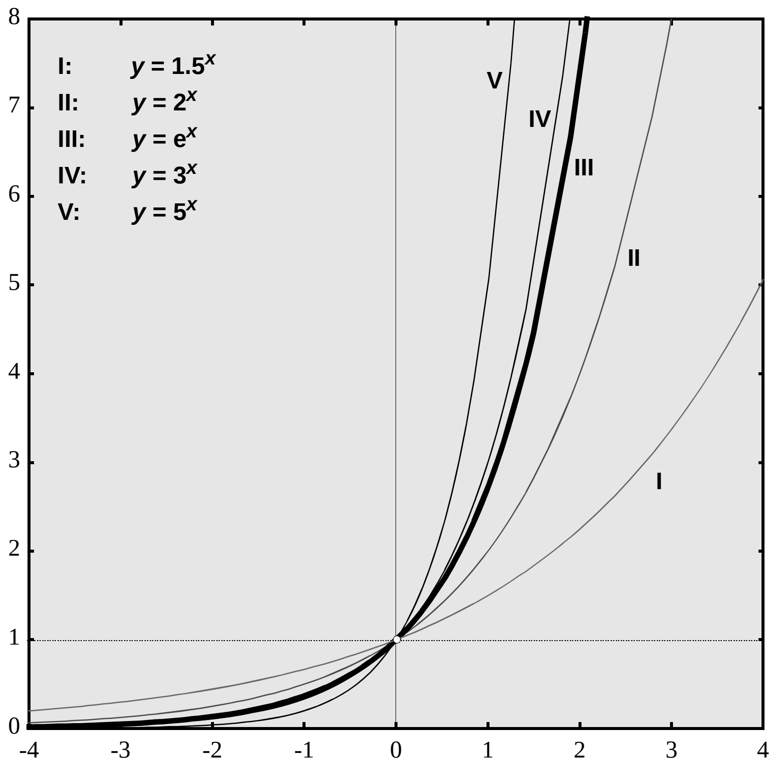
De techniek van het differentiëren

Differentiaal- en Integraalrekening deel 2



Nieuwe wiskunde tweede fase
Profiel N&G en N&T
Freudenthal instituut

Differentiaal- en Integraalrekening (deel 2 : De Techniek van het Differentiëren)

Project: Wiskunde voor de tweede fase
Profiel: N&G en N&T
Klas: vwo 5
Staat: Tweede herziene versie
Ontwerp: Martin Kindt, Paul Drijvers en Michiel Doorman

Freudenthal instituut, oktober 1997

Inhoud

vooraf

In het eerste deeltje (Som & verschil, afstand & snelheid) van de Differentiaal- en Integraalrekening kun je twee stromen onderkennen:

S	D
↓	↓
OPPERVLAKTE	**RAAKLIJN**
↓	↓
(afgelegde) AFSTAND	**(momentane) SNELHEID**
↓	↓
INTEGREREN	**DIFFERENTIËREN**

omgekeerde bewerkingen

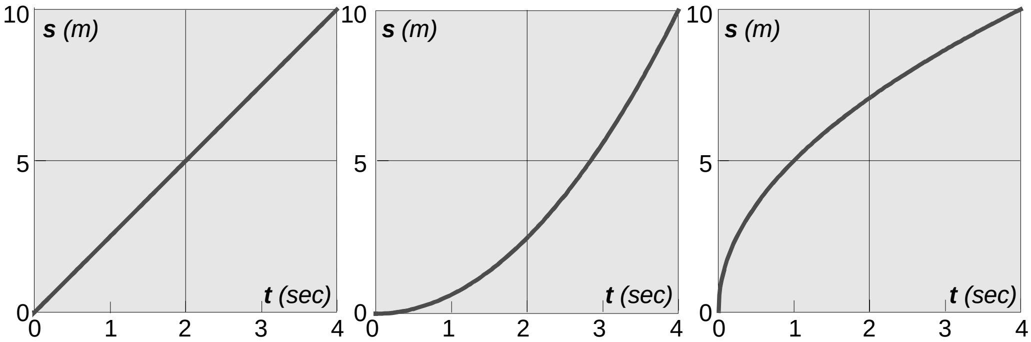
Die stromen monden uit in twee bewerkingen voor functies, respectievelijk *integreren* en *differentiëren* genoemd. Die twee bewerkingen hebben erg veel met elkaar te maken, ze zijn elkaars *omgekeerde*. Net zoals bijvoorbeeld de bewerkingen 'kwadrateren' en 'worteltrekken' elkaars omgekeerde zijn. Sommige mensen gebruiken in plaats van het werkwoord *integreren* de term *anti-differentiëren.* Evengoed zou je worteltrekken 'anti-kwadrateren' kunnen noemen of differentiëren 'anti-integreren'.
Van de twee beweringen 'kwadrateren' en 'worteltrekken' is de eerste *rechtstreeks*: je kunt bij elk getal direct het kwadraat berekenen. Daarentegen is worteltrekken een soort terugzoeken: je zoekt het getal waarvan je het kwadraat al weet. Je moet dus eerst weten hoe je kwadraten uitrekent om te kunnen worteltrekken.
Bij differentiëren en integreren is het eigenlijk net zo. Differentiëren gaat rechtstreeks en bij integreren probeer je een functie waarvan je de 'gedifferentieerde' (meestal 'afgeleide' genoemd) al weet, terug te zoeken.

regels voor het differentiëren

Het lijkt dus verstandig om eerst maar eens te leren hoe je allerlei functies kunt differentiëren. Daarvoor zijn een aantal regels nodig, die je in dit boek zult leren gebruiken.
Aan techniek alleen heb je weinig als je die niet kunt toepassen in de daarvoor geschikte situaties. Daarom zal er in dit boek ook aandacht zijn voor de betekenis van het differentiëren en hoe je de resultaten kunt interpreteren. Het zal dan blijken dat je heel wat kunt zeggen over het gedrag van een functie op grond van zijn gedifferentieerde.

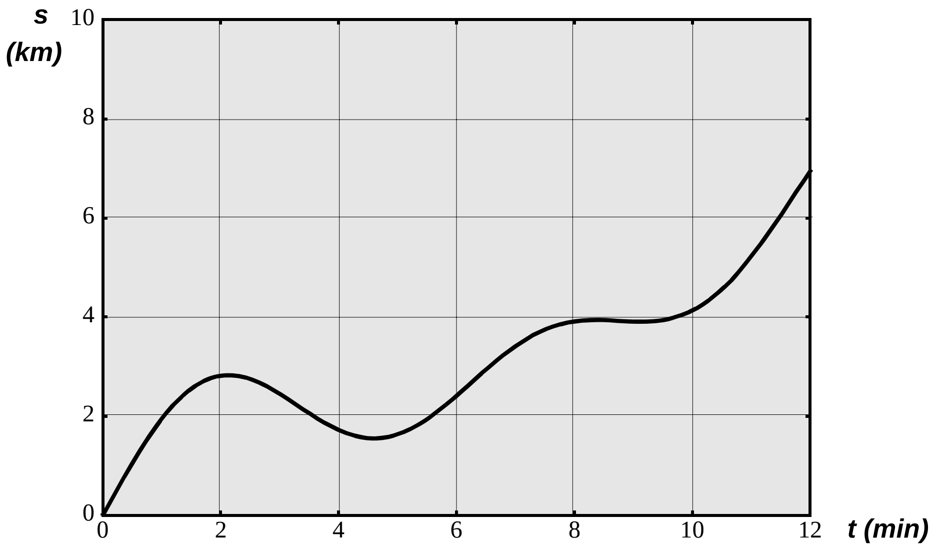
1 Snelheid, helling en afgeleide

1 Hieronder zie je drie tijd-afstand-grafieken Eén van deze grafieken zou betrekking kunnen hebben op een auto die optrekt, nadat het stoplicht zojuist op groen is gesprongen.



a. Welke van de drie is dat?
b. Schets bij elk diagram een passende tijd-snelheid-grafiek.

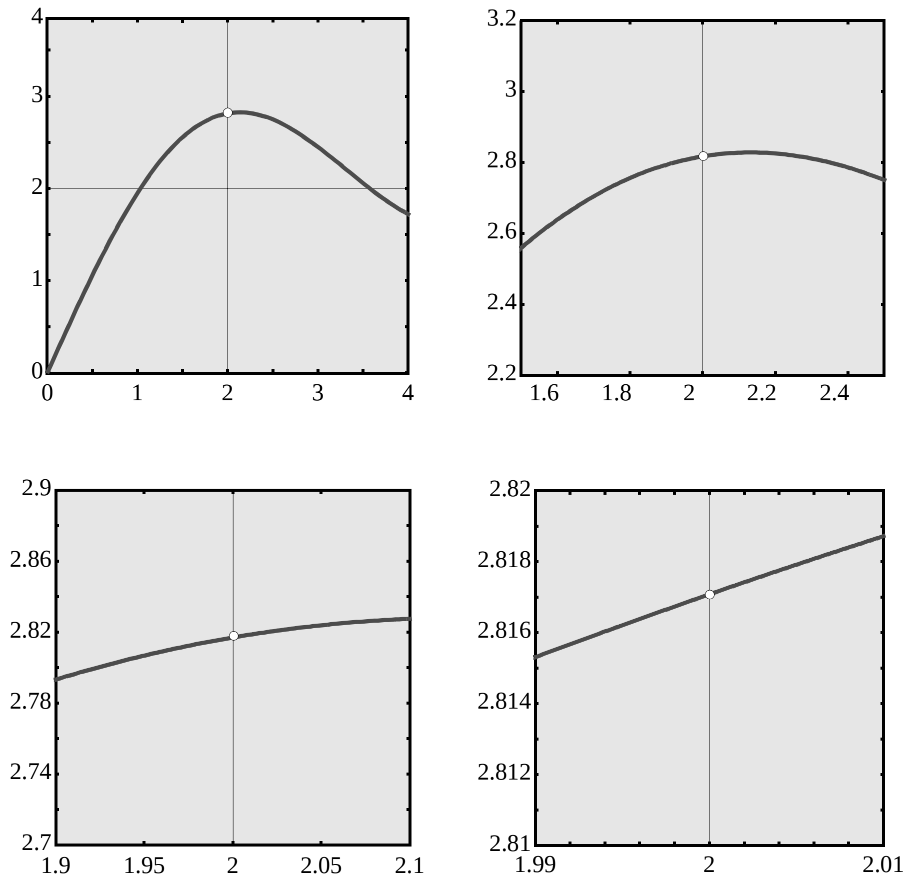
2 Bekijk onderstaande t,s -grafiek van een auto. Langs de horizontale as is de tijd (in minuten) uitgezet en langs de verticale as de afstand over de weg (in km) tot een vast punt A op de route. Het tijdstip $t = 0$ is het tijdstip waarop A werd gepasseerd.



a. Schat uit de grafiek met welke snelheid (in km/min) het punt A werd gepasseerd.

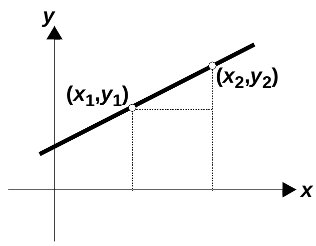
Als het voertuig zich van A verwijdert, rekenen we de snelheid positief, als het zich naar A toe beweegt, rekenen we de snelheid negatief.

b. Op welke van de tijdstippen $t = 0, 1, 2, \ldots, 12$ was de snelheid negatief?
c. Op de volgende bladzij zie je hoe er ingezoomd is op de grafiek rond het punt dat correspondeert met het tijdstip $t = 2$. Je ziet dat bij de vierde uitvergroting de grafiek nagenoeg een rechte lijn lijkt. Wat is de ‘natuurkundige’ betekenis van het hellingsgetal (ofwel de richtingscoëfficiënt) van die lijn?



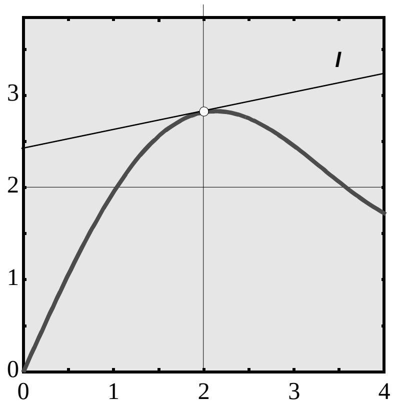
(locale) helling

Zoals bekend, wordt de helling van een (niet-verticale) lijn in een assenstelsel gemeten door het verschil tussen de y-coördinaten van twee punten op die lijn te delen door het verschil tussen de x-coördinaten. Waar je die punten op de lijn kiest, doet er niet toe; het resultaat is overal hetzelfde.



richtingscoëfficiënt $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Voor deze hellingsmaat zijn verschillende namen in omloop. De officiële term in de Nederlandse taal is *richtingscoëfficiënt.* Maar je leest ook wel *hellingscoëfficiënt* of *hellingsgetal*. In het Engels gebruiken ze eenvoudig het woord *slope* (= helling).
Bij een niet-rechtlijnige grafiek is de helling veranderlijk. Bij een grafiek als hierboven kun je door inzoomen rond een punt, een bijna-rechte lijn krijgen en daarmee de *locale helling* in dat punt bepalen. We spreken van de (locale) helling van de grafiek in dat punt.
De rechte lijn door een punt P waarvan de helling overeenkomt met de locale helling van de grafiek in P is de *raaklijn aan de grafiek in P.*



***l* is raaklijn van de grafiek**

de locale helling in het punt met x = 2
is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van l

3 Het is niet altijd zo dat je in een punt van een grafiek kunt spreken van de locale helling. Plot op de GR de grafiek van $y(x) = 2x + \sqrt{x^2}$.
Neem het venster symmetrisch ten opzichte van de oorsprong.
Zoom een aantal keren in op de oorsprong.
Gaat de grafiek in (0 , 0) nu steeds beter op een rechte lijn lijken? Waarom?

4 Nog een voorbeeld.
Plot op de GR de grafiek van $y(x) = x^2 + 2\sqrt{x^2} + 3$. Neem het venster symmetrisch rond de *y*-as. Zoom een aantal keren in op het punt (0 , 3).
Beschrijf wat er gebeurt.

niet glad

In de opgaven **3** en **4** heb je voorbeelden gezien van grafieken met een punt, waarin er geen raaklijn is. In beide gevallen is er sprake van een niet-geleidelijke verandering van de helling: er is een *knikpunt*. We zeggen dan
dat de grafiek *niet glad* is in dat punt.

5 De tijd-afstand-grafiek bij opgave **2** is overal glad. Dat betekent dat er in elk punt één raaklijn is aan de grafiek ofwel, dat je in elk punt kunt spreken van de lokale helling. Hieronder zie je een lijst van locale hellingen (in één decimaal) voor de grafiek van opgave **2.**

t-waarde	locale helling
0	2.2
2	0.2
4	-0.5
6	1.0
8	0.2
10	0.6
12	1.8

a. Controleer (zo goed en zo kwaad als dat kan) tenminste één van die hellingsgetallen in de grafiek op bladzij 2.

b. Verwerk deze tabel in een grafiek (t-waarden langs de horizontale as, hellingsgetallen langs de verticale). Schets een vloeiende kromme lijn door de zeven punten. De grafiek die je nu krijgt is een benadering van de ‘hellinggrafiek’ bij de oorspronkelijke grafiek op bladzij 2. Wat is de ‘natuurkundige’ betekenis van die hellinggrafiek?

c. De hellinggrafiek snijdt tussen $t = 0$ en $t = 12$ een aantal keren de t-as. Hoe vaak?

d. Hoe kun je het antwoord op vraag **c** aflezen uit de oorspronkelijke grafiek?

hellinggrafiek

Bij een gladde grafiek hoort een hellinggrafiek. Die hellinggrafiek bevat informatie over de oorspronkelijke grafiek: ‘waar stijgt die heel sterk’, ‘waar is die heel vlak’, dat soort vragen kun je beantwoorden met de hellinggrafiek. Het tekenen van zo’n hellinggrafiek op de wijze van opgave **5** is tijdrovend, zeker als je eerst de hellingen moet meten. Het heeft eigenlijk alleen zin als er geen formule bekend is die bij de grafiek past.

op de GR

> Met de TI 82/83 kun je bij iedere ingevoerde functie (Y = ...) niet alleen snel de grafiek, maar ook de hellinggrafiek ervan op het scherm krijgen. Toets een functie naar keuze in voor Y_1. Voer dan in: Y_2= nDeriv(Y_1,X,X). NDeriv kun je vinden in het menu MATH. Na GRAPH krijg je grafiek en hellinggrafiek op het scherm.

functie

Een *formule* van de vorm ‘$y = ...$’, waarbij op de plaats van de stippen een of andere uitdrukking in één andere variabele (bijvoorbeeld x) bedoeld is, beschrijft een *functie*.
De werking van een functie kun je voorstellen door een ‘input-output-model’.
De functie wordt dan opgevat als een automaat die op de een of andere welomschreven manier een ‘inputvariabele’ (zeg x) omzet in een ‘outputvariabele’ (zeg y).

x → ***functie (= F)*** → *y*

Als je de functie voorstelt door F, dan zegt ‘$y = F(x)$’ hetzelfde als ‘de functie F levert bij de input x de output y’. Behalve via een formule zijn er nog vele andere manieren om een functie te bepalen of te beschrijven. Een beeldende vorm is de *grafiek*.

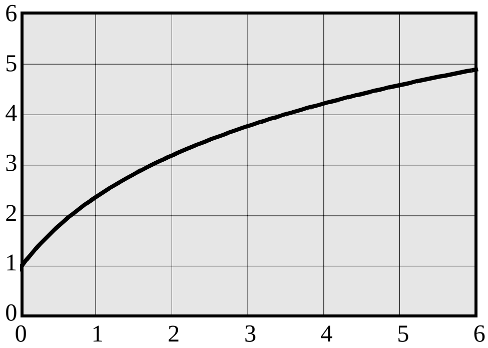
afgeleide functie

Als de grafiek van de functie F overal glad is, dan is er in elk punt een locale helling meetbaar. In dat geval kun je de functie bekijken die bij elke x-waarde de locale helling in het punt (x , $F(x)$) levert. Die functie noemt men soms *hellingfunctie*, maar meestal ***afgeleide functie***. (Het Engels voor afgeleide functie is *derivative*, vandaar nDeriv op de GR). Als de oorspronkelijke functie wordt aangeduid met F, dan wordt de afgeleide functie vaak F' (spreek uit: F-accent) genoemd.

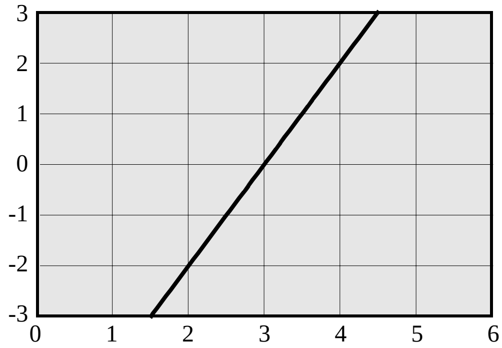
x → ***afgeleide (=F')*** → ***locale helling grafiek van F in punt (x,F(x))***

6 Op elk van de volgende twee bladzijden staan zes grafieken. De grafieken aangeduid met de Romeinse cijfers zijn de oorspronkelijke grafieken (F-grafieken) en de grafieken met gewone nummers zijn de daarbij horende hellinggrafieken (F'-grafieken). En, je raadt het al, de twee series staan niet in zodanige volgorde, dat je kunt zeggen: 1 hoort bij I, 2 bij II, enz. Welke grafiek van de tweede serie hoort bij welke grafiek van de eerste serie? Als je dat makkelijker vindt, kun je net doen of de eerste serie uit tijd-afstand-grafieken en de tweede uit tijd-snelheid-grafieken bestaat!

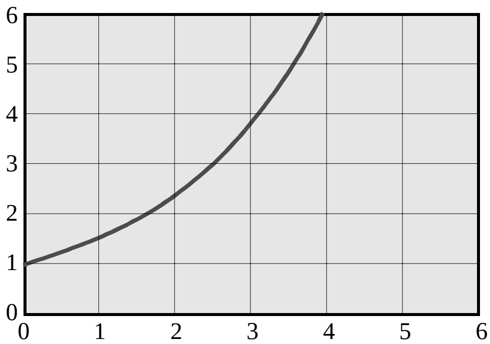
Zes *F*- grafieken.



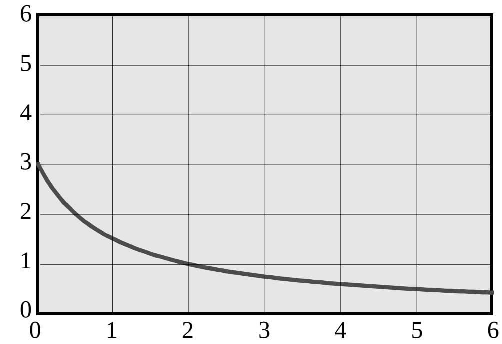
I



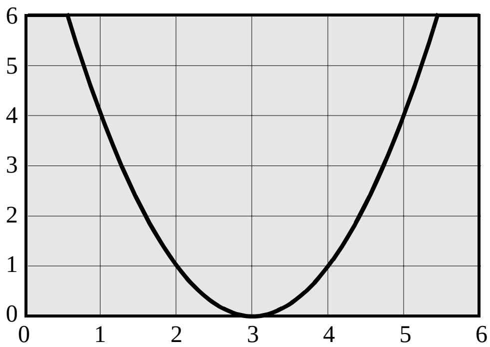
II



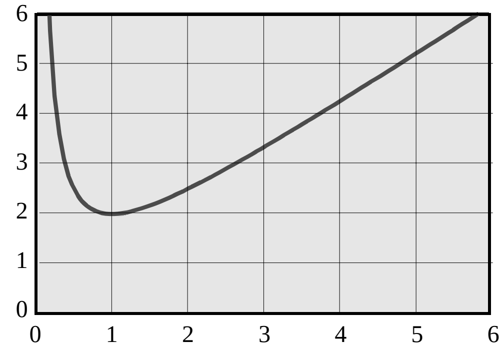
III



IV

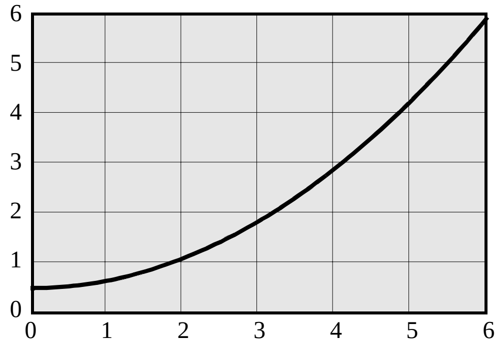


V

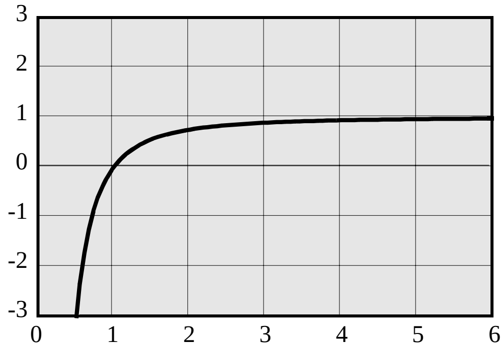


VI

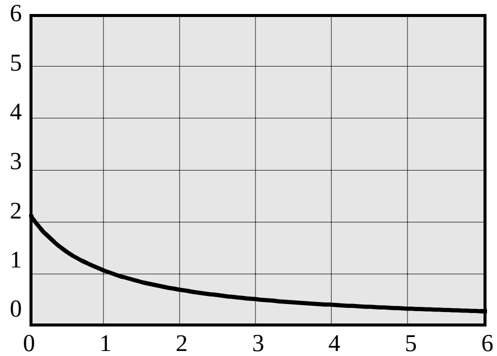
Zes *F'*-grafieken*:*



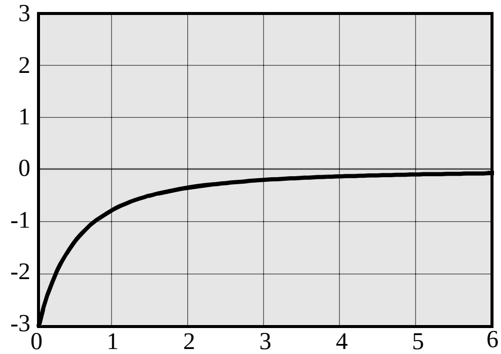
1



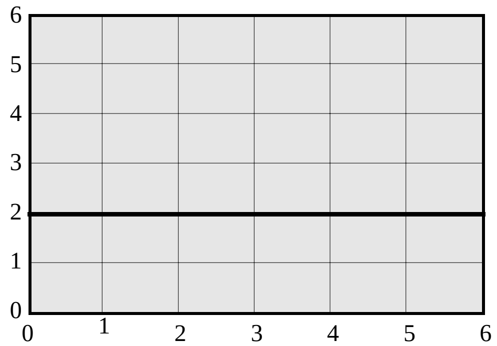
2



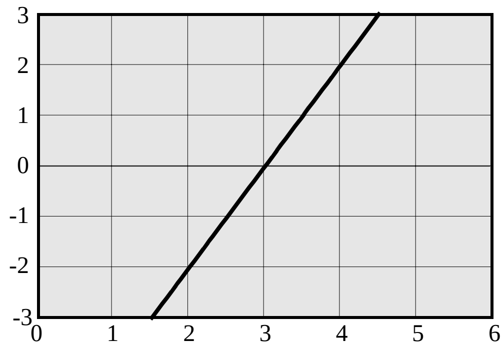
3



4



5



6

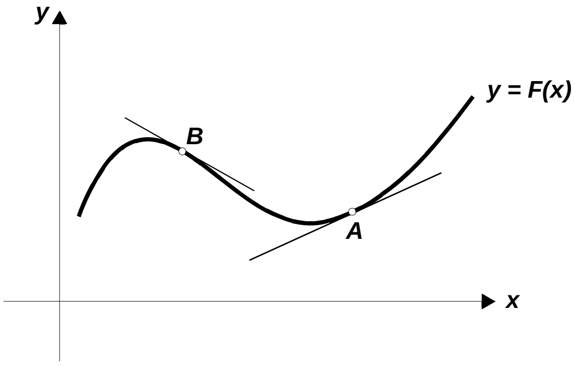
samenvatting

glad

Laat F een of andere functie zijn.
De grafiek van F is glad in het punt $A = (a\ ,\ F(a))$ als de grafiek bij herhaald inzoomen op dat punt steeds beter benaderd wordt door een rechte lijn.

raaklijn en locale helling

Die rechte lijn is dan de *raaklijn* in A aan de grafiek.
De locale helling van de grafiek wordt gegeven door de richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) van die raaklijn.



afgeleide functie

Als de grafiek van een functie overal glad is, dan bestaat bij elk punt $(x\ ,\ F(x))$ van de grafiek een getal dat de locale helling bepaalt.
De functie die bij iedere x-waarde de locale helling in het punt $(x\ ,\ F(x))$ levert, wordt de *afgeleide* (of de *gedifferentieerde*) van F genoemd.
Notatie: F'.
Voor de grafiek van F geldt:

$F'(x)$

$\|$

de locale helling in $(x\ ,\ F(x))$

$\|$

de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(x\ ,\ F(x))$

De grafiek van de afgeleide functie wordt de *hellinggrafiek* bij de oorspronkelijke functie (of grafiek) genoemd.

afgeleide en snelheid

De locale helling in een punt van een tijd-afstand-grafiek geeft de snelheid op één moment (het moment dat correspondeert met dat punt).
De afgeleide van een tijd-afstand-functie is de daarmee corresponderende tijd-snelheid-functie.

opgave

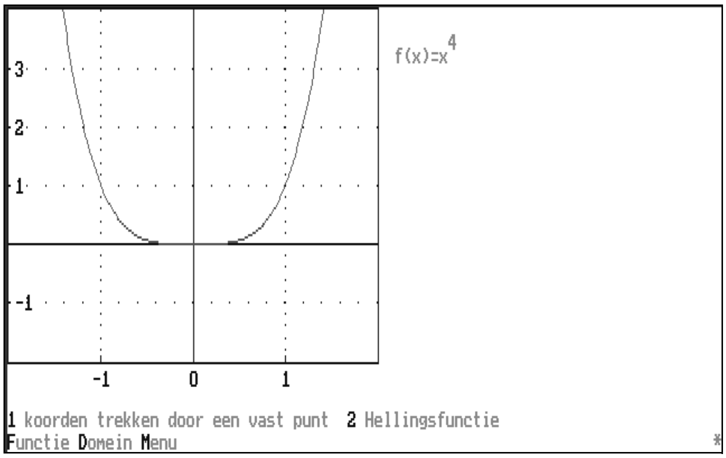
7 Geef een globale schets van de hellinggrafiek corresponderend met de grafiek hierboven (van $y = F(x)$).

2 Practicum ‘differentiëren met VUGRAFIEK’

In dit practicum ga je met het computerprogramma VUGRAFIEK de afgeleide functies bekijken van enkele machtsfuncties, dus van functies van de vorm $f(x) = x^p$. De exponent p kan daarbij behalve natuurlijke waarden ook negatieve of gebroken waarden aannemen.

1 **a.** Kies in het hoofdmenu voor optie 4: Differentiëren.
Soms wordt meteen een functie getekend, dat is dan de laatste functie die je gebruikt hebt. Kies dan voor F van Functie invoeren.

b. Laat de grafiek tekenen van $f(x) = x^4$ (gebruik voor de exponent de pijl omhoog).
Kies het venster [-2 , 2] bij [-2 , 4].
Na drukken op F1 wordt de grafiek getekend. Op het scherm zie je:

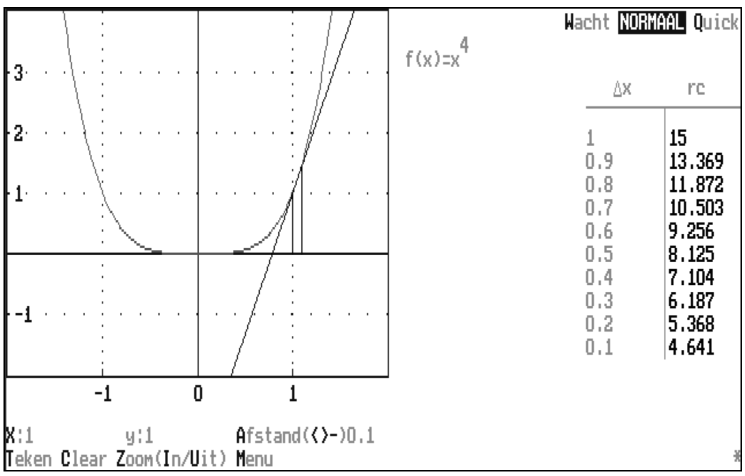


2 Je gaat eerst de (locale) helling van de grafiek in het punt (1 , 1) benaderen.

a. Kies hiervoor optie 1: koorden trekken door een vast punt. Tik de juiste x-coördinaat in. Onderin het scherm zie je dan:

Met Afstand (= D*x*) wordt horizontale afstand bedoeld.

b. Kies T: Teken. De helling van de grafiek in (1 , 1) wordt benaderd.
Uiteindelijk zie je op het scherm:



van koorde naar raaklijn

Je weet dat de locale helling in (1 , 1) gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in dat punt.
VUGRAFIEK laat een punt over de grafiek wandelen naar het punt (1 , 1).
De lijn door het *vaste punt* (1 , 1) en het *wandelpunt* benadert de bedoelde raaklijn.
Het lijnstuk tussen het vaste punt en het wandelpunt heet een *koorde*. In de tabel zie je hoe de richtingscoëfficiënt van de koorde verandert tijdens het wandelen.

3 Het wandelen ging vanaf afstand 1. VUGRAFIEK stelt nu voor om te wandelen vanaf afstand 0.1.

a. Tik op T: Teken.
De koorde benadert nu al aardig de raaklijn in (1 , 1).

b. Hoe groot denk je dat de helling van de grafiek van $f(x) = x^4$ in (1, 1) is?
Als je twijfelt, kun je nog eens wandelen met een kleinere afstand.

4 Op dezelfde manier kun je onderzoeken wat de locale helling is van $f(x) = x^5$ in (1, 1).
Om een andere functie te kiezen, moet je eerst terug naar het menu, waar je met F: Functie de functie kunt veranderen.
Laat de grafiek tekenen van $f(x) = x^5$.
Hoe groot is nu de helling in (1 , 1)?

5 De functie $f(x) = \sqrt{x}$ kun je op twee manieren invoeren in VUGRAFIEK:
met de letter V voor wortel of met › en de exponent 1/2.
Hoe groot is de helling van de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ in (1 , 1)?

6 Op welke twee manieren kun je $f(x) = \frac{1}{x^2}$ invoeren?

Hoe groot is de helling van de grafiek van f in (1 , 1)?

7 **a.** Je hebt nu van de grafieken van een paar machtsfuncties $f(x) = x^p$ de helling in het punt (1 , 1) benaderd. Welke regel kun je vermoeden?

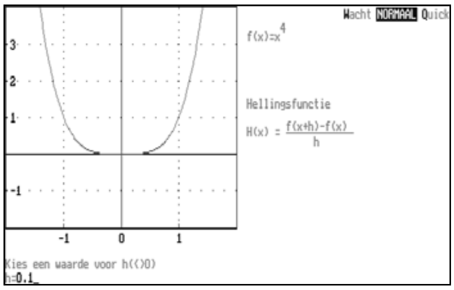
b. Voorspel met behulp van je antwoord bij **a** wat de helling van de grafiek van $f(x) = \sqrt{x^3}$ in (1 , 1) zou kunnen zijn.

c. Controleer je antwoord van **b** met VUGRAFIEK.

De regelmaat die je bij opgave **7** hebt ontdekt, kan van pas komen bij het vervolg.
Je hebt gekeken naar de helling van de grafiek van een machtsfunctie in een vast punt.
De helling werd benaderd met behulp van een punt dat naar het vaste punt toe wandelde, waarbij de afstand steeds kleiner wordt.
Nu nemen we een vaste *kleine* afstand (= h) en laten het punt waarvoor we de helling benaderen over de grafiek wandelen. Zo benader je voor een aantal punten van de grafiek de helling.

8 Een punt dat wandelt over de grafiek wordt beschreven als $(x , f(x))$.
Hoe kun je een punt beschrijven dat rechts van dit wandelpunt ligt op een horizontale afstand $\Delta x = h$?

9 **a.** Ga naar het menu en voer eerst weer de functie $f(x) = x^4$ in.
Kies voor optie 2: Hellingsfunctie.
Je ziet dan het volgende op het scherm:
De waarde van h waar VUGRAFIEK om vraagt, is de vaste horizontale afstand waarmee de hellingen worden benaderd.

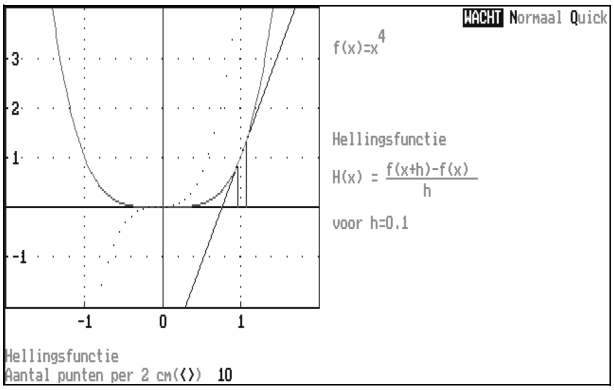


b. Op het scherm staat dat de hellingen worden berekend (of beter: benaderd) met de hellingsfunctie

$$H(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Verklaar deze formule.

c. Kies voor de horizontale afstand $h = 0.1$.
De hellingen worden benaderd. Druk op W van WACHT als je ongeveer bij $x = 1$ bent. Je ziet dan dit:



De waarden van de hellingen worden met stippen in de grafiek getekend.
Waar is nu de laatste stip neergezet? Klopt dat met je antwoord van opgave **3**?

benadering hellinggrafiek

10 Als VUGRAFIEK klaar is met het berekenen van de hellingen, dan worden de stippen met elkaar verbonden. De grafiek die je zo krijgt is een *benadering* van de hellinggrafiek.

a. De grafiek van de afgeleide functie van f kun je ook in de figuur laten tekenen.
Je moet dan wel de formule weten.
Bedenk eerst wat die formule zou kunnen zijn.
Kies dan voor optie 2: f'(x), voer de formule in en druk op T: Teken.

b. Als het goed is, lopen de grafieken van f' en H bijna over elkaar.
Hoe zorg je ervoor dat de grafiek van H de grafiek van f' *beter* benadert?

11 Laat op dezelfde manier de hellinggrafiek van $f(x) = x^5$ benaderen.

a. Welke formule vind je nu voor de afgeleide functie van f?

b. Bedenk een algemene regel voor de afgeleide van machtsfuncties.

c. Onderzoek of de regel voor de afgeleide van machtsfuncties ook geldt voor gebroken exponenten en voor negatieve exponenten.

3 De afgeleide van een machtsfunctie

In het boekje ‘Som & verschil, afstand & snelheid’ kun je deze bewering vinden:
als de afstand van een bewegend object als functie van de tijd wordt gegeven door de formule $s(t) = t^2$, dan geldt voor de snelheid: $v(t) = 2t$.
Omdat de tijd-snelheidsfunctie de afgeleide is van de tijd-afstandsfunctie, kunnen we ook schrijven:

$$\text{als } s(t) = t^2, \text{ dan } s'(t) = 2t$$

Evenzo werd beweerd:

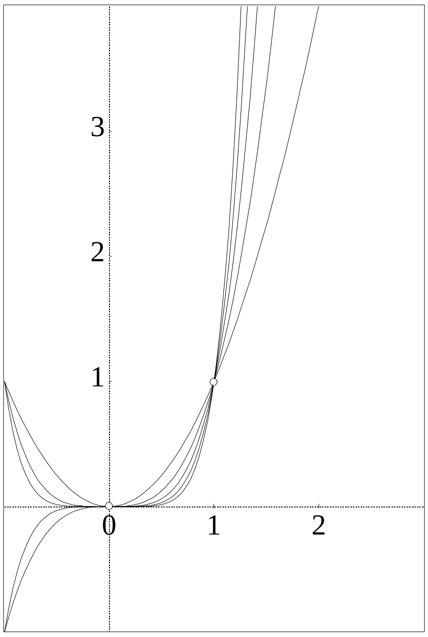
$$\text{als } s(t) = t^3, \text{ dan } s'(t) = 3t^2$$
$$\text{als } s(t) = t^4, \text{ dan } s'(t) = 4t^3$$

Dit leidt tot het vermoeden van de volgende algemene regel:

$$\text{als } s(t) = t^n, \text{ dan } s'(t) = nt^{n-1}$$

De resultaten waarop dit vermoeden is gebaseerd, werden verkregen langs *empirische* weg (met gebruik van de GR). In dit hoofdstuk zul je die resultaten, en de algemene regel, met behulp van algebra kunnen begrijpen. Daarbij gaan we nog een stapje verder. De regel geldt ook voor machten met *negatieve* en met *gebroken* exponenten; het practicum ‘differentiëren met VUGRAFIEK’ ondersteunt dat.

