Opgaven bij ‘een ode aan de cirkel’

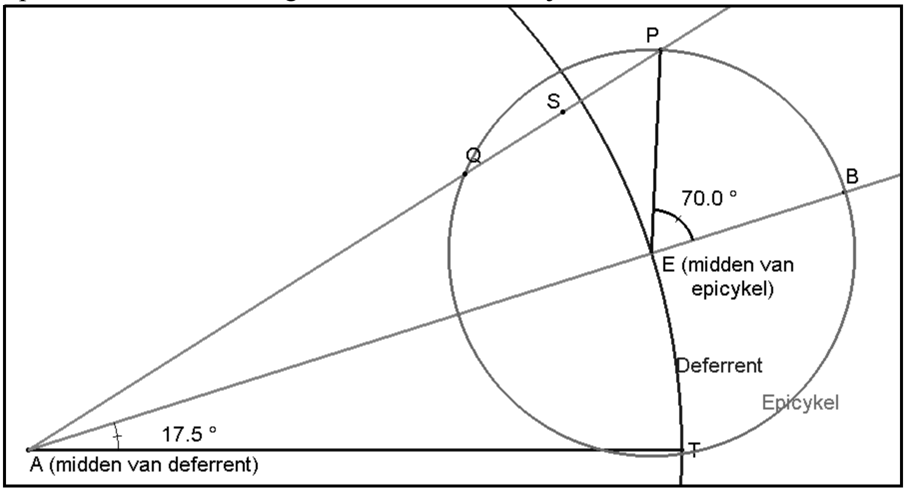
NWD 2002, zaterdag 2 februari, 9.00-9.45 uur, Aad Goddijn

Voor sommige opgaven zijn extra tekenbladen achterin opgenomen.
Houd de handout van de vrijdagmiddag lezing in de buurt.

A. Epicykel beweging

elementaire eigenschappen.

In deze tekening vind je de ingrediënten van de epicykelbeweging; een van de Griekse systemen om de beweging van planeten met eenvoudige middelen te beschrijven.



P is de planeet, *A* de aarde. De Aarde bevindt zich op een vast punt, dat in de oude opvattingen het midden van het (bolvormige) heelal is. Geocentrisch. Volgens Ptolemaeus draait de aarde niet zelf, maar maakt het geheel van het heelal minus de aarde een draaiende beweging om de aardas. In de figuur letten we niet op die draai, we bewegen er constant met mee. *P* beweegt met constante snelheid over de kleine cirkel, de *epicykel*. De epicykel beweegt zelf met zijn middelpunt *E* over de grote cirkel, de *deferrent*. Alles draait tegenkloks, in dezelfde richting dus. (Er is een Griekse theorie waar dat niet zo is, waar de epicykel in de tegenrichting draait; die bleek weinig succesvol.)
Toen *E* bij *T* was, wees *EP* in dezelfde richting als *AT*. De momenten waarop *P* op AE ligt, zijn de *oppositie*momenten. Dan liggen Zon, Aarde en Planeet op een lijn, in deze volgorde. Liggen ze op een lijn in de volgorde Aarde-Zon-Planeet, dan spreken we van *conjunctie*.
Vanuit *A* gezien beweegt de planeet zicht meestentijds naar het oosten ten opzichte van de (verre) sterren. Maar soms niet, dan heeft *retrograde gang* plaats. Op de overgangsmomenten is *P* vanuit *A* gezien *stationair.*

1 Schets een stuk van de baan van *P*; geef *oppositiepunten* en *conjuncties* aan, mogelijk ook *stationaire punten*. Maak gebruik van de informatie die uit de gemarkeerde hoeken volgt. (Extrablad achterin)

2 Stel dat de *grootte* van de epicykel een andere zou zijn; voor welke van de gevonden punten maakt dat iets (wat?) uit? (Denk er aan dat het alleen om de kijkrichting vauit de aarde gaat).

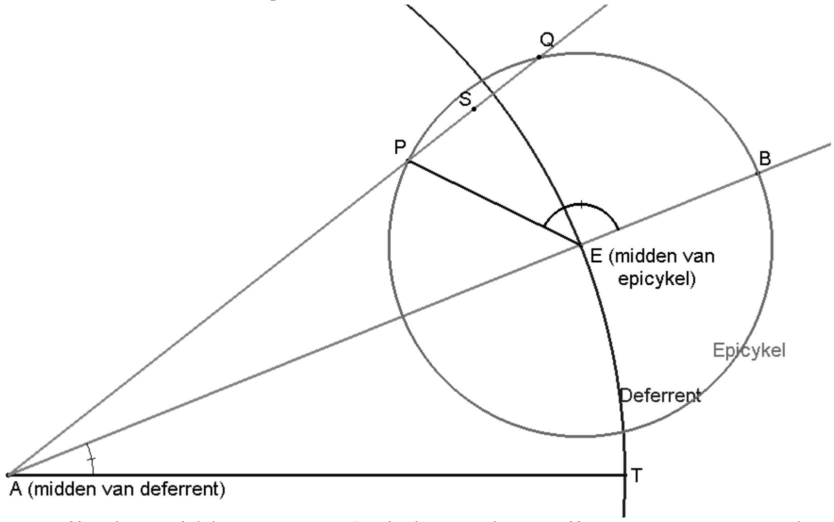
Maak nu geen gebruik meer van de speciale verhoudingen in bovenstaande figuur. Noem de hoek snelheden ω en Ω, de stralen r en R. (Kleine letters voor de epicykel)

3 Als r te klein is, treedt géén retrograde gang op. Probeer een voorwaarde, uitgedrukt in ω, Ω, r, R te vinden die retrograde gang garandeert.

