Een Ode aan de Cirkel

figuren, teksten en achtergronden bij de lezing op de NWD 2002
vrijdag 1 februari 14.45-15.30
Aad Goddijn, Freudenthal Instituut

deze handout, de bij de lezing gebruikte Cabri- en Maple-bestanden, en méér is op te halen op de website van de NWD: http://www.fi.uu.nl/NWD

1 Cirkels vooraf

Alexandr Rodchenko, V. Jermilov,
Stephan Antonakos, Hermann Glöckner,
Max Bill, Gerald Murpy, Robert Indiana,
Nina Boswinkel, Aad Goddijn,
National Geographic photographers,
Giotto, Jan Gossaert,
Euclides/Oliver Byrne, Dante,
Giovanni di Paolo, Max Bill, John Donne

2 Jupiter; cirkels in de Griekse sterrenkunde

probleemstelling

In het algemeen bewegen de buitenplaneten zich ten opzichte van de sterren van west naar oost, maar rond de tijd dat een planeet zich van ons uit gezien tegenover de zon bevindt (in *oppositie* is), beweegt de planeet van oost naar west: de retrograde gang. Dit is de reden waarom planeten dwaalsterren werden genoemd door de Babyloniërs.
Hoe is deze gang te verklaren en kan er aan gerekend worden?

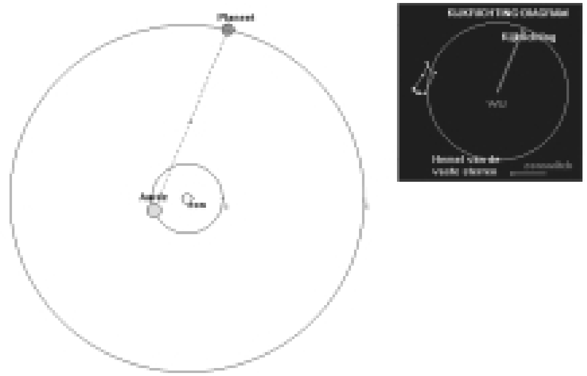
planetarium

Omdat sterren en planeten niet altijd zichtbaar zijn, gebruiken we een planetariumprogramma, dat erg eenvoudig te bedienen is, maar toch nauwkeurige waarnemingen in verleden, heden en toekomst weergeeft, laat zien en voorspelt: `Skyglobe`.

Cabribestand `PlaneetOudNieuw.fig`*; een model in 3 smaken*

Open het bestand en activeer via de optie *Animate* het middelpunt van 'Planeet' in het linkse model. De andere twee voorstellingen krijg je te zien door scrollen naar rechts of links met de schuiver onderaan. De punten *r* en *t* in het linkermodel kunnen horizontaal versleept worden om de grootte van de cirkelbanen aan te passen. De snelheidsverhouding van aarde en planeet wordt daaruit door het programma zelf bepaald via de derde wet van Kepler. (*De kwadraten van de omloopstijden verhouden zich als de derde machten van de lange assen van de (ellipsvormige) planeetbanen.).*

Volgens Aristarchos, Copernicus, Kepler, Galilei



Volgens Ptolemaeus epicykel hypothese

Volgens Ptolemaeus excenter hypothese

Cirkelmodellen

De drie modellen hebben de eenparige cirkelbeweging gemeen terwijl ze juist niet-eenparige bewegingen proberen te beschrijven. Typerend voor de Griekse wetenschapper is het wel: uit weinig en liefst zo simpel mogelijke elementen je systeem, hoe complex ook, opbouwen. De Griekse sterrenkunde heeft een diepgaand geometrisch karakter en de cirkel staat er hoog in aangeschreven. Dat zal lang de norm zijn in de sterrenkunde.

Plato (427-347): uniforme cirkelbeweging

Plato stelt met nadruk dat alleen de uniforme cirkelbeweging geschikt is om van het heelal een redelijk wezen te maken. Zie vooral het boek van Gregory. (Literatuurlijstje op blz. 3.)

fragmenten uit de Timaeus

[34 a. Over de constructie van de kosmos}

Want van de zeven[1] soorten beweging gaf hij dat schepsel die beweging mee die bij zijn vorm past en speciaal bestemd is voor geest en denkkracht. En daarom liet hij het heelal in een cirkel ronddraaien, in één richting en op één plek, in zijn eigen substantie.

[35, b-e. De beweging van het Ene lijkt die der vaste sterren te zijn, die van het Andere de beweging op de ecliptica. Plato is hier even heel 'Pythagoreïsch']

Vervolgens deelde Hij dit schepsel overlangs in tweeën, legde het midden van beide lijnstukken kruiselings over elkaar, boog de uiteinden tot een cirkel en verbond ze met elkaar, de ene cirkel loodrecht op de andere. En Hij liet ze op dezelfde plaats ronddraaien in een en dezelfde beweging, de ene cirkel aan de buitenkant en de andere aan de binnenkant. De buitenste cirkelbeweging noemde Hij die van het Ene en de binnenste die van het Andere. De cirkelbeweging van het Ene liet Hij horizontaal naar rechts lopen en die van het Andere diagonaal naar links. De belangrijkste kracht gaf Hij aan de kringloop van het Ene dat zichzelf gelijk blijft. Die liet Hij onverdeeld, maar de binnenste kringloop sneed Hij op zes plaatsen tot zeven ongelijke cirkels volgens de twee- en drievoudige intervallen, d.w.z. de reeks 2, 3, 4, 8, 9, 27. Van elk van beide soorten van intervallen zijn er dus drie, d.w.z. de tweevoudige interval van 2, 4, 8 en de drievoudige van 3, 9, 27. Hij liet de cirkels in tegengestelde richting draaien, drie met gelijke snelheid, d.w.z. de drie Zon, Venus en Mercurius. De vier andere, Maan, Mars, Jupiter en Saturnus, liet Hij met snelheden draaien die verschillen van elkaar en van de drie eerste snelheden en in onderlinge juiste verhoudingen. Toen de constructie van de kosmische ziel overeenkomstig de bedoelingen van de Schepper was voltooid, bouwde Hij daarbinnen de hele wereld van de lichamen, met als centrum van die wereld het centrum van de ziel, totdat het paste. Vanuit dat centrum wentelt alles wat er is, tot in de uithoeken van dit universum, en dit universum ook rondom draaiend omvattend; draaiend in en ook om zichzelf begon voor de ziel aldus een goddelijk leven vol geestkracht, dat zou reiken tot in eeuwigheid.

1. Uniforme cirkelbeweging, op, neer, naar voren en achter, links en rechts. De engelse vertaling van

fragmenten uit de "Wetten" over de beweging van de hemelen; 898,a-b

... de hele loop en de beweging van de hemelen en alles wat daarin is weerspiegeld de beweging en ommegang van redelijke berekening...

....regelmatig en uniform en op dezelfde plaats en rond dezelfde dingen in verband met dezelfde dingen ......

Astrologie bij Plato, ja of nee?

[Plato, Timaeus, 40c-d]
Maar de kringlopen van de sterren, hun kruisingen en hun terugkeer naar en vertrek van het uitgangspunt, welke goddelijke hemellichamen elkaar bij de vereniging ontmoeten, hoeveel er tegenover elkaar komen te staan, hoeveel er achter elkaar langs gaan, op welke tijden ze dan voor ons verborgen zijn of te voorschijn komen met onheilspellende voortekens over de toekomst - althans voor mensen die niet kunnen rekenen - dat alles bespreken is zinloos zonder een aanschouwelijke voorstelling.

[Shakespeare, King Lear Act I, Sc. II.]
This is the excellent foppery of the world, that, when we are sick in fortune,—often the surfeit of our own behaviour,—we make guilty of our disasters the sun, the moon, and the stars; as if we were villains by necessity, fools by heavenly compulsion, knaves, thieves, and treachers by spherical predominance, drunkards, liars, and adulterers by an enforced obedience of planetary influence; and all that we are evil in, by a divine thrusting on: an admirable evasion of whoremaster man, to lay his goatish disposition to the charge of a star!

Cirkels in coördinaten; Maple V

De cirkelbewegingen van aarde en planeet kan ook in enkele vergelijkingen worden uitgedrukt. De beweging van de aarde beschrijven we simpel:

$x_A(t)= cos(t), \qquad y_A(t) = sin(t);$

De planeet beweegt op *R* aarde-zon afstanden van de zon en zijn omloopstijd is *T* jaar:

$x_P(t) = R*cos(t/T), \quad y_P(t) = R*sin(t/T)$

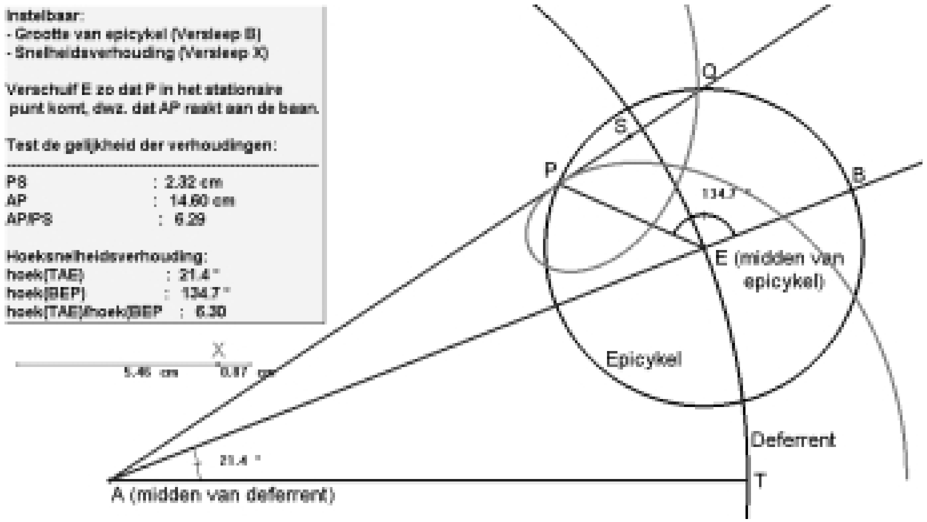
De richtingscoefficiënt van de kijklijn aarde-planeet is dan:

$$rico(t) = \frac{y_p(t) - y_a(t)}{x_p(t) - x_a(t)}$$

Om de stationaire punten van de kijkrichting te vinden gaan we dit differentieren naar *t*, de afgeleide nulstellen, de gevonden waarde (of uitdrukking in *R* en *T*) voor *t* invullen in *rico(t)*. Invullen van de waarden van *R* en *T* voor een specifieke planeet en van hellingsqoutiënt overgaan op hoek, geeft uiteendelijk de hoek tussen het midden van de oppositielus en een het stationaire punt. De massa rekenwerk die moet worden uitgevoerd laten we aan slaafje *MapleV* over. Gebruik het bestand `oppositielus1.mws`. Of `oppositielus.mws,` waarin de derde wet van Kepler wordt meegenomen.
De leiding over dit project heeft de persoon achter de toetsen, die ook *Maple* wel een handje moet helpen in de stijl van: misschien lukt het als je eerst de cos-formules samen neemt. Algebra met de computer doen: inzichtelijk sturen, overzicht hebben. De vraag blijft of dat te leren valt zonder dat men het algebrawerk zelf details kan uitvoeren.