Maar eerst beperken we ons nu tot machtsfuncties met exponent n = 2, 3, 4, 5, ...
De grafieken van die functies vormen een *bundel*. De punten (0 , 0) en (1 , 1) zijn bijzondere punten voor die bundel: ze liggen namelijk op alle grafieken.
Allicht: $0^n = 0$ en $1^n = 1$ voor n = 2, 3, 4, 5, ...



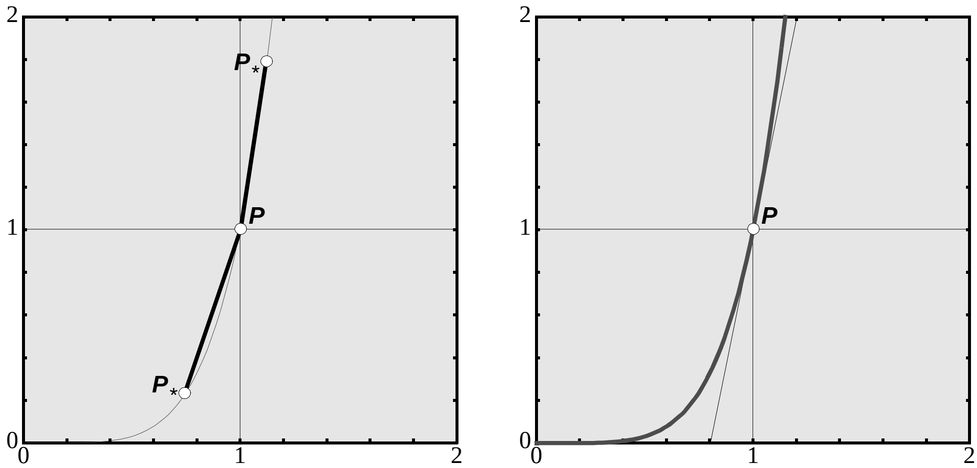
We kijken nu eerst naar de locale helling in de punten (1 , 1) en (0 , 0).

bewering

> voor n = 2, 3, 4, 5, ... geldt:
>
> **de locale helling van de grafiek van $F(x) = x^n$ in het punt (0 , 0) is gelijk aan 0 ;**
>
> **de locale helling van de grafiek van $F(x) = x^n$ in het punt (1 , 1) is gelijk aan n .**

1 Ga na of deze bewering in overeenstemming is met de algemene regel.

2 We gaan de bewering nader onderzoeken voor het geval n = 5. Eerst nemen we het punt P (1 , 1). Het idee is nu: neem in de buurt van P een ‘wandelpunt’ P_* op de grafiek, zeg met x-coördinaat r. De y-coördinaat van P_* is dan r^5.



a. Laat zien dat geldt: richtingscoëfficiënt koorde $PP_* = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4$.

b. Voor $r > 1$ geldt: richtingscoëfficiënt koorde $PP_* > 5$ en voor $0 < r < 1$ geldt: richtingscoëfficiënt koorde $PP_* < 5$. Verklaar dit uit **a.**

Om de locale helling in P te vinden, laten we het wandelpunt P_* onbeperkt dicht tot P naderen; dat betekent dat r onbeperkt dicht bij 1 komt.
Eerst merken we op dat dan ook r^2 onbeperkt dicht bij 1 komt.
Kijk maar naar de volgende tabellen:

r	r^2
1.01	1.0201
1.001	1.002001
1.0001	1.00020001
enz.	enz.

r	r^2
0.99	0.9801
0.999	0.998001
0.9999	0.99980001
enz.	enz.

Je ziet aan het patroon in de tabel dat je r^2 zo dicht bij 1 kunt krijgen als je wilt, door r maar dicht genoeg bij 1 te kiezen.
Hetzelfde kan worden gezegd van r^3 en r^4.

3 Maak soortgelijke tabellen voor r^3 en r^4.

Als r onbeperkt dicht nadert tot 1, dan naderen ook r^2, r^3 en r^4 onbeperkt dicht tot 1 en omdat

$\dfrac{r^5 - 1}{r - 1} = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4$, nadert $\dfrac{r^5 - 1}{r - 1}$ dan onbeperkt dicht tot 1+1+1+1+1 = 5.

limiet

We drukken dit zó uit:

de limiet van $\dfrac{r^5 - 1}{r - 1}$ voor r nadert tot 1 is gelijk aan 5

Of in korte notatie:

$$\lim_{r \to 1} \frac{r^5 - 1}{r - 1} = 5$$

Hiermee wordt bedoeld dat je $\dfrac{r^5 - 1}{r - 1}$ zo dicht bij 5 kunt krijgen als je maar wilt, door r dicht genoeg bij 1 te kiezen.

Merk op: als je $r = 1$ klakkeloos invult in de vorm $\dfrac{r^5 - 1}{r - 1}$ krijg je $\frac{0}{0}$ en dat is niet gedefinieerd.

4 Bereken $\dfrac{r^5 - 1}{r - 1}$ voor $r = 1.000001$ en voor $r = 0.999999$
Na de hoeveelste decimaal wijkt het resultaat af van de limiet 5?

Het is belangrijk dat je inziet dat de volgende drie beweringen in wezen hetzelfde zijn:

- $\lim_{r \to 1} \dfrac{r^5 - 1}{r - 1} = 5$
- **de locale helling van de grafiek van $y = x^5$ in (1 , 1) is 5**
- **als $f(x) = x^5$, dan $f'(1) = 5$**

5 Probeer nu te beredeneren dat de locale helling van de grafiek van $y = x^5$ in de oorsprong gelijk aan 0 is.

6 In het voorgaande hebben we ons beperkt tot de machtsfunctie met exponent 5.
Het is niet zo moeilijk in te zien dat je het getal 5 kunt vervangen door elk getal uit de rij 2, 3, 4, 5, ...
Gebruik de voorgaande methode om de volgende bewering te verklaren:
als $f(x) = x^{23}$, dan $f'(1) = 23$ en $f'(0) = 0$.

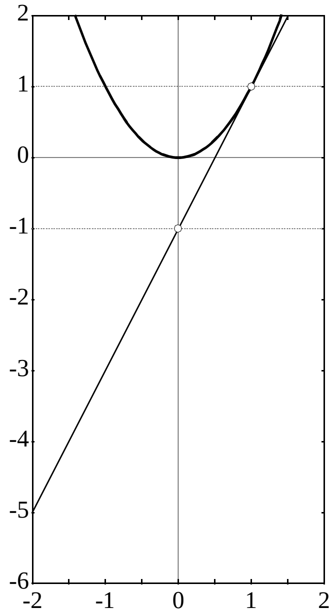
Je kunt nu begrijpen waarom de bewering onderaan bladzijde 12 waar is.
Zij steunt in feite op twee limietbeschouwingen. Die leiden tot:

$$\lim_{r \to 1} \frac{F(r) - F(1)}{r - 1} = \lim_{r \to 1} \frac{r^n - 1}{r - 1} = n \quad \text{en} \quad \lim_{r \to 0} \frac{F(r) - F(0)}{r - 0} = \lim_{r \to 0} \frac{r^n}{r} = 0$$

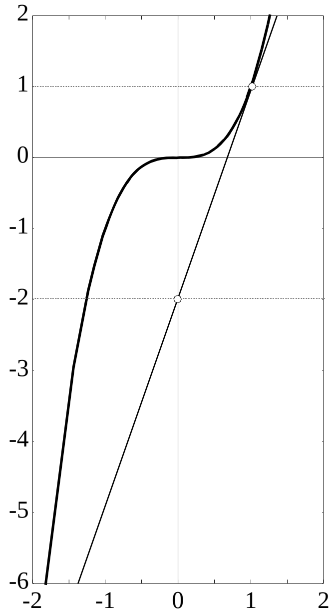
7 Bekijk nog eens de grafiekenbundel op bladzij 12.
Je ziet dat hoe hoger de exponent, hoe ‘meer horizontaal’ de grafiek in de buurt van de oorsprong lijkt. Verklaar dit.

8 Vier grafieken met een raaklijn in het punt (1 , 1).

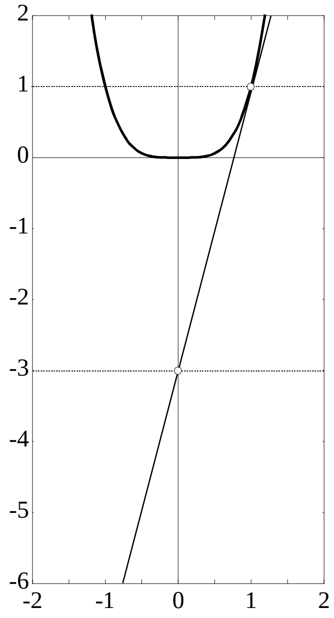
***y* = *x*²**



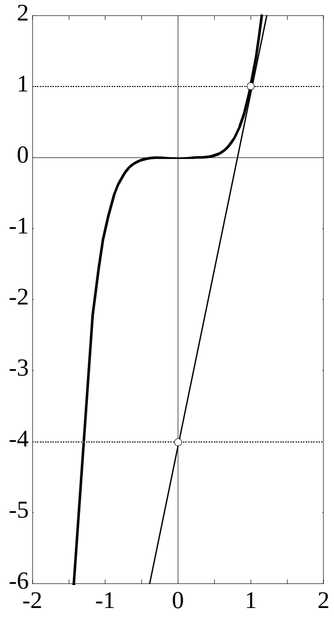
***y* = *x*³**



***y* = *x*⁴**



***y* = *x*⁵**

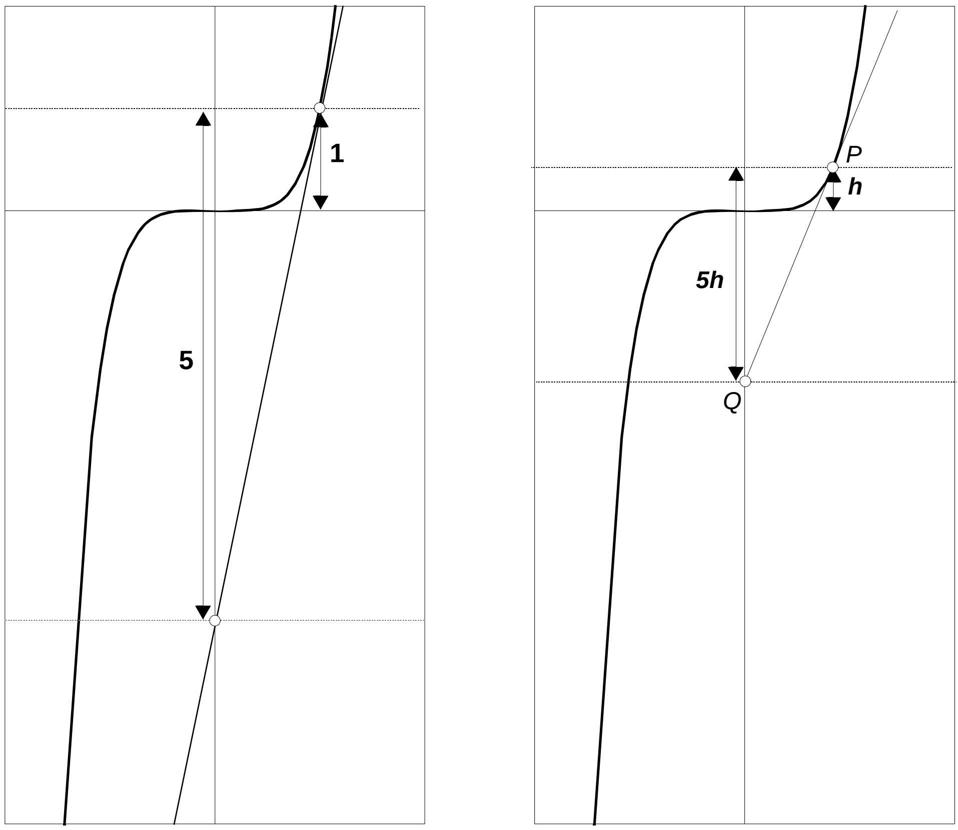


a. Controleer de plaats van het snijpunt van de raaklijn met de *y*-as.

b. Welke *y*-coördinaat, uitgedrukt in *n*, heeft het snijpunt van de *y*-as en de raaklijn in het punt (1 , 1) aan de grafiek van $y = x^n$?

c. Let nu op het snijpunt van de raaklijn met de *x*-as. Druk de *x*-coördinaat van dat punt uit in *n*.

Die raaklijn in (1 , 1) aan de grafiek van $y = x^n$ is natuurlijk interessant, maar er zijn nog zoveel andere punten op de grafiek. Het verrassende is, dat je uit de kennis over de locale helling in het punt (1 , 1), de andere locale hellingen kunt vinden! Dat is wat wiskunde soms heel sterk maakt: uit één bijzonder geval via een waterdichte redenering een algemene conclusie trekken. Voor dat we dit gaan uitvoeren, eerst een verdere verkenning aan de hand van de grafiek van $y = x^5$.



Let op het raakpunt en het snijpunt van raaklijn en y-as. In de linkerfiguur is het raakpunt (1 , 1) en het snijpunt (0 , -4). De afstand tussen de horizontale lijnen door beide punten is 5 keer zo groot als de afstand van raakpunt tot x-as. Een idee is nu, dat deze eigenschap misschien ook geldt voor andere punten van de grafiek....

9 Als dit idee goed is, dan kun je daarmee raaklijnen tekenen aan de grafiek van $y = x^5$. In de rechterfiguur is de afstand van P tot de x-as vijf keer afgepast op de y-as, te beginnen op de hoogte (= h) van P. Dat geeft het punt Q. De lijn PQ lijkt inderdaad de raaklijn te zijn in P aan de grafiek.

- **a.** Stel dat het punt P de coördinaten (p, p^5) heeft. Als het idee over de verhouding van de verticale afstanden goed is, zou moeten gelden dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P gelijk is aan $5p^4$. Toon dit aan.
- **b.** Ga na hoe je op soortgelijke wijze raaklijnen zou kunnen tekenen aan de grafieken van $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, enz·

Alles wijst er op, maar er is nog geen bewijs(!), dat de nu volgende regel juist is.

regel

Als $f(x) = x^n$,

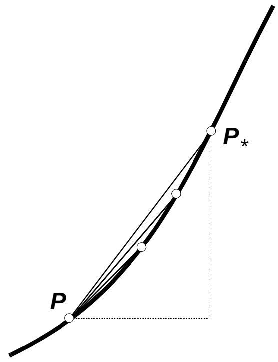
dan $f'(x) = n\ x^{n-1}$

voor n = 2, 3, 4, 5, ...

Om de regel te verklaren, nemen we een willekeurig punt P op de grafiek van $y = x^n$ en een wandelpunt P_* (ook op de grafiek) dat daar dichtbij ligt. Je mag veronderstellen dat P niet het punt (0 , 0) of (1 , 1) is, want voor die punten weet je al dat de formule klopt. De coördinaten van P en P_* stellen we gelijk aan: (x , x^n) en (x_* , x_*^n).
De richtingscoëfficiënt van de koorde PP_* is dan gelijk aan:

$$\frac{x_*^n - x^n}{x_* - x}$$

Het gaat er nu om aan te tonen dat de limiet van deze richtingscoëfficiënt voor x_* nadert tot x gelijk moet zijn aan $n\ x^{n-1}$.



P_* nadert tot P

Wat gebeurt er met de helling van P_*P ?

Ofwel:

$$\lim_{x_* \to x} \frac{x_*^n - x^n}{x_* - x} = \ ?$$

Je weet al:

$$\lim_{r \to 1} \frac{r^n - 1}{r - 1} = n$$

De vraag is: hoe kun je deze speciale limiet benutten om de gevraagde limiet te vinden? Je zou willen dat er op de plaats van x^n en x het getal 1 zou staan in de gevraagde limiet. Dat kun je forceren, als je de teller deelt door x^n en de noemer door x. [1]
Forceren kan niet ongestraft! De straf is dat je de teller weer met x^5 en de noemer weer met x moet vermenigvuldigen.

$$\frac{x_*^n - x^n}{x_* - x} = \frac{\left(\frac{x_*}{x}\right)^n - 1}{\frac{x_*}{x} - 1} \cdot \frac{x^n}{x}$$

Dat schiet niet op (denk je misschien), maar dat valt mee:

Stel voor het gemak $\frac{x_*}{x} = r$.

[1]Je weet: $x \neq 0$, *want* $P \neq (0 , 0)$!

Dan kun je bovenstaande gelijkheid schrijven als:

$$\frac{x_*^n - x^n}{x_* - x} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \cdot x^{n-1}$$

Als x_* nadert tot x dan nadert $\frac{x_*}{x} = r$ tot 1.

Dus:

$$\lim_{x_* \to x} \frac{x_*^n - x^n}{x_* - x} = \lim_{r \to 1} \frac{r^n - 1}{r - 1} \cdot x^{n-1} = n \, x^{n-1}$$

Daarmee is de regel voor het differentiëren van x^n (n = 2, 3, 4,...) verklaard.

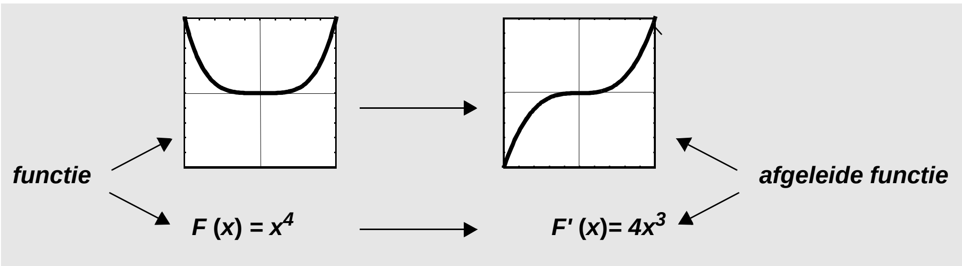
10 Op de grafiek van $y = x^4$ liggen de punten A en B; A heeft de x-coördinaat 2 , B heeft x-coördinaat -2.

a. Geef vergelijkingen van de raaklijnen aan de grafiek in de punten A en B.

b. Bereken de coördinaten van het snijpunt van die twee raaklijnen.

c. Dezelfde twee vragen voor de grafiek van $y = x^5$.

11 De afgeleide functie van $f(x) = x^4$ wordt gegeven door $f'(x) = 4x^3$. Ofwel:



a. Een machtsfunctie met een *even* exponent heeft een grafiek die de y-as als symmetrie-as heeft. Hoe kun je dat verklaren?

b. De hellinggrafiek van zo'n functie kent een ander soort symmetrie: zij heeft geen symmetrie-as, maar een symmetrie-punt (de oorsprong). Dat volgt uit de formule voor de afgeleide die een *oneven* exponent heeft. Maar je kunt dat symmetrie-punt ook rechtstreeks uit de vorm van de originele grafiek verklaren. Hoe?

12 Plot op de GR met venster [0 , 1] bij [0 , 1] de grafieken van $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$, $y_3(x) = x^4$. Aanvankelijk groeit y_1 het snelst, maar in de buurt van $x = 1$ groeit y_1 langzamer dan y_2 en y_3.

a. Vanaf welke x-waarde groeit y_2 sneller dan y_1?

b. Vanaf welke x-waarde groeit y_3 sneller dan y_2?

13 Bij de regel voor het differentiëren van machtsfuncties op de vorige bladzij, zie je de voorwaarde: n = 2, 3, 4, ...
Ga na of de regel ook klopt voor $n = 1$ en voor $n = 0$.

Zoals aangekondigd in het begin van dit hoofdstuk, kan de regel worden uitgebreid voor het differentiëren van machtsfuncties met gebroken en/of negatieve exponenten.
Als je het voorgaande bewijs nog eens goed bekijkt, dan kun je begrijpen dat de beperking n = 2, 3, 4, enz. alleen is gebruikt bij de limiet:

$$\lim_{r \to 1} \frac{r^n - 1}{r - 1} = n$$

Deze limietstelling geldt ook voor bijvoorbeeld $n = \frac{1}{2}$, $n = \frac{3}{5}$, $n = -3$, $n = -\frac{1}{2}$, enz.

Kortom: voor alle zogenaamde *rationale getallen.* Zie hiervoor de extra opgave aan het eind van dit hoofdstuk.
Het onmiddellijke gevolg hiervan is de regel die we vanaf hier **regel D1** zullen noemen (D staat voor differentiëren):

regel D1

Als $F(x) = x^p$,

dan $F'(x) = p \cdot x^{p-1}$

voor $p = \frac{k}{m}$ met k = 0, –1 , –2 , –3 , enz. en m = 1, 2, 3, enz.

Toepassingen van **D1**:

I *Differentieer*: $F(x) = x\sqrt{x}$

Oplossing: schrijf F als macht van x en pas **D1** toe.

uit: $F(x) = x \cdot x^{1/2} = x^{3/2}$

volgt: $F'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

II *Differentieer*: $y(t) = \frac{1}{t^2}$

Oplossing: schrijf y als macht van t en pas **D1** toe.

uit: $y(t) = t^{-2}$

volgt: $y'(t) = -2 \cdot t^{-3} = \frac{-2}{t^3}$

d-notatie

Opmerking:
je kunt deze resultaten ook als volgt noteren:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\sqrt{x}) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

en

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{-2}{t^3}$$

oefeningen

14 Geef de afgeleide van de functie *f* met:

a. $F(x) = x^{10}$

b. $F(x) = x^{2/3}$

c. $F(x) = \sqrt[3]{x^2}$

d. $F(x) = x^{-10}$

e. $F(x) = \dfrac{1}{x}$

f. $F(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

15 Bereken:

a. $\dfrac{d}{dx}x^{2/5}$

b. $\dfrac{d}{dx}(x\sqrt[3]{x^2})$

c. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^{0,3}}\right)$

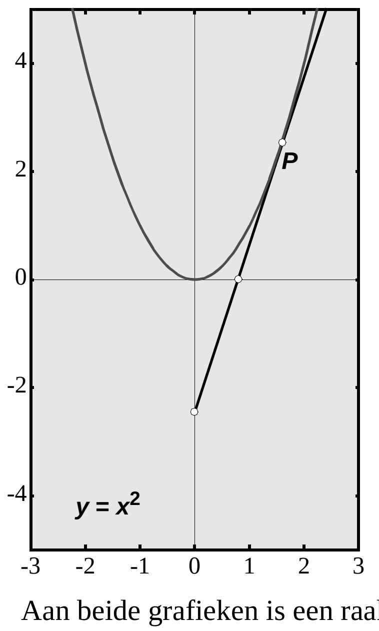
d. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sqrt{t}}{t}\right)$

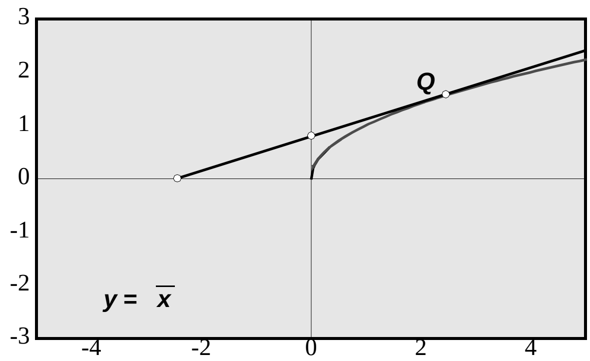
e. $\dfrac{d}{dt}\sqrt[4]{t^{-1}}$

f. $\dfrac{d}{dt}(t^2)^3$

raaklijnen

16 Hieronder zie je naast elkaar de grafieken van $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$.





Aan beide grafieken is een raaklijn getekend.

a. Het punt *P* (figuur links) heeft de *x*-coördinaat *p*. In welke punten snijdt de raaklijn in *P* de beide coördinaat-assen?

b. Dezelfde vraag voor de raaklijn in het punt *Q* (figuur rechts) voor het geval dat *Q* de *x*-coördinaat *q* heeft.

17 Plot op de GR de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ op het venster [0 , 5] bij [0 , 5]. Plot ook een raaklijn in een punt van die grafiek. Laat zien dat het raakpunt precies in het midden ligt tussen de snijpunten met de coördinaat-assen.

samenvatting

locale helling is limiet

Laat f een of andere functie zijn, waarvan de grafiek glad is in het punt $(x\ ,\ f(x))$.
De locale helling in dat punt wordt bepaald door:

$$F'(x)\ =\ \lim_{x_* \to x} \frac{F(x_*) - F(x)}{x_* - x}$$

Als je x^* - x gelijk stelt aan h (zoals in het practicum met VUGRAFIEK), dan kun je deze limiet ook zo schrijven:

$$F'(x)\ =\ \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

afgeleide van een macht

Regel **D1** voor het differentiëren zegt:

$$F(x) = x^{p} \quad \longrightarrow \quad F'(x) = p\ \ x^{p\,-\,1}$$

voor alle rationale waarden van p

standaard-limiet

Deze stelling berust op de volgende ‘standaardlimiet’:

$$\lim_{r \to 1} \frac{r^{p} - 1}{r - 1}\ =\ p$$

voor alle rationale waarden van p

extra opgave

18 Bovenstaande limiet is de sleutel voor regel **D1**. Het komt erop neer dat geldt:

$$\lim_{r \to 1} \frac{r^{p} - 1}{r - 1}\ =\ p$$

voor bijvoorbeeld $p\ =\ \frac{1}{5}$, $p\ =\ \frac{3}{5}$, $p\ =\ -5$, enz.

a. Bekijk het geval $p\ =\ \frac{1}{5}$ en stel $s = r^{1/5}$.

Verklaar nu: $\displaystyle \lim_{r \to 1} \frac{r^{1/5} - 1}{r - 1}\ =\ \lim_{s \to 1} \frac{s - 1}{s^{5} - 1} = \frac{1}{5}$.

b. Nu $p = \frac{3}{5}$. Pas weer de substitutie $s = r^{1/5}$ toe en laat zien dat de limiet voor de zo ontstane vorm (in s) voor $s \to 1$ gelijk is aan $\frac{3}{5}$.

c. Tenslotte $p\ =\ -5$. Neem nu: $s = r^{-1}$ en laat zien dat de limiet voor $s \to 1$ van de nieuwe s-vorm gelijk is aan -5.

4 De invloed van een constante

olieramp

Na een aanvaring op zee zinkt een grote olietanker met 100000 ton ruwe olie aan boord. Deze lading lekt uit het schip, waardoor zich een uitdijende olievlek vormt. De autoriteiten van een badplaats aan een baai op 20 km van de plaats des onheils, zijn buitengewoon bezorgd over de mogelijke vervuiling van het strand door de naderende vlek. Er is een mogelijkheid om de baan te beschermen met een drijvende afsluiting. Dat is een kostbare voorziening, waarvan het aanbrengen zeker nog twee en een halve dag zal duren. Als deze voorziening te laat wordt aangebracht, is het weggegooid geld. De vraag is nu: *hoe lang duurt het voor de olievlek de kust bereikt*?

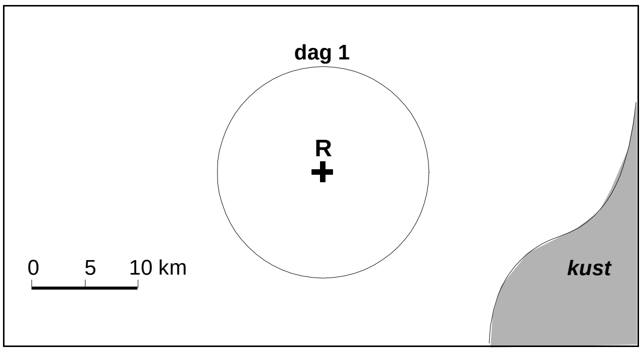
wiskundig model

Er wordt een ‘rampenkundige’ (disasteroloog) geraadpleegd en deze ontwerpt een *wiskundig model*. Daarbij maakt zij de volgende veronderstellingen:
- de uitstroom van de olie is gelijkmatig;
- de olielaag heeft overal dezelfde dikte;
- de olievlek is bij benadering cirkelvormig (middelpunt is plaats van de ramp).

1 **a.** De olievlek heeft na 1 dag een straal van 10 km. Een vlek van 1 km^2 bevat ca. 50 ton olie. Hoeveel ton olie is er na één dag uit de tanker gestroomd?

b. Na twee dagen is de oppervlakte van de vlek verdubbeld. Wat betekent dat voor de straal van de cirkel?

c. De plaats van de ramp ligt 25 km uit de kust. Maak op schaal een tekening van de kust en de olievlek na 1, 2 en 3 dagen. Zal men kunnen voorkomen dat de olie het strand bereikt?



2 **a.** Geef een formule voor de straal R van de olievlek als functie van t (t is de tijd in dagen). Plot op de GR een grafiek van die functie.

b. Wat kun je zeggen over het gedrag van de afgeleide van die functie?

c. Welke formule past er bij die afgeleide?

In opgave **1** heb je deze functie gebruikt:

$$R(t) = 10\sqrt{t}$$

Differentiëren hiervan geeft:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(10\sqrt{t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(10\ \ t^{1/2}) = 10 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot t^{-1/2} = \frac{5}{\sqrt{t}}$$

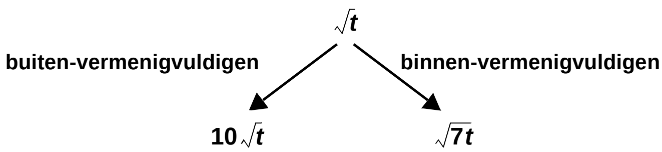
Omdat t de tijd in dagen voorstelt en $R(t)$ de straal van de olievlek in km, stelt $R'(t)$ de groeisnelheid van de straal in km/dag voor.
Waarschijnlijk heb je je bij het differentiëren weinig zorgen gemaakt over de constante factor 10 die voor het wortelteken staat. Als je nagaat wat de betekenis is van die constante in het verhaal van de olieramp, wordt het snel duidelijk dat bovenstaande berekening correct is. Immers die 10 staat voor 10 km (= straal olievlek na 1 dag). Zouden we nu in plaats van de km een andere lengte-eenheid nemen, dan verandert de constante in de formule. De eenvoudigste formule krijg je bij een lengte-eenheid van 10 km, die we hier maar even 'dakm' (= deca-kilometer) noemen.
Je krijgt dan $R(t) = \sqrt{t}$ en $R'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$.

3 In welke eenheid wordt de snelheid $R'(t)$ nu gemeten? Hoe kun je hieruit de snelheid in km/dag berekenen?

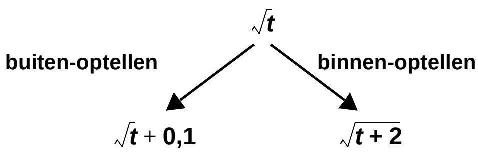
4 Neem nu weer de 'dakm' als lengte-eenheid en de 'week' als tijdseenheid.
De formule wordt nu: $R(t) = \sqrt{7t}$.
a. Wat stelt $R'(t)$ nu precies voor?
b. Verklaar hieruit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(7t)^{1/2} = 7 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (7t)^{-1/2}$$

Je hebt nu twee voorbeelden gezien van het effect dat vermenigvuldigen met een constante kan hebben op de afgeleide. In het eerste geval spreken we van 'buiten-vermenigvuldigen' in het tweede geval van 'binnen-vermenigvuldigen'.

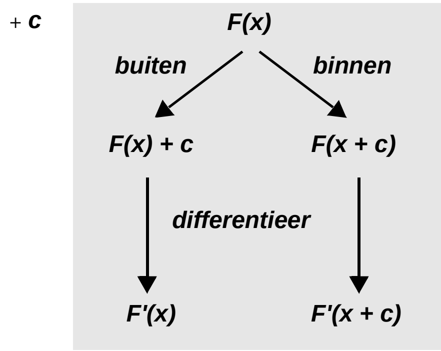


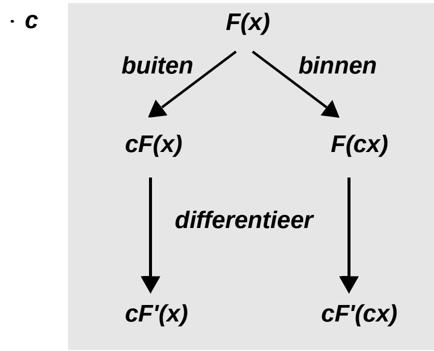
Iets dergelijks kun je ook met het optellen van een constante doen:



5 **a.** Probeer een betekenis te bedenken voor $r(t) = \sqrt{t} + 0{,}1$ en $r(t) = \sqrt{t+2}$ in het verhaal van de olieramp.
b. Verklaar hieruit: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{t} + 0{,}1 = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ en $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{t+2} = \dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}$.

vier regels Het voorbeeld van de wortelfunctie in het olierampverhaal wijst naar een algemene regel over het effect van ‘binnen- of buiten-optellen van’ en ‘binnen- of buiten-vermenigvuldigen met’ een constante c:





6 In het schema hierboven zie je vier regels voor het differentiëren. Maak je bij elk van die regels een grafische voorstelling. Dat wil zeggen: kijk naar het effect op de grafiek van het buiten- of binnen optellen van (vermenigvuldigen met) een constante en hoe dit doorwerkt op de helling van de grafiek. Daarbij kun je natuurlijk heel goed de hulp van de GR inroepen.

Om de vier regels echt te kunnen bewijzen, is wat theorie over limieten nodig. Dat voert hier te ver. We volstaan met een onvolledig bewijs, dat echter wel de kern van de gedachte geeft. Je weet uit het vorige hoofdstuk dat de afgeleide van $F(x) = x^n$ wordt gevonden door de limiet te zoeken van het differentiequotiënt:

$$\frac{F(x_*) - F(x)}{x_* - x}$$

voor x_* nadert tot x.

Schrijven we nu de differentiequotiënten op voor $F(x) + c$, $F(x + c)$, $cF(x)$ en $F(cx)$, dan komt er:

(1)	$\dfrac{(F(x_*) + c) - (F(x) + c)}{x_* - x} = \dfrac{F(x_*) - F(x)}{x_* - x}$
(2)	$\dfrac{F(x_* + c) - F(x + c)}{x_* - x} = \dfrac{F(x_* + c) - F(x + c)}{(x_* + c) - (x + c)}$
(3)	$\dfrac{cF(x_*) - cF(x)}{x_* - x} = c\,\dfrac{F(x_*) - F(x)}{x_* - x}$
(4)	$\dfrac{F(cx_*) - F(cx)}{x_* - x} = c\,\dfrac{F(cx_*) - F(cx)}{cx_* - cx}$

De ‘buiten-gevallen’ (1) en (3) zijn het gemakkelijkst.
In (1) is de limiet voor $x_* \to x$ gelijk aan $F'(x)$, in (3) gelijk aan $cF(x)$.
Nu de ‘binnen-gevallen’ (2) en (4).
Bedenk dat voor x_* nadert tot x ook geldt: $x_* + c$ nadert tot $x + c$, cx_* nadert tot cx !
Zo kom je tot de limieten $F'(x + c)$ en $cF'(cx)$.

oefeningen

7 Bereken:

a. $\dfrac{d}{dx}(x^5 + 6)$

b. $\dfrac{d}{dx}6x^5$

c. $\dfrac{d}{dx}(5x^6 + 4)$

d. $\dfrac{d}{dt}(t + 7)^4$

e. $\dfrac{d}{dt}(2t + 7)^4$

f. $\dfrac{d}{dt}(10t - 3)^4$

8 **a.** Plot op de GR de grafiek van $y = (x - 1)^3 + 4$.
b. Welk punt is het symmetrie-punt van de grafiek?
c. Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt (3 , 12) en bereken ook de coördinaten van het snijpunt van die raaklijn met de y-as.

9 Gegeven: $F(x) = (x + 4)^6 - 92$.
a. Bereken $F'(-2)$.
b. In welk punt heeft de grafiek van F een horizontale raaklijn?

10 Bereken:

a. $\dfrac{d}{dx}(6x)^{2/3}$

b. $\dfrac{d}{dx}6\sqrt[3]{x^2}$

c. $\dfrac{d}{dx}10(x - 1)^{1,5}$

d. $\dfrac{d}{dt}(10t\sqrt[3]{t})$

e. $\dfrac{d}{dt}\sqrt[3]{24t}$

f. $\dfrac{d}{dt}\sqrt[4]{4t + 1}$

11 De raaklijn in het punt (3 , 8) aan de grafiek van $y = (x + 1)\sqrt{x + 1}$ snijdt de y-as in het punt A. Bereken de coördinaten van A.

12 **a.** Van een functie F is de afgeleide functie F' gegeven door $F'(x) = x^2$.
Bedenk een formule voor F (je moet dus ‘anti-differentiëren’).
Weet je ook andere functies die voldoen?
b. Dezelfde vraag voor $F'(x) = \sqrt{x}$ en voor $F'(x) = 1/x^2$.

13 Van een functie is gegeven dat de grafiek door het punt (1 , 5) gaat. Bovendien is bekend dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in elk punt (x , y) gelijk is aan $15x^4$.
Welke formule past er bij die functie?

14 Bereken:

a. $\dfrac{d}{dx}(4x^{-5} + 1)$

b. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x - 5}\right)$

c. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2x + 5}\right)$

d. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2}{\sqrt{t}}\right)$

e. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{t + 3}\right)^2$

f. $\dfrac{d}{dt}\sqrt[3]{\dfrac{1}{t - 1}}$

samenvatting

Laat F een of andere functie zijn met afgeleide F'.
In dit hoofdstuk heb je de regels leren kennen voor het differentiëren van functies die uit F ontstaan door het 'buiten- of binnen-optellen van' en het 'buiten- of binnen-vermenigvuldigen met' een constante c.
De regels zijn:

D2	$G(x) = F(x) + c$	$\longrightarrow$	$G'(x) = F'(x)$
D3	$G(x) = F(x + c)$	$\longrightarrow$	$G'(x) = F'(x + c)$
D4	$G(x) = cF(x)$	$\longrightarrow$	$G'(x) = cF'(x)$
D5	$G(x) = F(cx)$	$\longrightarrow$	$G'(x) = cF'(cx)$

In opgave **10** heb je gezien dat 'anti-differentiëren' oneindig veel oplossingen kan geven. Dit is een onmiddellijk gevolg van de regel **D1.**
Nog een voorbeeld: stel je weet $F'(x) = 30x^5$.
Dan kan gelden: $F(x) = 5x^6$, $F(x) = 5x^6 + 4$, $F(x) = 5x^6 - 37$, enz.
Kortom: $F(x) = 5x^6 + c$ (waarbij c elke waarde kan hebben).

extra opgave

15 F is een functie met afgeleide F'.
a, b, c en d zijn constanten „ 0.
De functie G is met hulp van F gedefinieerd door: $G(x) = a \quad F(bx + c) + d$.
Geef een formule voor $G'(x)$.

5 Som- en verschilregel

1 Plot op de GR (venster [0 , 4] bij [0 , 10]) de grafieken van $y_1 = x^2$ en $y_2 = x^3$.

a. Bereken de locale helling van de grafieken van y_1 en y_2 in de punten met $x = 2$.

b. Plot ook de grafiek van $y_3 = y_1 + y_2$. Hoe groot schat je de locale helling van die laatste grafiek in het punt met $x = 2$? Controleer je schatting op de GR.