4 De derde wet van Kepler zegt: *De kwadraten van de omloopstijden verhouden zich als de derde machten van de lange assen van de (ellipsvormige) planeetbanen.*
Maar dat geldt voor het heliocentrische model. Vertaal de wet naar het epicykelmodel met cirkels. Omdat je er nu gebruik van maakt dat de zon stilstaat, moet je voor de equivalentie van de modellen gebruiken dat de epicykel in het geocentrisch model zo groot is als de aardbaan om de zon in het heliocentrische model.

5 Toon aan met behulp van resultaten van 3 en 4 dat alle buitenplaneten perioden een stuk retrograde gang moeten hebben.

Apollonius over de stationaire punten



Apollonius beweert: Zij S het midden van PQ (Q is het andere snijpunt van AP met de epicykel).

P is van A uit gezien stationair als $\dfrac{\mathbf{AP}}{\mathbf{PS}} = \dfrac{\textbf{draaisnelheid P op epicykel}}{\textbf{draaisnelheid E op deferrent}}$

6 Ga in bovenstaande figuur na dat P zo om en nabij stationair moet zijn. Moet P verder, of juist niet?

Tamelijk opmerkelijk is, dat in de stelling van Apollonius een hoekverhouding en een lengteverhouding aan elkaar gelijk zijn.
Hier volgte een fragment uit Ontwakende Wetenschap van van der Waerden:

Bij zijn bewijs ging Apollonios volgens Ptolemaios van de volgende hulpstelling uit: als in driehoek $AB\Gamma$, waarin $B\Gamma > A\Gamma$ is, op ΓB een stuk $\Gamma\Delta$ afgepast wordt, gelijk aan of groter dan ΓA, dan is

$$\Gamma\Delta : \Delta B > \angle B : \angle \Gamma$$

Bewijs: Maak het parallelogram $A\Delta\Gamma E$ af en verleng BA en ΓE, tot zij elkaar in Z snijden. Beschouw nu eerst het geval $\Gamma\Delta = \Gamma A$. Een cirkel om A met straal AE zal dan door Γ gaan. Nu is

driehoek $AEZ >$ sector AEH

driehoek $AE\Gamma <$ sector $AE\Gamma$

dus

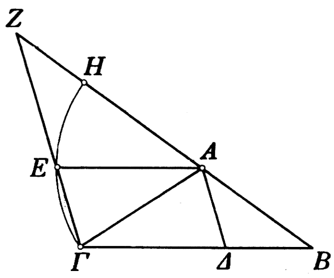


FIG. 76.

7 Maak het bewijs van de hulpstelling verder af.
Tip: werk toe naar een verhouding waarin aan een kant lijnstukken staan, en aan de andere hoeken.

In onderstaande figuur en tekst (weer van der Waerden) zijn K en H twee posities van de planeet. H is het moment van stationair zijn, Z is dus A uit eerdere plaatjes. We gaan aantonen dat, als K naar H gaat (terwijl de epicykel zelf ook naar 'links' draait) K van Z uit gezien nog steeds naar *links* gaat, dwz, dat K nog op het voorwaartse deel van de baan zit.

Nu het bewijs van de hoofdstelling. De diameter ZE snijdt de epicykel in het ,,perigeum'' Γ en, verlengd, in het ,,apogeum'' A. Zij nu ZHB zo bepaald als in de hoofdstelling aangegeven, zodat

$\frac{1}{2}BH : ZH =$ hoeksnelheid epicykel : hoeksnelheid planeet.

Zet uit H een willekeurige boog HK uit in de richting naar het apogeum A of naar het perigeum Γ. Te bewijzen is, dat in het eerste geval de beweging van de planeet op deze boog van Z uit gezien rechtlopend, in het tweede geval teruglopend is.

Laat de boog HK naar A toe uitgezet zijn. Trek $ZK\Lambda$, BK, EK en EH. Dan is in driehoek BKZ

$$BH > BK$$

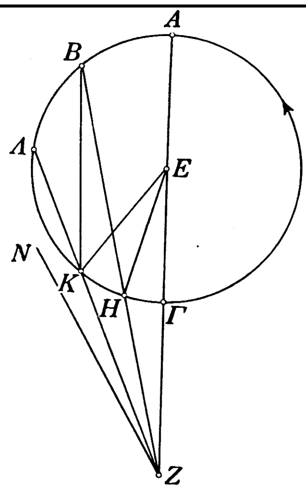


Fig. 77.

8 Probeer nu de hulpstelling in te zetten en het bewijs af te maken. Houd in het oog welke verhouding van hoeken je te pakken moet krijgen.