de Almagest

- Compendium van Griekse sterrenkunde met eigen inbreng.
- Astronomie, geografie, astrologie, catalogus. Norm tot 1540.
- Geocentrisch wereldbeeld, epicykels.
- Waarnemingen belangrijk, ook van anderen; oa. Babylonisch, van na –747.
- Stationaire punten planeten: volgens Apollonius.



Ptolemaeus, Apollonius

Het borstbeeld van Ptolemaeus staat in de Kathedraal in Ulm; het is een werk van Jörg Syrlin uit 1469-74. (Ulm is ook nog de geboortestad van Albert Einstein.)

Over stationaire punten bij de epicykel-beweging

De figuur linksonder gaat over lemma van Apollonius.
Het middelpunt E van de epicykel beweegt over de grote cirkel, de deferrent. De Planeet beweegt over de epicykel. De draairichtingen zijn gelijk; de lineaire snelheid van de planeet op de epicykel is altijd groter dan de lineaire snelheid van E op de deferrent. De baan van de planeet heeft dan lussen. In de tekening: Q is het 'andere' punt waarin lijn AP de epicykel snijdt. S is het midden van PQ. Er geldt

Het lemma van Apollonius:

$$\boxed{\textbf{\textit{P is van A uit gezien stationair als}}\quad \frac{AP}{PS} = \frac{\text{draaisnelheid } P \text{ op epicykel}}{\text{draaisnelheid } E \text{ op deferrent}}}$$

In de Almagest van Ptolemaeus staat een fraai meetkundig bewijs; vd. Waerden neemt in zijn boek ook een 'modern' bewijs op.
In de figuur linksonder startte de beweging met E op punt T en P op lijn AT. Dan kunnen we vergelijken met $\angle PEB$ / $\angle EAT$. (De draaiing op de epicykel dus opvatten tenopzichte van AE!) Toetsbare tekening in Cabribestand `Apollonius.fig`.

Literatuur over geschiedenis van de astronomie (selectie)

J.L.E. Dreyer: *A history of Astronomy from Thales to Kepler.* (Dover 1953, oorspr. 1906)
Ptolemaeus: *Almagest* Vertaald en ingeleid door G.J. Toomer.
Asger Aaboe: *Episodes from the Early History of astronomy*, Springer 2001.
Thomas Heath: *Greek Astronomy*, Dover Publications, oorspronkelijk 1932
B. v.d. Waerden: *Ontwakende wetenschap; Egyptische, Babylonische en Griekse Wiskunde.*
Andrew Gregory: *Plato's philosophy of science*, Duckworth 2000.

Sterrenkunde op Internet

De astronomie is op het www rijkelijk aanwezig, zowel voor amateurs als professionals. Een algemene ingang is: `http://astronomie.pagina.nl/`. Veel Astrosoftware is daar te vinden in de rubriek Software. Planetariumprogramma *Skyglobe* is shareware: `http://www.physics.csulb.edu/100lonline/skyglobe/skyglobe.html` Het Jupitertwintigvlak (achterblad van deze handout) staat op `http://solar-views.com/cap/`. Of direct: `http://www.solarviews.com/cap/index/icosahedron1.html`. Er zijn daar ook bouwplaten te vinden van de andere planeten en hun manen, op basis van foto's van diverse ruimte sondes.

3 De Cirkel bij Dante

Dante Alighieri (1265 - 1321)

Dichter, politicus, filosoof, taalkundige, wetenschapper, Florentijn, banneling, mysticus-minnaar.

Belangrijkste werken:

Vita Nuova (Het Nieuw leven, 1293)
Autobiografisch. Beschrijft verband houdend met de ontmoeting met Beatrice.

Convivio (Het Gastmaal, 1304-1308)
3 canzona's van beperkte omvang, maar met zeer uitgebreid commentaar. Ogenschijnlijk liefdesgedichten, maar het commentaar groeit uit tot een bespreking van o.a. de Ptolemeische sterrenkunde.

Divina Commedia (De Goddelijke Komedie, 1313 en later)
Beschrijving van Dante's tocht rond Pasen 1300 door Hel, Louteringsberg en Hemel. Hij wordt begeleid door Vergilius en later door Beatrice. De tocht heeft duidelijk een spiritueel karakter maar Dante weeft in het geheel zijn politieke en wetenschappelijke en astronomische inzichten op levendige wijze in.

Dante op het WWW

Enkele van de Dante lokaties worden snel gevonden via de zeer nuttige On-line Books Page:
`http://digital.library.upenn.edu/books/`
Twee handige zoeksytemen op werk van Dante, commentaar, illustraties.
`http://dante.ilt.columbia.edu/comedy/index.html`
`http://dciswww.dartmouth.edu:50080/?&&&7&s`
Er is een gigantische hoeveelheid secondaire literatuur; elke uitgave van Dante's werk bevat wel een lijst. De volgende site geeft toegang tot 250.000 research papers:
`http://www.edlibrary.com/Dante/`

Deze tekstcollage

De volgende selectie van fragmenten geeft een indruk van de vele meetkundige en sterrenkundige verwijzingen in het werk.
Op de aangegeven weblocaties (NWD of http://fi.uu.nl/~aad) staat en uitgebreidere bloemlezing, maar ook die bevat nog maar een fractie van alle verwijzingen naar cirkels hemelsferen en planeten in het werk van Dante.

* * * * * * * * * * * * * * * *

Het Nieuwe leven (1293)

(Vita Nuova, Vertaling: Frans van Dooren; Uitgeverij Kwadraat, 1988)

Hoofdstuk XII, fragment. De eerste cirkel bij Dante.
... En ongeveer in het midden van mijn slaap droomde ik dat er in mijn kamer een jongeman naast me zat in sneeuwwitte kleren, die met een bezorgde uitdrukking op zijn gezicht naar mij keek. En toen hij een poosje naar mij had gekeken, was het alsof hij zuchtend het woord tot mij richtte en zei: 'Fili mi, tempus est, ut pretermictantur simulacra nostra. '[2] Toen meende ik dat ik hem herkende, want hij sprak op dezelfde manier tot mij als hij het al vele malen in mijn slaap had gedaan. En terwijl ik naar hem opkeek, leek het alsof hij vol deernis stond te schreien en wachtte tot ik een paar woorden tegen hem zou zeggen. Daarop vatte ik moed en sprak tot hem: '0 heer van alle adel, waarom huilt gij?', en hij antwoordde: 'Ego tamquam centrum circuit, cui simili modo se habent circumferentie partes; tu autem non sic.'[3] En toen ik over zijn woorden nadacht, leken ze mij zeer duister. Met als gevolg dat ik mijn uiterste best deed om te spreken en me als volgt tot hem richtte: 'Hoe komt het, heer, dat gij in zo duistere woorden tot mij spreekt?' En terwijl hij het Latijn liet varen, zei hij tot mij: 'Vraag niet meer dan nuttig voor u is.'

2. 'Mijn zoon, het is tijd dat we onze maskers afzetten.

Het Gastmaal (1304-1308)

(Convivio; vertaling Frans en Kees van Dooren; Ambo, 2001)

Eerste Canzone (fragment)
Gij wier begrip de derde hemel stuwt,
luister naar 't spreken in mijn hart, dat mij
zo vreemd voorkomt dat ik 't niet uit kan leggen.

[Fragmenten uit de toelichting op de letterlijke betekenis van dit alles.
De derde hemelsfeer is die van Venus. Alle hemelsferen en hun samenhang worden in volgorde toegelicht en met een van de zeven vrije kunsten verbonden. De zesde sfeer is die van Jupiter.]

De epicyclus van Venus
Op de rug van deze cirkel in de hemel van Venus, die nu ter sprake zal komen, bevindt zich een kleinere bol, die daar op eigen kracht ronddraait en waaraan de astrologen de naam Epicyclus geven.

De bewegingen van de hemel
Het aantal van deze Tronen[4], aan wie de beweging van deze hemel is toevertrouwd, is niet groot, ofschoon hierover door de filosofen en sterrenkundigen verschillend wordt gedacht, zoals dit ook het geval is wat betreft de bewegingen van deze hemel. Ze zijn echter allen van mening dat er

3. 'Ik ben als het middelpunt van een cirkel, tot hetwelk zich alle delen van de omtrek in gelijke mate verhouden; gij zijt echter niet zo.'
4. Een van de negen orden der engelen, aan wie Dante de beweging der hemelsferen toeschrijft.

zoveel zijn als de hemel bewegingen maakt. Zoals in het boek *De aggregatione scientiae Stellarum*[5] *op* grond van de beste astrologische bewijsvoering wordt geconcludeerd, zijn dat er drie: de eerste beweging maakt de ster in zijn epicyclus, de tweede in zoverre als de epicyclus en de hele hemel samen met de zon ronddraaien, en de derde volgens welke de hele hemel, die van de Vaste Sterren volgend, zich met een graad per eeuw van het westen naar het oosten verplaatst.[6]

Tweede Canzone (fragment)

Niet ziet de zon, die rond de wereld draait,
ooit zoiets edels als op ’t uur dat zij
haar licht zendt naar de plaats waar zich de vrouwe
bevindt over wie Amor mij doet spreken.