In de vorige twee hoofdstukken heb je van een klasse van functies geleerd hoe je de afgeleide, via algebraïsche regels, direct uit de formule kunt vinden. De klasse van functies die je volgens algebraïsche regels kunt differentiëren, wordt nu uitgebreid door middel van nieuwe regels. Die gaan over het optellen en aftrekken van functies. Zo krijg je functies als:

$$F(x) = 3x^4 + 4x^3$$

$$y(x) = x^2 - \frac{4}{x}$$

$$s(t) = \sqrt{t-2} + \sqrt{t+2}$$

som en verschil

Het zou natuurlijk heel mooi zijn als je die functies als het ware ‘term voor term’ zou mogen differentiëren. Inderdaad, het is mooi. Er geldt namelijk:

som

$$\begin{array}{c} A(x) \quad + \quad B(x) \\ \text{differentieer}\ \Big\downarrow \\ A'(x) \quad + \quad B'(x) \end{array}$$

verschil

$$\begin{array}{c} A(x) \quad - \quad B(x) \\ \text{differentieer}\ \Big\downarrow \\ A'(x) \quad - \quad B'(x) \end{array}$$

Deze beide regels zijn te verklaren door naar de differentiequotiënten te kijken:

$$(1) \qquad \frac{(A(x_*) + B(x_*)) - (A(x) + B(x))}{x_* - x} = \frac{A(x_*) - A(x)}{x_* - x} + \frac{B(x_*) - B(x)}{x_* - x}$$

$$(2) \qquad \frac{(A(x_*) - B(x_*)) - (A(x) - B(x))}{x_* - x} = \frac{A(x_*) - A(x)}{x_* - x} - \frac{B(x_*) - B(x)}{x_* - x}$$

In (1) zie je staan dat een differentiequotiënt van de somfunctie (zeg $A + B$), gelijk is aan de som van differentiequotiënten van A en B. Die laatste vorm nadert tot $A'(x) + B'(x)$ voor $x_* \to x$. Die conclusie berust op een stelling over limieten.
Evenzo nadert de rechter vorm van (2) tot $A'(x) - B'(x)$ voor $x_* \to x$.

Passen we de ‘somregel’ toe op de eerste voorbeeldfunctie van deze bladzij, dan komt er:

$$F(x) = 3x^4 + 4x^3$$

$$F'(x) = (3 \cdot 4x^3) + (4 \cdot 3x^2) = 12x^3 + 12x^2$$

oefeningen

2 Differentieer de twee andere voorbeeldfuncties van de vorige bladzij.

3 Bereken door term voor term te differentiëren:

a. $\dfrac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^6 + 2x^3\right)$

b. $\dfrac{d}{dt}\left(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1\right)$

c. $\dfrac{d}{du}\left((u-1)^3 + (u+1)^3\right)$

d. $\dfrac{d}{dp}\left(ap^2 + bp + c\right)$

4 De grafiek van $y(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ gaat door het punt (2 , 7).

a. Controleer deze bewering.
b. Bereken de locale helling van de grafiek in dat punt.

5 Bekijk nog eens de grafieken van $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$ en $y_3 = y_1 + y_2$ op de GR, nu met venster [-2 , 2] bij [-2 , 4].

a. Je kunt bewijzen dat er twee punten op de grafiek van y_3 zijn, waarin de raaklijn horizontaal is. Hoe? Welke punten zijn dat?
b. Maak ook de grafiek van $y_4 = y_1 \cdot y_2$. Onderzoek of geldt: $y'_4 = y'_1 \cdot y'_2$.

6 Plot op de GR de grafieken van $y_1 = x$, $y_2 = 1/x$ en $y_3 = y_1 + y_2$.

a. Bereken de coördinaten van de punten op de grafiek van y_3 waarin de raaklijn horizontaal is.
b. Plot ook de grafiek van $y_4 = y_1 - y_2$. Toon aan dat deze grafiek in geen enkel punt een horizontale raaklijn heeft.

eerst omvormen

7 Soms kun je de som- of verschilregel niet meteen toepassen, maar moet je de formule eerst in een andere vorm gieten. Voorbeeld:

$$y(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x}$$

Je kunt dit herleiden tot:

$$y(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{3}{x} = x + 2 + 3x^{-1}$$

Nu differentiëren met de somregel:

$$y'(x) = 1 + 0 - 3x^{-2} = 1 - \frac{3}{x^2}$$

Differentieer de volgende functies:

a. $y(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

b. $y(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

c. $y(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x}}$

d. $y(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

8 Nog een paar voorbeelden, waarbij eerst wat voorwerk moet worden gedaan.

a. $y(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

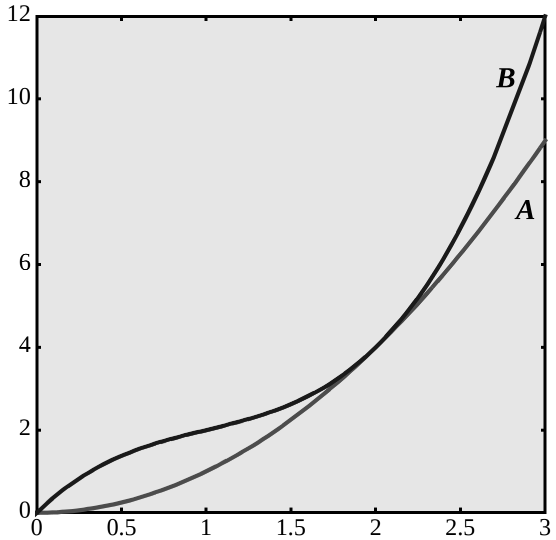
b. $y(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

c. $y(x) = (x+2)\sqrt{x}$

d. $y(x) = x\sqrt{x-2}$

tijd, afstand, snelheid

9 Twee auto's A en B rijden een rally over een zeer afwisselend parcours. Een klein stukje van de race is in beeld gebracht met grafieken.



Op de horizontale as is de *tijd* (in minuten) uitgezet, op de verticale as de *afstand* tot een bevoorradingspost (in eenheden van 250 m). Op het moment $t = 0$ wordt A, die zojuist bijgetankt heeft, ingehaald door B.
Het wiskundige model waarop de grafieken zijn gebaseerd, is het volgende:
voor 0 £ t £ 3 zijn de plaatsen van A en B gegeven door:

$$s_A(t) = t^2 \text{ en } s_B(t) = t^3 - 3t^2 + 4t.$$

a. Druk de snelheden v_A en v_B van respectievelijk A en B uit in t.
b. Op welke tijdstippen tussen $t = 0$ en $t = 3$ reden de beide auto's precies even snel?
c. Geef een kort verslag van wat zich afspeelde rond het tijdstip $t = 2$.
d. Bereken het tijdstip in de periode [0 , 3] waarop de snelheid van B het laagst was.
e. Bekijk op de GR de grafiek van $y(t) = s_B(t) - s_A(t)$. Wat is de betekenis van deze functie voor de race tussen beide coureurs?
f. Op welk moment tussen $t = 0$ en $t = 2$ is $s_B(t) - s_A(t)$ maximaal?

Doortocht door een klein Kenyaas dorp tijdens een Oost-Afrikaanse Safarirally.

samenvatting

som- en verschilregel

De afgeleide van een som of verschil van twee functies vind je door term voor term te differentiëren.

D6	***F (x) = A (x) + B (x)***	$\longrightarrow$	***F' (x) = A' (x) + B' (x)***
D7	***F (x) = A (x) - B (x)***	$\longrightarrow$	***F' (x) = A' (x) - B' (x)***

Bovenstaande regels zijn geformuleerd voor twee termen. Uit de regels volgt eenvoudig dat je ook termsgewijs kunt differentiëren bij een som met drie, vier, vijf, ... termen.

In opgave **5b** heb je gezien dat je om de afgeleide van een product te vinden niet factor voor factor mag differentiëren. In hoofdstuk 8 komen we daar uitgebreid op terug.

extra opgave

10 De regels **D2, D4, D6** en **D7** kunnen worden samengevat in één regel:

$$F(x) = c \;\; A(x) + d \;\; B(x) \quad \longrightarrow \quad F'(x) = c \;\; A'(x) + d \;\; B'(x)$$

Hierin zijn c en d constanten.
Om bijvoorbeeld **D2** te krijgen, moet je $c = 1$ nemen en $B(x) = 1$.
Dan komt er $F(x) = A(x) + d$ en $F'(x) = A'(x) + d \;\; 0 = A'(x)$.
Wat moet je doen om te laten zien dat de regels **D4, D6** en **D7** bijzondere gevallen zijn van deze laatste regel.

naschrift

Als $F(x) = c \;\; A(x) + d \;\; B(x)$ noemt men F een *lineaire combinatie van A en B.*
$24 \;\; A(x) + 15 \;\; B(x)$ en $\frac{1}{2} \;\; A(x) - \frac{3}{8} \;\; B(x)$ zijn voorbeelden van zulke combinaties.
De getallen 24 en 15 in de eerste, respectievelijk $\frac{1}{2}$ en $-\frac{3}{8}$ in de tweede, zijn de constante factoren in die lineaire combinaties.
De laatste regel zegt: de afgeleide van een lineaire combinatie van A en B is een lineaire combinatie van A' en B' en wel met dezelfde constante factoren.

6 Berg en dal

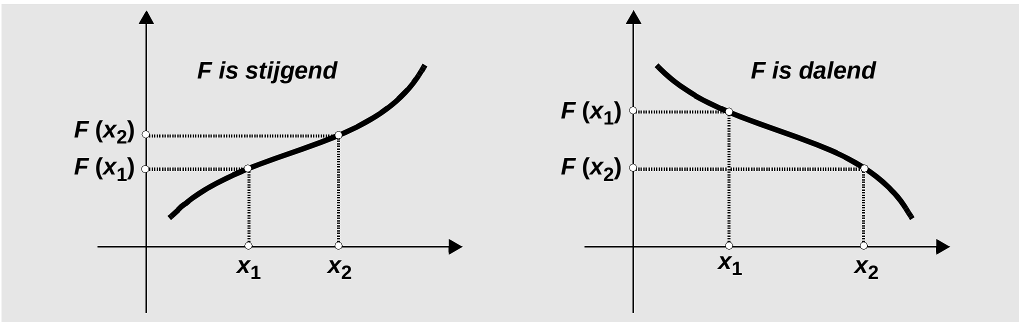
In dit hoofdstuk en het volgende wordt een pas op de plaats gemaakt voor wat betreft het ontwikkelen van nieuwe rekenregels. Het gaat hier vooral om de betekenis van de afgeleide voor het *gedrag* van de functie en de grafiek. Relevante vragen zijn bijvoorbeeld: ‘waar stijgt de grafiek?’, ‘wat is de maximale waarde die de functie bereikt?’, enz.
Bij dit alles heb je voortdurend de regels nodig, die in de vorige hoofdstukken zijn ontwikkeld en zo krijg je gaandeweg meer oefening in het differentiëren.
Eerst een opgave.

1 Plot op de GR , venster [-4 , 4] bij [-6 , 6], de grafiek van $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.
- **a.** Op het scherm zie je twee punten waarin de helling nul is. Bereken de exacte coördinaten van die punten.
- **b.** Plot de grafiek van *F'*. Pas zo nodig het venster aan.
- **c.** Op welk *x*-interval heeft de grafiek van *F* een negatieve helling? En waar heeft de grafiek een positieve helling?
- **d.** Probeer de volgende vraag te beantwoorden zonder te rekenen. Welk getal is groter: *F*(100) of *F*(101)? Licht je antwoord toe.

2 De grafiek bij opgave **1** geeft een schommeling te zien.
Van de functie *y* zeggen we dat deze afwisselend *stijgend* en *dalend* is.
- **a.** Probeer een paar voorbeelden te bedenken van functies die zo’n afwisseling niet hebben, maar overal stijgend zijn.
- **b.** Dezelfde vraag voor dalend.

stijgen en dalen

Wat moet je daar precies onder verstaan: *een functie is stijgend (dalend)*?
De grafische voorstelling is waarschijnlijk het meest sprekend: als je van links naar rechts de grafiek volgt en je gaat daarbij voortdurend omhoog, dan noemen we die grafiek (of de functie) stijgend; ga je steeds omlaag, dan is er sprake van een dalende grafiek (functie).
Hoe vertaal je dit nu in een ‘strenge’ definitie?



Naar rechts èn omhoog gaan in een *Oxy*-stelsel betekent, dat zowel *x* en *y* groter worden. Zo komen we tot:

definitie

Een functie *F* is stijgend op een interval *I*, als voor de *x*-waarden van *I* geldt:
hoe groter *x* hoe groter *F*(*x*).

Of puntiger gezegd:

Een functie *F* is stijgend op een interval *I* , als voor elk paar x_1 en x_2 in *I* geldt:
als $x_2 > x_1$, dan $F(x_2) > F(x_1)$

3 Geef nu zelf een scherpe definitie voor: ‘een functie F is dalend op een interval I ‘.

4 Ga van de volgende functies na of zij stijgend of dalend zijn op het interval [0 , 5]. Probeer het antwoord eerst te vinden door direct de definitie toe te passen. Daarna kun je controleren met een grafiek.

a. $F(x) = x^2$

b. $F(x) = \sqrt{x}$

c. $F(x) = \dfrac{1}{x+1}$

d. $F(x) = 1 - x$

e. $F(x) = 1{,}1^x$

f. $F(x) = 0{,}9^x$

Bij functies van opgave **4** kun je op grond van de formule en wat redeneren wel inzien of ze stijgend of dalend zijn. Bij meer ingewikkelde functies wordt dat al gauw lastiger.

5 Neem bijvoorbeeld $F(x) = 5x - \sqrt{x}$. De bestanddelen $5x$ en $-\sqrt{x}$ werken elkaar tegen (de een is stijgend, de andere dalend). Je hebt misschien het idee dat die $5x$ het wel wint. Maar dat is toch oppassen!

a. Plot de grafiek van F op het venster [0 , 5] bij [0 , 10]. Het lijkt er inderdaad op dat F stijgend is in [0 , 5].

b. Zoom een paar keer in op het punt (0 , 0). En?

Om precies te kunnen vaststellen waar een functie stijgend (dalend) is, beschikken we over een sterk instrument: de afgeleide! Denkend aan de grafiek kun je ‘zien’ dat bij een positieve (negatieve) afgeleide een stijgende (dalende) functie hoort. En als de afgeleide nul is in een interval, dan hoort daar een constante functie bij.
Je kunt voortaan gebruik maken van de volgende, zeer aannemelijke, stelling:

het teken van de afgeleide

(1) **als $F'(x) > 0$ voor iedere x in het interval I, dan is F stijgend op I**

(2) **als $F'(x) < 0$ voor iedere x in het interval I, dan is F dalend op I**

(3) **als $F'(x) = 0$ voor iedere x in het interval I, dan is F constant op I**

6 Bovenstaande stelling kun je vertalen in termen van snelheid en afstand. Welke (vanzelfsprekende) uitspraken krijg je dan?

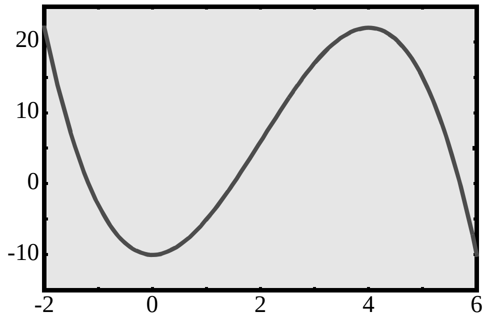
7 Gebruik de stelling om uit te zoeken, in welk intervalletje de functie F van opgave **5** dalend is.

8 Stelling (1) kun je niet zomaar omkeren.
Bekijk de functie: $F'(x) = x^3$.
Volgens de definitie is deze functie stijgend in bijvoorbeeld het interval [0 , 5].
Immers: hoe groter x hoe groter x^3.

a. Geldt voor iedere x uit dat interval $F'(x) > 0$?

b. Bedenk een functie die dalend is op een interval, maar waarvan de afgeleide in dat interval niet overal negatief is.

9 Op het venster [–2 , 6] bij [–15 , 25] zie je hier de grafiek van $y(x) = 6x^2 - x^3 - 10$.



a. De grafiek heeft twee punten waarin de raaklijn horizontaal is. Hoe kun je de coördinaten van die punten vinden door een berekening?

b. In het venster zie je twee dalende stukken grafiek. Let op het stuk tussen $x = 4$ en $x = 6$. In gedachten kun je de grafiek voortzetten buiten het venster. Blijft die grafiek verder dalen? Verklaar je antwoord.

top

De punten waarin een grafiek overgaat van dalend naar stijgend (of omgekeerd) worden de *toppen* van de grafiek genoemd. Als de grafiek glad is in een top, dan is de raaklijn daar horizontaal.

maximum en minimum

Bij toppen kun je onderscheid maken in *bergen* en *dalen*. Een top van een berg correspondeert met een (lokaal) *maximum* van de functie, een top van een dal (je zou kunnen zeggen een dip) correspondeert met een (lokaal) *minimum*.

10 Kies het GR-venster [–2 , 3] bij [–5 , 6].

a. Maak de grafiek van $y = x^4 - 4$. Het lijkt er op of -4 de kleinst mogelijke functiewaarde is (het *minimum* van de functie). Hoe kun je aan de formule $y = x^4 - 4$ zien dat dit inderdaad zo is? En hoe kun je dat zien aan de afgeleide functie?

b. Verander de formule in $y = x^4 - 4x$ en bekijk de grafiek. Nu lijkt het minimum -3 te zijn. Dat volgt niet zo gemakkelijk direct uit de formule. Hoe kun je met de afgeleide functie vaststellen dat –3 inderdaad het minimum is?

c. Maak er nu van $y = x^4 - 4x^2$. Net als bij **a**. is –4 de kleinste functiewaarde. Toon dit aan.

d. Tenslotte neem je $y = x^4 - 4x^3$. Om het minimum op je scherm te krijgen, moet het venster anders worden ingesteld. Hoe groot is het minimum precies?

11 a. Teken een grafiek die een bergtop heeft, zonder dat de raaklijn daar horizontaal is.

b. Teken een grafiek die één horizontale raaklijn heeft, zonder dat de grafiek daar een top heeft.

12 Maak op de GR een grafiek die twee toppen heeft: een bergtop in (0 , 1) en een dal top in (1 , 0).

13 Plot op de GR, venster [0 , 16] bij [0 , 16], de grafieken van $y_1 = 4\sqrt{x}$ en $y_2 = x$.

a. Bereken de coördinaten van het punt op de grafiek van y_1, waarin de raaklijn evenwijdig is aan de grafiek van y_2.

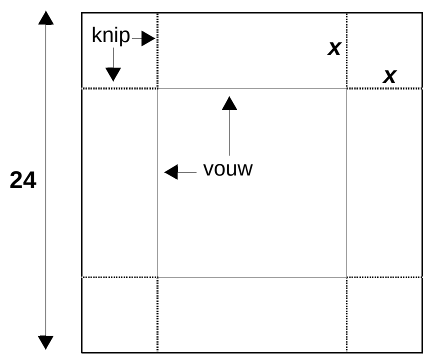
b. Maak nu ook de grafiek van $y_3 = y_1 - y_2$. Bereken het maximum van y_3 .

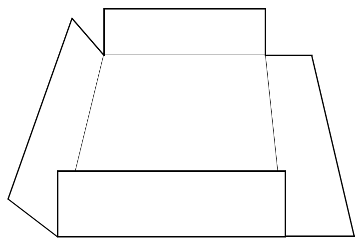
c. Verklaar het verband tussen de resultaten van **a** en **b**.

optimaliseren

De afgeleide functie is een sterk wapen bij het opsporen van minimale en maximale functiewaarden. Het vinden van een maximum of minimum wordt wel *optimaliseren* genoemd. Vóór de uitvinding van de differentiaalrekening hadden wiskundigen allerlei vernuftige methoden bedacht om optimaliseringsproblemen aan te pakken. Met de komst van de differentiaalrekening, verkreeg men een methode, die misschien niet altijd de meest elegante oplossing geeft, maar wel doeltreffend is. In een van de volgende deeltjes van deze serie (titel *Optimaliseren*), zul je een aantal interessante problemen aantreffen, waarbij verschillende methoden zullen worden vergeleken.
Bij wijze van voorproef, hier alvast een optimaliseringsprobleem.

14 Uit een vierkant stuk karton van 24 bij 24 cm kan op eenvoudige wijze een doosje worden gemaakt. Je knipt in elk van de hoeken een even groot vierkantje uit en vouwt de randen om, zoals aangegeven in de figuur.Vervolgens kun je met cellotape de opstaande randen aan elkaar plakken.





Als je vier hele kleine vierkantjes uitknipt, krijg je een platte doos met weinig volume. Maak je de vierkantjes groter, dan wordt de doos hoger, maar de bodem kleiner. Het probleem is nu: bij welke afmetingen van de afgeknipte vierkantjes is het volume van het doosje maximaal?

a. Stel de zijden van de afgeknipte vierkantjes gelijk aan x. Welke waarden kan x in principe hebben?

b. Het volume van de doos is nu een functie van x, zeg $V(x)$. Druk $V(x)$ uit in x.

c. Maak de grafiek van V op een geschikt venster.
Voor welke x schat je $V(x)$ maximaal?

d. Controleer je schatting met behulp van de afgeleide V'.

samenvatting

stijgen en dalen

een functie F is **stijgend** op een interval I betekent		een functie F is **dalend** op een interval I betekent	
als	x_1 en x_2 in I en $\mathbf{x_2 > x_1}$,	als	x_1 en x_2 in I en $\mathbf{x_2 > x_1}$,
dan	$\mathbf{F(x_2) > F(x_1)}$	dan	$\mathbf{F(x_2) < F(x_1)}$

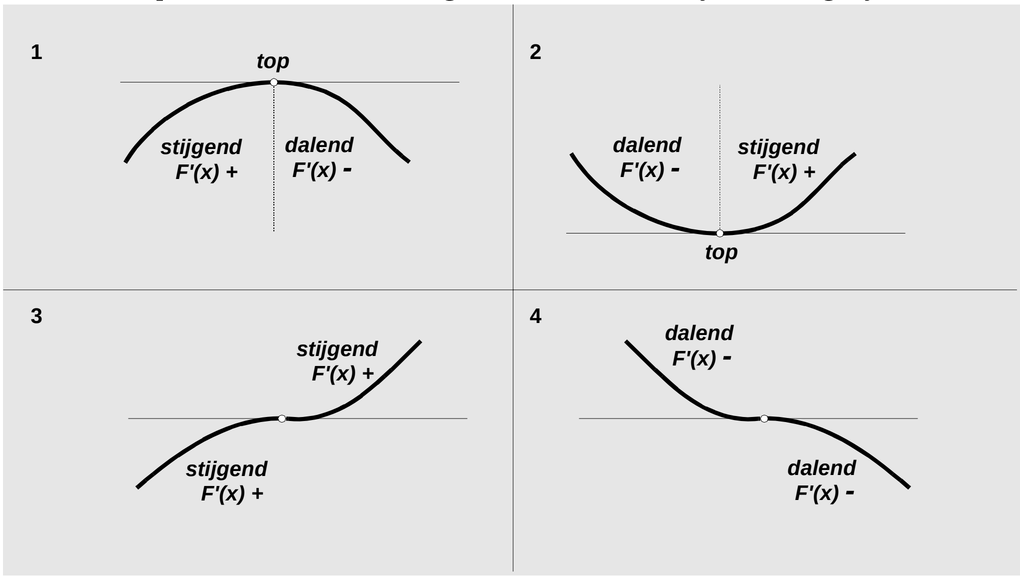
Met behulp van de afgeleide functie F' kun je uitmaken of de functie F stijgt, daalt of constant is.
Er geldt:

(1) als $\mathbf{F'(x) > 0}$ voor iedere x in het interval I, dan is F **stijgend** op I.

(2) als $\mathbf{F'(x) < 0}$ voor iedere x in het interval I, dan is F **dalend** op I.

(3) als $\mathbf{F'(x) = 0}$ voor iedere x in het interval I, dan is F **constant** op I.

De punten op de grafiek van een functie F waarin de raaklijn horizontaal is, zijn als het ware de 'rustpunten' in de verandering van de functie. Er zijn vier mogelijkheden:



Rustpunten waarin de grafiek van F overgaat van *stijgend* naar *dalend* (of omgekeerd) worden *toppen* van die grafiek genoemd. Als de grafiek een raaklijn heeft in een top (*topraaklijn*), dan is die raaklijn horizontaal.
Bij het passeren van een *top* wisselt $F'(x)$ van teken (van + naar - , of omgekeerd).
In de gevallen 3 en 4 is er wel sprake van een rustpunt, maar niet van een tekenwisseling; er is daar dan geen sprake van een top.

extra opgave

15 Kijk even terug naar opgave **14.** De afmetingen van het vierkante stuk karton zijn daar 24 bij 24 genomen. Je kunt het probleem wat algemener bekijken, door het vierkant a bij a te nemen. Hoe maak je het doosje met een maximaal volume?

7 De tweede afgeleide

typen daling en stijging

Over stijgen en dalen valt nog wel wat meer te vertellen. Zo zijn er verschillende soorten ‘stijgend’ en verschillende soorten ‘dalend’. Als inleiding daarop de volgende opgaven.

1 Twee krantenkoppen:

‘DE WERKLOOSHEID NEEMT AF’
‘DE STIJGING VAN DE WERKLOOSHEID NEEMT AF’

a. Wat is het verschil in betekenis tussen beide beweringen? Maak dat duidelijk door het schetsen van twee (globale) grafieken.

b. Nog een krantenkop, tamelijk recent:

‘AANTAL BOEREN GAAT STEEDS SNELLER DALEN

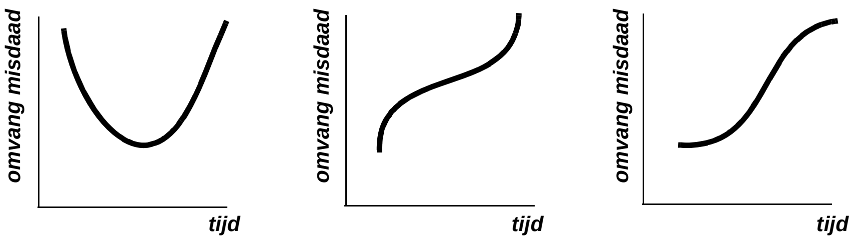
Hoe kun je dit uitbeelden in een globale grafiek?

2 Zo’n twintig jaar geleden:

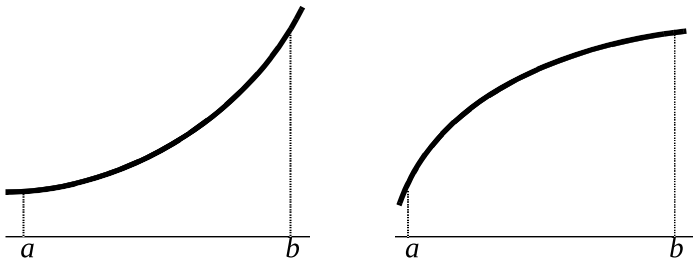
> Van onze parlementsredactie.
> DEN HAAG - De afnemende groei die de misdaad in Nederland in de laatste jaren vertoonde, is weer omgeslagen in een toenemende groei. Dit blijkt uit het jaarverslag van de vijf procureurs-generaal over 1976, dat bij de begroting van justitie is gevoegd.

a. Bekijk onderstaande grafieken. Welke grafiek illustreert de tekst?

b. Bedenk een verhaal bij de andere twee.



3 Twee grafieken van *stijgende* functies.



Beide functies hebben een afgeleide die op het interval $[a\ ,\ b]$ uitsluitend positieve waarden aanneemt. Dat betekent dat de hellinggrafieken boven de ‘nullijn’ zitten. Toch is er een wezenlijk verschil tussen die hellinggrafieken. Welk verschil is dat?

4 Plot de grafiek van $y(x) = x^3$ op de GR. Zorg ervoor dat het punt $(0\ ,\ 0)$ ergens midden in het venster ligt. In die ene grafiek zie je twee typen stijging. Voor $x > 0$ is er sprake van *toenemende stijging*, terwijl voor $x < 0$ de *stijging afnemend* is. Hoe kun je dit gedrag verklaren uit de formule van y'?

5 Bekijk nog eens de grafiek bij opgave **9** uit het vorige hoofdstuk. De functie is stijgend tussen $x = 0$ en $x = 4$. In de buurt van $x = 0$ kun je een toenemende stijging zien en in de buurt van $x = 4$ een afnemende stijging. Het ‘omslagpunt’ ligt ergens daartussenin. Waar precies? Hoe kun je dat verklaren met behulp van de afgeleide?

tweede afgeleide

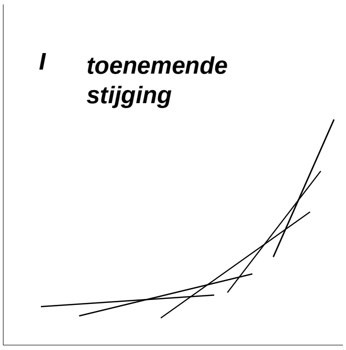
In het voorgaande heb je misschien ontdekt dat het stijgend of dalend zijn van de *afgeleide* bepaalt of er sprake is van toenemende, dan wel afnemende stijging[1]. Het omslagpunt correspondeert in dit voorbeeld met het maximum van de afgeleide.
Een middel om een afgeleide te onderzoeken op zijn stijgende of dalende karakter, ligt voor de hand: neem de afgeleide van de afgeleide. Dat wordt dan de *tweede afgeleide* genoemd.
De tweede afgeleide van een functie F wordt aangeduid met F''.
Voorbeeld:

als $F(x) = x^4 - 32x + 75$, dan $F'(x) = 4x^3 - 32$ en $F''(x) = 12x^2$.

6 **a.** Uit bovenstaande formules volgt dat F stijgend is voor $x > 2$. Verklaar dat.
b. Aan de formule voor F'' kun je zien dat waar F stijgt, er sprake is van toenemende stijging. Verklaar dit ook.

raaklijn-patroon

In het voorgaande heb je gezien dat er bij grafieken sprake is van verschillende soorten stijging en daling. Het karakter van deze soorten van stijging kun je duidelijk maken met een *raaklijnpatroon*.



omhullende kromme

Stel je nu voor dat in beide plaatjes de raakpunten zo'n beetje in het midden van de getekende lijnstukjes zitten. Je kunt je dan een aardige voorstelling maken van een kromme lijn (grafiek). Die kromme wordt ook wel de *omhullende kromme* van het lijnenpatroon genoemd.

In figuur I kun je dan twee dingen vaststellen:
– de richtingscoëfficiënt van iedere raaklijn is *positief*
– de richtingscoëfficiënt van de raaklijn *neemt toe* van links naar rechts.

Of in termen van afgeleide functies:
– de *eerste* afgeleide is *positief*
– de *tweede* afgeleide is *positief*.

In figuur II kun je zien:
– de richtingscoëfficiënt van iedere raaklijn is *positief*
– de richtingscoëfficiënt van de raaklijn *neemt af* van links naar rechts.

Met andere woorden:
– de *eerste* afgeleide is *positief*
– de *tweede* afgeleide is *negatief*.

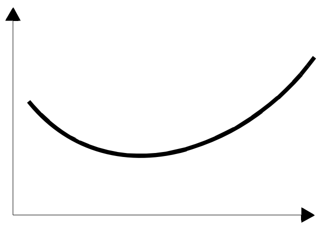
[1] Men spreekt in dit verband ook wel van *progressieve* of *degressieve* stijging.

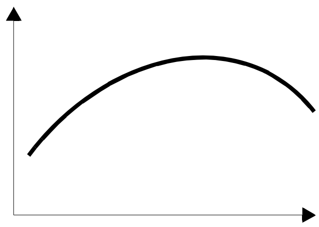
7 Schets nu zelf raaklijnpatronen bij situaties waarin:
a. de eerste afgeleide negatief en de tweede afgeleide positief is;
b. de eerste en de tweede afgeleide beide negatief zijn.

8 **a.** Maak op de GR een grafiek van een functie y op een zeker interval, waarbij geldt: $y'(x) < 0$ en $y''(x) > 0$ op dat interval.
b. Hoe zou je het gedrag van die functie omschrijven?
c. Wat verandert er aan de grafiek als de eis $y''(x) > 0$ wordt gewijzigd in $y''(x) < 0$?
d. En wat als die tweede eis wordt: $y''(x) = 0$?

hol en bol

Bekijk nog eens de figuren I en II van de vorige bladzij.
Als de afgeleide stijgt, dus als de tweede afgeleide positief is, noemen we de grafiek van de oorspronkelijke functie *hol*.
Als de afgeleide daalt, dus als de tweede afgeleide negatief is, noemen we de grafiek van de oorspronkelijke functie *bol*.

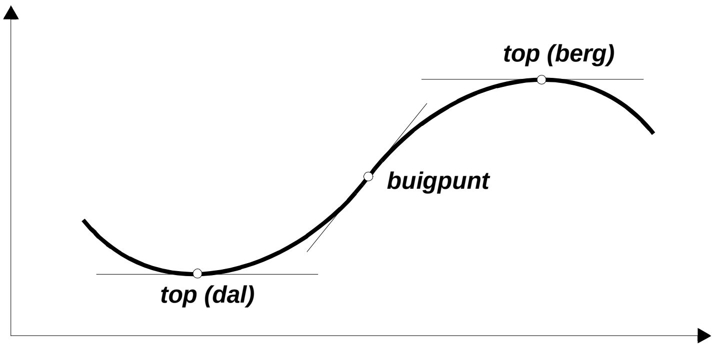




Het verschil tussen wat we ‘hol’ en wat we ‘bol’ noemen, kun je gemakkelijk onthouden door aan een holle of bolle vloer te denken.

buigpunt

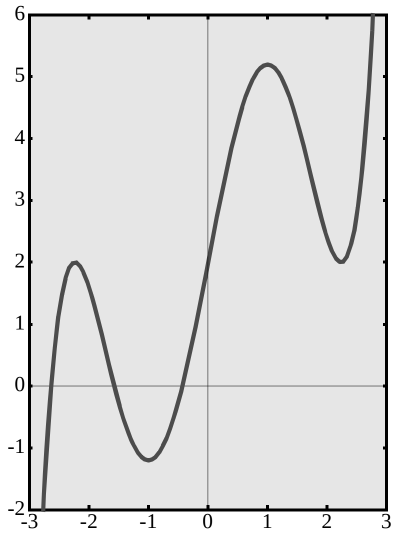
Als een grafiek uit holle en bolle stukken bestaat, dan wordt een punt waar de overgang plaatsvindt van hol naar bol (of omgekeerd) een *buigpunt* genoemd.



9 Bekijk het laatste plaatje. Je ziet daarin de raaklijnen van de grafiek in de twee toppen en in het buigpunt. De eerste twee worden *topraaklijnen* genoemd en de derde een *buigraaklijn*.
a. Wat is het bijzondere van een buigraaklijn als je let op de ligging van de grafiek ten opzichte van die lijn?
b. Bij het passeren van een top wisselt de *eerste* afgeleide van teken. Verklaar dat.
c. Kun je een dergelijke uitspraak ook doen voor het passeren van een buigpunt? Hoe?
d. En om het nog een beetje ingewikkelder te maken: het buigpunt van een grafiek correspondeert met een top van de hellinggrafiek. Leg dit uit.

10 Hieronder zie je de grafiek van de functie:

$$y(x) = 0{,}2x^5 - 2x^3 + 5x + 2$$



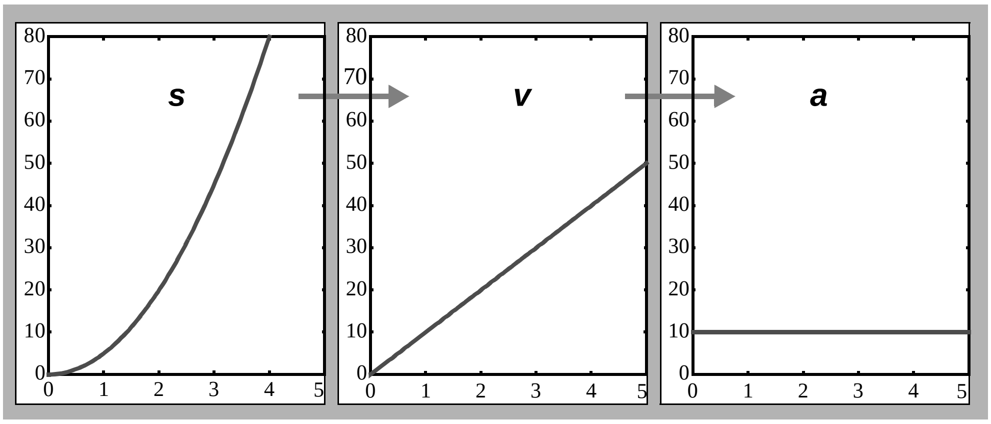
a. Geef de formule voor y' en maak op de GR de grafiek van y'.
b. Hoe lees je uit de grafiek van y' (dus de hellinggrafiek van y) af in welke intervallen de grafiek van y dalend is? Bereken de exacte grenzen van die intervallen.
c. Bereken de coördinaten van de vier toppen van bovenstaande grafiek.
d. De hellinggrafiek van y heeft drie toppen. Bereken ook daarvan de coördinaten.
e. Hoeveel buigpunten heeft bovenstaande grafiek? Bereken de coördinaten van die punten.

11 a. Plot op de GR met venster [0 , 5] bij [0 , 5] de grafiek van $y = \frac{10}{x} - \frac{5}{x^2}$.
b. Die grafiek heeft één top en één buigpunt.
Bereken de coördinaten van beide punten.

12 a. Een buigpunt waarin de raaklijn aan de grafiek horizontaal is, wordt een *horizontaal buigpunt* genoemd. Bedenk drie verschillende functies waarvan de grafiek een horizontaal buigpunt heeft.
b. Op een soortgelijke manier kun je ook afspreken wat een *verticaal buigpunt* is. Bedenk een functie waarvan de grafiek een verticaal buigpunt heeft.

versnelling

De tweede afgeleide speelt ook een duidelijke rol in de natuurkunde.
Bij de vrije val op aarde wordt de valweg s (in m) als functie van de tijd (in sec) in benadering gegeven door de formule $s(t) = 5t^2$.
Differentiëren hiervan geeft de (momentane) snelheid: $v(t) = s'(t) = 10t$.
De snelheid is een maat voor de verandering van plaats.
De snelheidsfunctie kan op haar beurt ook weer worden gedifferentieerd: $v'(t) = 10$.
De afgeleide v' is een maat voor de verandering in snelheid, en heet *versnelling.*
De versnelling wordt in de vakliteratuur aangeduid met a (= acceleratie).
Bij de vrije val geldt dus: $a(t) = v'(t) = 10$.
De versnelling bij de vrije val is constant, althans als er geen rekening wordt gehouden met de luchtweerstand.



De versnelling van een ongeremd vallend object is 10 m/sec per sec.
In de natuurkunde drukt men dit zo uit: de versnelling is 10m/sec^2 (spreek uit: 10 meter per seconde kwadraat).

a = s″

De ‘versnelling’ wordt verkregen door de ‘afgelegde weg’ tweemaal te differentiëren! Er geldt namelijk:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t)\right) = a(t)$$

Dit kan ook zo worden genoteerd:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}s(t) = a(t)$$

Of met de accent-notatie:

$$s''(t) = a(t)$$

13 Van een beweging is de versnelling (m/sec^2) als functie van t (sec) gegeven door $a(t) = 12t$. Op het moment $t = 0$ geldt $v = 0$ m/sec en $s = 0$ m. Druk v en s uit in t.