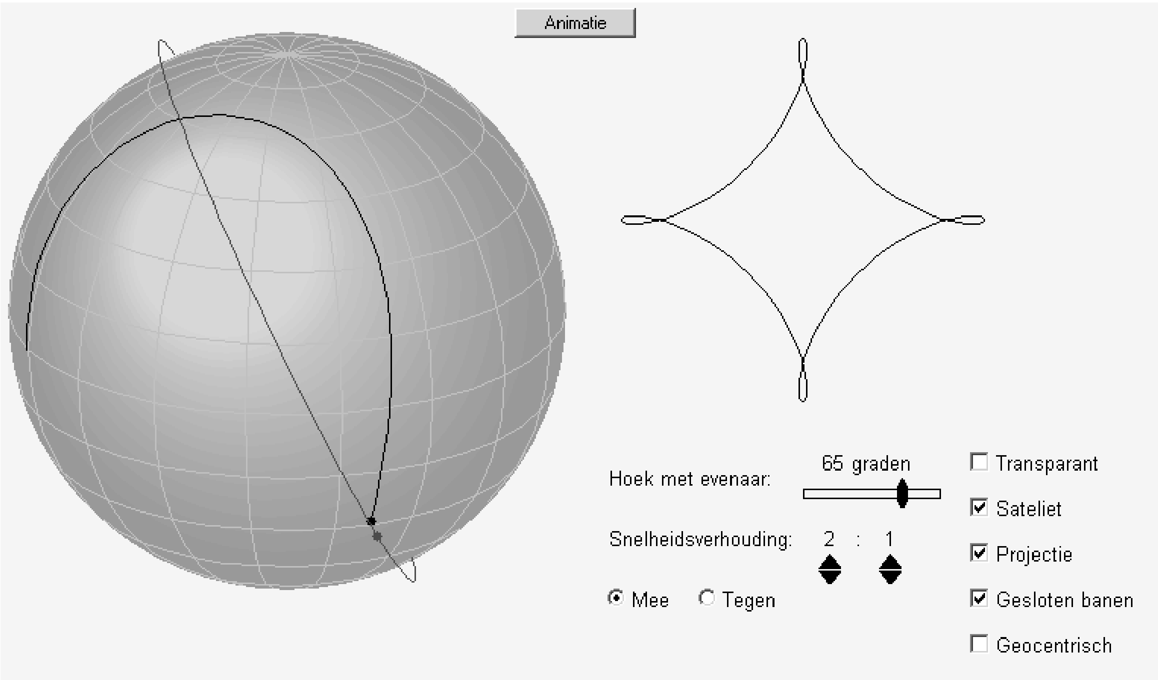
Het laatste stuk is niet makkelijk. Een overdruk van het hele gedeelte uit het boek van van der Waerden is beschikbaar.

9 Van der Waerden is kort over de tweede helft: het geval dat K al voorbij H is. Voltooi ook daar het bewijs.

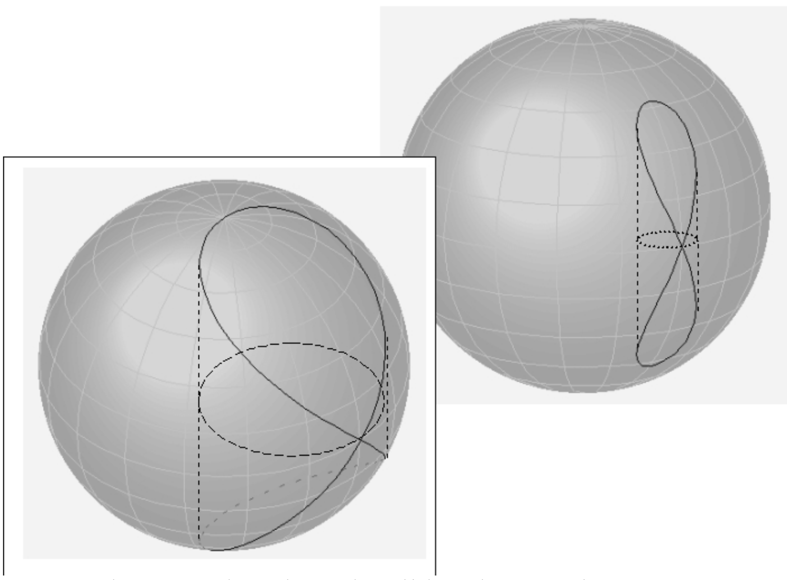
Apollonius geef een variant van de stelling voor de excenter-hypothese. Ptolemaeus is er in de Almagest duidelijk trots op dat hij de beide bewijzen tegelijk geeft.

B. Hippopede in bovenaanzicht

Zo ziet de applet SATBAAN eruit:



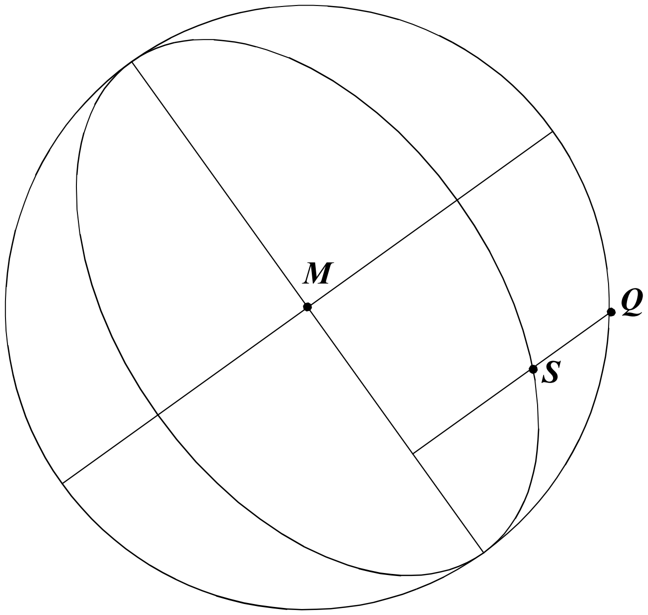
De hippopede ontstaat doordat een satellietpunt een (schuine) cirkelbeweging maakt om de bol in tijd *T*, terwijl het vlak van de cirkel in tegengestelde richting ook in dezelfde tijd *T* om de as van de bol draait. We houden ons bezig met de figuren op de bol die ontstaan als de satelliet recht onder zich een spoor na laat.