Commentaar van Dante zelf (fragmenten)

Ik begin met: *Niet ziet de zon, die rond de wereld draait.* Om dit goed te begrijpen moet men weten hoe de zon om de wereld draait.

[Drie punten: noordpool, evenaar en zuidpool. Dante plaatste ’Maria’ eerder als ’markering’ op de Noordpool.] Nu deze drie punten op de aardbol zijn aangegeven, is gemakkelijk te zien hoe de zon eromheen draait. De hemel van de zon maakt een omwenteling van west naar oost, die niet recht maar schuin tegen de dagelijkse beweging van dag en nacht ingaat. Hierdoor door snijdt haar middencirkel, die zich op gelijke afstand bevindt van de beide polen waarbinnen het lichaam van de zon zich bevindt, aan het begin van het teken van de Ram en aan het begin van dat van de Weegschaal de cirkel tussen die twee genoemde polen, omdat hij twee bogen beschrijft, zowel naar het noorden als naar het zuiden, die zich van deze cirkel verwijderen. De verste punten van deze bogen staan aan beide zijden even ver van de eerste cirkel af, namelijk drieëntwintig graden en één punt: bij het ene punt begint de Kreeft en bij het andere de Steenbok. Het gevolg daarvan is dat Maria de zon bij het begin van de Ram, als zij de cirkel tussen de eerste polen kruist, boven langs de aarde, of beter de zee, ziet draaien als een molensteen waarvan slechts de helft te zien is: zij ziet de zon in een spiraal van iets meer dan eenennegentig rotaties stijgen en dalen.

5. Van de Arabische sterrenkundige Alfraganus (overleden in 834).
6. De graad per eeuw komt overeen met de 36" per jaar die Ptolemaeus (85-165 na Christus) noemt voor de jaarlijkse verplaatsing van het lentepunt; wat we tegenwoordige aan de precessiebeweging van de aardas toeschrijven. Hipparchus (190-120 voor Christus) gaf overigens al de waarde 46", dichter bij de huidige bepaling: 50.26".

De Goddelijke Comedie

(Divina Commedia; vertaling: Ike Cialona en Peter Verstegen
Polak & van Gennep, 2000)

De Hel

I, 1-3
Begin van de Divina Commedia

Nel mezzo del camin di nostra via
mi ritrovai per una selva oscura
ché la diretta via ere smarrita.

Op het midden van ons levenspad gekomen,
kwam ik bij zinnen in een donker woud,
Want ik had niet de rechte weg genomen.

V, 1-3
[De Hel is een gigantische trechter die in de aarde is uitgehold; de diepere kringen zijn steeds kleiner.]

Wij kwamen bij de tweede kring en zagen
dat hij een minder weidse omvang heeft,
maar dat meer smart zich uit in luider klagen.

XXXIV, 82-87
[In het diepst van de Hel zit Lucifer, de grootste der duivels. Vergilius neemt Dante op de rug en klautert langs de vacht van Lucifer. Dante kijkt achteraf om en vraagt: waarom zien we Lucifer nu ineens andersom?]

'Wil, voor ik uit de afgrond op mag varen,
Meester,’ zei ik, toen ik weer was gaan staan,
'Mijn grote misvatting voor mij verklaren.

Waar is het ijs? Hoe kreeg hij het gedaan
Dat wij hem andersom zien? Kon ten tijde
Van de zonsondergang de zon opgaan?

Hij zei: 'Je bent niet meer aan gene zijde
Van 't middelpunt, waar ik mij langs het haar
Van deze kwade aardworm neer liet glijden.

Zolang ik nog omlaag ging, was je daar.
Maar toen ik keerde, kon je 't punt passeren
Dat alles wat gewicht heeft aantrekt. Maar:

Nu zul je in de hemisfeer verkeren,
Tegengesteld aan waar zich land bevindt
Onder welks zenit men de dood des Heren

Voltrok, die schuldloos alle schuld ontbindt.
Je hebt een cirkelvlak onder je voeten,
Keerzij van Judas' kring, en hier begint

De dag als men daar juist de nacht begroette.
Hij langs wiens vacht wij daalden: immermeer
Blijft hij hier in het ijs gekluisterd boeten.

De Louteringsberg

I, 13-30
[Aan het strand van het meer dat overgestoken moet worden om de Louteringsberg te bereiken. De blik kan nu weer naar boven worden gericht. Dante ziet Venus en het Zuiderkruis.Dante plaatst de Louteringsberg op aarde op het tegenpunt van Jerusulem.]

De lucht had van oosters saffier de zoete
En klare tint; tot aan de eerste sfeer
Was er geen wolk te zien op onze route.

Reeds vond mijn blik zijn oude vreugden weer,
Toen ik mij uit de doodse lucht bevrijdde
Die oog en borst benauwd had, meer en meer.

De schone dwaalster die ons blijft verblijden
Met liefde, schonk de oost haar milde lach,

De Vissen dovend die haar begeleidden.

Ik keek naar rechts en nu zag ik op slag
Vier sterren aan de pool ertegenover,
Die sinds de eerste mensen niemand zag.

De hemel straalde met zijn vonkentover.
0 Noorderland, verweduwd is uw staat:
Niets van dat sterrenlicht bleef voor u over.

Toen ik aan dit gezicht mij had verzaad,
En naar de eerste pool mijn blik liet glijden,
Zag ik niet meer de Wagen die daar staat.

XXVII, 1-9

[Schemering rond de Louteringsberg. In Spanje staat de Weegschaal in het Zuiden. De tijdaanduidingen kloppen niet; het breedteverschil tussen Ebro en Ganges is geen 180 graden.]

De zon verlichtte met haar eerste stralen
De stad waar Christus in de groeve lag,
De Ebro stroomde onder Libra's schalen,

De Ganges gloeide, midden op de dag,
En schemer kwam bij ons het licht verdringen,
Toen ik Gods vreugdevolle engel zag,

Buiten de vlammenzee waarlangs wij gingen,
En hem met luide stem het bijbelwoord
'Zalig wie rein van hart zijn!' hoorde zingen.

Paradiso

I, 37-42

Een berucht moeilijke passage.

De cirkels kunnen zijn: hemelevenaar, horizon, ecliptica, hemelmeridiaan door lente en herfstpunt van de zon.

De lamp der wereld kiest de plaats waar zij
Zal rijzen naar gelang het jaargetijde;
Maar komt zij op vanuit het punt waar wij

Vier cirkels met drie kruisen onderscheiden,
dan stempelt zij de aardse was met kracht,
Met gunstiger gesternte aan haar zijde.

II, 94-132

Dante denkt aanvankelijk dat de vlekken op de maan op verschillen in dichtheid duiden. Beatrice onderricht hem in elementaire optica en geeft en passant een toelichting op de hemelsferen.

Maar wat je voor onlogica behoedt
Is onderzoek: dat zal de krachtbron blijken
Die jullie aardse wetenschappen voedt.

Je zet drie spiegels neer, twee op gelijke
Afstand van jou, en een daartussen die
Veel verder staat, zover je oog kan reiken.

Zet nu achter je rug een lamp, en zie:
Haar licht wordt naar je blik teruggedreven,
Daar het weerspiegeld wordt door alle drie,

Terwijl de verste spiegel toch met even
Veel kracht uit deze meer verkleinde bron
Het luisterrijke schijnsel weer zal geven.

X, 1-21

Beschrijving en functie van de schuine hemelcirkel, de ecliptica.

Wil, lezer, een moment mijn ogen lenen
En zie de grote wielen die zich daar
Hoog in de hemel korte tijd verenen.

Zie deze schepping van de Kunstenaar,
Die Hij zo liefheeft dat Hijzelf Zijn ogen
Geen ogenblik laat afdwalen van haar.

De ene cirkel is schuin afgebogen:
Zo geven de planeten, zon en maan
De aarde wat zij vraagt, naar hun vermogen.

Had deze cirkel niet een schuine baan,
Dan was de hemel machteloos gebleken
En zou op aard geen levenskracht bestaan;

En als die baan niet zo was afgeweken,
Dan zou op beide helften van de aard
Een groot deel van de ordening ontbreken.

Blijf rustig zitten, lezer. Denk bedaard
Aan wat ik u als voorproefje liet weten,
Opdat het u verheugt, en niet bezwaart.

De spijs is opgediend; u mag haar eten.
Het wordt weer tijd dat ik mijn zorg besteed
Aan wat mij als mijn taak is toegemeten.

De zon, die als de krachtigste planeet
Haar invloed op de aarde neer laat stromen,
Waar men de tijd aan haar beweging meet,

Had afscheid van de evenaar genomen
En wentelde nu in de schroeflijn rond
Waarin ze daaglijks eerder op zal komen.

X111, 121-126

Wie, onervaren visserman op zee,
De waarheid zoekt, maar zonder haar moet keren,
Draagt op de weg terug zijn fouten mee,

Iets wat Parmenides heeft moeten leren,
Melissus, Bryson[7] ook, die alle drie
Gevoel voor richting bleken te ontberen,

XXIV, 13-18

Vergelijking met een klok.

Als wij een raderuurwerk bestuderen,
Blijkt van één rad de snelheid maar gering,
Terwijl een ander sneller zal roteren;

Zo mat ik aan de vaart der werveling
Hoe gelukzalig deze kringen waren,
Daar ieder in zijn eigen tempo ging.

