questions ne sont pas si simples, mais avec Geogebra cela peut être rendu transparent. Léonard de Vinci a trouvé une solution non mathématique étonnante à l’aide d’un instrument tout aussi simple qu’ingénieux.
Après une brève introduction historique et après une exploration sérieuse du problème, les participants fabriqueront eux-mêmes l'instrument en carton pour trouver des points de réflexion sur une sphère, un objet elliptique ou courbé.