Er kan gedemonstreerd en geprobeerd worden tijdens het practicum....

10 Te bewijzen is dat het bovenaanzicht van de hippopede (of de projectie op het evenaarvlak) een cirkel is. Als het waar is, hoe hangt dan de grootte van de cirkel met de groote van de bol en de hoek tussen vlak van de satelliet en evenaarvlak samen?

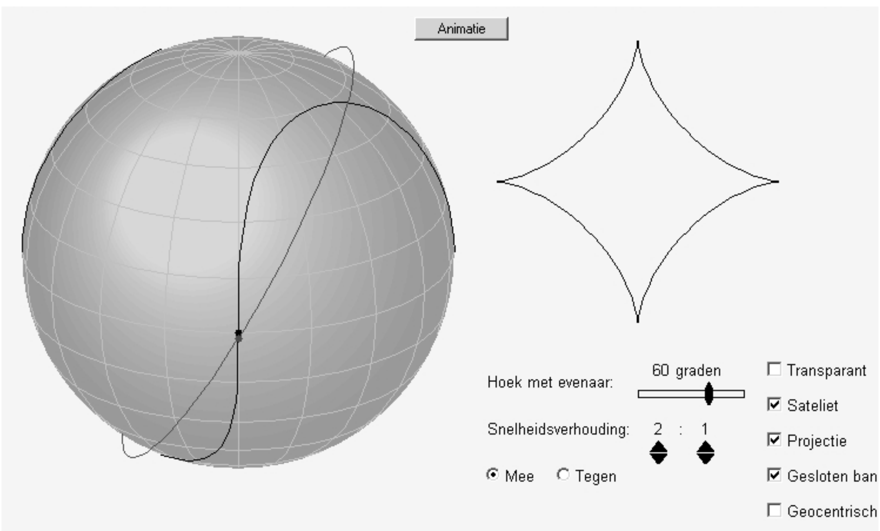
11 Het bovenaanzicht van de schuine cirkel waarover de satelliet beweegt, is op elk moment een ellips. Hier is een bovenaanzicht. Stel je het tóch tegelijk maar ruimtelijk voor.
De beweging is even aan de gang na het starten op de evenaar.



De satelliet is in *S*, *Q* is het punt waar gestart is op de evenaar. *Q* is vast, *S* en de ellips bewegen. .
Waarom staat *QS* loodrecht op de lange as van de ellips?

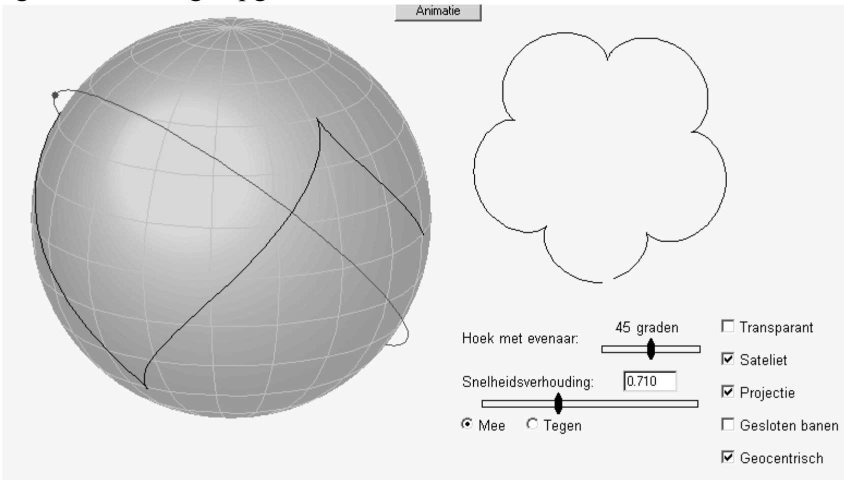
12 De bewering van opgave 10 kan vertaald worden in een eenvoudig verband tussen een straal en de lange en korte as van de ellips. Breng de cirkel die de korte as van de ellips als middellijn heeft ook in het spel. Het te zoeken cirkeltje ligt nu wel vast.
Probeer het bewijs af te maken door te laten zien dat *S* ..... trek QM ....

13 Als de satelliet harder of langzamer draait, ontstaan als projecties op het evenaarvlak weer epi- of hypocloide-achtigen; dwz. bewegingen die opgevat kunnen worden als een eenparige cirkelbeweging gesuperponeerd op een andere eenparige cirkelbeweging. Waarom is dat zo?



14 Sommige van die geprojecteerde banen zijn echte hypo(epi)cycloiden en hebben dus cuspen (alias snavels, keerpunten).
Om dit te bereiken moet de snelheidsverhouding in de juiste relatie staan met de hoek van de baan. Onderzoek dit. Kortom, *vind een verband tussen ‘snelheidsverhouding’ en ‘hoek met de evenaar’ dat deze cuspen garandeert.*

15 De banen zelf op de aarde kunnen óók cuspen hebben boven en onder de evenaar. Dan heeft de geprojecteerde baan ook cuspen natuurlijk.
Zelfde vraag als in de vorige opgave!