7. Brysson van Heraclea (na 450 voor Christus) waagde zich aan de kwadratuur van de cirkel. Alexander Aphrodisiensis (210 voor Christus) zegt dat hij het gemiddelde nam van het omgeschreven en ingeschreven vierkant van de cirkel. Veel historici denken dat Brysson zo dom niet was en een complexere benaderingsmethode met in- en omgeschreven veelhoeken had.

XXXIII, 97 -145

Slot van de Divina Commedia. Dante wenst de goddelijkheid en menselijkheid van Christus tesamen te kunnen zien; hij vergelijkt de moeilijkheid hiervan met de kwadratuur van de cirkel wordt als beeld. Tot slot nog eenmaal de cirkelbeweging, de liefde, de sterren.

Ik kan niet zeggen dat die klare Gloed
Meer vormen kreeg terwijl ik naar Hem staarde —
Hij is zoals Hij was, volmaakt en goed —

Maar wel dat, toen mijn blik meer kracht vergaarde,
Hij zich allengs, door mijn verandering,
In andere gedaante openbaarde;

Want in die diepe, klare fonkeling
Verschenen er drie cirkels voor mijn ogen,
Anders van kleur, gelijk van tekening.

Twee waren identiek, als regenbogen
Elkaar weerspiegelend; de derde leek
Een vuur, aan beide andere onttogen.

Hoe ontoereikend is mijn woord, hoe bleek,
Door deze machteloze pen beschreven,
De weergave van dat waarnaar ik keek!

O eeuwig Licht, slechts door Uzelf omgeven,
Dat slechts Uzelf doorgrondt en, zo doorgrond,
Uzelf bemint en toelacht, bron van leven!

Ik bleef aandachtig en met open mond
Naar de aan U gelijke cirkel kijken
Die als reflectie binnen U ontstond,

En zag daarin het beeld van mijn gelijke,
De mens, dat als die cirkel was gekleurd;
Een beeld waarvan mijn blik niet wilde wijken.

Als de meetkundige die het betreurt
Dat hij de cirkel niet vermag te meten
En die vergeefs naar de principes speurt,

Zo raakte ik toen van de wens bezeten
Meer van het beeld, zijn plaats in deze kring
En zijn versmelting met die vorm te weten.

Al was mijn eigen vleugelkracht gering,
Een bliksemflits trof mijn begripsvermogen
En bracht mij van die dorst verzadiging.

Mijn kracht tot Godsaanschouwing was vervlogen,
Maar als een wiel dat staag zijn kring beschrijft,
Zo werden mijn gevoel en wil bewogen

Door liefde die de zon en sterren drijft.

4 Cirkels alleen

In een zaterdagpracticum komt ’zuivere’ meetkunde aan de orde die aansluit bij deze lezing. Ook een ’draai-visie op de stelling van de constante hoek op de koorde.
Niet zoals hieronder!

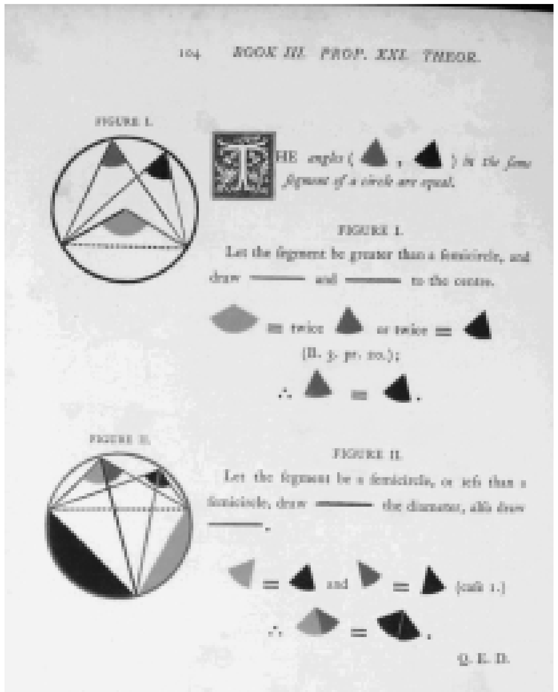

104 BOOK III. PROP. XXI. THEOR.

FIGURE I.

THE angles (,) in the same segment of a circle are equal.

FIGURE I.

Let the segment be greater than a semicircle, and draw ___ and ___ to the centre.

= twice or twice =

(B. 3. pr. 20.);

∴ = .

FIGURE II.

FIGURE II.

Let the segment be a semicircle, or less than a semicircle, draw ___ the diameter, also draw ___.

= and = (case 1.)

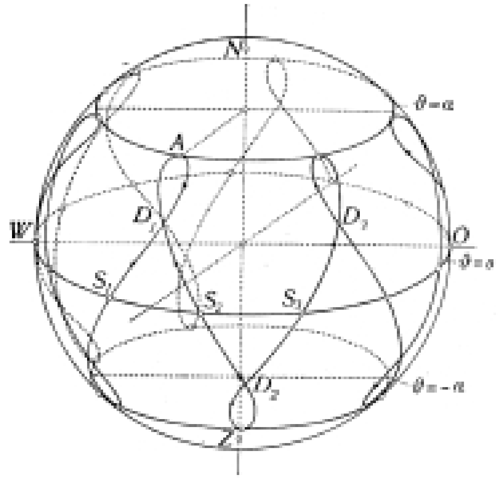
∴ = .

Q. E. D.

Dit komt uit de Euclides-editie van Oliver Byrne, 1847. Zie `http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/Euclid/euclid.html`

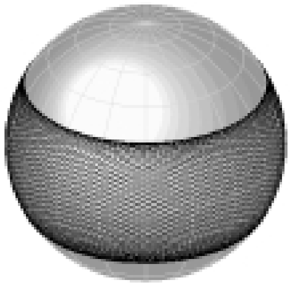
5 Cirkels en satellietbanen

Stel je voor: een kunstmaan draait om de aarde. De beweging vindt plaats in een vlak in de ruimte. De draaiende aarde draait er onafhankelijk onderdoor.
Hoe beweegt de satelliet nu, gezien vanaf de aarde? Of anders gezegd: stel je voor dat de satelliet loodrecht onder zich een spoor nalaat op de aarde. Hoe ziet dat spoor er uit?
O. Bottema schreef hierover in een van zijn ’Verscheidenheden’ onder de satellietloze titel: ’De beweging van een punt over het aardoppervlak. (nr. LIV, zie Euclides 39e jrg, nr. 3, 1963/64)
Merkwaardige banen bleken mogelijk. Een van de afbeeldingen uit Bottema’s werk:

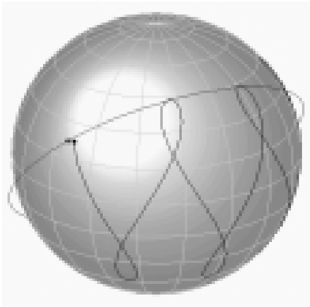


De tekeningen werden gemaakt door W. Th. Bousché; apart vermeldt Bottema erbij: met alleen de tekst als uitgangspunt. Dat moet indertijd een lastige klus geweest zijn.
Jan van de Brink beschreef hoe leerlingen deze banen onderzoeken in het Bottemaherdenkingsnummer van Euclides: januari 2002.

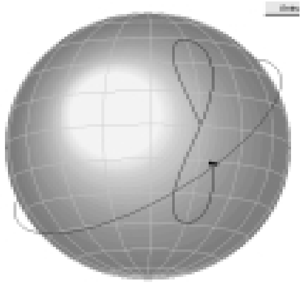
Peter Boon maakt een mooie java-applet, SATBAAN, waarmee de mogelijke banen heel fraai zijn te onderzoeken. Die applet wordt onderdeel van het wisweb (www.wisweb.nl), met een toelichting en werkbladen erbij.
We kijken niet naar de hoogte waarop de satelliet zich bevindt, alleen naar wat doorgaans de 'aardse projectie' van de satelliet heet. De snelheidsverhouding satelliet-draaiende bol is daardoor vrij te kiezen. Door varieren van onderlinge snelheden van aarde en satelliet en van de stand van het vlak waarin de satelliet draait, krijgen we vele mogelijkheden.



a: Snelle satelliet; baan lijkt op bolletje touw.

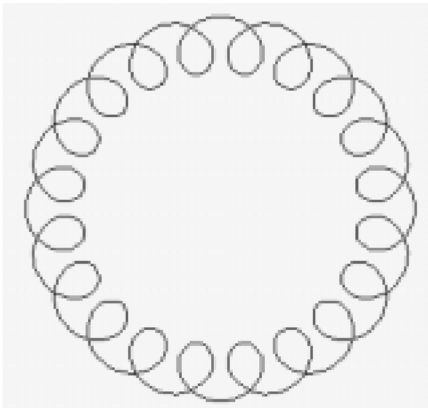


b: Snelheid satelliet iets langzamer dan die van de aarde. Er ontstaan lussen.



c: Snelheden gelijk. De hippopede ontstaat, de paardenschoenveter van Eudoxos.

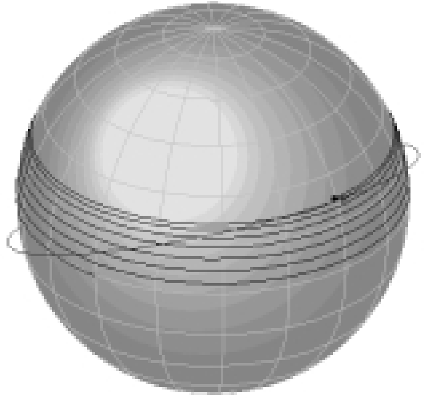
Projecteer de (volledige) baan van b op het evenaarvlak; SATBAAN doet dit voor ons.
Een kromme verschijnt die verdacht veel lijkt op de banen van de planeten in het epicykelmodel!
Dat is inderdaad juist; het meetkundige bewijs komt in het zaterdagochtendpracticum aan bod.