14 Om een arm van een robot een gewenste beweging te laten maken, moet de snelheid van de aandrijfas van 0 omwentelingen per seconde (omw/sec) naar 10 omw/sec worden gebracht. Het tijdsverloop waarin dat moet gebeuren is 4 seconden. De snelheid (v) is zo een functie van de tijd (t). Om die beweging soepel te laten verlopen stellen we bepaalde eisen aan die functie. Niet alleen de snelheid moet zonder sprongen veranderen, maar ook de versnelling. Bij de start is de versnelling 0 omw/sec^2 en aan het eind moet dat weer zo zijn.
Dit alles is te bereiken door een snelheidsfunctie te nemen van de vorm:

$$v(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

a. Bereken de waarden van de constanten c_0, c_1, c_2 en c_3 en maak de grafiek van de gevonden functie op de GR. Die grafiek noemen we het *snelheidsprofiel*.
b. Op welk tijdstip is de versnelling maximaal en hoe zie je dat aan het snelheidsprofiel?
c. Hoe groot zijn dan de snelheid en de versnelling?
d. Iemand maakt een ander snelheidsprofiel door van (0,0) tot (2,6) een deel van een parabool met top (0,0) te nemen en van (2,6) tot (4,10) een deel van een parabool met top (4,10). Voldoet dat snelheidsprofiel aan alle eisen?

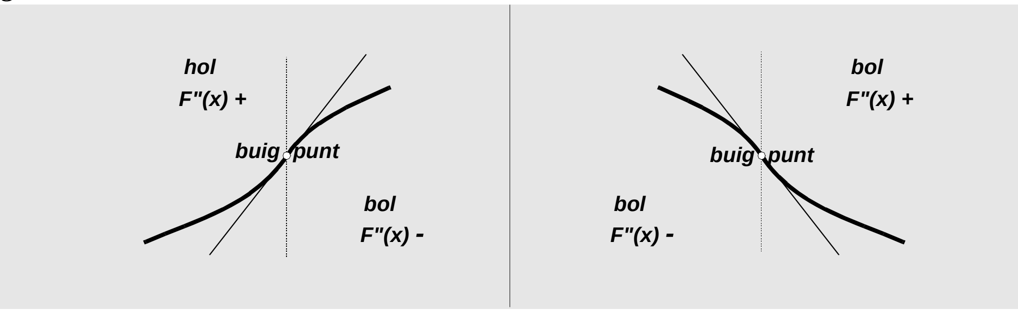
samenvatting

soorten van stijging en daling

Bij een stijgende/dalende functie kan onderscheid worden gemaakt tussen *toenemende*, *gelijkmatige* en *afnemende* stijging/daling.
Bij een *gelijkmatige* stijging of daling is de grafiek een stijgende of dalende *rechte lijn*. In de andere gevallen is de grafiek een *kromme lijn*. Met behulp van de tweede afgeleide *F*" kun je uitmaken waar de grafiek van *F hol*, dan wel *bol* is.
Als je een *raaklijnenpatroon* schetst, kun je zien hoe dat verband is.

buigpunten

Punten waarin de grafiek overgaat van *hol* naar *bol* worden *buigpunte*n van die grafiek genoemd.



Bij het passeren van een buigpunt wisselt $F''(x)$ van teken (van + naar – , of omgekeerd).

versnelling

Bij een beweging noemen we *s* de afgelegde afstand, *v* de (momentane) snelheid en *a* de (momentane) versnelling.
Er geldt:

$$v(t) = s'(t)$$

$$a(t) = v'(t)$$

$$a(t) = s''(t)$$

extra opgave

15 Een derdegraads-veeltermfunctie *F* is een functie van de gedaante:

$$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Hierbij wordt de coëfficiënt $a \neq 0$ verondersteld.

a. Bewijs dat de grafiek van *F* voor alle waarden van *a*, *b*, *c* en *d* precies één buigpunt heeft.

b. Aan welke voorwaarde(n) moeten *a*, *b*, *c* en voldoen, wil er sprake zijn van een horizontaal buigpunt?

Zelftoets

1 $P\,(0\,,\,0)$ en $Q(4\,,\,10)$ zijn punten op de grafiek van $y = x + 3\sqrt{x}$
De lijn PQ wordt evenwijdig verschoven zó dat de punten P en Q tot elkaar naderen. Tenslotte vallen P en Q samen.
Bereken de coördinaten van de eindpositie van P en Q.

2 Gegeven is de functie F door:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{100} x^k$$

a. Bij de afgeleide F' past de formule:

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{100} kx^{k-1}$$

Verklaar deze formule.

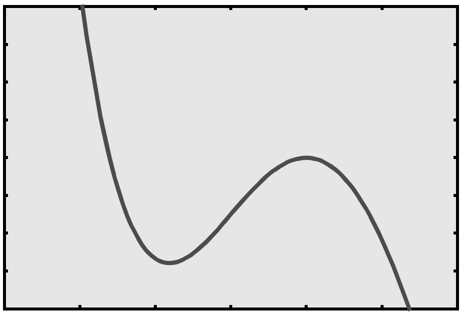
b. Geef zelf een formule voor $F''(x)$ met gebruikmaking van het teken S.

3 Bewijs dat de x-as een raaklijn is van de grafiek van

$$y(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

4 Een punt P met positieve coördinaten ligt op de grafiek bedoeld in **3.**
De voetpunten van de loodlijnen uit P op de x-as en de y-as noemen we respectievelijk P_x en P_y. Als P over de grafiek wandelt (en daarbij positieve coördinaten houdt), verandert de oppervlakte van de rechthoek OP_xPP_y.
Bereken de coördinaten van P zó dat de oppervlakte van die rechthoek minimaal is.

5 Van de functie $y(x) = x^4 - 34x^3 + 420x^2 - 2240x + 4352$ is een deel van de grafiek op een zakcomputer geplot, met als resultaat:



a. Op het scherm is één buigpunt zichtbaar. Wat zijn de coördinaten van dat punt? Licht je antwoord volledig toe.

b. Het x-interval bij het scherm is 6 eenheden, het y-interval is 48 eenheden lang. De grenzen van beide intervallen zijn gehele getallen.
Vind uit welk intervallen bij het venster passen.

c. Een andere instelling van het venster levert een meer compleet beeld van de grafiek, met alle toppen en buigpunten. Noem geschikte intervallen voor x en y, waarbij dit het geval is.

8 De regels van Leibniz

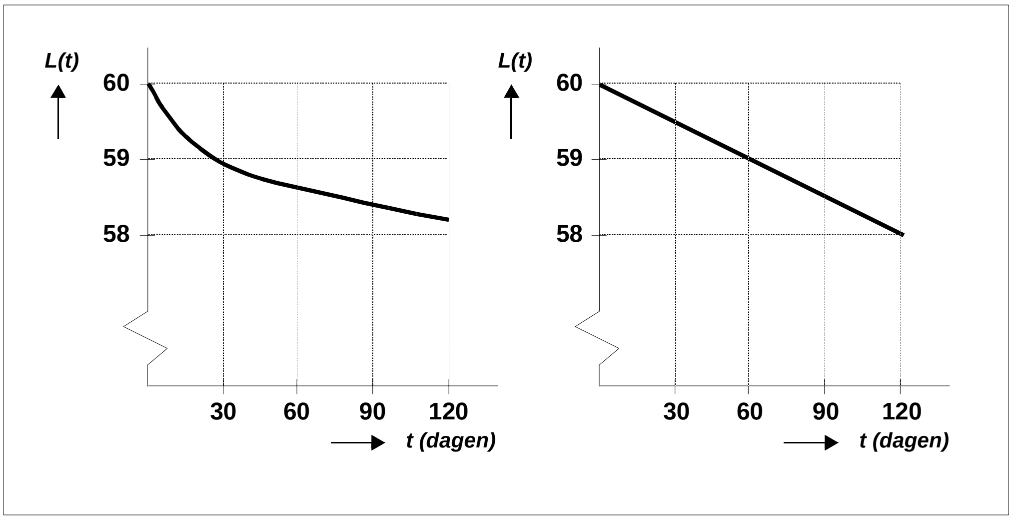
In dit hoofdstuk leer je regels kennen voor het differentiëren van produkten en quotiënten van functies. Die regels zullen blijken een stukje ingewikkelder te zijn dan voor sommen en verschillen. Zo kun je bij een som van functies term voor term differentiëren en die gedifferentieerde termen gewoon weer optellen. We noemen dit *termsgewijs* differentiëren. Bij een product gaat die vlieger niet op: factorsgewijs differentiëren geeft geen goed resultaat! Zo geldt bijvoorbeeld:

$$x^2 + x^4 \xrightarrow{\text{differentieer}} 2x + 4x^3$$

$$x^2 \cdot x^4 \xrightarrow{\text{differentieer}} 6x^5 \text{ (niet: } 2x \cdot 4x^3\text{)}$$

Om te komen tot een regel voor het differentiëren van een product van twee functies, kijken we eerst in een opgave hoe een product verandert als de beide factoren veranderen.

1 Vers gezaagde planken krimpen in de eerste maanden nadat ze gezaagd zijn. Door de celstructuur van het hout vertoont het krimpproces in de lengte een ander beeld dan het krimpproces in de breedte. In onderstaande grafieken is te zien hoe de lengte (L) en de breedte (B) van een plank van 60 bij 60 cm in de loop van de tijd veranderen.



a. Gedurende welke periode krimpt de plank in de lengterichting sneller dan in de breedterichting? Lees je antwoord zo goed mogelijk af uit de grafieken.

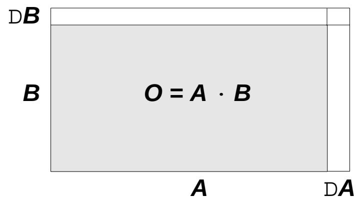
b. Op $t = 0$ is de plank vierkant. Tijdens het krimpen verandert de verhouding tussen lengte en breedte. Na ongeveer hoeveel dagen zal de plank weer vierkant zijn?

c. Op $t = 90$ zijn de afmetingen van de plank 58.3 cm in de lengte- en 58.5 cm in de breedterichting. De plank krimpt dan in de lengterichting 0.007 cm en in de breedterichting 0.017 cm per dag. Hoeveel cm^2 per dag verandert de oppervlakte dan?

2 Onder bepaalde omstandigheden kan een plank ook uitzetten.
Veronderstel dat in zekere periode de ene zijde (= A) van een plank aangroeit met ΔA, de andere zijde (= B) met ΔB en de oppervlakte O met ΔO.

a. Toon aan: $\Delta O = \Delta A \cdot B + A \cdot \Delta B + \Delta A \cdot \Delta B$.

b. Je kunt die formule ook ‘zien’.



Leg de formule van **a** uit aan de hand van de figuur.

In **2** werd verondersteld dat A en B in de tijd veranderen, dus functies zijn van t.
De oppervlakte O is dat dan natuurlijk ook. De aangroeiingen ΔA, ΔB en ΔO vinden plaats gedurende een tijdsinterval met lengte Δt.

3 Bekijk bovenstaand plaatje. Je kunt verwachten dat bij een kleine waarde van Δt de aangroeiingen van de zijden (en van de oppervlakte) ook klein zijn.

a. Stel je voor dat Δt zo klein is genomen dat ΔA en ΔB allebei meer dan 100 keer zo klein zijn als in de figuur, dan worden de staafjes $\Delta A \cdot B$ en $A \cdot \Delta B$ allebei 100 keer zo dun. Hoe zit het dan met het blokje rechtsboven?

b. Je kunt zeggen: $\Delta A \cdot B + A \cdot \Delta B$ is een goede benadering van ΔO. Verklaar.

Let nu op de snelheden waarmee de aangroeiingen plaatsvinden.
Op een zeker tijdsinterval, te beginnen op tijdstip t en met lengte Δt zijn de gemiddelde groeisnelheden gelijk aan:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t},\ \frac{\Delta B}{\Delta t} \text{ en } \frac{\Delta O}{\Delta t}.$$

Delen we nu:

$$\Delta O = \Delta A \quad B + A \quad \Delta B + \Delta A \quad \Delta B$$

door Δt en laten we Δt tot nul naderen, dan komt er:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dfrac{\Delta O}{\Delta t} & = & \dfrac{\Delta A}{\Delta t} & B + A & \dfrac{\Delta B}{\Delta t} & + & \dfrac{\Delta A}{\Delta t} & & \Delta B \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\dfrac{dO}{dt} & = & \dfrac{dA}{dt} & B + A & \dfrac{dB}{dt} & + & \dfrac{dA}{dt} & & 0
\end{array}$$

De derde term van het rechterlid nadert tot nul; in het limietgeval komt er:

$$\frac{dO}{dt} = \frac{dA}{dt} \quad B + A \quad \frac{dB}{dt}$$

Dit resultaat geeft aan hoe je te werk moet gaan bij het differentiëren van het product (hier O) van twee functies (hier A en B). Zo komen we tot de zogenaamde productregel.

productregel

$$A(x) \cdot B(x)$$

diffe ren tieer

$$A'(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot B'(x)$$

De productregel geeft aan hoe het product van twee functies gedifferentieerd kan worden. Het komt erop neer dat je de eerste factor differentieert en de tweede laat staan, vervolgens de eerste factor laat staan en de tweede factor differentieert en tenslotte de twee resultaten optelt.
Het ‘rechthoeksmodel’ geeft een bewijs van de productregel voor het geval A en B positieve waarden hebben. Dat model is hieronder vertaald in een formule, waarbij die eis kan vervallen. Het ziet er ingewikkeld uit, maar je kunt het narekenen!

$$\frac{A(x_*) \cdot B(x_*) - A(x) \cdot B(x)}{x_* - x}$$

$$=$$

$$\frac{A(x_*) - A(x)}{x_* - x} \cdot B(x) + A(x) \cdot \frac{B(x_*) - B(x)}{x_* - x} + \frac{A(x_*) - A(x)}{x_* - x} \cdot (B(x_*) - B(x))$$

Limietovergang voor $x_* \to x$ geeft het resultaat: $A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$.

Leibniz

Deze regel werd ooit door Leibniz ontdekt, nadat hij een paar dagen ten onrechte had gedacht dat de afgeleide van het product gelijk zou zijn aan het product van de afgeleiden. Al gauw kwam hij tot het juiste inzicht. Zijn verklaring leek een beetje op wat je gezien hebt bij opgave **3,** en berustte op het idee dat de oppervlakte van het rechthoekje rechtsboven verwaarloosbaar klein is in vergelijking tot de aangroeiing langs de randen van de rechthoek.

De productregel toegepast op het voorbeeld in de aanhef van dit hoofdstuk:

$$x^2 \cdot x^4$$

diffe ren tieer

$$\underbrace{2x \cdot x^4 + x^2 \cdot 4x^3}_{6x^5}$$

In de meest verkorte vorm ziet de productregel er zó uit:

$$\boxed{(AB)' = A'B + AB'}$$

oefeningen

4 Gegeven de functies $A(x) = x - 1$ en $B(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

a. Bereken de afgeleide van het product $A(x)B(x)$ met behulp van de productregel.

b. Het differentiëren van de productfunctie had hier slimmer gekund. Hoe? Vergelijk je resultaat met dat van vraag **a**.

5 Controleer de productregel voor het geval dat één van beide factoren constant is.

6 Bereken met de productregel:

a. $\dfrac{d}{dx} x\sqrt{x+4}$

b. $\dfrac{d}{dx} x^2\sqrt{x+4}$

c. $\dfrac{d}{dt} t\,(t-1)^{-2}$

d. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2t}{t-1}\right)$

meer factoren

De regel voor de afgeleide van een product van twee factoren laat zich direct uitbreiden voor meer factoren. Zo geldt:

$$A(x) \cdot B(x) \cdot C(x)$$

differentieer

$$A'(x) \cdot B(x) \cdot C(x) + A(x) \cdot B'(x) \cdot C(x) + A(x) \cdot B(x) \cdot C'(x)$$

Of in verkorte vorm:

$$\boxed{(ABC)' = A'BC + AB'C + ABC'}$$

7 **a.** Het bewijs van deze regel kun je vinden door twee keer de productregel voor twee functies toe te passen. Laat dit zien.

b. Hoe zal de productregel voor vier functies luiden?

8 Gegeven de functie $F(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2)(x^4 + 3)$.
Bereken $F'(1)$.

9 De grafiek van $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ snijdt de x-as in vier punten.

a. Bereken de helling van de grafiek in elk van die vier punten.

b. Als je de vorige vraag goed hebt beantwoord, vind je afwisselend een negatieve en een positieve helling. Licht dat toe met een schets van de grafiek.

c. Hoeveel toppen heeft de grafiek van F ?

10 Laat y een of andere functie zijn van x.

a. Verklaar uit de productregel dat geldt:

$$\frac{d}{dx}(y(x))^2 = 2\ y(x)\ y'(x)$$

b. Evenzo:

$$\frac{d}{dx}(y(x))^3 = 3\ (y(x))^2\ y'(x)$$

c. Welke algemene regel kun je nu bedenken?

11 $F(x) = (x^2 - 100)^4$
Bereken $F'(x)$ en $F''(x)$.

quotiënten van functies

Nu je weet hoe je produkten van functies kunt differentiëren, ligt het voor de hand ook naar quotiënten te kijken. Product en quotiënt zijn als het ware zusje en broertje, net zo-als som en verschil dat zijn. Daarmee wordt bedoeld:

als $Q = A / B$, dan $Q \cdot B = A$

net zoals geldt:

als $V = A - B$, dan $V + B = A$

12 Gegeven is de functie: $F(x) = \dfrac{2x-1}{3x+1}$

Uit: $(3x + 1)F(x) = 2x + 1$, kun je na links en rechts differentiëren en het oplossen van $F'(x)$ vinden dat:

$$F'(x) = \frac{5}{(3x+1)^2}$$

Laat zien hoe dat gaat.

De methode van opgave **12** zou in principe kunnen worden toegepast op elk quotiënt van twee functies, waarvan je de afgeleide kunt vinden.

quotiënt-regel

Als die methode wordt toegepast op het quotiënt $A(x)/B(x)$, komt er dit resultaat:

$$\frac{A(x)}{B(x)}$$

diffe ren tieer

$$\frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{(B(x))^2}$$

of in kortschrift:

$$\boxed{(A/B)' = \frac{A'B - AB'}{B^2}}$$

13 Differentieer de functie van **12** met de quotiëntregel.

14 Stel $F(x) = A(x) / B(x)$ en bewijs de quotiëntregel via $B(x) \cdot F(x) = A(x)$.

15 Gegeven de functie: $y = \dfrac{x^3-1}{x^2+1}$.

a. Laat zien dat uit de quotiëntregel volgt: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}$

b. Differentieer ook het *omgekeerde* van de gegeven functie. Wat valt je op als je het resultaat vergelijkt met dat van vraag **a**?

16 Vergelijk de productregel met de quotiëntregel. Ze hebben wel wat van elkaar weg, maar de productregel is evenwichtiger. De factoren in het product zijn volkomen gelijkwaardig: je kunt ze tegen elkaar uitwisselen zonder dat het resultaat verandert. Bij de quotiëntregel is dat niet het geval.

a. Wat gebeurt er met het quotiënt *A/B* als je *A* en *B* van rol laat verwisselen en hoe verandert het teken van de afgeleide?

b. Stel je voor dat *A/B* een stijgende functie is op een zeker *x*-interval. . Wat is het effect van onderlinge verwisseling van *A* en *B*?

De moraal van opgave **16**:

> *Bij het gebruik van de quotiëntregel is de volgorde belangrijk: eerst de tellerfunctie differentiëren (en de noemer ongewijzigd laten), daarna andersom.*

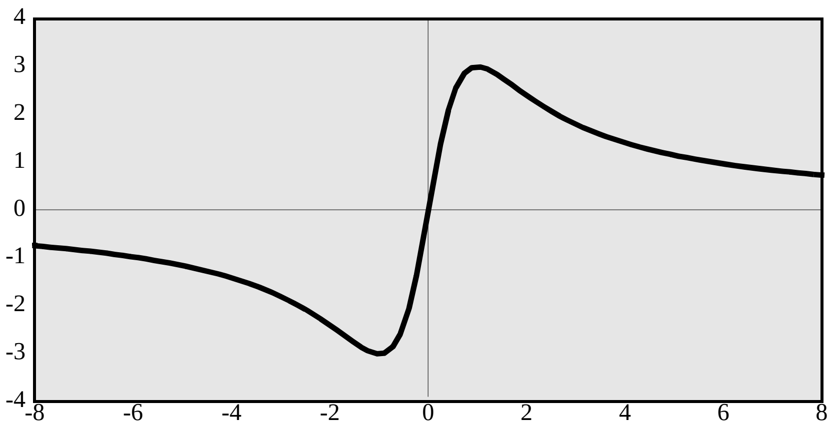
17 Als je twijfelt aan wat eerst te differentiëren, de teller of de noemer, dan is er een aardige proef op de som: voer de quotiëntregel uit voor het geval de noemer-functie constant 1 is. Je ziet dan meteen of je de goede volgorde hebt genomen. Leg dat uit.

oefeningen

18 Differentiëer de functie y in het geval $y(x) =$

a	$\dfrac{x+2}{x-2}$	**e**	$\dfrac{4x}{x^2+1}$
b	$\dfrac{3x-4}{4x-3}$	**f**	$\dfrac{x^2+1}{4x}$
c	$\dfrac{3x-3}{4x-4}$	**g**	$\dfrac{1}{x^2+x+1}$
d	$\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$	**h**	$\dfrac{x-1}{x^3-1}$

19 Hieronder zie je de grafiek van $y(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ voor $-6 \le x \le 6$.



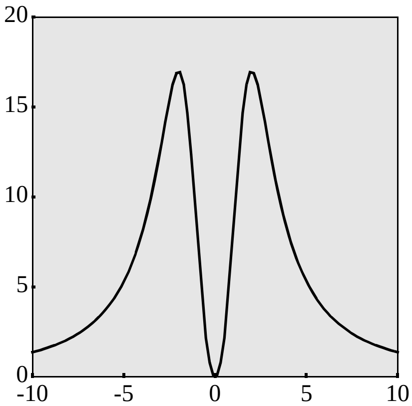
a. Volgens de tekening zijn (1 , 3) en (−1 , −3) de toppen van de grafiek. Controleer dit met behulp van de afgeleide functie.

b. De grafiek is puntsymmetrisch en heeft daarom een buigpunt in de oorsprong. Geef een vergelijking van de buigraaklijn in dat punt.

c. Bereken $y''(x)$ en toon aan dat de grafiek nog twee buigpunten heeft.

d. Wat kun je zeggen van het gedrag van de grafiek als x onbeperkt groeit?

20 Van de functie $F(x) = \dfrac{136x^2}{x^4 + 16}$ zie je hier een grafiek op het x-interval [-10 , 10].



a. Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek.
b. Een tweede functie G wordt gegeven door $G(x) = F(x) + c$, waarbij c een constante is. De grafiek van G raakt aan de lijn $y = 10$. Welke waarde(n) kan c hebben?

Bij het differentiëren van een functie is het vaak nodig om eerst nog enkele algebraïsche rekenregels toe te passen voordat je bij een ‘net antwoord’ komt. Rekenregels die je regelmatig nodig hebt zijn bijvoorbeeld:

1: $A + \dfrac{B}{C} = \dfrac{AC + B}{C}$ 2: $A\,\dfrac{B}{C} = \dfrac{AB}{C}$ 3: $\dfrac{\frac{A}{B}}{C} = \dfrac{A}{BC}$ 4: $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

21 Toepassen van de productregel bij opgave **6 a** gaf:

$$\frac{d}{dx} x\sqrt{x+4} = \frac{d}{dx} x\,(x+4)^{\frac{1}{2}} = (x+4)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}x\,(x+4)^{-\frac{1}{2}}$$

Laat zien hoe je de bovengenoemde rekenregels kunt gebruiken om die laatste vorm te schrijven als: $\dfrac{3x + 8}{2\sqrt{x+4}}$

22 Differentieer de volgende zestien vormen (soms kan het helpen om enkele rekenregels toe te passen voordat je gaat differentiëren, dat maakt het werk eenvoudiger):

$\dfrac{12}{\sqrt[3]{x}}$	$\sqrt{\dfrac{1}{3x}}$	$\dfrac{1}{x}\sqrt[4]{x}$	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$
$\dfrac{x^2}{3}$	$\dfrac{3}{x^2}$	$\dfrac{1}{3x^2}$	$\dfrac{1}{3 + x^2}$
$\dfrac{x+1}{x}$	$\dfrac{x}{x+1}$	$\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$
$(x^2 - x)^5$	$x^{10} - x^5$	$x^5(x^5 - 1)$	$\dfrac{x^5}{x^5 - 1}$

23 $y_1(x) = \dfrac{3}{x^2 - 3}$ en $y_2(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 3}$

a. Bereken $y_1'(x)$ en $y_2'(x)$.

b. De functies y_1 en y_2 zijn verschillend maar hebben dezelfde afgeleide. Hoe kan dat?

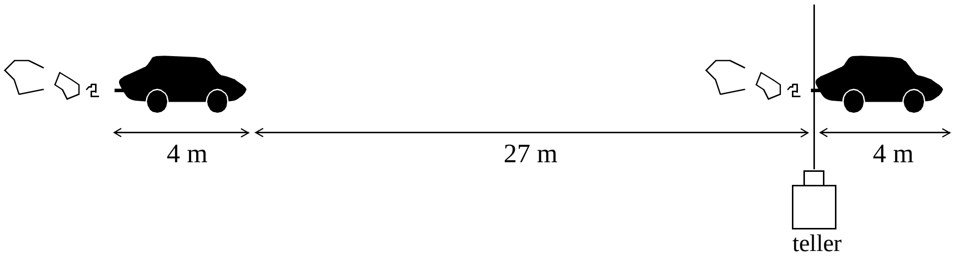
fileprobleem

24 Een te groot verkeersaanbod op een te smalle weg . . . . weer een file.
Hoe drukker het is, des te langzamer rijdt de file.
Blijkbaar kunnen bij lage snelheden meer auto's worden verwerkt.
Toch gek, want bij een snelheid van 0 km/u stroomt geen enkele auto door.
Is er een optimale snelheid van een file? Over dit probleem gaat deze opgave.
Belangrijk bij het fileprobleem is de onderlinge afstand van de auto's. Hoe groter de snelheid van de file, hoe groter de onderlinge afstand moet zijn, en dat is van invloed op de doorstroming. Anderzijds is de onderlinge afstand bij lage snelheid wel klein, maar in een slakkegangetje kan er ook niet veel doorstromen.
De onderlinge afstand bepalen we met behulp van een vuistregel van de ANWB:

$$r = 0.0075\, v^2 \quad (v \text{ in km/u}, r = \text{remweg in m}).$$

a. Hoeveel m afstand tot zijn voorligger zou een automobilist tenminste moeten aanhouden bij een snelheid van 60 km/u?
En bij een twee keer zo grote snelheid?

b. Stel je voor dat een file een snelheid van 60 km/u heeft en uit louter personenauto's bestaat. Neem voor het gemak aan dat elke auto 4 m lang is en dat iedere automobilist de voorgeschreven remafstand in acht neemt.
Op een zeker punt heeft de politie een teller geplaatst.



Laat zien dat er per minuut ongeveer 32 auto's de teller passeren.

c. Hoe groot is het aantal auto's dat de teller passeert bij een snelheid van 120 km/u?

d. Het aantal auto's (=N) dat de teller per minuut passeert, is een functie van de snelheid v (in km/u).

Toon aan dat geldt: $N = \dfrac{1000v}{0{,}45v^2 + 240}$.

e. Plot de grafiek van N als functie van v op de GR en ga na dat de maximale doorstroming van een file onder de hierboven geschetste voorwaarden plaatsvindt bij een snelheid van ongeveer 25 km/u.

f. Bereken $\dfrac{dN}{dv}$ en gebruik dit resultaat om de optimale snelheid te berekenen.

samenvatting

product- en quotiënt-regel

De afgeleide van een product of quotiënt van twee functies, kun je vinden via de regels van Leibniz:

D8 $\quad F(x) = A(x)B(x) \longrightarrow F'(x) = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$

D9 $\quad F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)} \longrightarrow F'(x) = \dfrac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B(x)^2}$

meer factoren

Regel **D8** kan gemakkelijk worden uitgebreid voor produkten van drie of meer functies. In verkorte vorm, komt er:

(ABC)' = A'BC + AB'C + ABC'

(ABCD)' = A'BCD + AB'CD + ABC'D + ABCD'

enz.'

machten van een functie

Als de factoren *A*, *B*, enz. aan elkaar gelijk zijn, krijg je een (natuurlijke) macht van een functie. Toepassing van de (uitgebreide) productregel geeft dan:

$$\frac{d}{dx}(A(x))^2 = 2 \quad A(x) \quad A'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(A(x))^3 = 3 \quad A(x)^2 \quad A'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(A(x))^4 = 4 \quad A(x)^3 \quad A'(x)$$

enz.

extra opgave

25 $F'(x)$ is een maat voor de locale verandering van een functie *F*.
In sommige situaties zijn we geïnteresseerd in de verhouding tussen $F'(x)$ en $F(x)$.
Het quotiënt $\frac{F'(x)}{F(x)}$ wordt wel de *relatieve* afgeleide van *F* genoemd. Voor de relatieve afgeleide van het product of quotiënt van twee functies, gelden mooie regels.

a. Laat zien dat de relatieve afgeleide van het *product* van twee functies *A* en *B* gelijk is aan de *som* van de relatieve afgeleiden van *A* en *B*.
b. Laat zien dat de relatieve afgeleide van het *quotiënt* van twee functies *A* en *B* gelijk is aan het *verschil* van de relatieve afgeleiden van *A* en *B*.

Opmerking: deze regels doen denken aan de regels die je misschien in de natuurkunde hebt geleerd over de relatieve fout bij een product of quotiënt.

9 Exponentiële functies

In deel 1 (‘Som en verschil, afstand en snelheid’) heb je gezien dat bij een beweging gegeven door een exponentiële formule, bijvoorbeeld: $s(t) = 2^t$, de snelheid *evenredig* is met de afgelegde weg.
Die ontdekking gebeurde op *empirische* wijze, namelijk met de GR. Daarbij gebruikte je tabellen van $y_1 = 2^x$, $y_2 = y_1(x + 0.00001) - y_1$ en $y_3 = y_2 / 0.00001$.
Met weglating van de differentie y_2 , komt er:

X	Y1	Y3
0	1	.69315
1	2	1.3863
2	4	2.7726
3	8	5.5452
4	16	11.09
5	32	22.181
6	64	44.362

X=0

y′* evenredig met *y

Het lijkt erop dat y_1 en y_3 evenredig zijn en dat de evenredigheidsconstante ongeveer gelijk is aan 0.69315.
Zo kwamen we tot de (voorlopige) conclusie:

$$\text{als } \; s(t) = 2^t \text{ , dan } \quad s'(t) = c_2 \cdot 2^t$$

waarbij $c_2 \approx 0.69315$.
Evenzo vonden we:

$$\text{als } \; s(t) = 3^t \text{ , dan } \quad s'(t) = c_3 \cdot 3^t$$

met $c_3 \approx 1.0986$.
In dit hoofdstuk gaan we wat dieper in op het differentiëren van exponentiële functies en de hier genoemde regels zullen nader aan de tand worden gevoeld.

1 Maak op de GR de grafieken van $y_1 = 2^x$, $y_2 = 3^x$, $y_3 = 5^x$ en $y_4 = (1/2)^x$.
- **a.** Deze grafieken gaan alle door een zelfde punt. Welk punt is dat en waarom?
- **b.** Je ziet dat de grafiek van y_4 het spiegelbeeld is van de grafiek van y_1 ten opzichte van de y-as. Hoe kun je dat met algebra verklaren?
- **c.** Welk grondtal moet je een nieuwe exponentiële functie geven om de spiegelgrafiek van y_2 te krijgen? En van y_3?
- **d.** Beschouw de exponentiële functies $y = a^x$ met $a > 0$.
  Voor welke waarden van het grondtal a is de functie respectievelijk stijgend, constant, dalend?

2
- **a.** Teken met de GR de raaklijn aan de grafiek van $y = 2^x$ in het punt (0 , 1). Lees de waarde van de richtingscoëfficiënt af op het scherm. Komt deze waarde overeen met wat er boven opgave **1** staat?
- **b.** Hoe groot zal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $y = (1/2)^x$ in het punt (0 , 1) zijn?
- **c.** En aan de grafiek van $y = 3^x$?

Bij de grafieken van machtsfuncties (dus functies van het type $y = x^a$) heb je gezien dat kennis over de helling van de grafiek in het punt (1 , 1) voldoende is om de helling in de andere punten te vinden.
Bij de grafieken van de exponentiële functies ($y = a^x$) geldt iets dergelijks, maar in plaats van (1 , 1) wordt het punt (0 , 1) genomen; dat is nu namelijk het punt dat op *alle* grafieken ligt (zie de figuur op de voorkaft).

3 Als voorbeeld nemen we het grondtal $a = 2$.
Ga na dat de richtingscoëfficiënt van de koorde die het punt (0 , 1) verbindt met het wandelpunt (r , 2^r) gelijk is aan $\dfrac{2^r - 1}{r}$

Als r weinig van 0 verschilt, wordt de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in (0 , 1) benaderd door de uitkomst van bovenstaand differentiequotiënt. Helaas kun je hier niet, zoals bij de machtsfuncties, het differentiequotiënt vereenvoudigen.
Daarom maken we nu een tabel, om het gedrag van de uitkomsten voor verschillende waarden van r te bekijken.

r	$\dfrac{2^r - 1}{r}$
0.1	0.7177346
0.01	0.6955550
0.001	0.6933875
0.0001	0.6931712
0.00001	0.6931495
0.000001	0.6931474

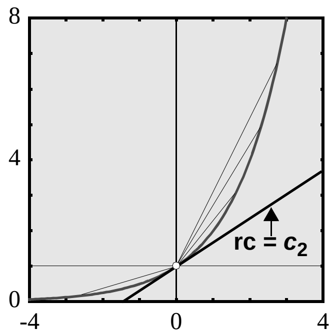
Het lijkt erop of de uitkomsten een limiet hebben: 0.69314....
Dat is ook het geval als je voor r negatieve waarden in de buurt van 0 neemt.

4 Maak zelf een soortgelijke tabel voor r = - 0.1, - 0.01, -0.001, enz.

We nemen nu aan dat de grafiek van $F(x) = 2^x$ overal glad is, dus ook in het punt (0 , 1).
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in (0 , 1) is dan gelijk aan:

$$\lim_{r \to 0} \frac{F(r) - F(0)}{r - 0} = \lim_{r \to 0} \frac{2^r - 1}{r}$$

Die limiet is een getal waarvan de eerste vijf decimalen achter de komma kennelijk 69314 zijn. Omdat de limiet niet exact te geven is met decimalen (er zijn er oneindig veel), gebruiken we voorlopig de al eerder ingevoerde notatie: c_2.



$$c_2 = \lim_{r \to 0} \frac{2^r - 1}{r}$$

Nu bekijken we het verband met de helling in andere punten.

Neem een punt $P = (x\ ,\ 2^x)$ en een wandelpunt $P_* = (x_*\ ,\ 2^{x_*})$ op de grafiek van $y = 2^x$.
De richtingscoëfficiënt van de koorde PP_* is gelijk aan:

$$\frac{2^{x_*} - 2^x}{x_* - x}$$

Vergelijk deze vorm met:

$$\frac{2^r - 1}{r}$$

Stel: $x_* - x = r$. Dan geldt: $x_* = r + x$.
Ingevuld in de eerste vorm geeft:

$$\frac{2^{x_*} - 2^x}{x_* - x} = \frac{2^{r+x} - 2^x}{r} = \frac{2^r 2^x - 2^x}{r} = \frac{2^r - 1}{r}\ \ 2^x$$

Als nu x_* nadert tot x, dan nadert r tot 0.
Er komt nu:

$$\lim_{x_* \to x} \frac{2^{x_*} - 2^x}{x_* - x} = \lim_{r \to 0} \frac{2^r - 1}{r}\ \ 2^x = c_2\ \ 2^x$$

En daarmee is aangetoond:

> **Als $F(x) = 2^x$,**
> **dan $F'(x) = c_2\ \ 2^x$**

Voor andere positieve grondtallen ($\neq 1$) kan dezelfde redenering worden gegeven.
Zo krijgen we de algemene formule:

> **Als $F(x) = a^x$,**
> **dan $F'(x) = c_a\ \ a^x$**

In woorden: *de afgeleide van een exponentiële functie is evenredig met de functie zelf.*
Hieronder zie je een lijstje van de evenredigheidsconstante c_a voor a = 2, 3, 4, ..., 10, afgerond in negen decimalen achter de komma.

a	c_a
2	0.693147181
3	1.098612289
4	1.386294361
5	1.609437912
6	1.791759469
7	1.945910149
8	2.079441542
9	2.197224577
10	2.302585093

5 Bereken (in je antwoorden mag je de passende constante c_a laten staan):

a. $\frac{d}{dx}5^{x+2}$

b. $\frac{d}{dx}(25 \quad 5^x)$

c. $\frac{d}{dx}2^{-x}$

d. $\frac{d}{dt}(2^t + 2^{-t})$

e. $\frac{d}{dt}(t \quad 3^t)$

f. $\frac{d}{dt}\sqrt{6^t}$

6 Bekijk de tabel van de constanten c_a.
Het lijkt erop dat c_4 gelijk is aan $2 \cdot c_2$ en dat c_8 gelijk is aan $3 \cdot c_2$.
Hoe kun je die relaties bewijzen?
Aanwijzing: schrijf eerst 4^x en 8^x als machten met grondtal 2.

7 **a.** Controleer in de tabel dat $c_{10} = c_2 + c_5$. Je kunt die eigenschap verklaren uit de productregel. Hoe?
b. Bewijs dat voor alle positieve waarden van a en b geldt: $c_{ab} = c_a + c_b$.

8 **a.** In de tabel van c_a zie je: hoe groter a, hoe groter c_a. Vanzelfsprekend?
b. Wat kun je zeggen van de waarden van c_a voor $0 < a < 1$?

9 Bekijk opnieuw de c_a-tabel. Omdat de waarden van c_a geleidelijk oplopen met toenemende waarden van a, zal er één grondtal a zijn, ergens tussen 2 en 3, waarvoor geldt $c_a = 1$. Probeer met hulp van de GR een benadering van dat getal te vinden in twee decimalen achter de komma.

het getal e

Het grondtal a waarvoor geldt dat de constante c_a gelijk is aan 1, is een van de beroemde getallen uit de wiskunde. Dit getal wordt aangeduid met de letter e.
Dit is ter ere van de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707 - 1783) .
Het getal heeft een aantal mooie eigenschappen en duikt overal in de wiskunde op. Maar ook daar waar wiskunde toegepast wordt in andere vakken, kom je e vaak tegen.
Wij hebben nu één van de vele eigenschappen van e leren kennen, namelijk:

$$c_e = 1$$

y* = e*

Met als gevolg:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

In woorden:
de exponentiële functie met grondtal e is gelijk aan zijn afgeleide.