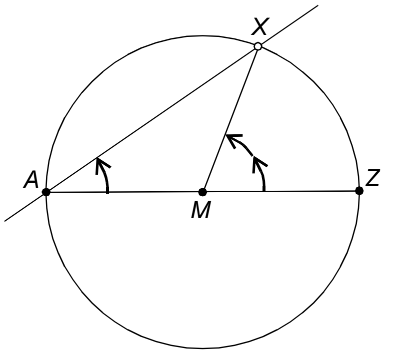


C. Cirkels op zich; Miquel of Wallace

<Een lange inleidende Inleidende tekst uit een andere bron:de CWI zomercursus 2001, over experimentele wiskunde; de inhoud wordt gedemonstreerd tijdens het practicum>

hoeken en bogen in dynamische herinterpretatie

fig. 1

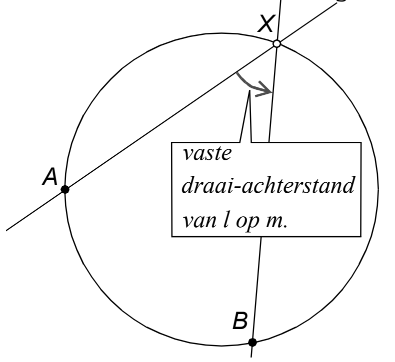


Op de cirkel met middelpunt M van fig. 1 ligt een vast punt A en een lopende punt X. Als X tegenkloks een hele ronde aflegt, draait de lijn AX om A, maar slechts over een halve ronde. Uiteindelijk ligt de lijn wél weer als geheel op zichzelf. Als X met vaste hoeksnelheid rondgaat, draait AX ook met vaste snelheid, zij het met halve snelheid. Dit alles is direct aan te tonen als we X tegenover A op de cirkel laten beginnen, in Z dus in fig. 1, en hoek $\angle XMZ$ met $\angle XAZ$ vergelijken. Er geldt $\angle XMZ = 2\angle XAZ$, omdat $\angle XMZ$ buitenhoek is van de gelijkbenige driehoek AMB.
Vandaag houden we het op de dynamische beschrijving:

> *Als A een vast punt op een cirkel is, en X een bewegend punt, dan is de hoeksnelheid van de om A draaiende lijn AX de helft van de hoeksnelheid van X over de cirkel.*

Ook als X het punt A passeert blijft dit gelden, al moeten we het voor een kort moment met de raaklijn in A tevreden zijn.

fig. 2

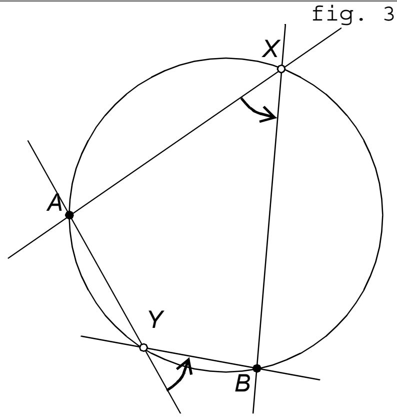


In fig. 2 herhalen we het spel met twéé vaste punten A en B en één lopend punt X. Nu draaien lijnen AX en BX met beide dezelfde snelheid om hun vaste punten A en B - dat volgt immers uit de dynamische beschrijving - en daarom moet de hoek bij X constant zijn. De draaiachterstand van de ene lijn op de ander zal immers constant zijn als beide lijnen met dezelfde snelheid ronddraaien.
Een bekend resultaat natuurlijk, maar wie het kent komt wellicht met een bezwaar, namelijk de ligging van fig. 3. We gaan hier toch niet beweren dat de hoeken $\angle AXB$ en $\angle AYB$ gelijk zijn?

De hoeken, gemeten op de gewone manier, die zijn inderdaad niet gelijk. Maar dat is iets anders dan de hier beschreven ‘draaiachterstanden’! De beide pijlen laten de tegenklokse draaiachterstanden zien. Daarom toch maar deze fraaie ‘dynamische’ vorm:

> *Als X over een vaste cirkel loopt die door A en B gaat, dan is de draaiachterstand van lijn XA op XB constant.*

fig. 3



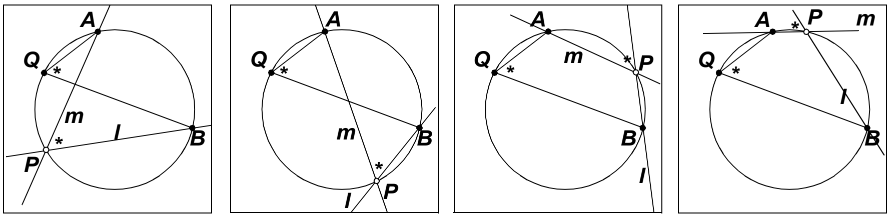
De bedoelde draaiachterstand geven we voortaan aan met $\triangle(AXB)$. Lees dat als een beschrijving van wat bij X te zien is: hoeveel moet de lijn AX rond X draaien om op BX te vallen.
Met behulp van dat begrip kunnen we de **stelling van de constante omtrekshoek** mooi als volgt formuleren:

> *Laten A, B en C drie punten zijn die niet op een lijn liggen. een punt X ligt dan en slechts dan op de cirkel door A, B en C als* $\triangle(AXB) = \triangle(ACB)$.