6 Zon als cirkelsatelliet

Beschouw de zon eens als een satelliet die om de aarde draait; redelijk ver en behoorlijk langzaam: omloopstijd één jaar, tegenkloks. (Eigenlijk is het andersom, de aarde is een satelliet om de zon, maar wat de zichtbare verschijnselen betreft, maakt het niet uit).
Het baanvlak maakt een hoek van 66°34" met de aardas. De aarde draait zelf 366.24 maal om zijn as (tegenkloks) in één jaar; in een zonne-omloop keert de aarde dus gemiddeld zo'n 365.24 maal zijn zelfde gezicht naar de zon. Dát is de dagelijkse beweging van de aarde die ons dag en nacht levert.

Met SATBAAN simuleren we dat eenvoudig. De draaiverhouding is (ruwweg) zon staat tot aarde als 365 staat tot 1, de helling van de baan is 23°26". Omdat de tekening anders dicht loopt, kiezen we 1 : 30 voor de draaiverhouding. Vergelijk het resultaat maar met wat Dante beschrijft in de Convivio, hierboven blz. 5: de spiraalbaan van de zon, die je in de periode 21 maart-21 september op de Noordpool in zijn geheel kunt volgen en op onze breedte maar beperkt.



Zie ook het fragmentuit Paradiso X op bladzijde 6, waarin Dante aangeeft dat zonder deze seizoensbeweging op aarde geen levenskracht zou zijn.
De afbeelding die SATBAAN hier geeft kan op twee manieren worden opgevat:

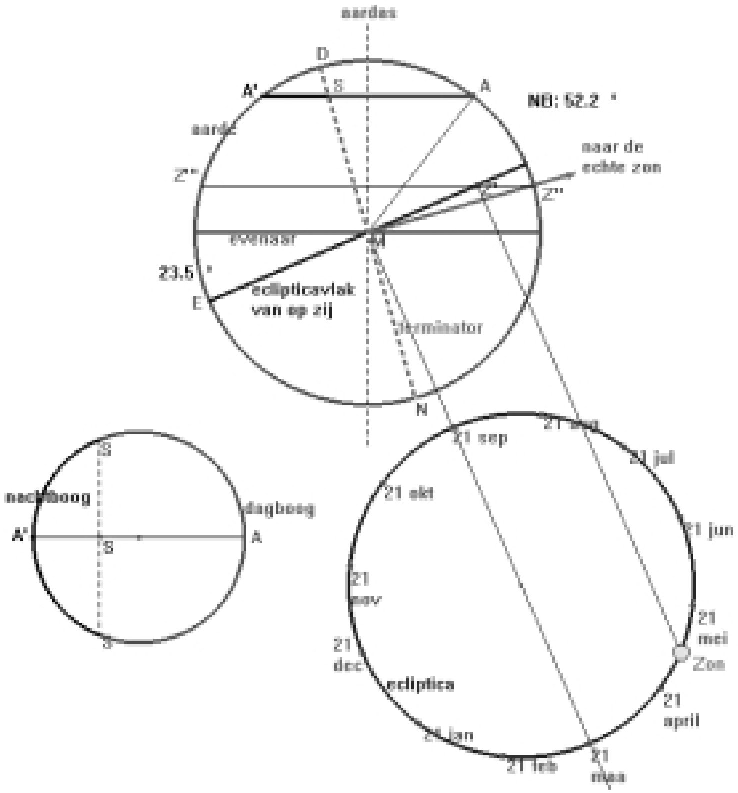
a De baan van de aardse projectie van de zon is getekend. Dwz. punt op aarde waar de zon loodrecht boven staat.
b De pijl van het midden van de bol naar het lopende punt stelt de richting naar de zon voor vanaf de plek van de aardse waarnemer.

7 Daglengte volgens een cirkelmodel

De zon staat ver van ons af. Hij verlicht dus steeds precies de helft van de aardbol. De schaduwgrens is een grootcirkel op de aardbol. Het vlak van deze cirkel staat loodrecht op de lijn aarde zon. Die cirkel verdeelt elke parallelcirkel in een donker en een licht deel. De grootteverhouding van die delen is een juist de verhouding dag-nacht voor wie zich op een punt van die parallelcirkel bevindt. Je draait daar als vast bewoner immers eigenlijk je dagelijks rondje over die cirkel.
In feite beschouwen we de zon nu als per dag stilstaand op zijn schijnbare baan langs de sterren. Of: de spiraal van de vorige afbeelding benaderen we met steeds een dagelijks parallelcirkel en een kleine sprongetje omhoog; het is een benadering.
Het Cabribestand `daglengte.fig` gebruiken we als hulp bij deze meetkundige daglengtebepaling Rechtsonder kan de zon op de juiste datum ingestelde worden. Je stelt in feite de kijkrichting vanuit het middelpunt van de blauwe cirkel naar de zon in.
Die richtingspijl moeten we op de aarde terugvinden, we moeten namelijk weten boven welk aardse parallelcirkel de zon precies staat. In het bovenste deel van de afbeelding zien we de eclipticacirkel van opzij. Door loodrecht projecteren is de positie van *Z'* erop gevonden. De pijl *MZ'* wijst als het ware ruimtelijk naar de zon.
De parallelcirkel *Z''Z'''*, dat is dus de parallel cirkel waarboven de zon deze dag staat. De

hoek van *MZ*’ met het evenaarvlak zien we onvervormd terug in de hoek die *Z”M* met de evenaar maakt. Anders gezegd: draai het systeem aarde-met-zonnerichting voor het gemak even zo dat Z’ op *Z”* komt, zodat we nu mooi dwars op het vlak aardas-zon kijken. Loodrecht op *MZ”* kan nu de dagnachtgrenscirkel getekend worden; de zg. terminator die we nu van opzij zien, de lijn *DN*. Die verdeelt ’onze’ parallelcirkel *AA*’ in een dag- en nachtdeel. Linksonder is de parallelcirkel in ware gedaante getekend om de verhoudingen zichtbaar te maken.
Door verschuiven van de zon op de ecliptica cirkel zien we op die dag-nacht cirkel mooi de jaarlijks verandering van de daglengte. Door verslepen van *A* naar andere breedtes krijgen we zicht op daglengteverloop op andere plaatsen op de wereld.

Deze Cabri-constructie vraagt wel wat voorstellingsvermogen, vooral bij de draaiing van *Z*’ naar *Z*’’. Maar de gebruikt meetkundige technieken zijn eigenlijk erg eenvoudig. Er wordt ook geen enkele berekening gemaakt en het geheel past daarom mooi in de sfeer



van de Griekse sterrenkunde, die toch eigenlijk één grote meetkundige beschouwing over de cirkelbeweging is.
De traditionele manier dit probleem aan te pakken, is de formules van de *boldriehoeksmeting* uit de boekenkast te halen. Maar zonder een goede voorstelling van de bewegingen gaat het daarmee ook niet!

8 Zonnelus, tijdsvereffening

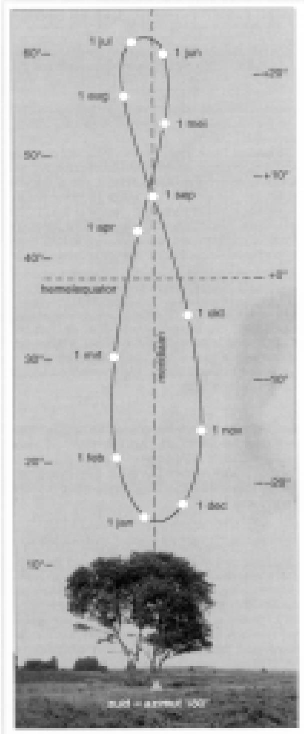
Uit de daglengte kunnen we niet zomaar de tijden van zonsopgang en zonsondergang bepalen; de gedachte ligt voor de hand de twee tijden op gelijke afstand van het midden van de dag te bepalen. Het midden van de dag, dwz. het moment waarop de zon op zijn hoogst staat. Helaas is dat moment geen constant moment op de dag...

We hebben de spiraalbaan van de zon gezien. De aardse toeschouwer ziet eenvoudig weg in één jaar de zon 365 keer voorbijkomen, het voorbijkomen gaat van laag naar hoog en weer terug. Kijk nu elke dag alleen heel even op een vaste kloktijd (bij voorbeeld precies 12 uur ’s middag) naar het zuiden en onthoud waar de zon staat. Je maakt een film van één beeldje per dag, maar de beeldjes samen vertellen je hoe je de zon zou zien als de aarde zelf ook één keer per jaar langzaam maar heel regelmatig omdraaide. Dat is juist voorbeeld c op bladzijde 8! De zon maakt op deze manier beschouwd volgens SATBAAN een achtvormige lus.
Die lus moet je echt met SATBAAN zien ontstaan. Begin op de evenaar. Nu start de ’satelliet’ enigszins schuin naar het noorden en kan dan de aarde ook niet helemaal bijhouden. Nu draait de satelliet met constante snelheid en naarmate de satelliet noordelijker komt is dat pure winst. De onderliggende aardepunten gaan noordelijk immers langzamer! Na een kwartbaan is de satelliet dan ook weer op dezelfde meridiaan terug als bij het starten op de evenaar. De andere drie kwarten van de baan laten zich evenzo beschrijven.
Zo ontstaat de zonnelus, het analemma. De doorgang van de zon door het zuiden (of het noorden als je ver genoeg zuidelijk woont) is dus niet altijd op de zelfde tijd. Maar die doorgang geeft wel de hoogste stand van de zon en ligt in tijd midden tussen zon op en zon onder.
SATBAAN laat nog mooi zien dat de evenaarprojectie van het analemma een cirkeltje is. (Het is een leuke uitdaging daar een meetkundig-elementair bewijs voor te zoeken.)

kort historisch intermezzo

Sterrenkundehistorici als O. Neugebauer en Asgen Aaboe houden het voor mogelijk dat Plato’s tijdgenoot Eudoxos dit al wist.

Eudoxos noemt de acht-figuur de hippopede, de paardenveter. Hij probeerde de lusgang van de planeten met behulp van de hippopede te verklaren. Twee bollen samen leveren de hippopede, een derde bol zet het hele systeem in een draaiing die de hippopede zelf in zijn lengterichting doet rondgaan. Het eindresultaat is een punt dat meestal vooruit, en soms achterwaarts beweegt. Zie het genoemde boek van Aaboe of zie de (schaarse) historische bronnen zelf in het boek van Heath.