10 Het getal e, of beter de functie $y = e^x$, zit standaard op de GR.
a. Neem $y(x) = e^x$ en plot de grafiek. Teken ook de raaklijn in (0 , 1). Hoe groot moet de richtingscoëfficiënt zijn?
b. Maak nu de grafiek van de afgeleide van y.
c. Bereken e (= e^1) met de GR. Vergelijk dit resultaat met je antwoord bij **9**.
d. Het lijkt erop of de decimalen van e een regelmatig patroon vormen, maar dat is schijn. Om nog drie decimalen te berekenen, kun je de uitkomst van e eerst met 1000 vermenigvuldigen en vervolgens het stuk voor de komma (2718) er aftrekken. Bepaal op deze wijze de benadering van e in 12 decimalen.

Beroemde getallen en aftelversjes

De getallen p en e zijn beroemdheden in de wereld van de exacte vakken.
Beide getallen hebben oneindig veel decimalen achter de komma; in die decimale ontwikkeling is geen mooi regelmatig patroon te zien, zoals bijvoorbeeld in de ontwikkeling van 1/6 = 0.1666666666.... of van 2/7 = 0.28571428571428...

Sinds de komst van rekenmachine en computer kun je gemakkelijk aan een aantal decimalen van p en e komen, maar vroeger was dat anders. Toen zat er niet anders op dan te gaan rekenen of om de decimalen op te zoeken in een boek. Omdat de de meeste mensen gemakkelijker een tekst (= rijtje woorden) dan een rijtje van cijfers onthouden, bedacht men allerlei zinnen of versjes om bijvoorbeeld de decimalen van p te kunnen onthouden. Hier komt er eentje, waarschijnlijk afkomstig van de Engelse natuurkundige Arthur S. Eddington:

How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy chapters involving quantum mechanics

3 . 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9

Geheel in overeenstemming met:

p = 3. 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 ...

Een heel romantisch pi-versje (in oude spelling) en voor wat minder decimalen is:

Eva, o lief o zoete hartedief
uw blauwe oogen
zijn wreed bedrogen

Voor:

e = 2. 71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 99959 57496 ...

heeft de Nederlandse wiskundige E.C. Buissant des Amorie het volgende versje bedacht:

Je ontmoet e steevast in wiskunde
't grondtal is vernoemd naar Euler misschien!
Deze knaap is een genie van klasse!
Ik bewonder Leonard zeer.

De uitroeptekens staan hier voor het cijfer nul.

Een ander versje is afkomstig van Maurits Dienske (docent lerarenopleiding), blijkbaar onwetend van het bestaan van het vers van Buissant:

De handige e
grenstal en grondtal,
e evenaart pi,
nochtans geen enkel aftelvers.

11 Bereken:

a. $\frac{d}{dx}e^{2x}$

b. $\frac{d}{dx}e^{-x}$

c. $\frac{d}{dx}2e^{5x}$

d. $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{e^x}$

e. $\frac{d}{dt}e^{t-2}$

f. $\frac{d}{dt}(e^t - e^2)$

g. $\frac{d}{dt}(t - e^t)$

h. $\frac{d}{dt}((t-1)e^t)$

12 Gegeven de functie $y = (e^x + e^{-x}) / 2$.

a. Plot met de GR de grafiek (venster [-2 , 4] bij [0 , 4]). Wat zijn de coördinaten van de top van deze grafiek?

b. Teken de raaklijn in het punt met x-coördinaat 1. Bereken de exacte y-coördinaat van het snijpunt van die raaklijn met de y-as.

c. Toon aan dat geldt: $y'' = y$.

13 Plot met de GR de grafiek van $y = 5xe^{-x}$.

a. Toon aan dat de top van die grafiek de x-coördinaat 1 heeft.

b. Heeft de grafiek een buigpunt? Zo ja, welke x-coördinaat heeft dat punt?

$c_2 = {}^e\log 2$

Je hebt nu gezien dat het differentiëren van machten van e prettig is omdat de differentieerconstante gelijk is aan 1. Daarom wordt in de praktijk veel met machten van e gewerkt. Dit is mogelijk omdat machten met een ander grondtal dan e herschreven kunnen worden als machten van e. Stel bijvoorbeeld: $2 = e^k$ en dus $2^x = (e^k)^x = e^{kx}$

Dan geldt:

$$\frac{d}{dx}2^x = \frac{d}{dx}e^{kx}$$

$$\downarrow$$

$$c_2 \cdot 2^x = k \cdot e^{kx}$$

$$\downarrow$$

$$c_2 \cdot 2^x = k \cdot 2^x$$

$$\downarrow$$

$$c_2 = k$$

Conclusie:

$$\mathbf{2 = e^{c_2}}$$

Met andere woorden c_2 is de exponent van de macht, waartoe je e moet verheffen om 2 te krijgen. Maar dat getal is per definitie de e-logaritme van 2.

Ofwel:

$$c_2 = {}^e\log 2.$$

Dit geldt natuurlijk ook voor een willekeurig ander grondtal a (>0):

$$c_a = {}^e\log a.$$

natuurlijke logaritme

De evenredigheidsconstanten c_a , die optreden bij het differentiëren van exponentiële functies blijken dus gelijk te zijn aan logaritmen met grondtal e. Dergelijke logaritmen worden *natuurlijke logaritmen* genoemd.
In plaats van bijvoorbeeld ${}^{\mathrm{e}}\log 2$ schrijft men vaak ln2 (ln = logaritmus naturalis).

14 Op de GR zit de toets LN. Bereken hiermee ${}^{\mathrm{e}}\log 2$ (of ln2) en ${}^{\mathrm{e}}\log 3$ (of ln3) en vergelijk de resultaten met de tabel van de constanten c_a (bladzij 54).

15 Kijk nog even terug naar opgave **7**. De daar genoemde eigenschap komt overeen met een eigenschap van de logaritme. Noem die logaritmische eigenschap.

Nu we weten dat de constanten c_a natuurlijke logaritmen zijn, zullen we die voortaan gebruiken bij het differentiëren van exponentiële functies:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = {}^{\mathrm{e}}\log a \cdot a^x$$

ofwel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = \ln a \cdot a^x$$

16 Verklaar op twee manieren dat ln e = 1.

17 Bereken:

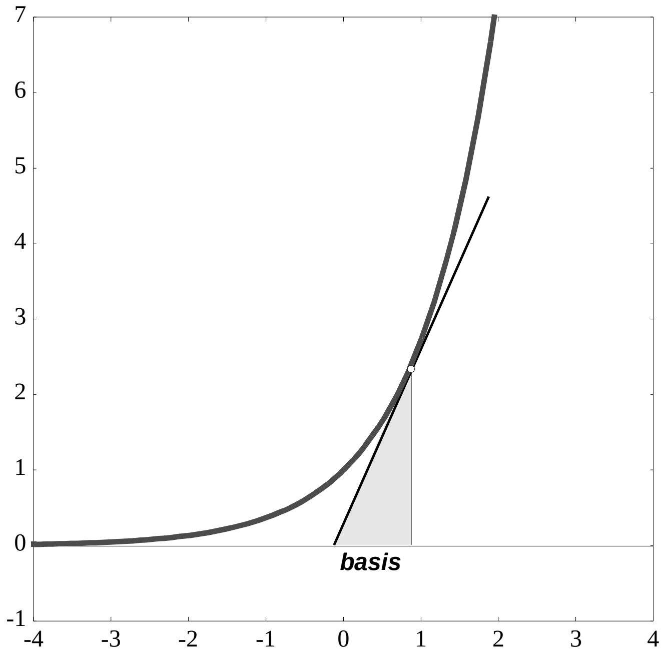
a. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{5^x}{\ln 5}\right)$

b. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln 5}{5^x}\right)$

c. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{10t}$

d. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}10^{\mathrm{e}t}$

18 Aan de grafiek van $y = \mathrm{e}^x$ is een ‘raaklijndriehoek’ getekend, met de basis op de x-as.



a. Toon dat de lengte van die basis onafhankelijk is van de plaats van het raakpunt op de grafiek.
b. Geldt deze eigenschap ook voor andere grondtallen dan e?

Exponentiële functies treden op in modellen van groeiprocessen. Een veel gebruikt groeimodel wordt gegeven door de formule:

$$y = be^{ct}$$

Hierin staat de constante b voor de waarde (van y) op het tijdstip $t = 0$.

19 a. Onderzoek op de GR welke invloed de constante c heeft op het groeiproces. Neem ook negatieve waarden van c in beschouwing.

b. Verklaar dat voor de groeisnelheid y' geldt: $y' = cy$.

In een later boekje zullen we ingaan op de herkomst van dit type model en van andere modellen die wat ingewikkelder zijn. Over zo'n wat ingewikkelder model gaat de volgende opgave.

20 Voor de groei van een pompoen heeft een bioloog het volgende model opgesteld:

$$G = \frac{3000}{1 + 9e^{-1,2t}}$$

Hierin is t de tijd in dagen (vanaf een zeker moment in het groeiproces), G het gewicht van de pompoen in gram.

a. Bekijk de grafiek bij dit groeimodel op de GR (kies het venster [-5 , 10] bij [0, 4000].
Hoe zwaar is de pompoen op den duur?

b. Leg uit dat je het antwoord van **a** ook uit de formule kunt vinden.

c. Laat zien dat voor de afgeleide G' geldt:

$$G' = 1,2G \; \frac{9e^{-1,2t}}{1 + 9e^{-1,2t}}$$

d. Hoe kun je aan de formules voor G en G' zien dat de pompoen op den duur vrijwel niet meer groeit?

e. Leidt uit de beide formules af dat geldt:

$$G' = 1,2G - 0,0004G^2$$

Aanwijzing: druk eerst $9e^{-1.2t}$ uit in G.

f. Leidt nu ook af:

$$G'' = G'(1,2 - 0,0008G)$$

g. De grafiek van G als functie van t heeft één buigpunt. Bepaal zo nauwkeurig mogelijk de coördinaten van dat buigpunt.
Wat is de betekenis van dit punt voor de groei van de pompoen?

samenvatting

afgeleide van exponentiële functies

D10 $F(x) = a^x \longrightarrow F'(x) = \ln a \cdot a^x$

voor alle waarden van *a* > 0

Hierbij geldt:

ln *a* = 1 voor *a* = e » 2.71828...

en

$$\ln a = {}^{e}\log a$$

natuurlijke logaritme

De logaritme met grondtal e wordt *natuurlijke logaritme* genoemd.
Het symbool ln staat voor logaritmus naturalis.

Als speciaal geval van **D10** geldt:

D10' $F(x) = e^x \longrightarrow F'(x) = e^x$

In woorden:
de exponentiële functie met grondtal e is gelijk aan zijn afgeleide.

extra opgave

21 De afgeleide van een exponentiële functie is evenredig met de oorspronkelijke functie. Bij het grondtal e is de evenredigheidsconstante gelijk aan 1.

a. Bij welk grondtal is de evenredigheidsconstante gelijk aan 2?
b. Bedenk een functie F waarvoor geldt: $F'(x) = 5F(x)$.
c. Bedenk een functie F waarvoor geldt: $F'(x) = -F(x)$.

10 Logaritmische functies

Op de GR zitten twee ‘logaritmische’ toetsen, namelijk LOG en LN.
LOG staat voor ‘logaritme-met-grondtal-10’ en LN voor ‘logaritme-met-grondtal-e’.

$$\mathbf{\log x = {}^{10}\!\log x} \qquad \text{en} \qquad \mathbf{\ln x = {}^{e}\!\log x}$$

1 Voer in de GR de functies $y_1 = \log x$ en $y_2 = 10^{y_1}$.

a. Bekijk de tabellen van deze twee. Wat is opmerkelijk? Hoe verklaar je dat?

b. Vervang nu $\log x$ door $\ln x$ en 10^{y_1} door e^{y_1}. Wat verandert er aan de tabel?

log en 10^ zijn elkaars inverse

De functies $y_1 = \log x$ en $y_2 = 10^x$ zijn *inverse* functies van elkaar.
Het woord ‘inverse’ komt uit het Latijn en betekent ‘omgekeerde’.
De omkering (of beter *verwisseling*) zie je bijvoorbeeld in:

$$y_1(1000) = 3 \text{ en } y_2(3) = 1000$$

Je ziet dus dat bij de inverse functie ‘input’ en ‘output’ verwisseld zijn.
Dat betekent ook: als je op een getal y_1 toepast en daarna op het resultaat y_2, dan krijg je als uitkomst het oorspronkelijke getal. Bijvoorbeeld:

$$1000 \xrightarrow{\log} 3 \xrightarrow{10^\wedge} 1000$$

$$-2 \xrightarrow{10^\wedge} 0.01 \xrightarrow{\log} -2$$

Algemeen geldt voor $x > 0$ en u willekeurig:

$$x \xrightarrow{\log} \log x \xrightarrow{10^\wedge} x$$

$$u \xrightarrow{10^\wedge} 10^u \xrightarrow{\log} u$$

Deze twee ‘kettingen’ kun je ook in formulevorm gieten:

$$\mathbf{10^{\log x} = x}$$

$$\mathbf{\log(10^u) = u}$$

ln en e^ zijn elkaars inverse

2 Evenzo zijn de functies $y_1 = \ln x$ en $y_2 = e^x$ inverse functies van elkaar.
Maak soortgelijke formules als hierboven voor deze beide functies.

3 Op de GR zit geen knop voor logaritmen met een ander grondtal dan 10 of e.
Toch kun je ook van bijvoorbeeld $y = {}^2\!\log x$ de grafiek maken op de GR.

a. Ga na dat $y = {}^2\!\log x$ gelijkwaardig is met $x = 2^y$ en dus met $10^{\log x} = (10^{\log 2})^y$.

b. Verklaar dat hieruit volgt $y \ \log 2 = \log x$

c. Hoe kun je nu de functie $y = {}^2\!\log x$ invoeren in de GR?

d. Maak de grafiek van $y = {}^2\!\log x$. Hoe ligt die grafiek ten opzichte van $y = 2^x$?

4 In opgave **3** heb je deze formule herontdekt:

$$^{2}\log x = \frac{\log x}{\log 2}$$

Laat nu ook zien dat geldt:

$$^{2}\log x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

Controleer dat beide formules dezelfde grafiek geven.

regels voor logaritmen

Nu volgt een korte herhaling van de belangrijkste regels voor logaritmen.

Overgangsformule
De formules van opgave **4** noemen we overgangsformules, omdat ze de overgang van een grondtal (hier 2) naar het grondtal 10 of e bewerkstelligen.
In het algemeen geldt voor $a > 0$ en $a \neq 1$:

$$\boxed{{}^{a}\log x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

Hoofdeigenschap
Naast de overgangsformule is ook de volgende formule voor logaritmen interessant. Die formule zegt hoe je van de som van twee logaritmen met hetzelfde grondtal één nieuwe logaritme kunt maken. Of ook: dat je van een *product* een som kunt maken door ‘bemiddeling’ van een logaritme. Nemen we bijvoorbeeld het grondtal e, dan geldt voor alle positieve waarden van *a* en *b*:

$$\boxed{\ln a + \ln b = \ln ab}$$

Deze regel wordt de hoofdeigenschap van de logaritmen genoemd.

Logaritme van een macht.
Een derde belangrijke eigenschap gaat over de logaritme van een macht.
Er geldt namelijk voor positieve *a* en willekeurige *t*:

$$\boxed{\ln a^{t} = t \ln a}$$

Deze beide eigenschappen zijn terug te voeren op eigenschappen van machten, namelijk: $g^{u} \, g^{v} = g^{u+v}$ en $(g^{u})^{v} = g^{uv}$

5 Kies g = e om bovenstaande eigenschappen voor natuurlijke logaritmen te bewijzen.
Hier volgt een fragment van het bewijs van de hoofdeigenschap:

$$\ldots = ab = e^{\ln a} \, e^{\ln b} = \ldots$$

a. Maak het bewijs af.
b. Geef het bewijs van de andere eigenschap (dus over de logaritme van een macht).

6 Hoe bewijs je beide eigenschappen voor logaritmen met grondtal 10?

7 Toon aan dat geldt:

$$\sum_{k=1}^{10} \log k = \log(10!)$$

Opmerking: 10! (spreek uit: 10-faculteit) = 1 · 2 · 3 · .... · 10.

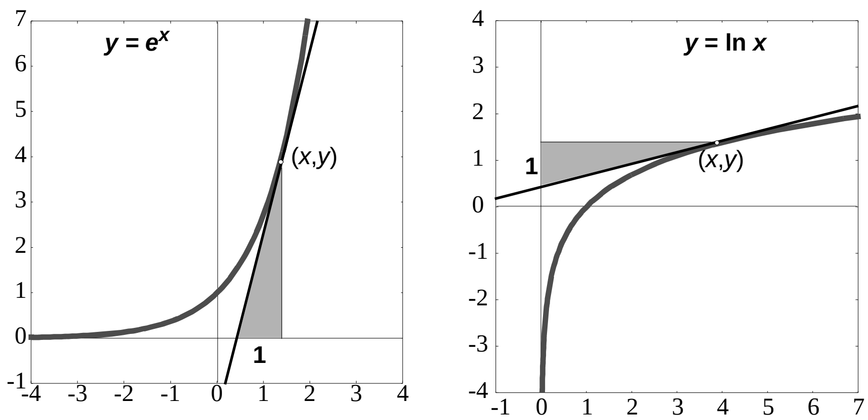
8 Bedenk een formule voor:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(2^k)$$

afgeleide van ln en log

Je gaat nu ontdekken hoe je logaritmische functies kunt differentiëren. Daarbij kan handig gebruik worden gemaakt van de regel voor het differentiëren van een exponentiële functie.

9



Bekijk de grafieken van de functies $y = e^x$ en $y = \ln x$.
In opgave **18** van het vorige hoofdstuk heb je gezien dat in de linkerfiguur de zijde van de raaklijndriehoek die langs de x-as valt, gelijk is aan 1.
Dat geldt dus in de rechterfiguur voor de zijde die langs de y-as valt!
Verklaar nu dat geldt:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

10 Nu je de afgeleide functie van de natuurlijke logaritme kent, ken je ook de afgeleiden van andere logaritmische functies, bijvoorbeeld van die met grondtal 10.
Laat zien dat uit **9** volgt:

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{\ln 10}\,\frac{1}{x}$$

11 *De ontbrekende schakel.*

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{4}x^4\right) = x^3$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{3}x^3\right) = x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right) = x$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\right) = 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ldots\right) = x^{-1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(-x^{-1}\right) = x^{-2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\tfrac{1}{2}x^{-2}\right) = x^{-3}$$

$$\vdots$$

a. Deze rij kan gemakkelijk worden uitgebreid naar beide kanten. Wat zal de eerstvolgende regel aan de bovenkant zijn? En aan de onderkant?

b. Het principe kun je in één formule gieten:

$$\frac{d}{dx}\left(\ldots\right) = x^k$$

Wat moet er staan op de plaats van de stippen?

Deze formule geldt voor $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ en voor $k = -2, -3, \ldots$
Echter niet voor $k = -1$.
Het is verbazend dat voor die ontbrekende schakel de *logaritmische functie* nodig is!
We hebben immers op de vorige bladzij ontdekt:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln x\right) = x^{-1}$$

Eén van de eerste wiskundigen die de differentiaalrekening doceerde, was de Zwitser Johann Bernoulli. Van de colleges die hij in 1691 en 1692 in Parijs gaf, zijn de aantekeningen bewaard gebleven en in 1922 boven water gekomen. Uit die notities blijkt dat Bernoulli toen nog niet goed raad wist met die ontbrekende schakel. Hij noemde ‘oneindig’ als oplossing. Misschien heb je wel een idee hoe hij op die gedachte kwam. Overigens duurde het daarna niet lang voordat hij wist dat de gezochte schakel de (natuurlijke) logaritme moest zijn.

12 Bereken:

a. $\dfrac{d}{dx}\,{}^{2}\log x$

b. $\dfrac{d}{dx}\ln 2x$

c. $\dfrac{d}{dx}\ln(2 + x)$

d. $\dfrac{d}{dt}(t + \ln t)$

e. $\dfrac{d}{dt}(t \quad \ln t)$

f. $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\ln t}{t}$

13 Laat c een positieve constante zijn.
Volgens de hoofdeigenschap geldt voor iedere positieve waarde van x dat

$$\ln cx = \ln c + \ln x.$$

Dus moeten ook de afgeleiden van linker- en rechterlid aan elkaar gelijk zijn.
Ga na of dit klopt.

14 a. Maak op de GR de grafiek van $y = x\ln x - x$.
b. Bereken de coördinaten van de top van die grafiek.

15 a. Maak op de GR de grafiek van $y = (\ln x)^2$.
b. Toon aan dat de grafiek aan de x-as raakt.
c. Bereken de coördinaten van het buigpunt van de grafiek.

16 a. Bewijs dat uit de hoofdeigenschap volgt:

$$\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$$

voor alle positieve waarden van a en b.
b. Differentieer de functie die voor $x > 1$is gegeven door:

$$y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

samenvatting

inverse functies

De functies $F_1(x) = {}^{a}\log x$ en $F_2(x) = a^x$, met $a > 0$ en $a \neq 1$, zijn elkaars inverse.

$$x \xrightarrow{F_1} {}^{a}\log x \xrightarrow{F_2} x$$

$$u \xrightarrow{F_2} a^u \xrightarrow{F_1} u$$

Ofwel:

$$a^{{}^{a}\log x} = x$$

$${}^{a}\log(a^u) = u$$

rekenregels

Voor logaritmen met grondtal a gelden de volgende rekenregels:

$${}^{a}\log x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$${}^{a}\log x + {}^{a}\log u = {}^{a}\log xu$$

$${}^{a}\log x^t = t\ {}^{a}\log x$$

afgeleide van ${}^{a}\log$

D11	$F(x) = {}^{a}\log x$	$\longrightarrow$	$F'(x) = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x}$

Als speciaal geval van **D11** geldt**:**

D11'	$F(x) = \ln x$	$\longrightarrow$	$F'(x) = \dfrac{1}{x}$

extra opgave

17 Beschouw de grafiek van $y = \ln x$.

a. Stel A is het punt $(1, 0)$ en A_* is het wandelpunt $(r, \ln r)$ met $r > 0$, $r \neq 1$.
Toon aan dat de richtingscoëfficiënt van de koorde AA_* gelijk is aan:

$$\frac{\ln r}{r-1}$$

b. Verklaar: $\lim\limits_{r \to 1} \dfrac{\ln r}{r-1} = 1$

c. Stel P en P_* zijn de punten respectievelijk met x-coördinaat p en pr op de grafiek. ($p > 0$, $r > 0$, $r \neq 1$). Toon aan: richtingscoëfficiënt van de koorde PP_* is gelijk aan:

$$\frac{\ln r}{r-1} \quad \frac{1}{p}$$

d. Wat is de limiet hiervan voor r nadert tot 1?

11 Lineaire benaderingen

1 **a.** Plot op de GR met venster [‑3 , 3] bij [‑1, 3] de grafiek van $y = e^x$.
b. Zoom in op het punt (0 , 1). Herhaal dit enige malen, totdat de grafiek zich als een rechte lijn vertoont. Ga na welk x-interval nu bij het venster past.
c. Laat de cursor over de grafiek lopen en ga na dat er tussen de y-coördinaat en de x-coördinaat bij benadering een *lineair* verband bestaat.

lineaire benadering

Wat je in opgave **1** hebt gezien, drukken we zó uit:

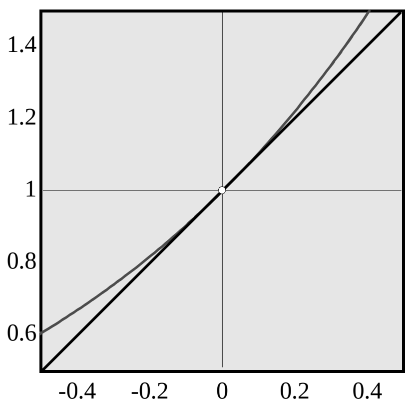
e^x wordt in de buurt van $x = 1$ lineair benaderd door $1 + x$

Dit betekent hetzelfde als: *de lijn met vergelijking* $y = 1 + x$ *is de raaklijn aan de grafiek van* $y = e^x$ *in het punt* (0 , 1).
In korte notatie:

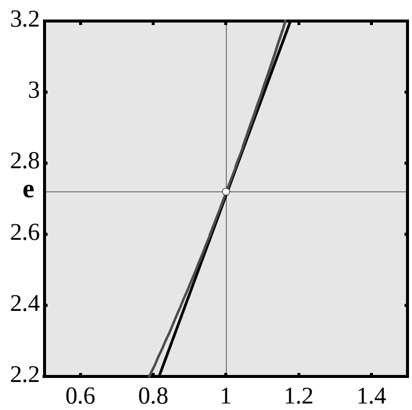
e^x » $1 + x$ voor **x » 0**

2 Vergelijk op de GR de tabellen van $y = e^x$ en $y = 1 + x$ voor x tussen 0 en 1 en met stapjes van 0.01. Tot welke x-waarde in de tabel is de lineaire benadering van e^x nauwkeurig tot op één honderdste?

Merk op dat de lineaire benadering van een functie (of grafiek) *locaal* bepaald is. Dat wil zeggen dat zij afhankelijk is van de plaats op de grafiek. Bijvoorbeeld:



e^x » $1 + x$ voor **x » 0**



e^x » ex voor **x » 1**

3 Controleer (via de afgeleide) de formule bij het rechter plaatje.

4 Geef een lineaire benadering in de buurt van $x = 0$ van:

a. e^{2x}

b. $(1 + x)^2$

c. $(1 + x)^3$

d. $\dfrac{2}{x + 1}$

5 **a.** Controleer dat voor x » 100 geldt:

$$\sqrt{x} » 10 + 0{,}05\,(x - 100)$$

b. Gebruik deze lineaire benadering om uit het hoofd $\sqrt{102}$ te schatten. Controleer met de GR dat deze schatting in twee decimalen nauwkeurig is.

c. Tot welk geheel getal boven de 100 kun je de wortel uit dit getal in twee decimalen nauwkeurig schatten met bovenstaande formule?

6 Als je in e^x » 1 + x rechts en links de natuurlijke logaritme neemt, komt er:

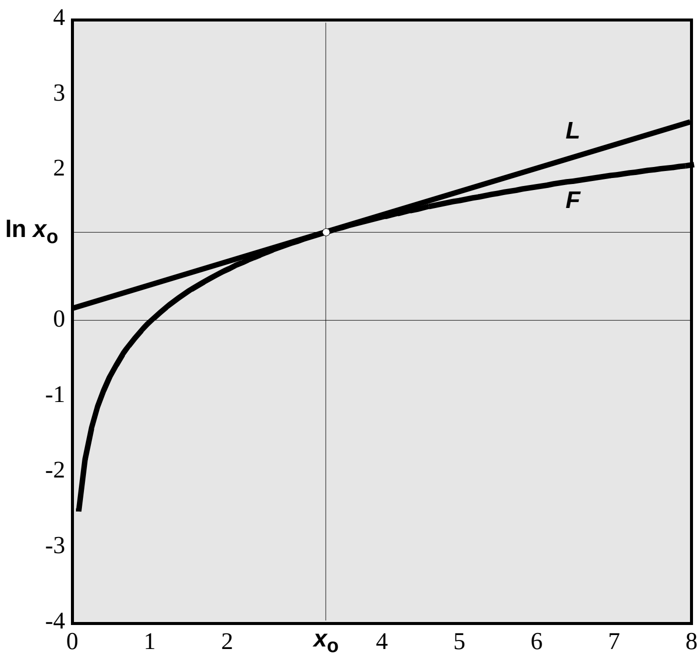
ln(1 + *x*) » *x* voor *x* » 0

Het lijkt er dus op dat x de lineaire benadering is van $\ln(1 + x)$ in de buurt van $x = 0$. Toon aan met behulp van de afgeleide van $y = \ln(1 + x)$ dat dit inderdaad zo is.

7 Geef de lineaire benadering van $\ln x$ in de buurt van $x = 1$.

8 Toon aan dat de lineaire benadering van $F(x) = \ln x$ in de buurt van x_o gelijk is aan:

$$L(x) = \ln x_o + \frac{1}{x_o}(x - x_o)$$



lineair benaderbaar

In plaats van ‘de grafiek van de functie F is glad in het punt met x-coördinaat x_o’, zeggen we ook: ‘F is *lineair benaderbaar* in x_o’.
Geven we de lineaire benadering in x_o aan met $L(x)$, dan:

$$\boldsymbol{L(x) = F(x_o) + F'(x_o)\,(x - x_o)}$$

We merken op dat geldt:
– F en L zijn gelijk voor $x = x_o$, kortweg: $F(x_o) = L(x_o)$
– $F(x) - L(x)$ is voor x in de buurt van x_o *zeer klein in vergelijking met* $x - x_o$!

Dat wil zeggen dat het quotiënt $\dfrac{F(x) - L(x)}{x - x_o}$ tot 0 nadert voor x nadert tot x_o.

9 Controleer deze laatste bewering voor de lineaire benadering in **8**.

Een aardige toepassing van een lineaire benadering is het schatten van de verdubbelingstijd bij exponentiële groei of de halveringstijd bij exponentiële afname. Daarover gaan de volgende opgaven.

verdubbelingstijd

10 Veronderstel dat de bevolking van een zeker land groeit met 2% per jaar.

a. Uitgaande van N_0 inwoners op zeker moment, dat we $t = 0$ noemen, wordt het aantal inwoners na t jaar gegeven door de formule:

$$N(t) = N_0 \quad 1{,}02^t$$

Verklaar deze formule.

b. Deze formule is zonder bijbehorende grafiek of tabel niet zo veelzeggend. Om een goed inzicht te krijgen in de snelheid van het groeiproces stellen we ons de vraag:

Hoe lang duurt het voor de bevolking is verdubbeld?

Voor de beantwoording van die vraag kun je de vergelijking: $1{,}02^t = 2$ oplossen. Ga dit na en los die vergelijking op door links en rechts de natuurlijke logaritme te nemen.

11 Je zet een zeker bedrag K_0 op de spaarbank en dat levert je 5% rente per jaar op. Die rente laat je staan, zodat het jaar daarop over een groter kapitaal rente wordt bijgeschreven.

a. Na hoeveel jaar is je kapitaal verdubbeld?

b. Als je de verdubbelingstijd weet, kun je snel schatten wanneer je kapitaal bijvoorbeeld verachtvoudigd is. Na hoeveel jaar is dat?

12 Er bestaat een handige vuistregel voor het berekenen van de verdubbelingstijd bij vaste procentuele groei per tijdseenheid. Als p het groeipercentage per tijdseenheid is en d de verdubbelingstijd (gemeten in die tijdseenheid), geldt:

$$d \cdot p = 70$$

a. Controleer of die vuistregel klopt met je resultaten van de opgaven **10** en **11.**

b. Is die regel ook erg nauwkeurig voor het geval er sprake is van groei met 25% per jaar?

13 Om te achterhalen waar die vuistregel vandaan komt, bekijken we de formule voor exponentiële groei met p% per tijdseenheid. De formule bij die groei is:

$$N(t) = N_0 \quad \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

a. Verklaar die formule.

b. Toon aan dat voor de verdubbelingstijd d geldt:

$$d = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

c. Verklaar nu de vuistregel met behulp van de lineaire schatting van opgave **6.**

d. Je begrijpt nu ook waarom die regel alleen redelijk klopt als het percentage p niet al te groot is. Vertel het maar.

14 In een laboratorium wordt een bacterie gekweekt. De omstandigheden zijn zodanig, dat er onbelemmerde groei is met een percentage van 2.5% per dag.

a. Na hoeveel weken heeft de bacteriekolonie zich verdubbeld?

b. Je weet wellicht dat $2^{10} = 1024$. Laat nu zien (zonder rekenmachine te gebruiken) dat de kolonie na een jaar ruim 8000 keer zo groot is.

halveringstijd

15 In 1986 vond er een explosie plaats in de kerncentrale van Tsjernobyl (in de toenmalige Sovjetunie). Daarbij kwam een aantal radioactieve stoffen vrij. Omdat radioactieve elementen instabiel zijn, neemt de intensiteit van de radioactieve straling af in de loop van de tijd. Dit proces, vaak 'radioactief verval' genoemd, verloopt bij benadering exponentieel. Om inzicht te krijgen in de snelheid van verval, gebruikt men het begrip *halveringstijd* (men spreekt ook wel van *halfwaardetijd*). Dit is de tijd waarin de straling tot de helft is gereduceerd. Hieronder staat een overzicht van de stoffen die bij de ramp van Tsjernobyl vrijkwamen.

Tabel 1 Inhoud van de kern van Tsjernobyl en fractie van geloosde radionucliden

element	halveringstijd	kerninhoud*	geloosde fractie
	(d)	(Bq)	(%)
KR-85	3930	$3{,}3 \times 10^{16}$	100
Xe-133	5,27	$1{,}7 \times 10^{18}$	100
I-131	8,05	$1{,}3 \times 10^{18}$	20
TE-132	3,25	$3{,}2 \times 10^{17}$	15
Cs-134	750	$1{,}9 \times 10^{17}$	10
Cs-137	$1{,}1 \times 10^{4}$	$2{,}9 \times 10^{17}$	13
Mo-99	2,8	$4{,}8 \times 10^{18}$	2,3
Zr-95	65,5	$4{,}4 \times 10^{18}$	3,2
Ru-103	39,5	$4{,}1 \times 10^{18}$	2,9
Ru-106	368	$2{,}0 \times 10^{18}$	2,9
Ba-140	12,8	$2{,}9 \times 10^{18}$	5,6
Ce-141	32,5	$4{,}4 \times 10^{18}$	2,3
Ce-144	284	$3{,}2 \times 10^{18}$	2,8
Sr-89	53	$2{,}0 \times 10^{18}$	4,0
Sr-90	$1{,}02 \times 10^{4}$	$2{,}0 \times 10^{17}$	4,0
Np-239	2,35	$1{,}4 \times 10^{17}$	3
Pu-238	$3{,}15 \times 10^{4}$	$1{,}0 \times 10^{15}$	3
Pu-239	$8{,}9 \times 10^{6}$	$8{,}5 \times 10^{14}$	3
Pu-240	$2{,}4 \times 10^{6}$	$1{,}2 \times 10^{15}$	3
Pu-241	4800	$1{,}7 \times 10^{17}$	3
Cm-242	164	$2{,}6 \times 10^{16}$	3

* Verval gecorrigeerd voor 1986-05-06 en berekend op de door de Sovjet-russische experts voorgeschreven wijze.

a. Je ziet een enorme spreiding in halveringstijd. Het element uit de tabel met de kortste halveringstijd is Np-239 (Neptunium) met een halveringstijd van 2.35 dagen. Ga na dat het verval per dag ongeveer 25% bedraagt.

b. Van welke stof is het verval ongeveer 50% per jaar?

c. Voor kleine vervalpercentages (en dus lange halveringstijden), geldt weer een vuistregel:

$$h \cdot p = 70$$

Hierin is h de halveringstijd in dagen (of langere tijdseenheden) en p het reductiepercentage per tijdseenheid. Verklaar deze regel.

d. Welk element uit de tabel heeft de langste halveringstijd. Hoeveel eeuwen bedraagt die ongeveer? Hoe groot is het vervalpercentage per eeuw?

e. Welk element uit de tabel heeft een vervalpercentage van 6.5% per jaar? Hoeveel jaar na 1986 is er van deze bij de ramp vrijgekomen stof nog 1 promille over?

samenvatting

lineair benaderbaar

Een functie F is *lineair benaderbaar* in het punt $(x_0, F(x_0))$ als de grafiek bij herhaald inzoomen benaderd wordt door één rechte lijn.
Als we de lineaire functie die bij die lijn hoort aanduiden met L, dan geldt:

$$L(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

Je kunt dan schrijven:

$$F(x) \approx L(x)$$

Dat betekent:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - L(x)}{x - x_0} = 0$$

verdubbelingstijd

Een vuistregel voor het schatten van de verdubbelingstijd bij een exponentieel groeiproces berust op het principe van lineair benaderen.
Als de groeifactor gelijk is aan $1 + \frac{p}{100}$ met $0 < p < 10$, dan geldt bij benadering voor de verdubbelingstijd d de vuistregel:

$$d \cdot p = 70$$

Als $p < 0$, is er sprake van exponentieel verval en dan is het begrip halveringstijd (h) van belang. De vuistregel is dezelfde (met vervanging van d door h), onder voorwaarde dat $p/100$ betrekkelijk dicht bij 0 zit, zeg $p > -10$.

extra opgave

16 In **4** zag je dat $L(x) = 3x + 1$ de lineaire benadering is van $F(x) = (1 + x)^3$ in de buurt van $x = 0$.
Hoe kun je dit verklaren zonder gebruik te maken van de formule voor de afgeleide functie F'? (Denk aan de eis die je moet stellen aan het verschil $F(x) - L(x)$ in de buurt van $x = 0$).

12 Kettingregel

In het voorgaande heb je regels geleerd om *som*, *verschil*, *product* en *quotiënt* van twee 'vertrouwde' functies te differentiëren. Er is nog een andere manier om een functie samen te stellen uit twee (of meer) vertrouwde functies. Daarover en over hoe zo'n functie te differentiëren, gaat dit hoofdstuk.

1 Kies het venster [−10 , 10] bij [−10, 10] op de GR en voer in:

$$y_1 = 1 + 3x \text{ en } y_2 = 5 + 2y_1.$$

Bekijk de twee grafieken. Die van y_1 is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt 3, allicht. Verklaar waarom de grafiek van y_2 als functie van x ook een rechte lijn moet zijn. Wat is de richtingscoëfficiënt van die lijn?

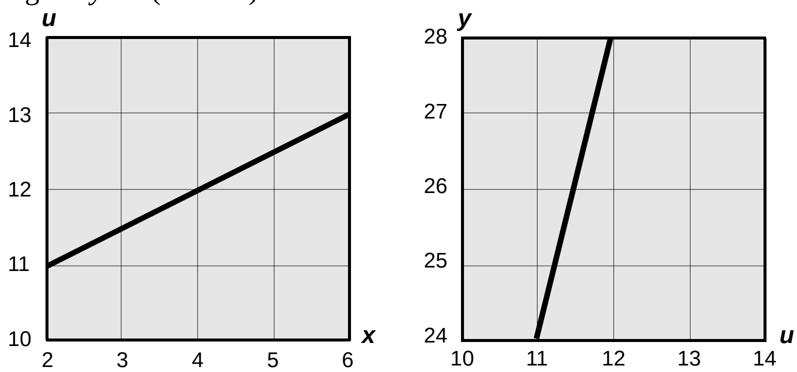
ketting van functies

In opgave **1** is y_2 een functie van y_1 die op zijn beurt een functie van x is; y_2 is een soort tweetraps-functie van x.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & y_1 \arrow[r] & y_2 \end{tikzcd}$$

We spreken in zo'n geval van een *kettingfunctie*.

2 Het linker venster toont een grafiek van u als (lineaire) functie van x en het rechter venster geeft y als (lineaire) functie van u.