Drie opmerkingen:

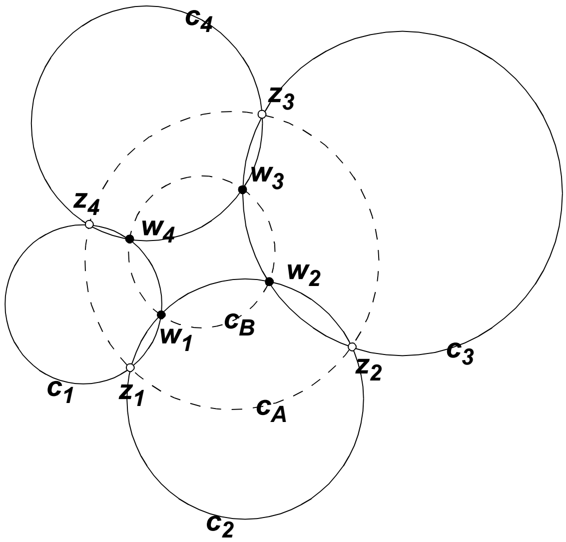
a. Het belangrijkste verschil met de traditionele stelling is dat we geen onderscheid hoeven te maken voor de twee bogen waarin AB de cirkel verdeeld. Anders gezegd: de koordenvierhoekstelling en de constante omtrekshoekstelling zijn dezelfde.
b. Pas op, er geldt niet $\triangle(AXB) = \triangle(BXA)$. Integendeel, $\triangle(AXB) = -\triangle(BXA)$!
c. De lezer die een betere onderbouwing wil van dit nogal intuïtieve verhaal heeft het exacte hart op de juiste plaats. In de volgende paragraaf volgen suggesties en literatuurverwijzingen in die richting, maar overslaan van de volgende paragraaf beïnvloedt de leesbaarheid van het daarna volgende niet.

Nog een ‘filmpje’ tot slot:



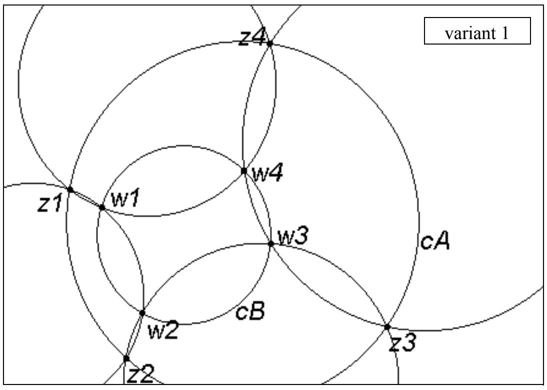
de zescirkelstelling van Miquel.

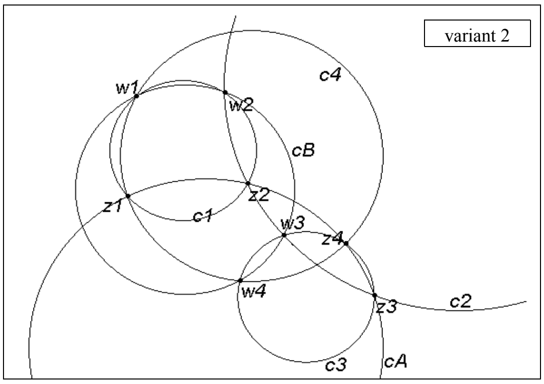
Gegeven de getroken cirkels in de figuur hiernaastmet de aangegeven snijpunten.
bewering:
Als de z-punten op één cirkel liggen, liggen de w-punten dat ook, en andersom.

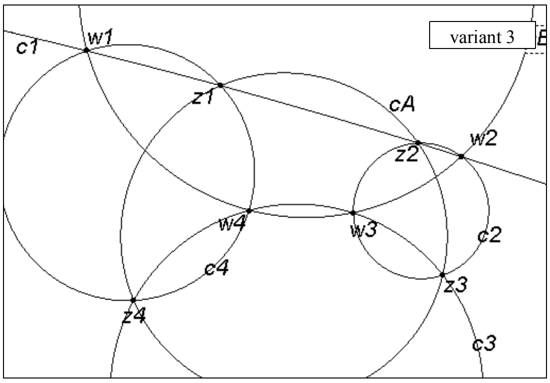


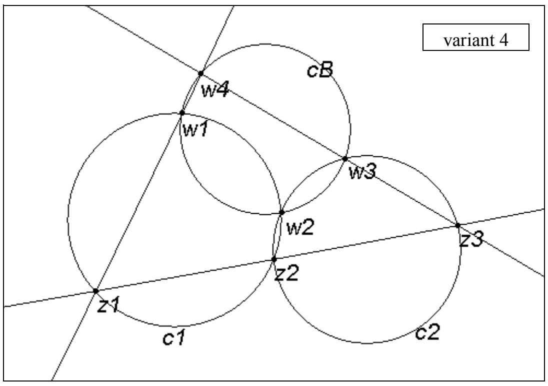
16 Bewijs dit.
TIP: Teken de benodigde vierhoeken in de vier gegeven cirkels. Er ontstaan vierhoeken in de gestippelde (?) cirkels. Markeer gelijke hoeken.

17 Geldt de stelling ook als de ligging heel anders is? moeten we dan weer gaan bewijzen? Overweeg dit aan de hand van de figuren hieronder (gemaakt door verslepen in Cabri).