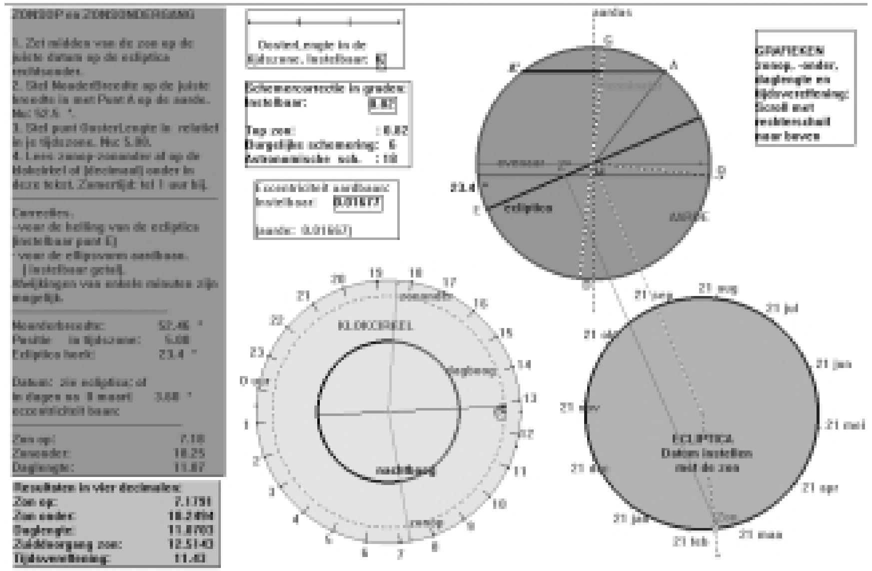


Deze afwijking van de’regelmatige’ zuiddoorgang is nog geheel meetkundig met cirkelbewegingen te overmeesteren, maar we zijn er nog niet.
De Sterrengids 2002 (jaarlijks uitgave van Stichting ’de Koepel’) illustreert de zonnelus zoals hierboven. Met `Skyglobe` kun je dat bijvoorbeeld uittesten. Dat de lus niet symmetrisch is, komt omdat de aarde *niet* met constante snelheid om de zon rondgaat. De werkelijke baan van de aarde is een ellips en dichtbij de zon beweegt de aarde nu eenmaal sneller dan ver van de zon. Omdat de asdraaiing van de aarde wél vast is, geeft ook dit een bijdrage aan de schijnbare linksrechtsbeweging van de zon, die we waarnemen als we de film van één beeldje per dag bekijken.
De preciese beweging van de aarde over de ellips is al door Kepler onderzocht. Keplers beschrijving van zijn waarnemingen is later door Newton onderbouwd met behulp van diens theorie over de zwaartekracht van de zon. Een uitvoerige beschrijving staat in : *Heinrich Dörrie, 100 Great problems of Elementary Mathematics (Dover pocket).*
In het Cabri-bestand `Kepler.fig` staat een illustratie daarbij.

9 Zon op, Zon onder

De invloed van de helling van de ecliptica en de invloed van de ellipsvormigheid van de baan zijn in goede benadering in Cabri op te vangen. Het totaal resultaat staat in `Zonoponder.fig`, waarvan hier een schermbeeld.
Weer kan de zon op de juiste datum worden gezet. Nu geven zowel de wijzers in de gele cirkel links als getallen de zonsop- en ondergangstijden aan.
Instelbaar zijn:

a woonplaats (NB en OL apart)



b hoek die de zon onder de horizon moet zijn (zontopje+breking of de 18 graden van de astronomische schemering)

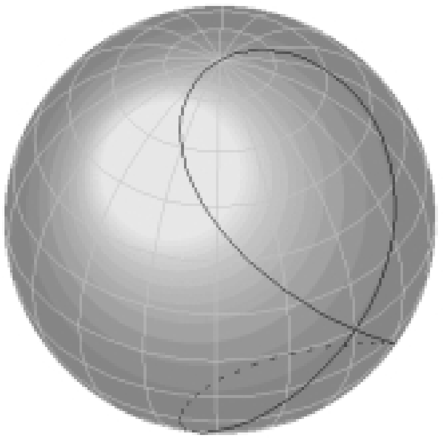
c helling van de ecliptica

d eccentriciteit van de aardbaan.

De laatste twee liggen in werkelijkheid uiteraard vast, maar door ze instelbaar te maken, kan beter onderzocht worden hoe de twee genoemde correcties uitwerken.
Laten we de Zon via de Animate-optie rondgaan, dan is mooi te zien dat de wijzers op de gele schaal wel uit elkaar en naar elkaar gaan om de daglengte variatie aan te geven, maar dat het paar als geheel gestuurd wordt door de tijdsvereffening die ook als figuurtje zichtbaar is, rechts van het midden van de klokcirkel.
Op 21 december is de daglengte minimaal. Na 21 december wordt de dag dus langer, maar het moment van zonsopgang blijft nog acht dagen lang steeds later vallen. De zonsondergang valt ook steeds later; veel mensen beleven dat zo: de avond schemering laat zien dat de dag langer wordt, maar ’s ochtends valt het nog wat tegen met de komst van de zon.
In de grafiek die `Zonoponder.fig ook` meelevert (scroll naar boven) is te zien dat de tijdsvereffening in de periode na 21 december juist wel snel verandert. Vandaar.

10 De Vensters van Viviani; cirkelcilinders

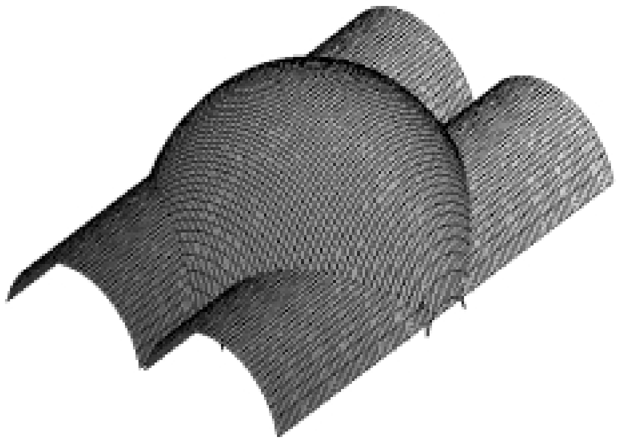
Hier is nog een zeer speciaal geval bij SATBAAN. Neem de hoek van het satellietvlak t.o.v de evanar 90 graden en neem de snelheidsverhouding 1 op 1, en samenop draaiend.



We weten dat de baan op een cilinder ligt.
Resultaat: de krommem die ontstaat als een bol gesneden wordt door een cilinder met de halve straal van de bol, waarbij de cilinder raakt aan de bol en ook door het middelpunt gaat.

Viviani (1622-1703), de laatste leerling van Galilei, stelde het volgende probleem:
Maak vier gelijkvormig vensters in een halve bol, zodanig dat het overblijvende bolstuk 'kwadrateerbaar is'.

Kwadrateerbaar: de oppervlakte moet bij gegeven straal van de halve bol met passer en liniaal geconstrueerd kunnen worden.
Viviani doorsneedt de halve bol met twee halve cilinders, zoals te zien in de met Maple V gemaakte schets:
Het oppervlaktestuk boven de cilinders noemt Viviani het *Vela Quadrabile Fiorentina*.



Laat de straal van de bol R zijn; dan geldt:

$$\text{\textit{Opp. bolstuk buiten de cilinders}} =$$
$$\text{\textit{Opp. cilindersloten binnen de bol}} = 4\,R^2$$

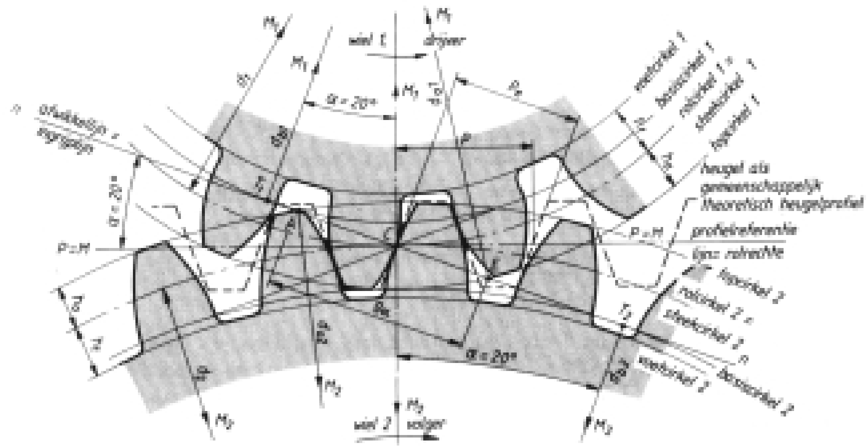
Tip voor het vinden van een bewijs:
De cylinders zijn afwikkelbaar, dus vlak te maken. De bol niet. Maar: Denk eens aan bekende oppervlaktetrouwe kaartprojectie.

11 Getande cirkels

constante overbrengingsverhouding

Het is niet zo dat als een tandwiel perfect regelmatig draait en een ander tandwiel aandrijft, dat het aangedreven wiel dan óók perfect regelmatig loopt. Het hangt van de vorm van de tanden af of dat inderdaad zo is. In `Tandregel.fig` wordt dat gedemonstreerd. De eis van constante overbrenging is essentieel, ook al zijn de hoeksnelheidsverschillen klein. Zonder constante overbrenging gaan tandwielen elkaar klapperend aandrijven en erger is spoedig te verwachten.