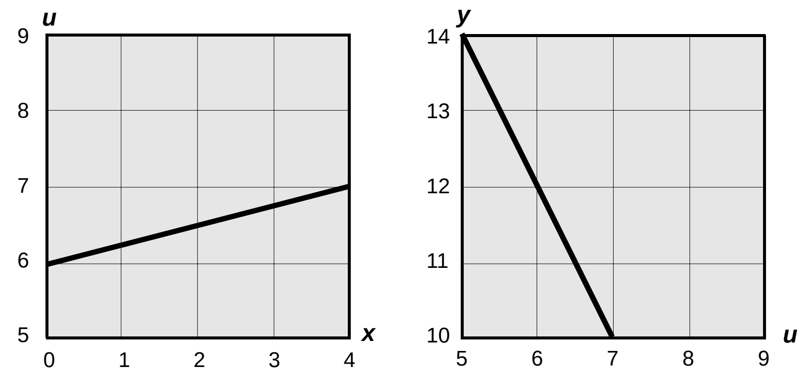


Omdat u een functie is van x en y een functie van u, is y ook een functie van x.

a. Teken op een vierkant venster van [2 , 6] bij [24 , 28] de grafiek van y als functie van x. Ga na dat die functie ook lineair moet zijn.

b. Welke richtingscoëfficiënt heeft de grafiek?

3 Dezelfde opdracht als **2** maar nu bij deze plaatjes:



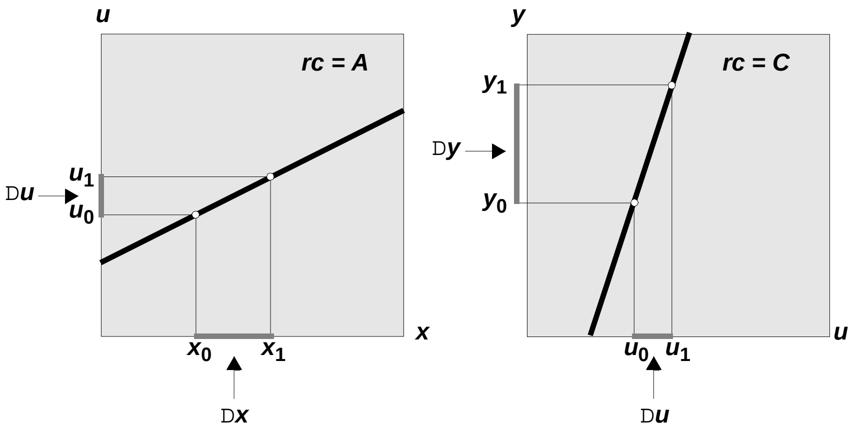
4 In de voorgaande drie opgaven heb je ontdekt dat je bij het maken van een ketting van twee *lineaire* functies als resultaat weer een *lineaire* functie krijgt. Bovendien blijkt: de *richtingscoëfficiënt* van de kettingfunctie is gelijk aan het *product* van de *richtingscoëfficiënten* van de twee component-functies.
Deze ontdekkingen kan in zijn algemeenheid worden bewezen door uit te gaan van:

$$u = Ax + B \text{ en } y = Cu + D.$$

Geef dat bewijs.

product van hellings-getallen

Het bewijs van opgave **4** is typisch een algebraïsch bewijs. Voor het belangrijke feit dat de richtingscoëfficiënt van de kettingfunctie gelijk is aan het *product* van de *richtings-coëfficiënten* van de twee component-functies, is er ook een bewijs dat reken- en teken-werk combineert.



$$\boxed{u_1 - u_0 = A \cdot (x_1 - x_0)} \qquad \boxed{y_1 - y_0 = C \cdot (u_1 - u_0)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{y_1 - y_0 = CA \cdot (x_1 - x_0)}$$

In de linker figuur zie je hoe bij het interval $[x_0, x_1]$ het interval $[u_0, u_1]$ hoort.
Omdat de richtingscoëfficiënt van de grafiek gelijk is aan A, is het u-interval A keer zo lang als het bijbehorende x-interval.
In de rechter figuur geldt: het y-interval is C keer zo lang als het bijbehorende u-interval.
Dit gecombineerd geeft: het y-interval is CA keer zo lang als het bijbehorende x-interval.
Met de delta-notatie wordt het nog iets korter:

$$\boxed{\Delta u = A \cdot \Delta x} \qquad \boxed{\Delta y = C \cdot \Delta u}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Delta y = CA \cdot \Delta x}$$

5 Verandert er iets aan het bewijs als A of C (of beide) negatief zijn? Maak zelf een plaatje voor het geval $A < 0$ en $C < 0$.

6 Voer in op de GR met venster [-6 , 6] bij [2 , 6] de formules:

$$y_1 = x^2 \text{ en } y_2 = \ln(1 + y_1).$$

a. Bekijk alleen de grafiek van y_2 als functie van x. Die grafiek is symmetrisch ten opzichte van de y-as. Hoe kun je dit uit de gegeven formules verklaren?

b. Op grond van de symmetrie kun je verwachten dat de raaklijn aan die grafiek in het punt (0,0) horizontaal is. Controleer dit door inzoomen.

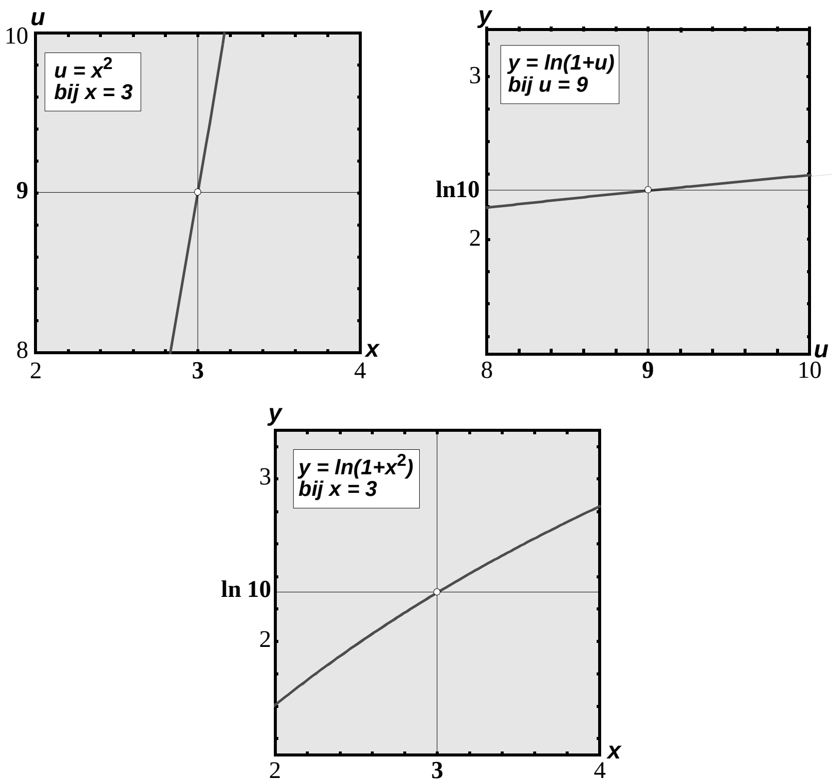
7 Het sterke vermoeden is nu dat de afgeleide van y_2 naar x in $x = 0$ de waarde 0 heeft. De vraag is natuurlijk wat de waarde van de afgeleide in andere punten is.
Voordat we die vraag gaan beantwoorden, luisteren we even mee met dit tweegesprekje.

> *Bob*: “Hoe moet je $y(x) = \ln(1 + x^2)$ differentiëren?”
> *Rob*: “.... het is ln, dus ik denk: 1 gedeeld door $1 + x^2$...”
> *Bob*: “Ja, dacht ik ook, maar dat klopt niet bij $x = 0$. “
> *Rob*: “Tja ...??? ”
> *Bob*: “Wacht even, je moet natuurlijk x^2 differentiëren, ... , ik denk de ln van $2x$.”
> *Rob*: “Klopt dat wél voor $x = 0$!? “

a. Nog een gokje: de afgeleide is 1 gedeeld door $2x$. Welke gedachtengang zit hierachter en waarom kan dit niet kloppen?

b. Geef met de GR een schatting voor de waarde van de afgeleide in $x = 3$.

Om de exacte waarde van bijvoorbeeld $y'(3)$ te vinden, bekijken we de grafieken van de functies $u(x) = x^2$, $y(u) = \ln(1 + u)$ en $y(x) = \ln(1 + x^2)$, respectievelijk in de buurt van x =3, u = 9 en x =3.



Met behulp van de afgeleiden van *u* als functie van *x* en van *y* als functie van *u*, kan men lineaire schattingen opschrijven van Δu (= u – 9) in de buurt van $x = 3$ en ook van Δy (= y – ln10) in de buurt van $u = 9$. Hieruit kan dan, met het principe dat je op bladzij 54 hebt gezien, een lineaire schatting van Δy in de buurt van $x = 3$ worden afgeleid. Aldus:

$$\Delta u \approx 6 \cdot \Delta x \qquad\qquad \Delta y \approx 0.1 \cdot \Delta u$$

$$\downarrow$$

$$\Delta y \approx 0.6 \cdot \Delta x$$

8 **a.** Controleer de twee lineaire benaderingen en de conclusie.

b. Leg uit dat hieruit volgt:

afgeleide van *y* naar *u* in *u* = 9	·	**afgeleide van *u* naar *x* in *x* = 3**	=	**afgeleide van *y* naar *x* in *x* = 9**

of in de notatie van Leibniz:

$$\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right]_{u=9} \cdot \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]_{x=3} = \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=3}$$

c. Ga na of het antwoord bij opgave **7b** in overeenstemming is met deze formule.

Nu algemeen. We letten op het gedrag van *u* (als functie van *x*) in de buurt van $x = x_0$, en van *y* (als functie van *u*) in de buurt van $u = u_0$.Daaruit kan een conclusie worden gemaakt voor het gedrag van *y* (als functie van *x*) in de buurt van $x = x_0$.

$$\Delta u \approx u'(x_0) \cdot \Delta x \qquad\qquad \Delta y \approx y'(u_0) \cdot \Delta u$$

$$\downarrow$$

$$\Delta y \approx y'(u_0)\, u'(x_0) \cdot \Delta x$$

9 **a.** Controleer deze formules.

b. Je kunt nu snappen dat voor de afgeleide van $y(x) = \ln(1 + x^2)$ geldt:

$$y'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Leg dit uit.

kettingregel Het principe om een kettingfunctie

$$x \longrightarrow u \longrightarrow y$$

te differentiëren is blijkbaar:

- **differentieer *y* naar *u* en differentieer *u* naar *x*;**
- **vermenigvuldig de zo gevonden afgeleiden;**
- **druk het product uit in *x* en je hebt de afgeleide van *y* naar *x*.**

Dit principe staat bekend onder de naam *kettingregel*.

Voorbeeld.

Te differentiëren: $y = \sqrt{x^3 + x}$ ofwel $y = (x^3 + x)^{\frac{1}{2}}$
Als ketting genoteerd:

$$x \longrightarrow x^3 + x \longrightarrow (x^3 + x)^{\frac{1}{2}}$$

Stel $x^3 + x = u$; dan $y = u^{\frac{1}{2}}$.

* Differentieer y naar u, dat geeft: $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

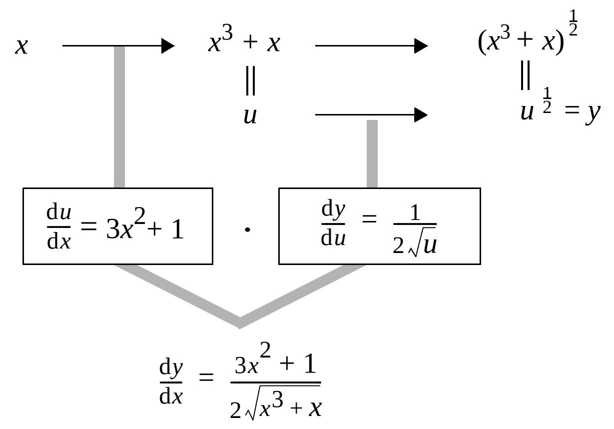
* Differentieer u naar x, dat geeft: $\frac{du}{dx} = 3x^2 + 1$

* Die twee vermenigvuldigd levert op: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (3x^2+1) = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{u}}$

* Om $\frac{dy}{dx}$ uit te drukken in x, vervangen we u door $x^3 + x$.

Er komt dan: $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}$.

Schematisch:



10 Gegeven is de functie:

$$y(x) = \sqrt[3]{e^x - 10}$$

a. Schrijf die functie als ketting van twee (meer eenvoudige) functies.
b. Bereken $y'(x)$ met behulp van de kettingregel.

11 Gegeven is de functie:

$$y(x) = e^{\sqrt{x}}$$

Drie leerlingen vonden drie verschillende antwoorden voor $y'(x)$.
Dit zijn de drie antwoorden.

(1) $y'(x) = e^{\sqrt{x}}$ (2) $y'(x) = e^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ (3) $y'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

Als je die antwoorden bestudeert, kun je misschien achterhalen hoe elk van die leerlingen heeft gedacht.

a. Schrijf bij elk van de drie antwoorden op, hoe de gedachtengang (vermoedelijk) is geweest.

b. Welke van de drie antwoorden is correct?

12 Bereken:

a. $\dfrac{d}{dx}e^{x^2+1}$

b. $\dfrac{d}{dx}\ln(\sqrt{x}+1)$

c. $\dfrac{d}{dx}\ln(e^x+1)$

d. $\dfrac{d}{dt}\sqrt{1+t+t^2}$

e. $\dfrac{d}{dt}\sqrt{t+\ln t}$

f. $\dfrac{d}{dt}(t+\sqrt{\ln t})$

13 Voor $-1 < x < 1$ is gegeven $y(x) = \ln(x^2 - 1)$

a. Differentieer deze functie met behulp van de kettingregel.

b. Ga na dat geldt: $y(x) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$ en gebruik deze formule om y op een andere manier te differentiëren.

c. Controleer of de resultaten van **a** en **b** gelijk zijn.

14 a. Plot op de GR de grafiek van $y = \ln(\ln(x))$. In welk punt snijdt de grafiek de x-as?

b. Bereken $y'(x)$. Voor welke waarden van x geldt de gevonden formule?

c. Bereken ook $y''(x)$.

15 Gegeven $y(x) = \ln(e^x + e^{-x})$
Bereken $y'(x)$ en $y''(x)$.

16 Laat F een of andere positieve functie van x zijn, die een afgeleide F' heeft.
Stel $G(x) = 1/F(x)$. Men noemt G wel de ‘reciproke functie’ van F.

a. Toon met behulp van de quotiëntregel aan dat geldt:

$$G'(x) = \frac{-F'(x)}{(F(x))^2}$$

b. Toon deze regel ook aan met behulp van de kettingregel.

17 Differentieer achtereenvolgens:

$$y = \frac{1}{1+x},\ y = \frac{1}{1+2^x},\ y = \frac{1}{1+{}^2\log x},\ y = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$$

18 Differentieer de volgende vormen naar x :

a. $5x + \sqrt{x^2 - 4x}$

b. $5x - \sqrt{x^2 - 4x}$

c. $5x \sqrt{x^2 - 4x}$

d. $\dfrac{5x}{\sqrt{x^2 - 4x}}$

19 a. In hoofdstuk 4 (‘De invloed van een constante’) heb je de regels **D3** en **D5** geleerd. Zoek deze regels nog eens op en ga na dat ze bijzondere gevallen van de kettingregel zijn.

b. Doe hetzelfde met de regels voor het differentiëren van een natuurlijke macht van een functie (zie samenvatting bij hoofdstuk 8).

20 Tenslotte een tamelijk ingewikkelde functie:

$$y(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

a. Laat zien dat geldt:

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

b. Maak de grafiek op de GR. Het lijkt erop of de oorsprong een buigpunt is van de grafiek. Onderzoek of dit inderdaad het geval is.

samenvatting

kettingregel

Op bladzij 75 staat beschreven hoe het principe van de kettingregel werkt.
De regel kan als volgt in formulegedaante worden beschreven:

D12 $\quad F(x) = A(B(x)) \longrightarrow F'(x) = A'(B(x)) \cdot B'(x)$

Ofwel:

D12 $\quad \frac{d}{dx}A(B(x)) = A'(B(x)) \cdot B'(x)$

De kettingregel kan uitgebreid worden voor kettingen van drie, vier, ... functies,
Zo geldt bijvoorbeeld:

D12' $\quad \frac{d}{dx}A(B(C(x))) = A'(B(C(x))) \cdot B'(C(x)) \cdot C'(x)$

extra opgave

21 Terug naar regel **D1**: **als** $y = x^a$ **, dan** $y' = ax^{a-1}$
We hebben laten zien (en dat viel niet mee!) dat deze regel geldt voor alle gehele of gebroken, positieve of negatieve waarden van a.
Je kunt de regel nu opnieuw bewijzen met behulp van de kettingregel en de afgeleide van de e-macht
a. Verklaar eerst: $x^a = e^{a \ln x}$.
b. Differentieer de tweede vorm en toon aan dat het resultaat gelijk is aan ax^{a-1}

> Opmerking:
> In dit nieuwe bewijs van de regel voor het differentiëren van machtsfuncties wordt geen onderscheid gemaakt tussen gehele of gebroken exponenten. Ook het positief of negatief zijn van de exponent speelt geen rol. Sterker nog; er hoeft geen enkele beperking aan de exponent a te worden opgelegd. Die exponent kan bijvoorbeeld ook een getal zijn met een oneindige niet-repeterende decimale ontwikkeling, zoals $\sqrt{2}$ of π of e. Er geldt dus bijvoorbeeld:
>
> $$\frac{d}{dx}x^e = e\ x^{e-1}$$

13 Practicum ‘herhaald differentiëren met DERIVE’

In dit boek heb je geleerd hoe je allerlei functies kunt differentiëren. De afgeleide van een functie komt ondermeer van pas bij het vinden van de toppen van een grafiek.
De afgeleide van de afgeleide, de tweede afgeleide dus, speelt een rol bij het vinden van buigpunten.

hogere afgeleiden

In dit practicum ga je functies herhaald differentiëren. Na de tweede afgeleide komt de derde afgeleide (= afgeleide van de tweede afgeleide), de vierde afgeleide, enzovoorts. Dit worden de *hogere afgeleiden* (of *afgeleiden van hogere orde*) genoemd.

computer-algebra

Omdat het rekenwerk bij het bepalen van hogere afgeleiden uit de hand dreigt te lopen, kun je hierbij een computerprogramma gebruiken om het differentiëren uit te voeren. Een dergelijk programma is onderdeel van een *computeralgebra pakket*. Bekende voorbeelden hiervan zijn MAPLE, MATHEMATICA en DERIVE. Dit laatste pakket ga je nu gebruiken.

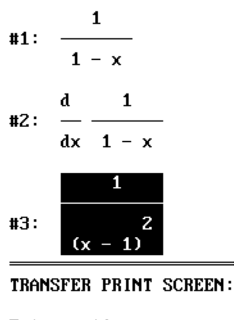
1 Start het programma door DERIVE in te typen.

Het openingsscherm verschijnt. Het bovenste deel hiervan is het uitvoervenster. Daarin komen straks de resultaten van de berekeningen te staan.
De twee regels onder de streep vormen het menu:

```
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer Unremove moVe Window approX
Enter option                                                         Derive XM
Simp(#2)                                   Free:100% Ins               Algebra
```

Author **B**uild ... **W**indow appro**X** zijn op dit moment de beschikbare opties. Je maakt hieruit een keuze door de hoofdletter in het gewenste commando in te typen. Deze kun je ook als kleine letter invoeren. Als je bijvoorbeeld een **a** tikt, geef je het commando **A**uthor. Met de Esc-toets kan de keuze ongedaan gemaakt worden.
Onder het menu bevindt zich de boodschappenregel, waarop staat wat DERIVE aan het doen is of welke actie het van de gebruiker verwacht.
Helemaal onderaan staat de statusregel, die informatie geeft over de toestand van het systeem.

2 Gegeven is nu de functie F met $F(x) = \dfrac{1}{1-x}$.



a. Kies **A**uthor. Dat betekent dat je ‘de auteur’ wordt van een wiskundige uitdrukking. Voer in: 1/(1-*x*). Sluit af met ENTER.

b. Kies nu **C**alculus, en uit het vervolgmenu de optie **D**ifferentiate. Dat betekent natuurlijk dat je een uitdrukking wilt laten differentiëren. DERIVE stelt voor om de uitdrukking in regel #1 te nemen. Dat bevestig je met ENTER. Ook het voorstel om *x* als variabele te nemen accepteer je met ENTER, net als de orde 1.

c. In het uitvoervenster is nu ‘d/dx’ voor de uitdrukking gezet.
Dat valt even tegen. Kies **S**implify om daadwerkelijk de afgeleide te laten berekenen. Als alles goed gegaan is, zien de regels #1, #2 en #3 er nu uit zoals in de afbeelding rechtsboven.

3 **a.** Herhaal de procedure van opgave **2** om de uitdrukking in regel #3 opnieuw te differentiëren.
b. Bepaal op dezelfde manier ook de derde afgeleide van *F*.
Bekijk teller en noemer van de derde afgeleide. Hoe kun je die verklaren?
c. Controleer de vierde afgeleide.
d. Bepaal nog hogere afgeleiden van $F(x) = 1/(1-x)$.
Hoe ziet de noemer van de n^{de} afgeleide eruit?
En welk getal staat in de teller van de n^{de} afgeleide?

4 Gegeven is de functie *F* met $F(x) = x \quad e^x$. Ook bij deze functie is de vraag, hoe de hogere afgeleiden van *F* eruit zien.
a. Maak het scherm schoon met **T**ransfer **C**lear Yes.
b. Voer in: *x**e^*x*. Let op: het getal e krijg je door de Alt-toets ingedrukt te houden en dan op de e te drukken. Op het scherm verschijnt dan een ê.
Bepaal de eerste, tweede, derde, ... afgeleide.
c. Hoe ziet de formule voor de n^{de} afgeleide van *F* er vermoedelijk uit?
d. Stel dat je vermoeden waar is voor $n = 100$. Onderzoek of hieruit volgt dat het dan ook klopt voor $n = 101$.

5 Nu iets ingewikkelder: $F(x) = x^2 \quad e^x$.
a. Maak het scherm schoon en differentieer $F(x)$ een aantal keren naar *x*.
De afgeleiden hebben allemaal de vorm $e^x \quad (x^2 + ax + b)$.
De term x^2 tussen de haakjes komt steeds onveranderd terug.
Hoe kun je dat te verklaren?
b. Welke regelmaat zie je in de waarden van *a*, als je herhaald differentieert?
Verklaar dit patroon.
c. De n^{de} afgeleide van *F* zal de vorm $e^x \quad (x^2 + 2nx + b)$ hebben.
Nu nog een uitdrukking voor *b* vinden!
Welke regelmaat zie je in de toenamen van *b*?
d. Probeer *b* uit te drukken in *n*.

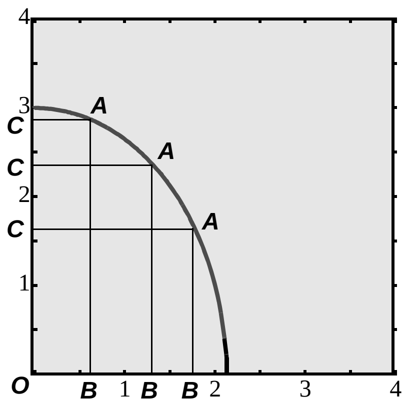
6 Voor de volhouders: $F(x) = x^3 \quad e^x$.
Bepaal een formule voor de n^{de} afgeleide van *F*.

Zelftoets

1 Van een functie F is gegeven: $F''(x) = 6e^{3x}$, $F'(0) = 7$ en $F(0) = 6$.
Geef eerst een formule voor F' en vervolgens een formule voor F.

2 Van alle raaklijnen aan de grafiek van $y = \ln x$ is er één die door de oorsprong gaat.
Geef een vergelijking van die raaklijn.

3 Gegeven is de functie $y(x) = \sqrt{9 - 2x^2}$
Hieronder zie je de grafiek getekend op het venster [0 , 4] bij [0 , 4]



Het punt A doorloopt de grafiek op het venster; de punten B en C zijn steeds de voetpunten van de loodlijnen uit A op de x-as en de y-as.
Als A niet op een van de assen ligt, is $OBAC$ een rechthoek. Die rechthoek verandert voortdurend van vorm.

a. Er is één plaats voor A waarbij $OBAC$ een vierkant is. Bereken de coördinaten van die plaats.

b. Als A over de grafiek beweegt van de x-as naar de y-as, neemt de oppervlakte van $OBAC$ eerst toe en later weer af. Iemand heeft het vermoeden dat de oppervlakte maximaal is in het geval $OBAC$ een vierkant is.
Onderzoek of dit vermoeden juist is.

4 **a.** Geef de lineaire benadering van $(\ln x)^3$ in de buurt van $x = e$.

b. Hoe verandert de lineaire benadering als de exponent 3 vervangen wordt door een ander natuurlijk getal?

5 **a.** Verklaar: $x^x = e^{x \ln x}$ voor iedere positieve waarde van x.

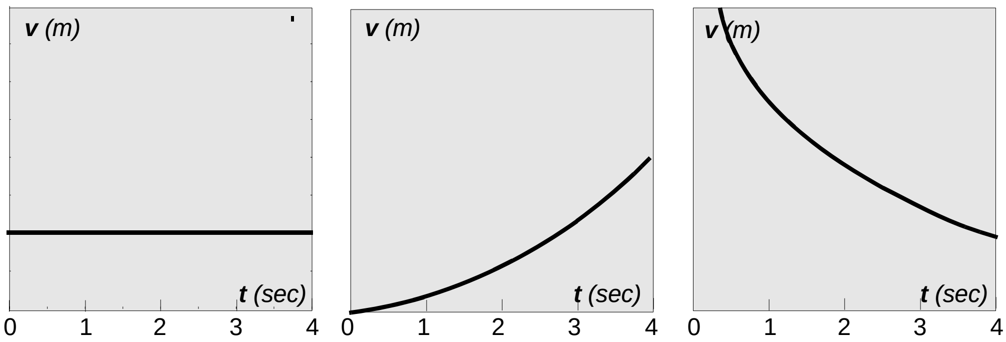
b. Toon aan: $\frac{d}{dx}x^x = x^x (1 + \ln x)$

c. Bereken de minimale waarde die x^x kan aannemen.

Antwoorden

1 Snelheid, helling en afgeleide.

1 **a.** De tweede grafiek.
b.

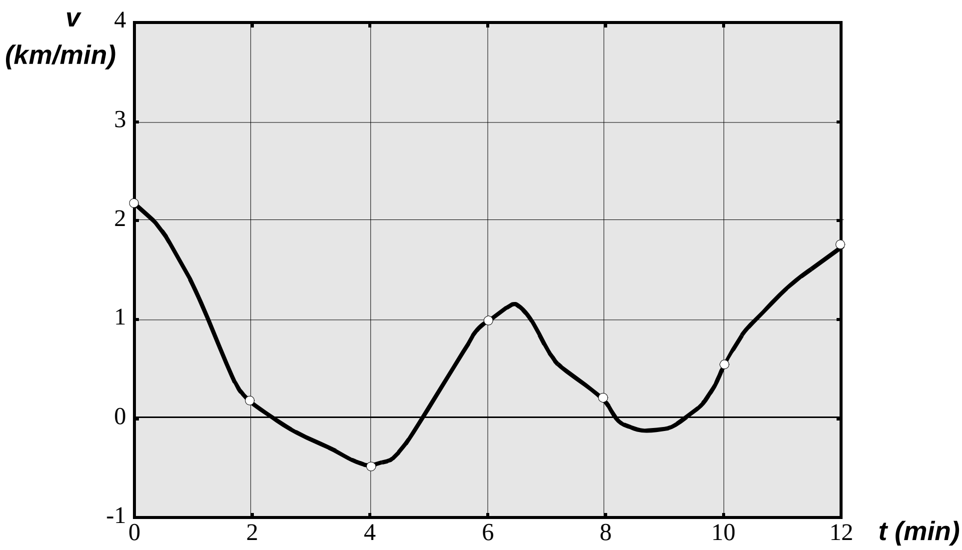


2 **a.** 2.2 km/min
b. t = 3, t = 4, t = 9.
c. Hellingsgetal = momentane snelheid in km/min op het moment t = 2.

3 Nee. De grafiek bestaat uit twee (halve) rechte lijnen die in (0 , 0) een stompe hoek maken en dat blijft zo bij uitvergroten.

4 Na herhaald inzoomen krijg je twee rechte lijnen te zien die een stompe hoek maken.

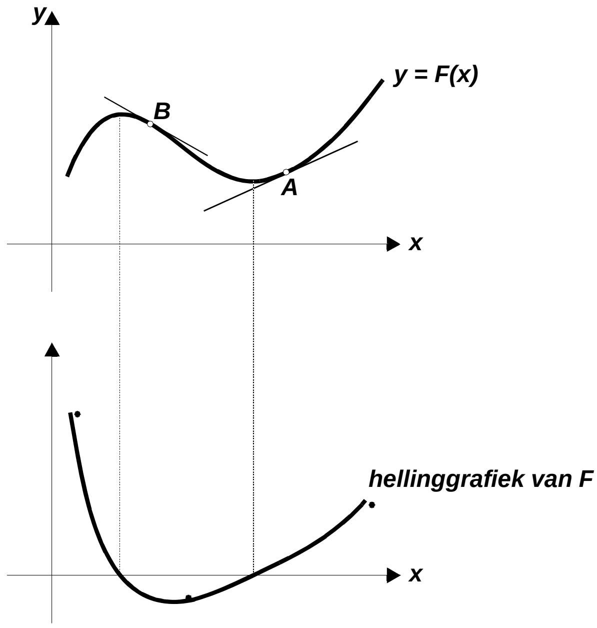
5 **b.** Snelheid-tijd grafiek:



c. Vier keer.
d. Er zijn vier punten waarin de helling nul is (raaklijn horizontaal).

6 I – 3 , II – 5 , III – 1 , IV – 4 , V – 6 en VI – 2.

7



3 De afgeleide van een machtsfunctie

1 Als $s(t) = t^{n,}$ dan $s'(t) = n\,t^{n-1}$
$n \cdot 0^{n-1} = 0$ en $n \cdot 1^{n-1} = n$ voor $n = 2, 3, 4, 5, ...$

2 **a.** Er geldt: richtingscoëfficiënt koorde $PP_* = \dfrac{r^5 - 1}{r - 1} = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4$

b. Als $r > 1$, dan zijn ook r^2, r^3 en r^4 groter dan 1, en dus: $1 + r + r^2 + r^3 + r^4 > 5$
Als $0 < r < 1$, dan zijn ook r^2, r^3 en r^4 tussen 0 en 1, en dus: $1 + r + r^2 + r^3 + r^4 < 5$

3

r	r^3
1.01	1.030301
1.001	1.003003001
1.0001	1.000300030001
enz.	enz.

r	r^3
0.99	0.970299
0.999	0.997002999
0.9999	0.999700029999
enz.	enz.

r	r^4
1.01	1.04060401
1.001	1.004006004...
1.0001	1.000400060004...
enz.	enz.

r	r^4
0.99	0.96059601.
0.999	0.996005996...
0.9999	0.999600059996...
enz.	enz.

4 5.00001... en 4.99999...

5 Neem een punt O_* dicht bij de oorsprong en op de grafiek. Stel de coördinaten hiervan zijn gelijk aan $(r\ ,\ r^5)$. De richtingscoëfficiënt van OO_* is gelijk aan $r^5 / r = r^4$.
Als r nadert tot 0, dan nadert r^4 ook tot 0.
Dat betekent dat de locale helling in de oorsprong gelijk is aan 0.

6 $F'(1) = 23$, want:

$$\frac{r^{23}-1}{r-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{22} \text{ , dus } \lim_{r \to 1} \frac{r^{23}-1}{r-1} = 23$$

$F'(0) = 0$, want:

$$\frac{r^{23}-0}{r-0} = r^{22} \text{ , dus } \lim_{r \to 0} \frac{r^{23}-0}{r-0} = 0$$

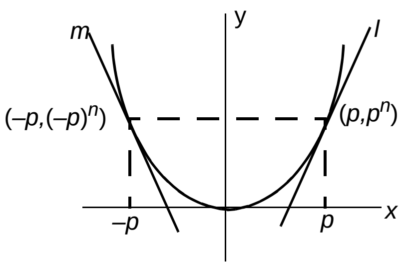
7 Als x dicht bij 0 zit, dan is x^n kleiner, naarmate de exponent n groter is . Dat betekent dat de grafiek langzamer loskomt van de x-as, naarmate n groter is.
Je kunt ook kijken naar de richtingscoëfficiënt van een koorde OO_*; die nadert 'sneller' naar 0, naarmate de exponent hoger is.

8 **a.** In het eerste plaatje is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn 2. Dus: hoogteverschil gedeeld door horizontale afstand (= 1) moet gelijk zijn aan 2. Snijpunt met y-as is (0 , -1).
Evenzo vind je in de andere plaatjes respectievelijk hoogteverschil 3, 4 en 5, en dus de snijpunten
(0 , -2), (0 , -3), (0 , -4).
a. $(0\ ,\ n - 1)$.
b. $(1 - \frac{1}{n}\ ,\ 0)$.

9 **a.** Richtingscoëfficiënt $PQ = \frac{5h}{p} = \frac{5p^5}{p} = 5p^4$
b. Je past de afstand van P tot de x-as respectievelijk 2, 3, 4 keer af op de y-as, te beginnen op de hoogte van P.

10 **a.** $y = 32x - 48$ en $y = -32x - 48$.
c. $(0\ ,\ -48)$.
d. $y = 80x - 128$ en $y = 80x + 128$; die raaklijnen hebben geen snijpunt (zijn evenwijdig).

11 **a.**



$y = x^n$, n even

Bij $x = p$ hoort het punt (p, p^n) en bij $x = -p$ hoort het punt $(-p, (-p)^n)$.
Voor even waarden van n is $(-p)^n = p^n$.

b. De raaklijnen l en m zijn elkaars spiegelbeeld in de y-as, dus zijn de richtingscoëfficiënten tegengesteld!

12 a. $y_2' = y_1'$ geeft $3x^2 = 2x$, dus $x = 0$ of $x = 2/3$. Op het interval [0 , 1] geldt $y_2' > y_1'$ voor $x > 2/3$. Dus vanaf $x = 2/3$ groeit y_2 sneller dan y_1.

b. Op een soortgelijke wijze volgt: vanaf $x = 3/4$ groeit y_2 sneller dan y_1.

13 Voor $n = 1$, krijg je: $F(x) = x$, dus $F'(x) = 1$. Volgens de regel zou dan gelden: $F'(x) = 1 \cdot x^0$. Op de uitzondering $x = 0$ na, geldt dat dit inderdaad gelijk is aan 1.
Voor $n = 0$, krijg je: $F(x) = 1$ (voor $x \neq 0$) en dus $F'(x) = 0$. Dit klopt met de formule (voor $x \neq 0$).
Conclusie: als je $x = 0$ buiten beschouwing laat, dan is de formule ook geldig voor $n = 1$ en $n = 0$. Overigens is de formule voor die beide gevallen een kanon waarmee je op mussen schiet.

14

a. $F'(x) = 10x^9$

b. $F'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

c. $F'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

d. $F'(x) = -10x^{-11}$

e. $F'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

f. $F'(x) = \dfrac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$

15

a. $\dfrac{d}{dx}x^{2/5} = \frac{2}{5}x^{-3/5}$

b. $\dfrac{d}{dx}\left(x\sqrt[3]{x^2}\right) = \dfrac{d}{dx}x^{5/3} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

c. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^{0,3}}\right) = \dfrac{d}{dx}x^{-0,3} = \dfrac{-0,3}{x^{1,3}}$

d. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sqrt{t}}{t}\right) = \dfrac{d}{dt}t^{-1/2} = -\dfrac{\sqrt{t}}{2t^2}$

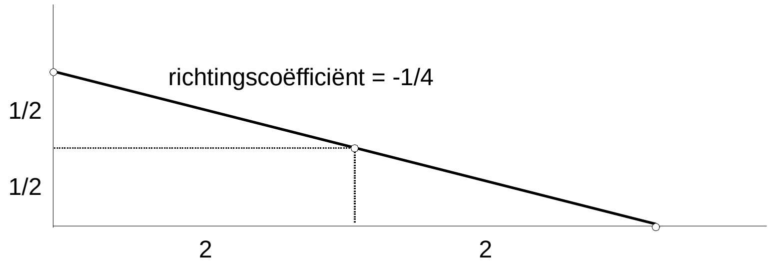
e. $\dfrac{d}{dt}\sqrt[4]{t^{-1}} = \dfrac{d}{dt}t^{-1/4} = -\frac{1}{4}\sqrt[4]{t^{-5}}$

f. $\dfrac{d}{dt}(t^2)^3 = \dfrac{d}{dt}t^6 = 6t^5$

16 a. Het snijpunt met de y-as is $(0\ ,\ -p)$ en met de x-as $(\frac{1}{2}p\ ,\ 0)$.

b. Het snijpunt met de y-as is $(0\ ,\ \frac{1}{2}\sqrt{q})$ en met de x-as $(-q\ ,\ 0)$.

17 Bijvoorbeeld in het punt $(2\ ,\ \frac{1}{2})$: raaklijn heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{4}$ en snijdt de x-as dus in (4 , 0) en de y-as (in (0 , 1). Het raakpunt ligt dus precies midden tussen deze twee snijpunten.



18 a. $s = r^{1/5}$, dus $s^5 = r$. Als r nadert tot 1 doet s dat ook.

$$\lim_{s \to 1}\frac{s^5 - 1}{s - 1} = 5\text{ , dus }\lim_{s \to 1}\frac{s - 1}{s^5 - 1} = \frac{1}{5}$$

b. $s = r^{1/5}$, dus $s^5 = r$ en $s^3 = r^{3/5}$.

$\dfrac{r^{3/5} - 1}{r - 1} = \dfrac{s^3 - 1}{s^5 - 1} = \dfrac{s^3 - 1}{s - 1} \cdot \dfrac{s - 1}{s^5 - 1}$; de limiet hiervan voor s nadert tot 1 is gelijk aan $3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

c. $s = r^{-1}$, dus $s^5 = r^{-5}$.

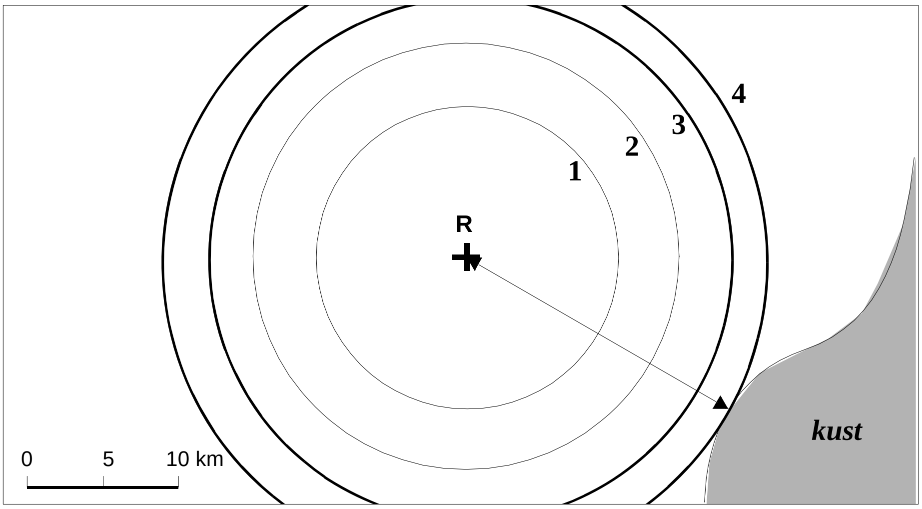
$\dfrac{r^{-5} - 1}{r - 1} = \dfrac{s^5 - 1}{s^{-1} - 1} = \dfrac{s^5 - 1}{\frac{1}{s} - 1} = -s \cdot \dfrac{s^5 - 1}{s - 1}$; de limiet voor s nadert tot 1 is gelijk aan $-1 \cdot 5 = -5$.