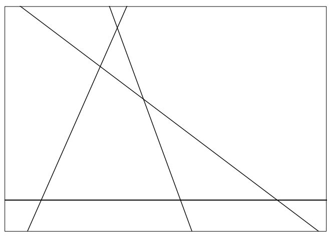


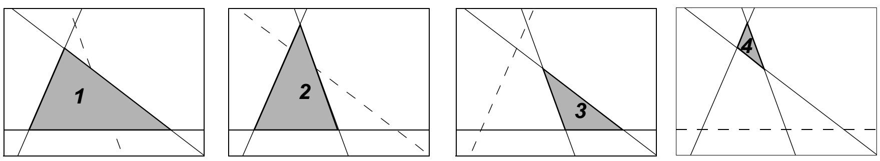


18 Formuleer een stelling (over een driehoek!) bij het ‘limietgeval’ van variant 4.

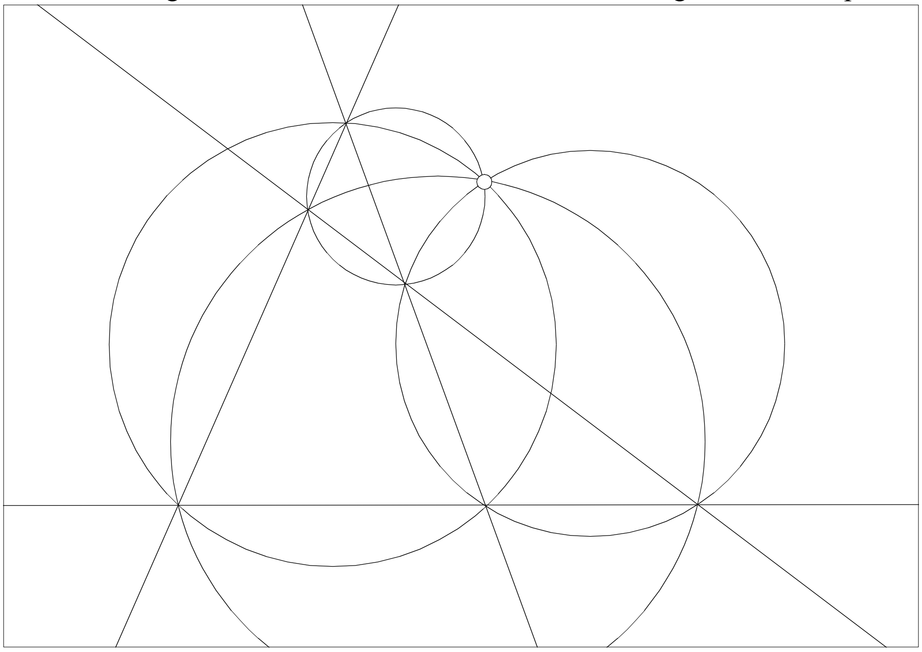
*[We bewijzen liever geen resultaten met limietovergangen als het niet hoeft.
Ander mogelijkheid: Laat zien dat de ‘constante hoek op de koorde stelling’ ook geldt voor rechte lijken onder meenemen van het punt ‘oneindig’ dat op alle lijnen ligt. Het zg. Mobiusvlak, dat iets heel anders is als het projectieve vlak.]*

19 Teken vier lijnen, geen twee onderling evenwijdig.
Deze figuur bevat vier driehoeken.





Laat zien: de vier omgeschreven cirkels van die vier driehoeken gaan door één punt.



[EXTRA TEKENINGEN achterin]

Deze stelling wordt net als die van de vorige opgaven toegeschreven aan Miquel, die inderdaad al deze dingen in 1838 publiceerde. Maar hier is meer infromatie, te danken aan Antreas Hatzipolakis:

Subject: [HM] The Unfortunate Wallace!
Author: Antreas P. Hatzipolakis <xpolakis@otenet.gr>
Date: Thu, 30 Mar 2000 19:59:20 +0300 (EET DST)

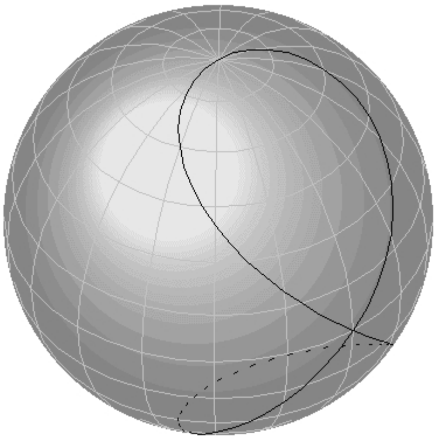
A well-known point in the complete quadrilateral is Miquel Point: The point where the circumcircles of the four triangles of the quadr. meet.
A. Miquel wrote about this point in J. math. pures appl. (1) 3(1838), p. 486, but 10 years before, J. Steiner had discovered it (Annales de Gergonne XVIII, 1827-28, p. 302). [The references from: P. D. Ladopoulos: Elements of Projective Geometry [in Greek]. Athens, 1966, p. 155, footnote #77]
In the biography of William Wallace (1768 - 1843) at St. Andrews archive at:
http://www-history.mcs.st- andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Wallace.html
we read that:
Wallace's work was on geometry and Simson's line (which is definitely not due to Simson!) appears first in a paper of Wallace in 1799. One of Wallace's theorems,

> *if 4 lines intersect each other to form 4 triangles (omit one line in turn) then the circumcircles of the triangles have a point in common,*

was generalised to 2n lines by Clifford.

This point is the Miquel Point. Where had Wallace published this theorem?
In the 1799 paper? If so, he is very unfortunate:
His line is named after Simson, and his point after Miquel!