Steekcirkels, de hoofdregel



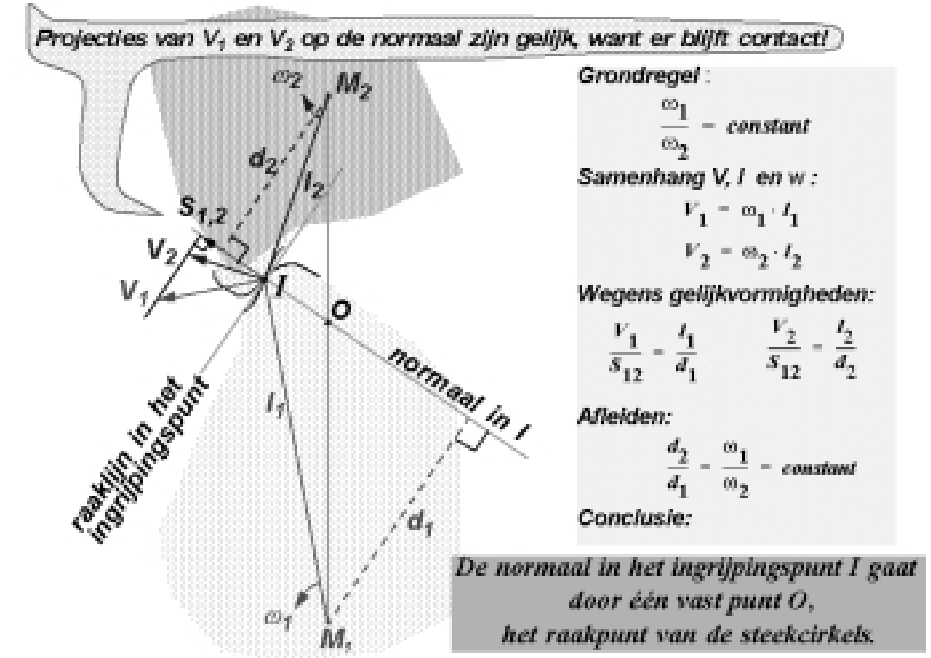
Bij elk tandenpaar horen twee zogenaamde steekcirkels.
De steekcirkels zijn per definitie zó:
- ze hebben als middelpunten de middelpunten der tandwielen
- ze raken elkaar
- ze hebben de straalverhouding gelijk aan de tanden verhouding en dus gelijk aan het omgekeerde van de overbrengverhouding.

Is het systeem in beweging, dan draaien de steekscirkels sliploos langs elkaar in dat raakpunt. De hoofdregel van de tandvormen is nu deze:

De normaal op de tandflank in het punt waar de tandwielen contact hebben, gaat door het raakpunt van de steekcirkels.

Dit kan meetkundig uit de overbrengingseis afgeleid worden.
In de volgende figuur zijn M_1 en M_2 de middens der tandwielen en is I het contactpunt,

dat gewoonlijk ingrijpingspunt wordt genoemd.
De afleiding is in deze figuur ondergebracht.



constructie van Reulaux

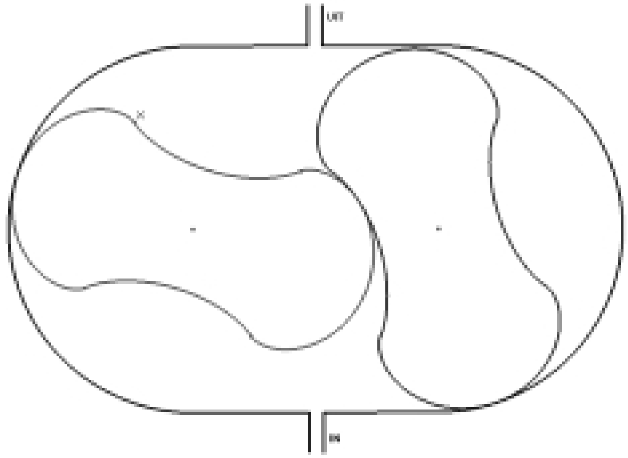
Met behulp van deze hoofdregel kan volgens de zg. constructie van Reulaux bij een gegeven tandflank de tegentand puntsgewijs geconstrueerd worden. In `reulaux-recht.fig` is dat gedemonstreerd en toegelicht voor een gegeven rechte tandflank.

speciale tandvormen

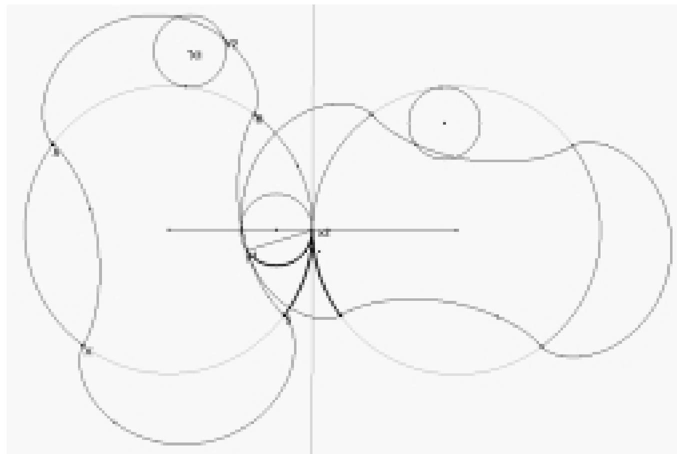
De meeste tandwielen hebben z.g. evolvente tanden. De ronde tandflank is op te vatten als ontstaan door afwikkeling. Leg eens een lat (een lijnstuk) tegen een ronde stok, rakend en dwars op de stok. Markeer het raakpunt op het latje en rol het latje sliploos om de stok. Het gemarkeerde punt beschrijft een evolvente. "Evolvente' wordt consequent door tandwielkundigen gebruikt, differentiaalmeetkundigen preferen 'cirkelinvoluut'.
De figuur hierboven onder het kopje 'Steekcirkels' laat evolvente tanden zien. Bij evolvente tanden beschrijft het ingrijpingspunt een rechte lijn.
Evovente tanden zijn geliefd wegens een bijzondere eigenschap: ook als de hartafstand van de tandwielen iets vergroot wordt, blijft de o.verbrengverhouding constant. Bewijs: zie de later genoemde literatuur.

Een pompje

Bestand `tweetandpomp.fig` toont de werking van een eenvoudig pompje.
Met *Animate* breng je punt *X* en het pompje tot leven. Het draait, beide onderdelen even snel en even regelmatig, en het pompt.



Elke van de twee draaiende delen heeft twee convexe en twee concave stukken. Met Cabribestand `pompwerking.fig` is te bekijken hoe de stukken ontstaan: door afrollen aan binnen of buitenkant van een cirkeltje met halve straal van de steekcirkels. De betrokken krommen zijn epicycloiden en hypocycloiden.

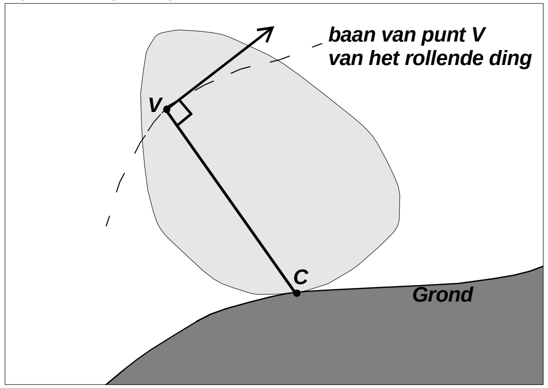


Bewezen moet nog worden dat aan de hoofdregel voldaan is. Draai daartoe de wielen met de afrolcirkels in de stand van de figuur hiernaast
Nu geldt algemeen voor afwikkelkrommen als epi- of hypocycloide:

de nomaal op de baan van een punt X van het rollende wiel gaat door het contact van het rollende wie met de grond.
Daaruit volgt dat aan de hoofdregel voldaan is.

De bewering over de normaal op deze cycloide-achtigen kan intuitief begrepen worden.

Van het rollende ding staat één punt, het contactpunt *C*, stil op de grond. Van vaste lengte *VC* beweegt *V* wel, maar *C* staat momentaan stil, *V* beweegt dan momentaan alsof het een cirkelbeweging met middelpunt *C* maakt. Dus is de bewegingsrichting van *V* loodrecht op *VC*.
Het doet er niet toe waarr we over afrollen: een rechte lijn of cirkel, iets anders, als het maar glad en sliplooos rolt.
Ook hoeft het wiel geen topkwaliteit cirkel te zijn. De redenering maakt geen gebruik van de cirkelvorm van het wiel.



Het exact maken van de redenering hoort bij de opgaven voor zaterdagochtend.

terug naar de tandwielen

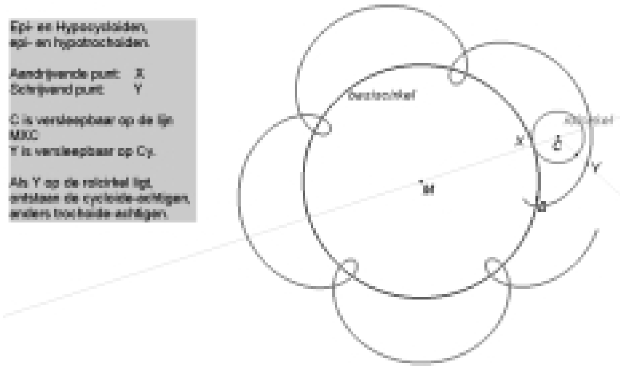
In de praktijk wordt natuurlijk met veel meer tanden gewerkt dan bij ons pompje. De tanden zijn allemaal slechts een stukje van een epi- en een hypo-cycloide. Dat kan, omdat de volgende tand op tijd de aandrijfrol overneemt.

Literatuur:
***J.Stolk e.a.**: Machineonderdelen; constructie-elementen voor de aandrijftechniek. 24e druk, 1995. Stam-techniek. (Nog steeds een HTS-klassieker uit 1913.)*

***Roloff/Matek**: Machine-onderdelen: normering, berekening, vormgeving / Wilhelm Matek, Dieter Muhs, Herbert Wittel, ... [et al.], 1998, Academic Service.*

12 Epi-cycloiden en Hypo-cycloiden rond en in de cirkel

Met het bestand `epihypoplus.fig` kunnen alle afwikkelkrommen van cirkels langs cirkels gegenereerd worden. Deze krommen spelen zoals gezien een rol bij de Griekse sterrenkunde en de moderne tandwielkunde.