4 De invloed van een constante

1 a. De oppervlakte van de vlek is 100π ($\approx$ 315) km^2, dus is er 5000π ($\approx$ 15750) ton olie uitgestroomd.

b. De straal is dan $\sqrt{2}$ ($\approx$ 1.41) keer zo groot.

c. Ja.



2 a. $R = 10\sqrt{t}$.

b. De afgeleide neemt af bij toenemende t. Dat betekent dat de straal steeds langzamer groeit.

c. $R'(t) = \dfrac{5}{\sqrt{t}}$

3 In dakm/dag. Door met 10 te vermenigvuldigen.

4 a. De snelheid in dakm/week.

b. De snelheid in dakm/week = $7 \cdot$ snelheid in dakm/dag = $7 \cdot \frac{1}{2}(7t)^{-1/2}$.

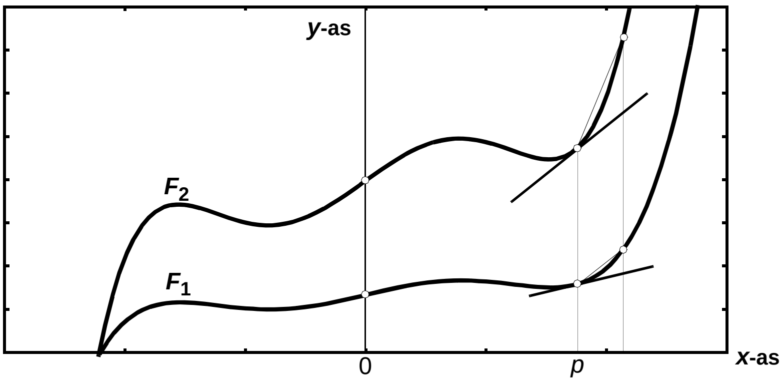
5 a. $R(t) = \sqrt{t} + 0{,}1$: 1 km voor de olievlek uit vaart een bootje van waaruit de situatie permanent wordt waargenomen en doorgebeld naar de kust.

$R(t) = \sqrt{t + 2}$: de ramp heeft 2 dagen eerder plaatsgevonden.

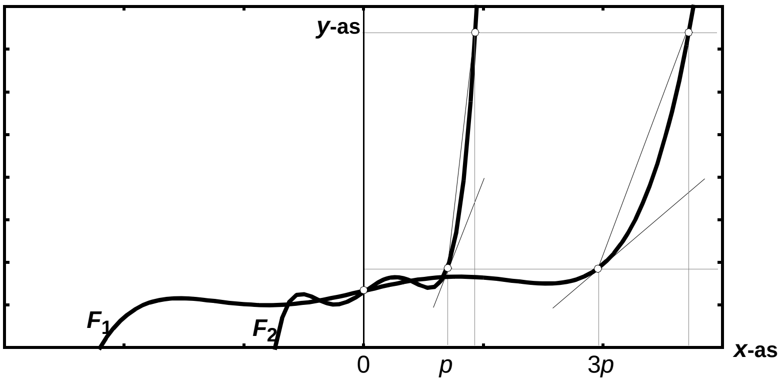
b. In het eerste geval vaart het bootje met dezelfde snelheid als waarmee de rand van de vlek zich van het centrum verwijdert.

In het tweede geval gebeurt alles 2 dagen eerder, maar de snelheid is natuurlijk hetzelfde.

6 *Buiten optellen van een constante* betekent dat de grafiek verticaal wordt verschoven; de helling bij een zekere x-waarde verandert dan niet.
Binnen optellen van een constante betekent dat de grafiek horizontaal wordt verschoven; de helling van de grafiek schuift als het ware mee.
Buiten vermenigvuldigen met een constante („ 0) betekent dat de grafiek in verticale richting wordt opgerekt of ingekrompen. Als die constante bijvoorbeeld 3 is, dan wordt de locale helling bij een zekere x-waarde(zeg p) drie keer zo groot (zie figuur):



Binnen vermenigvuldigen met een constante („ 0) betekent dat de grafiek in horizontale richting wordt opgerekt of ingekrompen. Als die constante bijvoorbeeld 3 is, dan is er sprake van inkrimpen en dan wordt de locale helling in een nieuw punt drie keer zo groot als in het originele punt (zie figuur):



7

a. $\frac{d}{dx}(x^5+6) = 5x^4$

b. $\frac{d}{dx}(6x^5) = 30x^4$

c. $\frac{d}{dx}(5x^6+4) = 30x^5$

d. $\frac{d}{dt}(t+7)^4 = 4(t+7)^3$

e. $\frac{d}{dt}(2t+7)^4 = 8(2t+7)^3$

f. $\frac{d}{dt}(10t-3)^4 = 40(10t-3)^3$

8 **b.** Het punt (1 , 4).
c. $y'(x) = 3(x-1)^2$ dus $y'(3) = 12$.
De raaklijn $y = 12(x-3) + 12$ snijdt de y-as in het punt (0, –24).

9 **a.** $F'(x) = 6(x+4)^5$, dus $F'(-2) = 6 \cdot 32 = 192$.
b. In (-4 , -92).

10

a. $4\ (6x)^{-1/3}$

b. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

c. $15\ (x-1)^{0,5}$

d. $\frac{40}{3}\ \sqrt[3]{t}$

e. $\dfrac{8}{\left(\sqrt[3]{24t}\right)^2}$

f. $\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{4t+1}\right)^3}$

11 $y'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$, dus $y'(3) = 3$; raaklijn in (3 , 8) heeft vergelijking: $y - 8 = 3(x - 3)$.
Het snijpunt A met de y-as is dus (0 , -1).

12 a. $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Ook voldoen bijvoorbeeld: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 17$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$

b. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ respectievelijk $F(x) = -\frac{1}{x}$;
net als bij **a** mag je bij beide naar willekeur een constante optellen.

13 $F'(x) = 15x^4$ dus $F(x) = 3x^5 + c$ (= constante) . Grafiek door (1, 5), dus: $5 = 3\ 1^5 + c$
en hieruit volgt dan $c = 2$.
De gevraagde formule is: $F(x) = 3x^5 + 2$.

14

a. $-20x^{-6}$

b. $\dfrac{-1}{(x-5)^2}$

c. $\dfrac{-2}{(2x+5)^2}$

d. $\dfrac{-1}{t\sqrt{t}}$

e. $\dfrac{-2}{(t+3)^3}$

f. $\frac{1}{3}\ \dfrac{-1}{t-1}\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{t-1}}$

15 $G'(x) = ab\ \ F'(bx + c)$

5 Som- en verschilregel

1 a. $y_1'(2) = 4$ en $y_2'(2) = 12$
b. 16

2 $y'(x) = 2x + \dfrac{4}{x^2}$ en $s'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t-2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}$

3

a. $3x^5 + 6x^2$

b. $4t^3 - 3t^2 + 2t - 1$

c. $3\ (u-1)^2 + 3\ (u+1)^2$

d. $2ap + b$

4 **a.** $\frac{16}{24} + \frac{8}{6} + \frac{4}{2} + 2 + 1 = 7$

b. y¢(x) = $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, dus y¢(2) = $6\frac{1}{3}$

5 **a.** $y_3'(x) = 0$ geeft $2x + 3x^2 = 0$, ofwel: $x(2 + 3x) = 0$.

Hieraan voldoen de x-waarden 0 en $-\frac{2}{3}$.

Er zijn dus twee punten met horizontale raaklijn, namelijk (0 , 0) en $(-\frac{2}{3}\ ,\ \frac{4}{27})$

b. Nee. $y'_1 \cdot y'_2 = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3$, maar $y'_4 = 5x^4$

6 **a.** $y_3'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{1}{x^2} = 0$, dus $x = 1$ of $x = -1$.

De punten met horizontale raaklijn zijn (1 , 2) en (−1, −2)

b. $y_4'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ voor elke toegestane x-waarde, dus nooit gelijk aan 0.

7 **a.** $y(x) = x^2 + x^{-1}$, dus:$y'(x) = 2x - x^{-2} = 2x - \frac{1}{x^2}$

b. $y(x) = x - x^{-2}$, dus: $y'(x) = 1 + 2x^{-3} = 1 + \frac{2}{x^3}$

c. $y(x) = x^{1\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-\frac{1}{2}}$,dus; $y'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x\sqrt{x}}$

d. $y(x) = x + 1$, dus $y'(x) = 1$

8 **a.** $y(x) = x^4 - 1$, dus $y'(x) = 4x^3$

b. $y(x) = x^2 + 2 + x^{-2}$, dus $y'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$

c. $y(x) = x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$, dus $y'(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

d. Gebruik het resultaat van **c** met vervanging van x door $x - 2$:

$y'(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{x-2} + \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

9 **a.** $v_A(t) = 2t$ en $v_B(t) = 3t^2 - 6t + 4$

b. $v_A(t) = v_B(t)$ voor $t = \frac{2}{3}$ en voor $t = 2$.

c. A haalt B in en komt op $t = 2$ naast B. Daarna loopt B weer uit.

d. $3t^2 - 6t + 4$ is minimaal voor $t = 1$.

e. De voorsprong van B op A als functie van t.

f. $y'(t) = 0$ voor $t = \frac{2}{3}$ en voor $t = 2$.

De voorsprong van B op A was maximaal op het moment $t = \frac{2}{3}$.

10 **D4:** neem $d = 0$

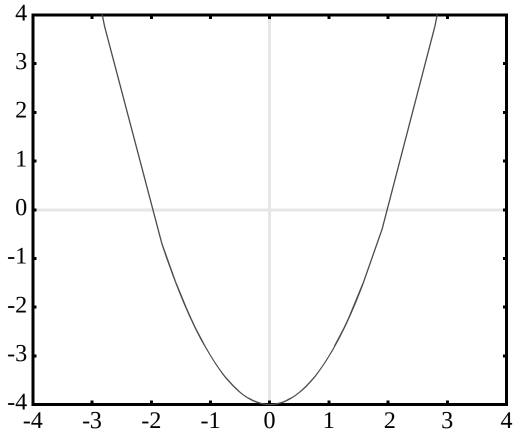
D6: neem $c = 1$, $d = 1$

D7: neem $c = 1$, $d = -1$

6 Berg en dal

1 **a.** De twee coordinaten zijn $(-2, 5\frac{1}{3})$) en $(2, -5\frac{1}{3})$

b.



c. Negatieve helling op x-interval $(-2,2)$. Positieve helling op x-interval (–¥,–2) ¨ (2,¥)

d. F(101) > F(100), want F is stijgend op het interval (2,¥) .

2 **a.** Bijvoorbeeld: $y(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$, of $y(x) = x^3 - 2x^2 + 8x$.

b. Bijvoorbeeld: $y(x) = -\frac{1}{4}x^5 - 3x^3$, of $y(x) = 2^{-x}$.

3 Een functie *F* is dalend op een interval *I*, als voor de *x*-waarden van *I* geldt:

hoe groter *x* hoe kleiner *F*(*x*).

Of puntiger gezegd:

Een functie *F* is dalend op een interval *I* , als voor elk paar x_1 en x_2 in *I* geldt:

als $x_2 > x_1$, dan $F(x_2) < F(x_1)$

4 **a.** stijgend

b. stijgend

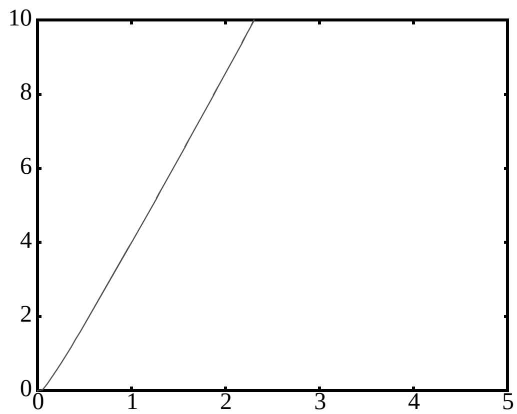
c. dalend

d. dalend

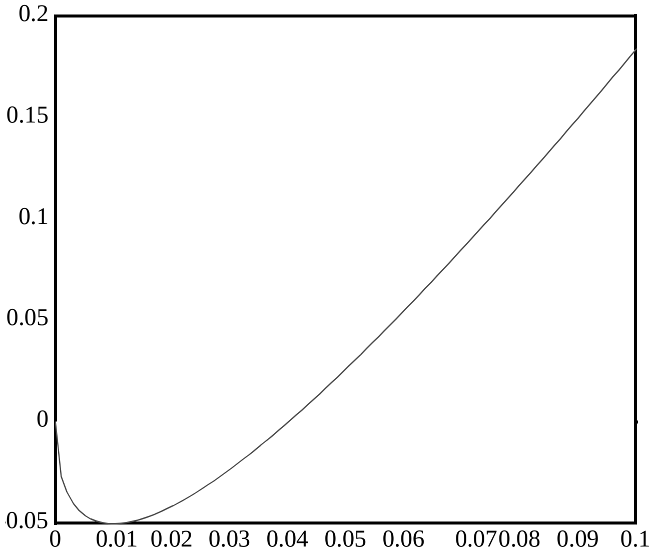
e. stijgend

f. dalend

5 **a.**



b. Op het x-interval [0,0.01] is de functie F dalend.



6 (1) als de snelheid positief is, dan neemt de afstand toe
(2) als de snelheid negatief is (d.w.z. een positieve snelheid in de omgekeerde loop-richting), dan neemt de afstand af
(3) als de snelheid nul is, dan blijft de afstand gelijk

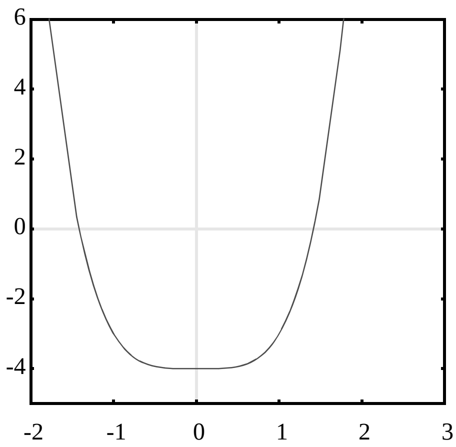
7 $(0, 0{,}01)$, want $F'(x) = 5 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ als x tussen 0 en 0.01 ligt.

8 **a.** Nee, voor x=0 geldt $F'(x) = 0$.
b. Bijvoorbeeld: $F(x) = -x^3 + 10$. $F(x)$ is dalend op [0,5]. $F'(x) = 0$ voor $x = 0$.

9 **a.** Stel de afgeleide van de functie $y(x)$ gelijk aan 0. Dus $y'(x) = 0$ .Dit geeft $x = 0$ en $x = 4$, dus dat zijn de punten (0,-10) en (4,22).

b. De grafiek blijft verder dalen, omdat $y'(x) = 12x - 3x^2 < 0$ voor alle $x > 4$.

10 **a.** $x^4 \geq 0$ voor iedere x, dus $x^4 - 4 \geq -4$ voor iedere x.
De afgeleide functie is gelijk aan nul bij $x = 0$, dus bij het punt $(0, -4)$ zit een top.

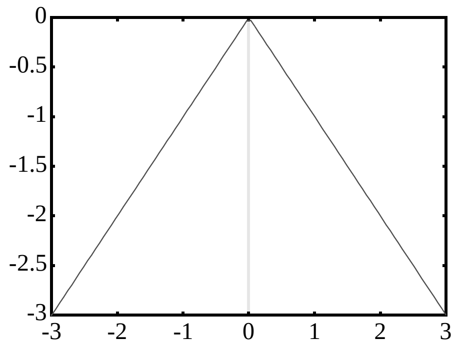


b. $y'(x) = 4x^3 - 4 \Rightarrow y'(x) = 0$ voor $x = 1$, dus de top ligt bij $(1, -3)$.

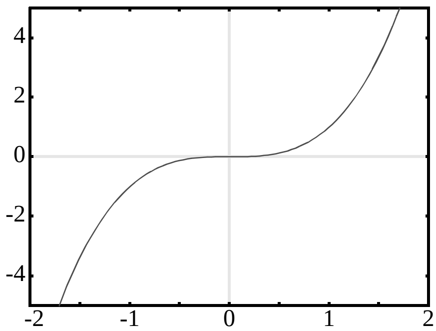
c. $y'(x) = 4x^3 - 8x \Rightarrow y'(x) = 0$ voor $x = -\sqrt{2}, x = 0, x = \sqrt{2}$, dus de toppen liggen bij
$(-\sqrt{2}, -4)$, $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -4)$

d. het minimum is -27 (venster instelling bijvoorbeeld [-2 , 4] bij [-28 , 6]).

11 a. Bijvoorbeeld $y(x) = -|x|$.



b. Bijvoorbeeld $y(x) = x^3$



12 Bijvoorbeeld: $y(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

13 a. (4,8)

b. het maximum van y_3 is 4.

c. $y_3 = y_2 - y_1$, dus $y_3' = y_2' - y_1'$.
Bij **a.** berekende je $y_1' = y_2'$; bij **b.** berekende je $y_3' = 0$, ofwel $y_2' - y_1' = 0$, ofwel $y_1' = y_2'$, dus je berekende in feite hetzelfde.

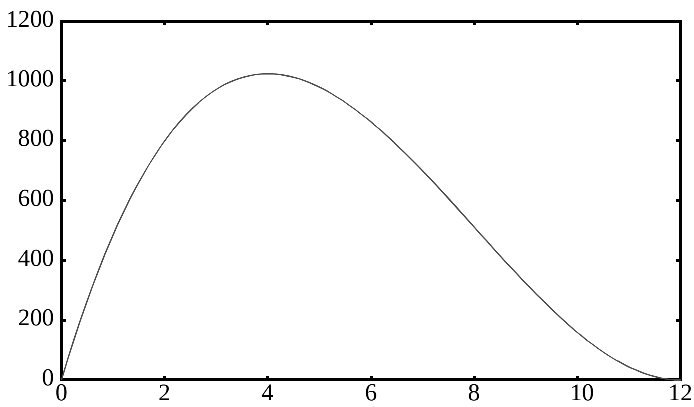
14 a. tussen 0 en 12

b. $V(x) = (24 - 2x)^2 \; x$

c.

De x in het interval [0,12] met het maximum in het bereik [0,1200].

Bij $x = 4$ lijkt $V(x)$ maximaal.



d. $V'(x) = 12x^2 - 192x + 576$

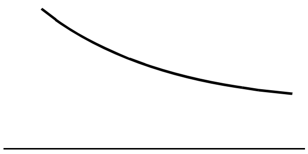
$V'(x) = 0 \Rightarrow 12(x^2 - 16x + 48) = 0 \Rightarrow x = 4$ of $x = 12$
$x = 12$ geeft een minimum; $x = 4$ geeft het maximumvolume van 1024.

15 $V(x) = (a-2x)^2 \; x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$
$V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$

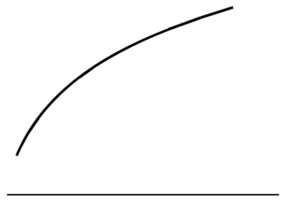
$V'(x) = 0$ voor $x = \dfrac{4a}{24}$ en $x = \dfrac{12a}{24}$; het eerste nulpunt geeft het maximum, dus $x = \dfrac{4a}{24}$ geeft het maximumvolume.

7 De tweede afgeleide

1 **a.** Als de stijging van de werkloosheid afneemt, kan de werkloosheid zelf nog steeds toenemen!



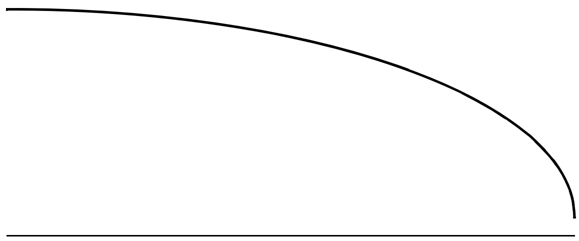
DE WERKLOOSHEID NEEMT AF



DE STIJGING VAN DE WERKLOOSHEID NEEMT AF

b.

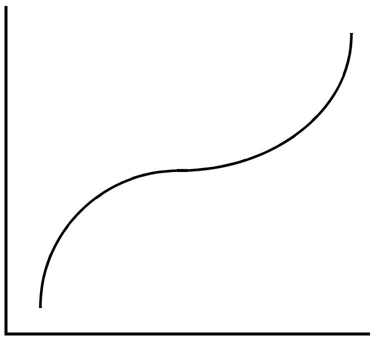
Het aantal boeren neemt steeds sneller af.



AANTAL BOEREN GAAT STEEDS SNELLER DALEN

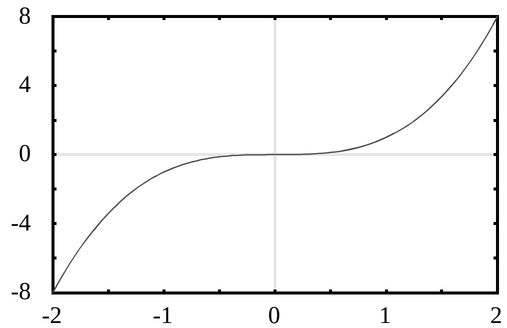
2 **a.** De **tweede** grafiek illustreert de tekst (zie hiernaast), want de groei neemt eerst af en dan toe.

b. Bij de **eerste** grafiek:
de misdaad nam de laatste jaren af, maar is op een gegeven moment weer net zo hard gaan toenemen!
De **derde** grafiek:
De toenemende groei die de misdaad de laatste jaren vertoonde, is omgeslagen in een afnemende groei.



3 De hellinggrafiek van de linkergrafiek is stijgend, die van de rechter grafiek is dalend.

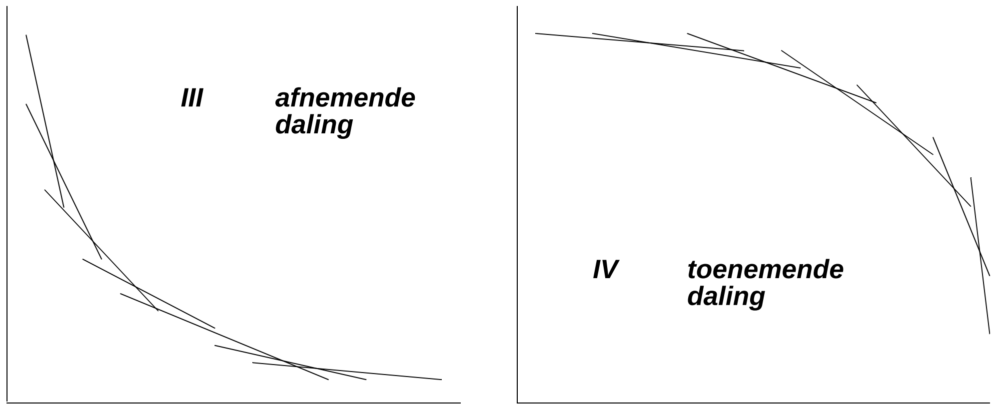
4 $y'(x) = 3x^2$.
Voor $x < 0$ is de grafiek van y' dalend;
voor $x > 0$ is de grafiek van y' stijgend.



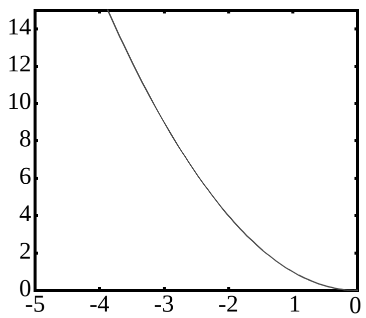
5 Het omslagpunt is $x = 2$.
Er geldt $y(x) = 6x^2 - x^3 - 10 \Rightarrow y'(x) = 12x - 3x^2$,De grafiek van de afgeleide neemt toe tot x=2; bij x=2 zit de top, en daarna neemt de afgeleide weer af, oftewel: de stijging neemt toe tot x=2, en daarna neemt de stijging weer af.

6 **a.** Uit $F'(x) = 0$ volgt $x = 2$. Als je de grafiek van de afgeleide van F bekijkt zie je dat deze positief is voor $x > 2$. Dat wil zeggen dat F stijgend is voor $x > 2$.
b. De tweede afgeleide ligt in z'n geheel boven 0. Dat betekent dat de stijging, als F stijgt, steeds toenemend is. Zou de stijging van afnemend overgaan in toenemend, dan zou een gedeelte van de grafiek van de afgeleide onder 0 liggen en een ander gedeelte boven 0.

7 **a.** figuur III
b. figuur IV



8 **a.** Bijvoorbeeld $y(x) = x^2$. Zie de grafiek hiernaast. Hierbij geldt voor $x < 0$ dat de eerste afgeleide $y'(x) = 2x < 0$ is en dat dan de tweede afgeleide $y''(x) = 2 > 0$ is.



b. Voor $x < 0$: naarmate x toeneemt wordt de afname van de functie minder. De (negatieve) richtingscoëfficiënt van de raaklijn wordt groter. Dus: afnemende daling.
c. De afname neemt dan toe: de grafiek gaat steeds steiler dalen. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn wordt kleiner. Dus: toenemende daling.
d. De afname is constant: de grafiek wordt een dalende (rechte) lijn.

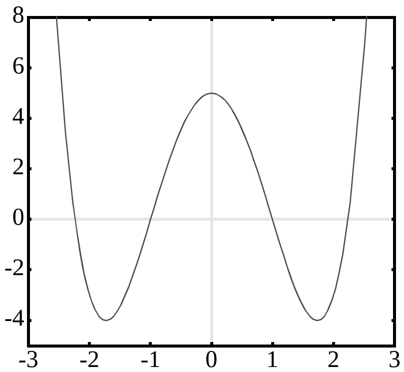
9 a. Aan de **ene** kant van het buigpunt ligt de grafiek onder de buigraaklijn en aan de **andere** kant van het buigpunt ligt de grafiek boven de buigraaklijn.

b. De raaklijn veranderd van een dalende resp. stijgende raaklijn in stijgende resp. dalende raaklijn. Dus de helling verandert van negatief in positief (of andersom).

c. Ja, want de *tweede* afgeleide wisselt van teken.
De raaklijn veranderd van ligging <u>onder</u> resp. boven de grafiek **voor** het buigpunt in een ligging <u>boven</u> resp. onder de grafiek **na** het buigpunt (en zie a.).

d. **Voor** het buigpunt is de helling <u>stijgend</u> resp. dalend, terwijl **na** het buigpunt is de helling <u>dalend</u> resp. stijgend.

10 a. $y'(x) = x^4 - 6x^2 + 5$



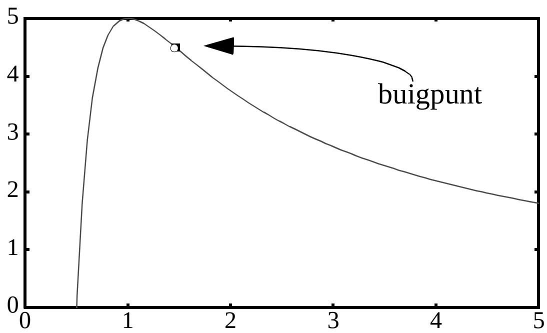
b. De x-waarden waarbij de hellinggrafiek zich onder de x-as bevindt, oftewel de ‘x’-en waarvoor $y'(x) < 0$.
De grenzen kun je vinden als je de afgeleide gelijk aan nul stelt. De grenzen zijn $x = -\sqrt{5}, x = -1, x = 1, x = \sqrt{5}$

c. De 4 toppen van $y(x)$ zijn:
$(-\sqrt{5}, 2)$, $(-1, -1\frac{1}{5})$, $(1, 5\frac{1}{5})$, $(\sqrt{5}, 2)$

d. De 3 toppen van de hellinggrafiek $y'(x)$ zijn:
$(-\sqrt{3}, -4)$, $(0, 5)$, $(\sqrt{3}, -4)$

e. De 3 buigpunten van de grafiek $y(x)$ zijn: $(-\sqrt{3}, 2 - \frac{4}{5}\sqrt{3})$, $(0, 2)$, $(\sqrt{3}, 2 + \frac{4}{5}\sqrt{3})$

11 a.



b. De top is $(1, 5)$.

Het buigpunt is $(\frac{3}{2}, 4\frac{4}{9})$

12 a. De functies $y(x) = x^3$, $y(x) = -x^3 + 2$ en $y(x) = (x-1)^5 - 3(x-1)^3$ hebben een horizontaal buigpunt.

b. De functie $y(x) = \sqrt[3]{x}$ heeft een verticaal buigpunt.

13 $v(t) = 6t^2$ en $s(t) = 2t^3$

14 a. $a(t) = c_1 + 2c_2t + 3c_3t^2$
$v(0) = 0$ geeft $c_0 = 0$ $\qquad a(0) = 0$ geeft $c_1 = 0$
$v(4) = 10$ geeft $16c_2 + 64c_3 = 10$ (*)
$a(4) = 0$ geeft $8c_2 + 48c_3 = 0$ dus $c_2 = -6c_3$,
invullen in (*) geeft $c_3 = -\frac{5}{16}$ en $c_2 = \frac{15}{8}$

b. $a(t) = \frac{15}{16}(4t - t^2)$
maximaal als $a'(t) = 0$ dus voor $t = 2$.

c. $v(2) = 5$, $a(2) = 3\frac{3}{4}$.

d. $0 < v < 2$: $v(t) = 1\frac{1}{2}t^2$ en dus $v'(t) = 3t$ en $v'(2) = 6$.

$2 < v < 4$: $v(t) = -(t - 4)^2 + 10$ en dus $v'(t) = -2t + 8$ en $v'(2) = 4$.

15 a. Uit $F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ volgt $F''(x) = 6ax + 2b$. Er is maar één buigpunt opdat er maar één oplossing is van de vergelijking $F''(x) = 0 \quad 6ax + 2b = 0$.
Deze is $x = -\frac{1}{3}\frac{b}{a}$

b. Er geldt $F'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}\frac{b}{a} - \frac{1}{6a}\sqrt{4b^2 - 12ac}$.
Er is een horizontaal buigpunt als de x-waarden van a) en b) gelijk zijn, dus moet $\frac{1}{6a}\sqrt{4b^2 - 12ac} = 0$ gelden.
De voorwaarden zijn $a \neq 0$ en $b^2 = 3ac$.

Zelftoets

1 De lijn PQ wordt evenwijdig verschoven tot hij een raaklijn is.
De richtingscoëffcient van die raaklijn moet gelijk zijn aan $2\frac{1}{2}$.
$y'(x) = 2\frac{1}{2} \quad 1 + \dfrac{3}{2\sqrt{x}} = 2\frac{1}{2} \quad x = 1$.
$y(1) = 4$, dus het raakpunt is $(1, 4)$ en dat is de positie waarin P en Q samenvallen.

2 a. De afgeleide van een willekeurige term x^k is kx^{k-1}. Volgens de som-regel geldt:
$$F'(x) = \sum_{k=0}^{100} kx^{k-1} .$$
Omdat de eerste term 0 is, kun je even goed schrijven $\sum_{k=1}^{100} kx^{k-1}$.

b. De afgeleide van $kx^{k-1} = k(k-1)x^{k-2}$.
Voor $k = 1$ is de afgeleide nul. Dus $F''(x) = \sum_{k=2}^{100} k(k-1)x^{k-2}$.

3 $y(x) = 0 \quad (1 + \frac{1}{x})^2 = 0 \quad x = -1$

$y'(x) = \dfrac{-2}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$, dus $y'(-1) = -2 + 2 = 0$. De grafiek heeft een horizontale raak-
lijn in (-1,0) en dat is de x-as.

4 Opp. $OP_xPP_y = x\left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = x + 2 + \dfrac{1}{x}$. Stel $F(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x}$ met $x>0$.

Het gaat nu om het minimum van $F(x)$.
$F'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $F'(x) = 0$ èn $x > 0 \quad x = 1$.
Als je de grafiek van F op de GR bekijkt, zie je dat er bij $x = 1$ inderdaad een minimum is. Dat er sprake is van een minimum bij x= 1 kun je ook zien aan het teken van $F'(x)$. Als $0 < x < 1$, dan $F'(x) < 0$ en als $x > 1$, dan $F'(x) > 0$.
Er is dus een overgang van dalend, naar stijgend.
De minimale oppervlakte is $F(1)$= 4.

5 a. De markante punten op het scherm zijn de toppen en het buigpunt.
$y'(x) = 4x^3 - 102x^2 + 840x - 2240$
$y''(x) = 12x^2 - 204x + 840$.
Het is het handigst $y''(x) = 0$ op te lossen.
$12x^2 - 204x + 840 = 0 \quad x^2 - 17x + 170 = 0 \Rightarrow x = 10 \text{ of } x = 7$,
Als je op de GR de grafiek van y'' bekijkt dan zie je dat bij x = 7 er overgang is van positieve naar negatieve waarden, dus dat de grafiek van y rond het punt met x = 7 van hol naar bol gaat. Bij x = 10 is het juist andersom.
Het buigpunt is (7 , -9).

b. Het lijkt er op dat één van de toppen op 1 eenheid rechts van het buigpunt ligt. Inderdaad blijkt te gelden $y'(8) = 0$.
Het middelste streepje op de horizontale as correspondeert blijkbaar met $x = 7$ en het x-interval is dus [4 , 10]. De y-coördinaat van de top bij $x = 8$ is gelijk aan 0. Het y-interval is blijkbaar [-24 , 24].
Je kunt dit resultaat controleren op de GR met venster [4 , 10] bij [-24 , 24].

c. Om nog een buigpunt en een top te ‘vangen’ moet je een eindje rechts van 10 kijken. Neem het x - interval bijvoorbeeld [4 , 14]. Om de top op het scherm te krijgen moet de ondergrens van het y - interval omlaag. Na enig proberen zie je dat het lukt bij [-100 , 24].

8 De regels van Leibniz

1 **a.** Ongeveer tot $t = 30$, op dat moment is de raaklijn aan de eerste grafiek evenwijdig aan de tweede grafiek.
b. Teken grafiek 2 in figuur 1. Lengte en breedte weer gelijk na ongeveer 110 dagen.
c. Ongeveer 1.4 cm^2.

2 **a.** ý $\mathrm{D}O = (A + \mathrm{D}A)(B + \mathrm{D}B) - AB = \mathrm{D}A\ \ B + A\ \ \mathrm{D}B + \mathrm{D}A\ \ \mathrm{D}B$
b. De aangroeiingen van de zijden zijn $\mathrm{D}A\ \ B$ en $\mathrm{D}B\ \ A$; het kleine vierkantje is $\mathrm{D}A\ \ \mathrm{D}B$.

3 **a.** $100^2 = 10\,000$ keer zo klein.
b. Omdat het blokje rechtsboven relatief gezien erg klein is ten opzichte van de ‘stroken’, zou je $\mathrm{D}O$ goed kunnen benaderen door alleen $\mathrm{D}A\ \ B + \mathrm{D}B\ \ A$ te nemen.

4 **a.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(A(x)\ \ B(x)) = 1\ \ (x^3 + x^2 + x + 1) + (x-1)(3x^2 + 2x + 1) = 4x^3$
b. $\frac{x^4 - 1}{x - 1} = x^3 + x^2 + x + 1$ dus $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4 - 1) = 4x^3$

5 Als A constant is dan is $A' = 0$. Dus $(AB)' = 0 \cdot B' + A \cdot B' = A \cdot B'$.

6 **a.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x\sqrt{x+4} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x(x+4)^{\frac{1}{2}} = (x+4)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}x(x+4)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x+4} + \frac{x}{2\sqrt{x+4}}$

b. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2\sqrt{x+4} = 2x(x+4)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}x^2(x+4)^{-\frac{1}{2}} = 2x\sqrt{x+4} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+4}}$

c. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t\ \ (t-1)^{-2} = (t-1)^{-2} - 2t\ \ (t-1)^{-3}$

d. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2t}{t-1}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t)(t-1)^{-1} = 2(t-1)^{-1} - 2t(t-1)^{-2} = \frac{2}{t-1} - \frac{2t}{(t-1)^2}$

7 **a.** Stel $D = AB$ dan:
$(ABC)' = (DC)' = D'C + DC'; D = AB \Rightarrow D' = A'B + AB'$, dus dan volgt: $(ABC)' = (A'B + AB')C + (AB)C' = A'BC + AB'C + ABC'$.
b. $(ABCD)' = A'BCD + AB'CD + ABC'D + ABCD'$

8 $F'(x) = (2x)(x^3+2)(x^4+3) + (x^2+1)(3x^2)(x^4+3) + (x^2+1)(x^3+2)(4x^3)$.
Hieruit volgt: $F'(1) = 2(1+2)(1+3) + (1+1)3(1+3) + (1+1)(1+2)4 = 72$

9 **a.** $y'(1) = (1-2)(1-3)(1-4) = -6$
$y'(2) = (2-1)(2-3)(2-4) = 2$
$y'(3) = (3-1)(3-2)(3-4) = -2$
$y'(4) = (4-1)(4-2)(4-3) = 6$

b. Teken met de GR in een window van [0 , 5] bij [-2, 10].

c. 3

10 **a.** $\frac{d}{dx}(y(x))^2 = ((y(x)) \cdot (y(x)))' = y'(x)\; y(x) + y(x)\; y'(x) = 2y(x)y'(x)$

b. Uit $\frac{d}{dx}(y(x))^3 = y'(x)\; y(x)\; y(x) + y(x)\; y'(x)\; y(x) + y(x)\; y(x)\; y'(x)$

volgt dat

$$\frac{d}{dx}(y(x))^3 = y'(x)\;\; (y(x))^2 + y'(x)\;\; (y(x))^2 + y'(x)\;\; (y(x))^2$$
$$= 3\;\; (y(x))^2\;\; y'(x)$$

c. $\frac{d}{dx}(y(x))^n = n\;\; (y(x))^{n-1}\;\; y'(x)$

11 $F'(x) = 4(x^2-100)^3(2x) = 8x(x^2-100)^3$ en

$$F''(x) = 8(x^2-100)^3 + 8x\;\; 3(x^2-100)^2(2x) = 8(x^2-100)^3 + 48x^2(x^2-100)^2$$

12 Uit $3F(x) + (3x+1)F'(x) = 2$ volgt: $3\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right) + (3x+1)F'(x) = 2$

En dus $(3x+1)F'(x) = 2 - \frac{6x-3}{3x+1}$; dat geeft:

$$F'(x) = \frac{2}{3x+1} - \frac{6x-3}{(3x+1)^2} = \frac{2(3x+1)}{(3x+1)^2} - \frac{6x-3}{(3x+1)^2} = \frac{5}{(3x+1)^2}$$

13 $F'(x) = \frac{2(3x+1) - 3(2x-1)}{(3x+1)^2} = \frac{5}{(3x+1)^2}$

14 $F(x) \cdot B(x) = A(x)$ aan beide zijden differentiëren geeft:

$F'(x) \cdot B(x) + F(x) \cdot B'(x) = A'(x)$ ofwel:
$F'(x) \cdot B(x) = A'(x) - \frac{A'(x)}{B(x)} \cdot B'(x)$

delen door $B(x)$: $F'(x) = \frac{A'(x)}{B(x)} - \frac{A(x)\;\; B'(x)}{(B(x))^2} = \frac{A'(x)\;\; B(x) - A(x)\;\; B'(x)}{(B(x))^2}$

15 **a.** $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(x^2+1) - (x^3-1)\;\; 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4-3x^2-2x}{(x^3-1)^2}$ De teller is precies het tegengestelde van de teller van **a**.