Speciale gevallen van deze krommen komen nog op andere manieren opduiken. Neem daartoe verder *Y* (het schrijvende punt) nu óp de rolcirkel.
Voor deze zuiver types is er `epihypo.fig.` (De bediening van het programma staat op het scherm.)
Kijk naar gevallen waarbij de rolcirkel een heel aantal malen, zeg *n* keer, in de basiscirkel past.

Rollen langs de *buitenkant*: *n-**epi**cycloide*.
Rollen langs de *binnenkant*: *n-**hypo**cycloide*.

Probeer bij deze krommen het volgende.

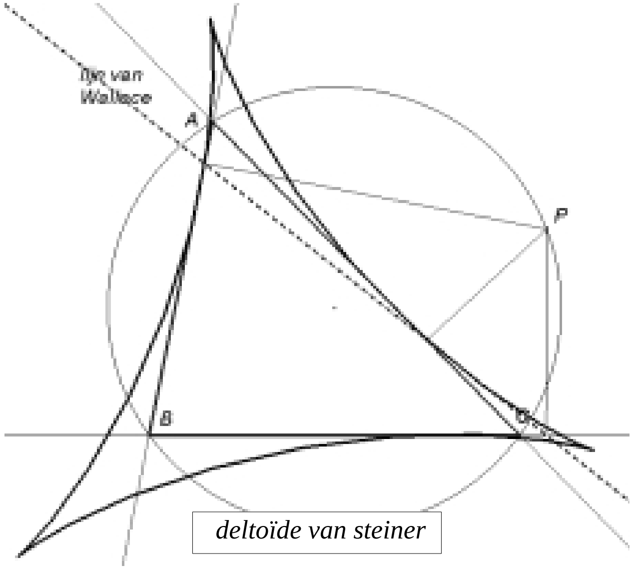
- Teken de lijn *XY*. Dat is dus de normaal op de kromme in het punt *Y*.
- Gebruik de optie '***Meetkundige plaats***'
  (Engels (!): ***Locus***).
- Klik de lijn *XY* aan en daarna punt X.

Je krijgt de omhullende van de lijnen *XY* te zien.
Die omhullende is van dezelfde soort als de kromme zelf, maar op ander formaat! Deze handout bevat voldoende hulp om dat te bewijzen...

enkele speciale gevallen

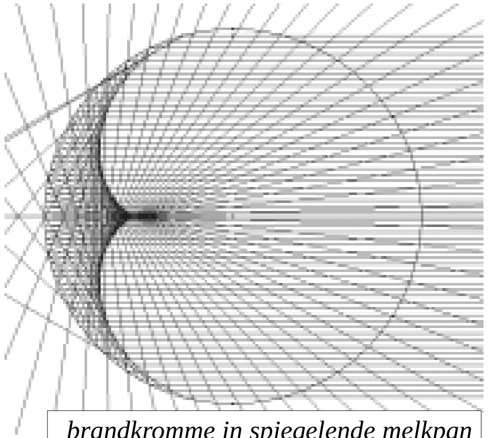
Wallace-Steiner

Teken een driehoek *ABC* met omgeschreven cirkel. Neem een vrij punt *P* op de omgeschreven cirkel. De loodrechte projecties van *P* op de lijnen *AB*, *BC* en *CA* liggen op één lijn, de lijn van Wallace van *P*. De omhullende van de lijnen van Wallace, bij lopende *P*, is een ***3-hypo-cycloïde***, de deltoïde van Steiner.



Melkpankromme: de nephroïde

Neem een roestvrijstalen pan, doe er een liter melk in. Doof alle lichten op één spotje na, dat van enige afstand laag schuin in de melkpan schijnt. Een heel specifieke kromme verschijnt. Hoe komt dat?
De evenwijdige stralen van de spot worden in de cirkelvormige melkpan weerkaatst. De weerkaatste stralen zijn de raaklijnen van een ***2-epicyclo&ide***. Dat kan meetkundig bewezen worden. Het vertelt nog niet waarom je iets ziet.

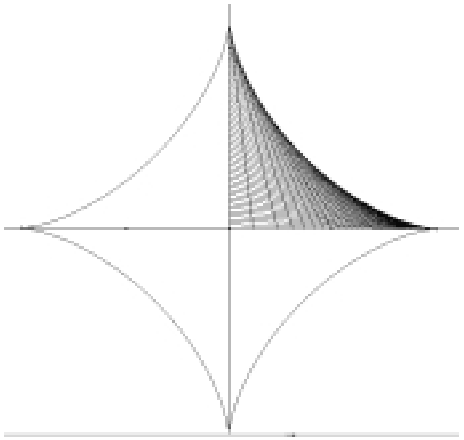


brandkromme in spiegelende melkpan

Raken aan een kromme betekent ook in de buurt van het raakpunt dichtbij de kromme zijn. Met andere woorden: valk bij de bewuste kromme, is veel licht; relatief meer dan verder er vanaf. je ziet dan ook een oplichtende kromme lijn. De kromme als geheel past juist in de pan, maar slechts een helft is zichtbaar. Doe dit experiment vóórdat je de beweringen probeert te bewijzen.

asteroide

Leg een lat van één meter lang in de hoek van de kamer, de



twee uiteinden tegen de twee muren, die een rechte hoek vormen. De lat kan glijden langs beide muren. De omhullende van de latstanden is een vierde deel van ateroidee, de 4-hypocycloide. Te bewijzen!

middellijn van de cirkel

Dat is de 2-hypocycloïde. Te bewijzen!

ellipsen

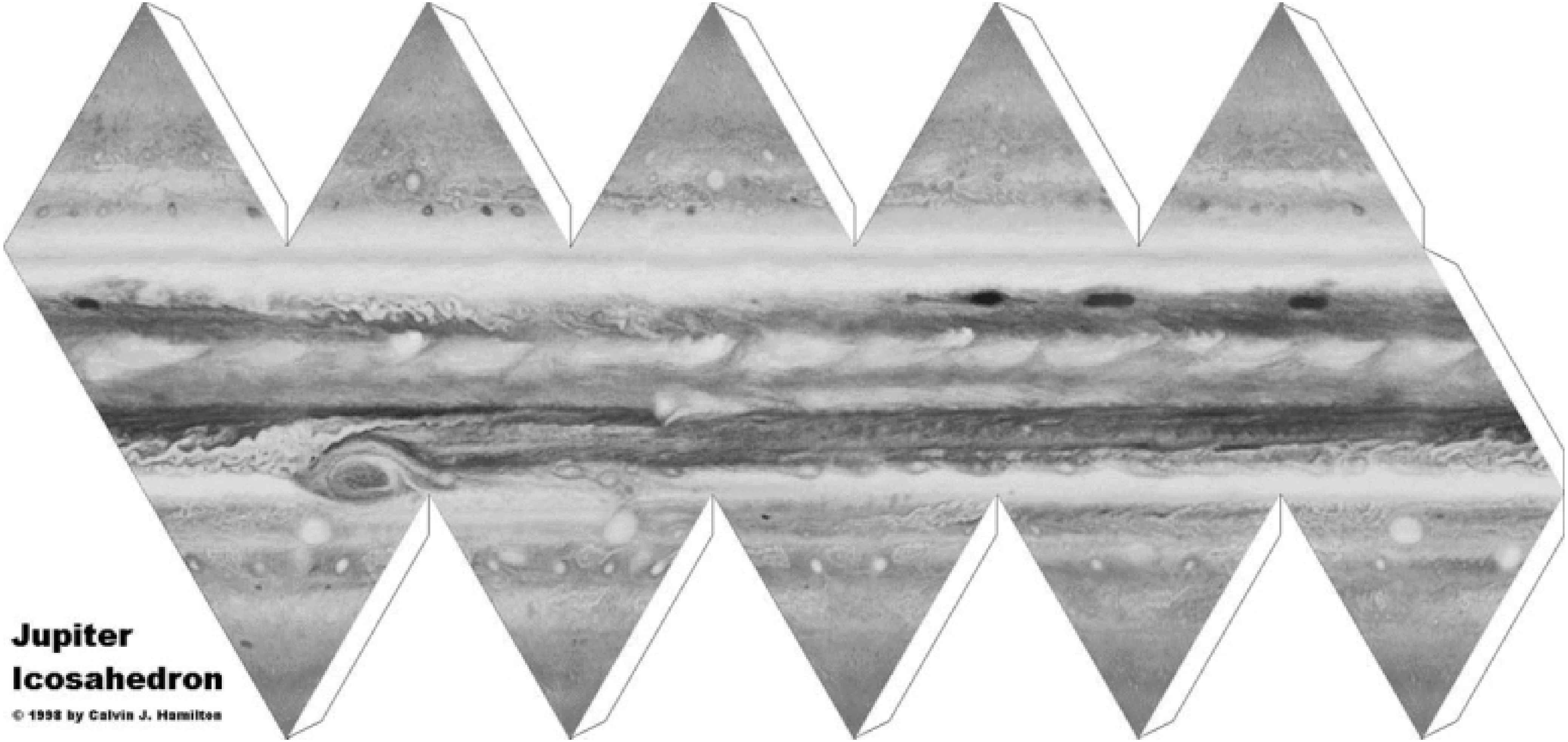
Veralgemeen het laatste voorbeeld. Neem nu niet *Y* óp de rolcirkel, maar vrij, gebruik dus `epihypoplus.fig` .
Zorg wel dat de rolcirkel de helft is van de basiscirkel.
De 2-epi - en hypo-trochoïden zijn ellipsen.

al deze krommen op het web

Zoek de Famous Curves Index op:
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html`

tandwielen met slechts één tand per wiel

Waarom niet ?
Zie `eentandalleen.fig`! Animeer *X*!



Jupiter Icosahedron