16 a. $\dfrac{B}{A}$ is het omgekeerde van $\dfrac{A}{B}$. Het quotiënt $\dfrac{B}{A}$ heeft afgeleide $\dfrac{B'A - BA'}{A^2}$.

De afgeleide wisselt van teken.

b. Na verwisseling van teller en noemer krijg je een dalende functie.

17 $\dfrac{A}{B}$ wordt dan A en de afgeleide wordt A'.

Doe je het verkeerd dan krijg je $-B'$.

18 a. $\dfrac{-4}{(x-2)^2}$

b. $\dfrac{7}{(4x-3)^2}$

c. Afgeleide is 0. Dit kun je als volgt verklaren: $\dfrac{3x-3}{4x-4} = \dfrac{3(x-1)}{4(x-1)} = \dfrac{3}{4}$

d. $\dfrac{\frac{1}{2}(x+1)x^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$

e. $\dfrac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}$

f. $\dfrac{4x^2-4}{16x^2}$

g. $\dfrac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$

h. $\dfrac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$

19 a. $y'(x) = \dfrac{-6x^2+6}{(x^2+1)^2} = 0$ dus $-6x^2+6 = 0$ dus $x^2 = 1$.

Dat geeft toppen bij $x = -1$ en $x = 1$: $y(-1) = -3$ en $y(1) = 3$.

b. $y'(0) = 6$ dus buigraaklijn is $y = 6x$.

c. $y'(x) = \dfrac{-6x^2+6}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-6x^2+6}{x^4+2x^2+1}$

$$y''(x) = \frac{12x^5 - 24x^3 - 36x}{(x^2+1)^4} = \frac{12x(x^4-2x^2-3)}{(x^2+1)^4} = \frac{12x(x^2-3)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

Behalve x = 0 zijn er dus nog twee nulpunten: x = $-\sqrt{3}$ en x = Ð $\sqrt{3}$.

d. Als x onbeperkt groeit dan komt de grafiek onbeperkt dicht bij de x-as. De x-as is een asymptoot van de grafiek.

20 a. $F'(x) = 136 \; \dfrac{2x \; (x^4+16) - x^2 \; 4x^3}{(x^4+16)^2} = 136 \; \dfrac{32x - 2x^5}{(x^4+16)^2}$

De coördinaten van de toppen zijn (0 , 0), (-2 , 17) en (2 , 17).

b. c = -7 of c = 10.

21 $(x+4)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}x\,(x+4)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x+4} + \dfrac{1 \quad x}{2 \quad \sqrt{x+4}} = \dfrac{2\,(x+4)}{2\sqrt{x+4}} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+4}} = \dfrac{3x+8}{2\sqrt{x+4}}$

22

$\dfrac{-4}{x\sqrt[3]{x}}$	$\dfrac{-1}{2\sqrt{3x^3}}$	$\dfrac{-3}{4\sqrt[4]{x^3}}$	$\dfrac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}$
$\dfrac{2x}{3}$	$\dfrac{-6}{x^3}$	$\dfrac{-2}{3x^3}$	$\dfrac{-2x}{(3+x^2)^2}$
$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{(x+1)^2}$	$\dfrac{1}{2\,(x+1) \quad \sqrt{x} \quad \sqrt{x+1}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$
$5\,(x^2-x)^4 \quad (2x-1)$	$10x^9 - 5x^4$	$10x^9 - 5x^4$	$\dfrac{-5x^4}{(x^5-1)^2}$

23 a. $y'_1(x) = \dfrac{-6x}{(x^2-3)^2}$ $\qquad$ $y'_2(x) = \dfrac{-6x}{(x^2-3)^2}$

b. Als het verschil van beide functies constant is, dan ligt één van de twee functies iets hoger, maar hebben ze voor iedere x dezelfde helling en dus hebben beide functies dezelfde afgeleide:

$y_2(x) - y_1(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2-3} = 1$ voor $x^2 \neq 3$. (Teken beide grafieken met de GR!)

24 a. 27 meter

4 keer zo veel, dus 108 meter

b. Per 31 meter 1 auto, dus per minuut $\frac{1000}{31} \approx 32$ auto's.

c. Per 102 meter 1 auto, dus ongeveer 18 auto's per minuut.

d. v km/u = $\dfrac{1000v}{60}$ m/min

Per $0.0075v^2 + 4$ meter één auto, dus

$$N = \frac{\frac{1000v}{60}}{0{,}0075v^2 + 4} = \frac{1000v}{60\,(0{,}0075v^2 + 4)} = \frac{1000v}{0{,}45v^2 + 240}$$

e. $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}v} = \dfrac{-450v^2 + 240000}{(0{,}45v^2 + 240)^2}$

f. $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}v} = 0$ als $v = \sqrt{\dfrac{240000}{450}} \approx 23$ km/u

25 $F = AB \Rightarrow \dfrac{F'}{F} = \dfrac{A'B + AB'}{AB} = \dfrac{A'}{A} + \dfrac{B'}{B}$. $\quad F = \dfrac{A}{B} \Rightarrow \dfrac{F'}{F} = \dfrac{\left(\frac{A'B - AB'}{B^2}\right)}{\left(\frac{A}{B}\right)} = \dfrac{A'}{A} - \dfrac{B'}{B}$

9 Exponentiële functies

1 **a.** (0, 1) $\quad a^0 = 1$ voor elke $a \neq 0$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(2^{-1}\right)^x = 2^{-x}$

c. 1/3 $\quad$ 1/5

d. Stijgendvoor $a > 1$, constant voor $a = 1$ en dalend voor $0 < a < 1$.

2 **a.** (Gebruik Tangent uit het DRAW-menu.)
De eerste decimalen had je kunnen voorspellen want $y'(0) = c_2 \approx 0.69315$.

b. –0.69314724

c. $rc \approx c_3 = 1{,}0986$

3 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2^r - 1}{r - 0} = \dfrac{2^r - 1}{r}$

4

–0.1	0.6696700846
–0.01	0.6907504563
–0.001	0.6929070096
–0.0001	0.6931231584
–0.00001	0.693144778
–0.000001	0.69314694

5 ***a.*** $c_5 \cdot 5^{x+2}$

b. $25 \cdot c_5 \cdot 5^x$

c. $-c_2 \cdot 2^{-x}$ of: $c_{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d. $c_2 \cdot 2^t - c_2 \cdot 2^{-t}$

e. $3^t + c_3 \cdot t \cdot 3^t$

f. $\frac{1}{2} \cdot c_6 \cdot 6^{\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2}c_6 \cdot \sqrt{6}^t$ of: $c_{\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{6})^t$

6 $y = 4^x = 2^{2x}$

$y' = c_4 \cdot 4^x$ en ook $y' = 2c_2 \cdot 2^{2x} = 2c_2 \cdot 4^x$ dus $c_4 = 2c_2$.

$y = 8^x = 2^{3x}$

$y' = c_8 \cdot 8^x$ en ook $y' = 3c_2 \cdot 2^{3x} = 3c_2 \cdot 8^x$ dus $c_8 = 3c_2$.

7 **a.** $y = 10^x = 2^x \cdot 5^x$
$y' = c_{10} \cdot 10^x$ en ook $y' = c_2 \cdot 2^x \cdot 5^x + c_5 \cdot 2^x \cdot 5^x = (c_2 + c_5)10^x$.
Dus $c_{10} = c_2 + c_5$.

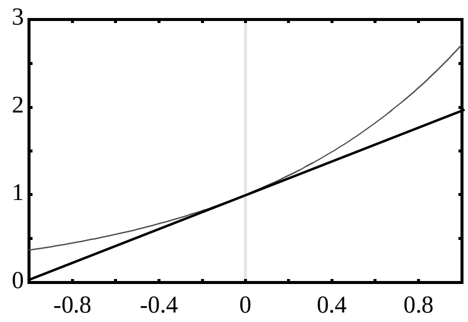
b. $y = (ab)^x = a^x \cdot b^x$

$y' = c_{ab} \quad (ab)^x$ en ook $y' = c_a \quad a^x \quad b^x + c_b \quad a^x \quad b^x = (c_a + c_b) \quad (ab)^x$.
Dus $c_{ab} = c_a + c_b$

8 a. Hoe groter a des te steiler de grafiek in (0 , 1) dus des te groter c_a .
b. $c_a < 0$

9 2.72

10 a. Zie grafiek hiernaast met rc = 1.
b. (nDerive onder MATH, nDerive(Y_1,X,X)).
c. De GR is nauwkeuriger.
d. e » 2,7182818



11 a. $2e^{2x}$
b. $-e^{-x}$
c. $10e^{5x}$
d. $\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{e^x}$
e. e^{t-2}
f. e^t
g. $1 - e^t$
h. $e^t + (t-1)e^t = te^t$

12 a. (0, 1)

b. $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad y'(1) = \dfrac{e - e^{-1}}{2}$

raaklijn $y = \dfrac{e - e^{-1}}{2}(x-1) + \dfrac{e + e^{-1}}{2}$

snijpunt y-as: $y = \dfrac{-e + e^{-1}}{2} + \dfrac{e + e^{-1}}{2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ dus (0, $\frac{1}{e}$).

c. $y'' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

13 a. $y' = (5 - 5x)e^{-x} = 0$ als $x = 1$ dus de x-coördinaat van de top is 1.

b. $y^{\dagger} = (-10 + 5x)e^{-x} = 0$ als $x = 2$ dus de x-coördinaat van het buigpunt is 2.

14 $\ln 2$ » 0,69314718 en $\ln 3$ » 1,0986123 .

15 ${}^g\log ab = {}^g\log a + {}^g\log b$

16 $\dfrac{d}{dx}e^x = \ln e \cdot e^x = e^x$ dus ln e = 1. Ofwel ln e = ${}^e\log e = 1$.

17 a. 5^x
b. $-(\ln 5)^2 \cdot 5^{-x} = -\dfrac{(\ln 5)^2}{5^x}$
c. $10\, e^{10t}$
d. $e \ln 10 \cdot 10^{et}$

18 a. De raaklijn in $P(p, e^p)$ heeft richtingscoëfficiënt e^p .
De vergelijking van de raaklijn is $y = e^p(x - p) + e^p = e^p(x - p + 1)$
Het snijpunt met de x-as is bij $x = p - 1$

De basis heeft dus lengte 1, welk getal je ook voor *p* kiest.

b. De raaklijn in $P(p, a^p)$ heeft richtingscoëfficiënt $\ln a \cdot a^p$. De vergelijking van de raaklijn is $y = \ln a \cdot a^p (x - p) + a^p = a^p (x \ln a - p \ln a + 1)$.

Het snijpunt met de *x*-as is bij $x = \dfrac{p \ln a - 1}{\ln a} = p - \dfrac{1}{\ln a}$.

De basis heeft lengte $\dfrac{1}{\ln a}$ en dit is onafhankelijk van *p*.

De eigenschap geldt dus ook voor andere grondtallen.

19 a. Vergelijk $y = be^{ct} = b(e^c)^t$ met $y = b \cdot g^t$.
Als $c = 0$ dan is $y = b$ want groeifactor = 1.
Als $c > 0$ dan toenemende groei, groeifactor $e^c > 1$.
Als $c < 0$ dan afnemende groei, want $0 < e^c < 1$
b. $y' = cbe^{ct} = cy$

20 a. 3000 gram
b. Als *t* toeneemt dan nadert $e^{-1.2t}$ tot 0 en de noemer van de breuk tot 1.

c. $G' = \dfrac{3000 \quad 1{,}2 \quad 9e^{-1{,}2t}}{(1 + 9e^{-1{,}2t})^2} = 1{,}2 \quad \dfrac{3000}{1 + 9e^{-1{,}2t}} \quad \dfrac{9e^{-1{,}2t}}{1 + 9e^{-1{,}2t}} = 1{,}2G \quad \dfrac{9e^{-1{,}2t}}{1 + 9e^{-1{,}2t}}$

d. Voor grote waarden van *t* is de noemer van *G* praktisch 1, het gewicht verandert dan niet meer.
In de formule voor *G* ' wordt voor grote waarden van *t* de teller van de breuk praktisch 0 en dus wordt ook *G* ' praktisch 0.
Op den duur gaat de grafiek van *G* daarom horizontaal lopen.
e. Uit de formule van *G* volgt

$G(1 + 9e^{-1{,}2t}) = 3000$ dus $G + G \quad 9e^{-1{,}2t} = 3000$ en dus $9e^{-1{,}2t} = \dfrac{3000 - G}{G}$
Invullen bij *G* ' geeft

$$G' = 1{,}2G \quad \frac{\dfrac{3000 - G}{G}}{1 + \dfrac{3000 - G}{G}} = 1{,}2G \quad \frac{3000 - G}{3000} = 1{,}2G\left(1 - \frac{G}{3000}\right) = 1{,}2G - 0{,}0004G^2$$

f. *G* '' = 1.2*G* ' – 0.0008*GG* ' = *G* '(1.2-0.008*G*).
g. *G* = 1500 invullen geeft *G* '' = 0.
(Bereken het snijpunt van de grafiek van *G* met de lijn *y* = 1500.)
Vanaf *t* » 1,831 verandert de toenemende groei van de pompoen in afnemende groei.

21 a. e^2
b. $F(x) = e^{5x}$
c. $F(x) = e^{-x}$

10 Logaritmische functies

1 a. De derde kolom is gelijk aan de eerste kolom, dus $Y_2 = X$.

$Y_2 = 10^{{}^{10}\log x} \qquad {}^{10}\log x = a \qquad 10^a = x$ dus $Y_2 = 10^{{}^{10}\log x} = 10^a = X$

b. Alleen de getallen in de tweede kolom zijn anders.

2 $e^{\ln x} = x \qquad \ln(e^u) = u$

3 **a.** $y = {}^2\log x$ geeft $2^y = 2^{{}^2\log x} = x$ dus $x = 2^y$

$x = 10^{\log x}$ en $2^y = (10^{\log 2})^y$ geeft $10^{\log x} = (10^{\log 2})^y$

b. Uit **a** volgt $10^{\log x} = 10^{y\ \log 2}$ dus $\log x = y\ \ \log 2$

c. $y = \dfrac{\log x}{\log 2}$

d. De grafieken liggen symmetrisch ten opzicht van de lijn $y = x$.
Je kunt dit mooi zien in een vierkant assenstelsel.

4 $y = {}^2\log x$ geeft $x = 2^y$ dus $e^{\ln x} = (e^{\ln 2})^y = e^{y\ \ \ln 2}$

hieruit volgt $\ln x = y\ \ \ln 2$ dus $y = {}^2\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$

5 **a.** $e^{\ln ab} = a\ \ b = e^{\ln a}\ \ e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$ dus $\ln ab = \ln a + \ln b$

b. $e^{\ln(a^t)} = a^t = (e^{\ln a})^t = e^{t\ \ \ln a}$ dus $\ln(a^t) = t\ \ \ln c$

6 $10^{\log ab} = a\ \ b = 10^{\log a}\ \ 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b}$ dus $\log ab = \log a + \log b$

$10^{\log(a^t)} = a^t = (10^{\log a})^t = 10^{t\ \ \log a}$ dus $\log(a^t) = t\ \ \log c$

7 $\sum_{k=1}^{10} \log k$ = log 1 + log 2 + log 3 + ... + log 10 = log(1x2x3x...x10) = log(10!)

8 $\sum_{k=1}^{n} \ln(2^k) = \sum_{k=1}^{n} (k\ \ \ln 2) = \ln 2\ \ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)\ \ \ln 2$

of $\sum_{k=1}^{n} \ln(2^k) = \ln 2^1 + ... + \ln 2^n = \ln(2^1 \text{ x ... x } 2^n) = \ln 2^{1+ ... n} = \ln 2^{\frac{1}{2}n(n+1)}$

9 Uit de raaklijnendriehoek volgt: in punt (x, ln$x$) is $rc_{\text{raaklijn}} = \dfrac{1}{x}$ dus $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$.

10 $\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\ln x}{\ln 10} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\ln 10}\ \ \ln x\right) = \dfrac{1}{\ln 10}\ \ \dfrac{1}{x}$

11 **a.** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{5}x^5\right) = x^4$; $\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{3}x^{-3}\right) = x^{-4}$

b. $\dfrac{1}{k+1}x^{k+1}$

12 **a.** $\dfrac{d}{dx}{}^2\log x = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\ln 2}\ \ \ln x\right) = \dfrac{1}{\ln 2}\ \ \dfrac{1}{x}$

b. $\dfrac{d}{dx}\ln 2x = 2\ \ \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{x}$ of $\dfrac{d}{dx}\ln 2x = \dfrac{d}{dx}(\ln 2 + \ln x) = 0 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$

c. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(2+x) = \frac{1}{2+x}$

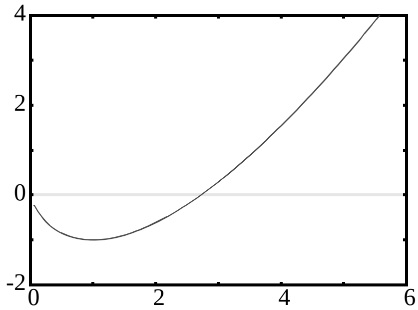
d. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t+\ln t) = 1+\frac{1}{t}$

e. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t \;\; \ln t) = 1 \;\; \ln t + t \;\; \frac{1}{t} = \ln t + 1$

f. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\ln t}{t}\right) = \frac{t \;\; \frac{1}{t} - \ln t \;\; 1}{t^2} = \frac{1-\ln t}{t^2}$

13 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln cx = c \;\; \frac{1}{cx} = \frac{1}{x}$ en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln c + \ln x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

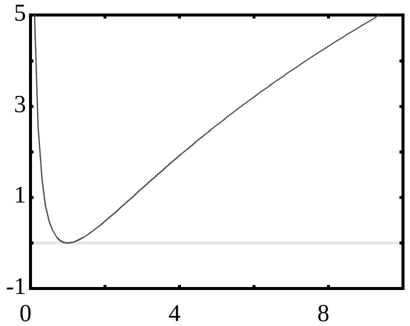
14 a.



b. De afgeleide van y geeft $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln x + 1 - 1 = \ln x = 0.$

Dus x = 1 en de top wordt (1, -1).

15 a.



b. y = 0 als ln$x$ = 0 dus x = 1

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x \;\; \ln x) = 2 \;\; \frac{1}{x} \;\; \ln x = \frac{2\ln x}{x}$

en x = 1 geeft $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$

In (1, 0) raakt de grafiek dus de x-as.

c. $y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2\ln x}{x} = \frac{x \;\; \frac{2}{x} - 2\ln x}{x^2} = \frac{2-2\ln x}{x^2} = 0$ geeft ln x = 1 dus x = e.

Het buigpunt is het punt (e, 1).

16 a. $\ln b + \ln\frac{a}{b} = \ln\left(b \;\; \frac{a}{b}\right) = \ln a$, dus $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$.

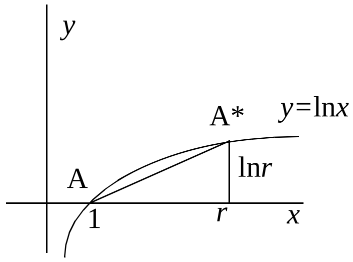
b. $\ln\frac{x+1}{x-1} = \ln(x+1) - \ln(x-1)$ dus $y' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

17 a.

b. Als r Ý» 1 dan is: rc_{AA*} Ý» $\mathrm{rc}_{\text{raaklijn in A}} = 1$

c. $P(p, \ln p)$, $P^*(pr, \ln pr)$

$$\mathrm{rc}_{PP*} = \frac{\ln pr - \ln p}{pr - p} = \frac{\ln\frac{pr}{p}}{p(r-1)} = \frac{\ln r}{r-1} \;\; \frac{1}{p}$$



zie figuur

$$\text{rc}_{AA*} = \frac{\ln r}{r-1}$$

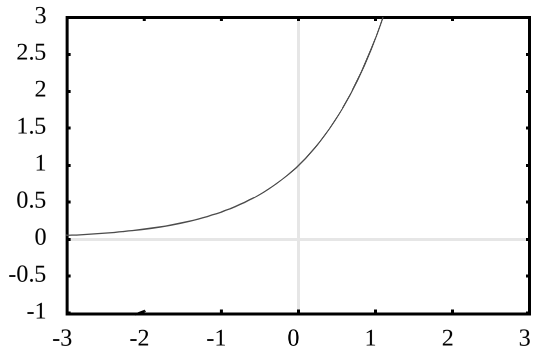
d. $\frac{1}{p}$

11 Lineaire benaderingen

1 **a.**

b. Het x-interval is nu $[-0{,}01\,,0{,}01\,]$

c. Je ziet dat $y \approx 1 + x$.



2 **a.** Tot en met x = 0.13.

3 Raaklijn in (1, e): $y' = e^x$, dus rc = e.
Vergelijking raaklijn c.q. de lineaire benadering is $y = e\,(x - 1\,) + e = ex$

4 **a.** Raaklijn in (0, 1) heeft rc = $2e^0 = 2$.
De lineaire benadering is $e^{2x} \approx 1 + 2x$ in de buurt van $x = 0$.

b. Raaklijn in (0, 1) heeft rc = 2.
De lineaire benadering is $(1 + x\,)^2 \approx 1 + 2x$ in de buurt van $x = 0$.

c. Raaklijn in (0, 1) heeft rc = 3.
De lineaire benadering is $(1 + x\,)^3 \approx 1 + 3x$ in de buurt van $x = 0$.

d. Raaklijn in (0, 2) heeft rc = $\dfrac{-2}{(1+0\,)^2} = -2$

De lineaire benadering is $\dfrac{2}{x+1} \approx 2 - 2x$ in de buurt van $x = 0$.

5 **a.** $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ geeft $y' = \frac{1}{2}\ x^{-\frac{1}{2}}$.
Raaklijn in (100, 10) heeft rc = $\frac{1}{2}\ 100^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.
De lineaire benadering: $\sqrt{x} \approx 10 + 0{,}05\,(x - 100\,)$ voor $x \approx 100$

b. De lineaire benadering geeft $\sqrt{102} \approx 10 + 0{,}05\ \ 2 = 10{,}10$.
De GR geeft $\sqrt{102} \approx 10{,}09950494 \approx 10{,}10$.

c. Tot en met $x = 106$.

6 $y = \ln(1+x)$ geeft $y' = (1+x)^{-1}$.
Raaklijn in (0, 0) heeft rc = 1, dus $\ln(1+x) \approx x$ voor $x \approx 0$.

7 Raaklijn in (1, 0) heeft rc = 1, dus $\ln x \approx 1\,(x-1) = x-1$ voor $x \approx 1$.

8 Raaklijn in $(x_0, \ln x_0)$ heeft rc = $\dfrac{1}{x_0}$.

De lineaire benadering is $\ln x \approx \dfrac{1}{x_0}(x-x_0) + \ln x_0 = \ln x_0 + \dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$ voor $x \approx x_0$.

9 a. $F(x) - L(x) = \ln x - \ln x_0 - \dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$, dus $\dfrac{F(x)-L(x)}{x-x_0} = \dfrac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0} - \dfrac{1}{x_0}$.
Als x nadert tot x_0, dan nadert $\dfrac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0}$ tot $\dfrac{1}{x_0}$, dus het verschil nadert tot 0.

10 a. $N(t) = b \cdot g^t$ met beginwaarde $b = N_0$ en groeifactor $g = 1.02$.
b. Bevolking verdubbelt als $N(t) = 2N_0$ dus als $1.02^t = 2$.
Hieruit volgt $\ln(1{,}02^t) = \ln 2 \Rightarrow t\ \ln(1{,}02) = \ln 2$. Dus $t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}02} \approx 35{,}003$
Na 35 jaar is de bevolking verdubbeld.

11 a. $K(t) = K_0 \cdot 1.05^t$
Verdubbeld als $1.05^t = 2$ dus $t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}21$, dus na ruim 14 jaar.

b. Verachtvoudigen is drie keer verdubbelen, dus na ongeveer 53 jaar.

12 a. 35 x 2 = 70 en ook 14.2 x 5 is bijnaÝ 70.
b. $1.25^t = 2$ voor $t \approx 3{,}1$.
3.1 x 25 = 77.5, de regel is bij dit percentage dus niet erg nauwkeurig.

13 a. $N(t) = b \cdot g^t$ met beginwaarde $b = N_0$ en groeifactor $g = 1 + \text{p}\% = 1 + \dfrac{p}{100}$.

b. Uit $N(d) = 2\,N_0$ volgt $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^d = 2$. Dit geeft $d = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$.

c. $\ln(1+x) \approx x$ geeft $d = \dfrac{\ln 2}{\frac{p}{100}} = \dfrac{100 \ln 2}{p}$ dus $d \cdot p = 100 \ln 2 \approx 69{,}3 \approx 70$.

d. De lineaire benadering geldt alleen in de buurt van $x = 0$, dus als $\dfrac{p}{100} \approx 0$.

14 a. $d \approx \dfrac{70}{2{,}5} = 28$ dagen = 4 weken.

b. In één jaar 13 x 4 weken, dus 13 keer verdubbeld. Het aantal bacterieën moet vermenigvuldigd worden met $2^{13} = 2^{10} \cdot 2^3 = 1024 \cdot 8 = 8192$, dus met ruim 8000.

15 a. $g^{2.35} = 0.5$ geeft $g = 0{,}5^{\left(\frac{1}{2{,}35}\right)} \approx 0{,}75$, dus dit is een afname van 25% per dag.
b. Ru-106 want de halveringstijd is ongeveer 1 jaar.
c. Voor halveringstijd h bij vervalpercentage p geldt:

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^h = 0{,}5 \text{ dus } h = \frac{\ln 0{,}5}{\ln\left(1 - \frac{p}{100}\right)} \approx \frac{\ln 0{,}5}{-\frac{p}{100}} = \frac{-100 \ln 0{,}5}{p}.$$

$h \cdot p \approx -100 \ln 0{,}5 \approx 70$

d. Pu-239 heeft een halveringstijd van ongeveer 244 eeuwen. Hetgeen neerkomt op ongeveerÝ $\frac{70}{244}$ per eeuw, dusÝ het vervalpercentage is 0.29%.

e. Vervalpercentage van 6.5% per jaar geeft halveringstijd van ongeveerÝ 11 jaar, dit is ongeveer 3930 dagen: het betreft KR-85.
Na 10 halveringstijden is er 1/1024-ste deel over, dit is bijna 1 promille. Dus na ongeveer 110 jaar.

16 Er geldt $F(x) - L(x) = (1+x)^3 - (3x+1) = 3x^2 + x^3$.

Dus volgt nu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - L(x)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 + x^3}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} (3x + x^2) = 0$.

Dit betekent dat L(x) een lineare benadering is F(x) in de buurt van x=0.

12 Kettingregel

1 $y_2 = 5 + 2(1 + 3x) = 7 + 6x$
Dus grafiek van y_2 is een rechte lijn met rc = 6.

2 **a.** $u = \frac{1}{2}(x-2) + 11 = \frac{1}{2}x + 10$ $\qquad y = 4(u - 11) + 24 = 4u - 20$

Dus $y = 2x + 20$.
Merk op:

$$2 \xrightarrow{u} 11 \xrightarrow{y} 24 \quad \text{en} \quad 4 \xrightarrow{u} 12 \xrightarrow{y} 28$$

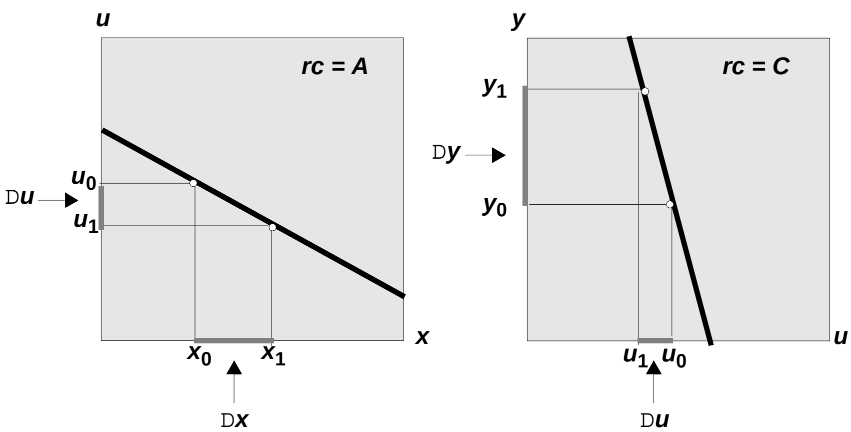
dus grafiek van y als functie van x door (2, 24) en (4, 28).
b. rc = 2, dit is precies 1/2 x 4.

3 Neem venster [0, 4] bij [10, 14]. Grafiek door (0, 12) en (4, 10).

rc = $\frac{1}{4}\ -2 = -\frac{1}{2}$

4 $y = C(Ax + B) + D = ACx + BC + D$
Dit is de vergelijking van een rechte lijn met rc = AC.

5



De volgorde van u_0 en u_1 verandert in het plaatje, maar aan het bewijs verandert niets.

6 **a.** $y_2 = \ln(1 + x^2)$, dus $y_2(x) = y_2(-x)$

b.

7 a. 1 gedeeld door de afgeleide van $1 + x^2$. Klopt niet voor $x = 0$.

b. Ongeveer 0.6 . (Gebruik dy/dx uit het CALC-menu.)

8 a. $\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6$ dus $\Rightarrow \Delta u \approx 6 \cdot \Delta x$

$\left[\frac{dy}{du}\right]_{u=9} = \frac{1}{1+9} = 0{,}1$ dus $\Delta y \approx 0{,}1 \cdot \Delta u$

$\Rightarrow \Delta y \approx 0{,}1 \cdot 6 \cdot \Delta x = 0{,}6 \cdot \Delta x$

b. Er staat nu precies het produkt van de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen.

c. Dat klopt.

9 a. $\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=x_0} = 2 \cdot x_0$

$\left[\frac{dy}{du}\right]_{u=u_0} = \frac{1}{1+u_0} = \frac{1}{1+x_0^2}$

b. Er staat precies het produkt van de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen.

10 a. $x \rightarrow e^x - 10 \rightarrow \sqrt[3]{e^x - 10}$ dus $u = e^x - 10$ en $y = \sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}}$

b. $y'(x) = e^x \cdot \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}e^x(e^x - 10)^{-\frac{2}{3}} = \frac{e^x}{3\sqrt[3]{(e^x - 10)^2}}$

11 a. (1) Als je een e-macht differentieert dan krijg je dezelfde functie.
(2) De e-macht blijft e-macht, alleen de exponent differentiëren.
(3) $u = \sqrt{x}$ en $y = e^u$ geeft $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^u = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

b. (3) is correct

12 a. $2xe^{x^2+1}$

b. $\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2x + 2\sqrt{x}}$

c. $e^x \cdot \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1}$

d. $(1 + 2t) \cdot \frac{1}{2}(1 + t + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1 + 2t}{2\sqrt{1 + t + t^2}}$

e. $\left(1 + \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t + \ln t}}$

f. $\frac{d}{dt}\sqrt{\ln t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln t}}$ dus $\frac{d}{dt}(t + \sqrt{\ln t}) = 1 + \frac{1}{2t\sqrt{\ln t}}$

13 a. $y'(x) = 2x \;\; \dfrac{1}{x^2 - 1} = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

b. $y(x) = \ln(x^2 - 1) = \ln((x + 1)(x - 1)) = \ln(x + 1) + \ln(x - 1)$

$y'(x) = \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x - 1}$

c. $y'(x) = \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} + \dfrac{x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

14 a. $\ln(\ln(x)) = 0$ als $\ln(x) = 1$ dus voor x = e, het snijpunt met x-as is (e, 0).
Merk op: ln(ln(x)) bestaat alleen als ln(x) > 0 dus als x > 1.

b. u = ln(x) en y = ln(u) geeft $y'(x) = \dfrac{1}{x} \;\; \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

Deze formule geldt voor x > 1.

c. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln(x)) = \ln(x) + 1$

$y''(x) = \dfrac{x\ln(x) \;\; 0 - (\ln(x) + 1)}{(x\ln(x))^2} = \dfrac{-\ln(x) - 1}{(x\ln(x))^2}$

15 $y'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$y''(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

16 a. $G'(x) = \dfrac{F(x) \;\; 0 - 1 \;\; F'(x)}{(F(x))^2} = \dfrac{-F'(x)}{(F(x))^2}$

b. $u = F(x)$ en $y = \dfrac{1}{u}$ geeft $y'(x) = F'(x) \;\; \dfrac{-1}{u^2} = \dfrac{-F'(x)}{(F(x))^2}$

17 $y' = \dfrac{-1}{(1 + x)^2}$ $\qquad y' = \dfrac{-2^x \;\; \ln 2}{(1 + 2^x)^2}$

$y' = \dfrac{-\dfrac{1}{\ln 2} \;\; \dfrac{1}{x}}{(1 + {}^2\log x)^2}$ $\qquad y' = \dfrac{\dfrac{1}{(1 + x)^2}}{\left(1 + \dfrac{1}{1 + x}\right)^2} = \dfrac{1}{(2 + x)^2}$

(hierbij is de eerste uitkomst gebruikt)

18 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-4x} = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$

a. $5 + \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$

b. $5 - \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$

c. $5\sqrt{x^2-4x} + 5x\,\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} = 5\sqrt{x^2-4x} + \frac{5x^2-10x}{\sqrt{x^2-4x}} = \frac{10x^2-30x}{\sqrt{x^2-4x}}$

d. $\dfrac{5\sqrt{x^2-4x} - \frac{5x^2-10x}{\sqrt{x^2-4x}}}{x^2-4x} = \dfrac{\frac{5(x^2-4x) - (5x^2-10x)}{\sqrt{x^2-4x}}}{x^2-4x} = \dfrac{-10x}{\sqrt{x^2-4x}\,(x^2-4x)}$

19 a. D3: G (x) = F (x + c) -> G'(x) = F'(x + c)

G'(x)= (F(x+c))'= F'(x+c) * $\frac{d}{dx}$ (x+c)=F'(x+c)*1=F'(x+c)

D5: G (x) = F (cx) -> G'(x) = cF'(cx)

G'(x)=(F(cx))'= F'(cx)*$\frac{d}{dx}$ (cx) = cF'(cx)

b. $\frac{d}{dx}(A(x))^3 = 3(A(x))^2\ A'(x)$

20 a. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$y'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y''(x) = \frac{\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 0 \text{ voor } x = 0.$$

21 a. $x^a = (\mathrm{e}^{\ln x})^a = \mathrm{e}^{a\ln x}$

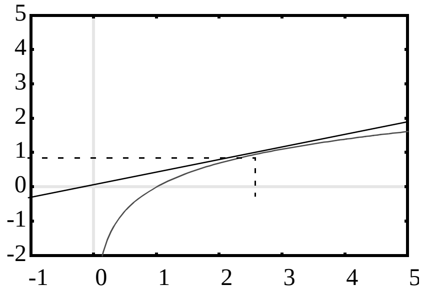
b. $(e^{a\ln x})' = \frac{a}{x}e^{a\ln x} = \frac{a}{x}\, x^{a} = ax^{a-1}$

Zelftoets

1 $F''(x) = 6e^{3x} \Rightarrow F'(x) = 2e^{3x} + c$. Omdat $F'(0) = 2 + c$ gelijk aan 7 moet zijn, geldt $c = 5$. $F'(x) = 2e^{3x} + 5$, dus $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + 5x + d$. $F(0) = 6$, dus $\frac{2}{3} + d = 6$, oftewel $d = 5\frac{1}{3}$.

Conclusie is: $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + 5x + 5\frac{1}{3}$

2 De raaklijn in $(p, \ln p)$ gaat door $(0,0)$ als en alleen als $\frac{\ln p}{p} = F'(p)$.



Oftewel $\frac{\ln p}{p} = \frac{1}{p}$ ofwel $p = e$.

Het raakpunt is $(e, 1)$ en de richtingscoefficient van de raaklijn is $\frac{1}{e}$.
De vergelijking van de raaklijn is dus $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$ ofwel $y = \frac{1}{e}x$.

3 **a.** OBAC is vierkant, dwz $x = \sqrt{9 - 2x^2}$ $\quad x^2 = 9 - 2x^2$ $\quad 3x^2 = 9$ $\quad x = \sqrt{3}$ ($x = -\sqrt{3}$ vervalt, wegens $x \neq 0$). Het punt A is dus $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

b. De oppervlakte van OBAC is $x\sqrt{9 - 2x^2}$. Om het maximum te vinden,

bereken je de afgeleide: $1 \cdot \sqrt{9 - 2x^2} + x\frac{-4x}{2\sqrt{9 - 2x^2}} = \sqrt{9 - 2x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{9 - 2x^2}}$

Als de oppervlakte maximaal zou zijn in het geval OBAC een vierkant was, zou de afgeleide nul zijn voor $x = \sqrt{3}$ (gevonden in a).

Dit is niet zo, want: $\sqrt{9 - 6} - \frac{6}{\sqrt{9 - 6}} = \sqrt{3} - \frac{6}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

Het vermoeden is dus niet juist! Welke rechthoek is dan wel maximaal?

$\sqrt{9 - 2x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{9 - 2x^2}} = 0 \quad 9 - 2x^2 = 2x^2 \quad x^2 = \frac{9}{4} \quad x = 1\frac{1}{2}$,

want $x = -1\frac{1}{2}$ vervalt, wegens $x \neq 0$. Het hoekpunt A van de rechthoek met maximale oppervlak is dus $(1\frac{1}{2}, \sqrt{4\frac{1}{2}})$.

4 **a.** $F(x) = (\ln x)^3$, dus $F'(x) = 3(\ln x)^2 \cdot (\frac{1}{x})$. Dit geeft $F'(e) = \frac{3}{e}$ en $F(e) = 1$.
De raaklijn in $(e, 1)$ is dus: $y - 1 = \frac{3}{e}(x - e)$ ofwel $y = \frac{3}{e}x - 2$.
De gevraagde lineaire benadering is dus $L(x) = \frac{3}{e}x - 2$

b. Bij $F(x) = (\ln x)^n$ krijg je voor de raaklijn: $y - 1 = \frac{n}{e}(x - e)$.
De lineaire benadering is $L(x) = \frac{n}{e}x - n + 1$.

5 **a.** $x = e^{\ln x}$, dus $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}$.

b. $\frac{d}{dx}(x^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln x}) = e^{x\ln x}\frac{d}{dx}((x\ln x)) = e^{x\ln x}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$.

c. $\frac{d}{dx}(x^x) = 0 \quad \ln x + 1 = 0 \quad x = \frac{1}{e}$

De minimale waarde is:

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\left(\frac{1}{e}\right)} = e^{-\left(\frac{1}{e}\right)} \approx 0{,}69$$

Je kunt dit controleren op de GR, welke dan de hiernaast gegeven grafiek geeft.