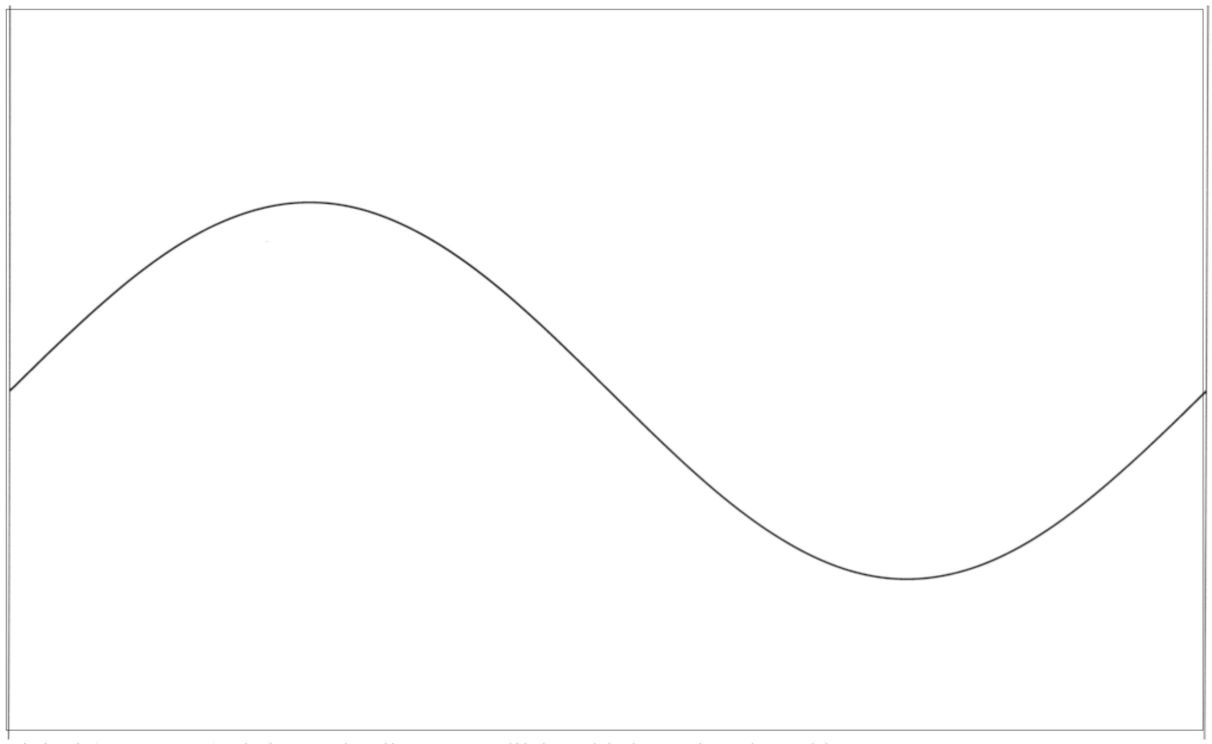
D. De Vensters van Viviani



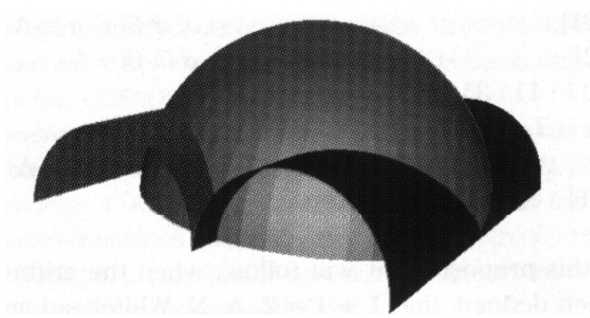
We weten dat de baan op een cilinder ligt; dat hebben we bewezen
Resultaat: de krommem die ontstaat als een bol gesneden wordt door een cilinder met de halve straal van de bol, waarbij de cilinder raakt aan de bol en ook door het middelpunt gaat.

20Hieronder is een standaardsinuskromme in een rechthoek getend. Maak dit -groot- van doorzichtig plastic (enkele exemplaren zijnaanwezig).

a.Door de korte zijden opp elkaar te brengen ontstaat een cilinder. Laat zien dat de lijn nu de snijlijn is van een vlak met de cilinder
b.Breng weer de korte zijden op elkaar, maar zorg dat er ‘dubbel’ omgewikkeld is. Laat zien dat de kromme die ontstaat op en en bol ligt.



Viviani (1622-1703), de laatste leerling van Galilei, stelde het volgende probleem:
Maak vier gelijkvormig vensters in een halve bol, zodanig dat het overblijvende bolstuk ’kwadrateerbaar is’.



Kwadrateerbaar: de oppervlakte moet bij gegeven straal van de halve bol met passer en liniaal geconstrueerd kunnen worden.
Viviani doorsneed de halve bol met twee halve cilinders.

Het oppervlaktestuk boven de cilinders noemt Viviani het *Vela Quadrabile Fiorentina*.
Laat de straal van de bol R zijn; dan geldt:

Opp. bolstuk buiten de cilinders =
Opp. cilindersloten binnen de bol = 4 R^2

21 Toon dit aan.

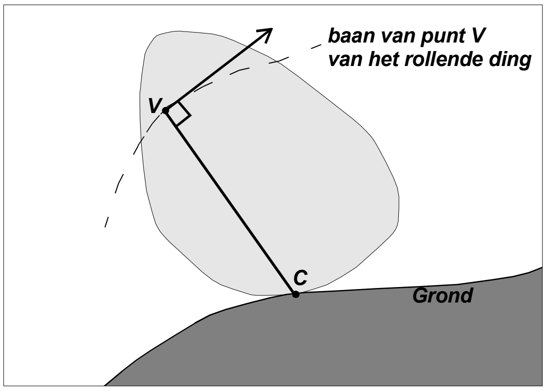
Tip voor het vinden van een bewijs:
De cylinders zijn afwikkelbaar, dus vlak te maken. De bol niet. Maar: Denk eens aan bekende oppervlaktetrouwe kaartprojectie.
Op de volgende bladzijde vindt je verdere suggesties.

E. Normalen op afwikkelkrommen

Algemeen geldt voor afwikkelkrommen als epi- of hypocycloide:

de nomaal op de baan van een punt X van het rollende wiel gaat door het contactpunt van het rollende wie met de grond.

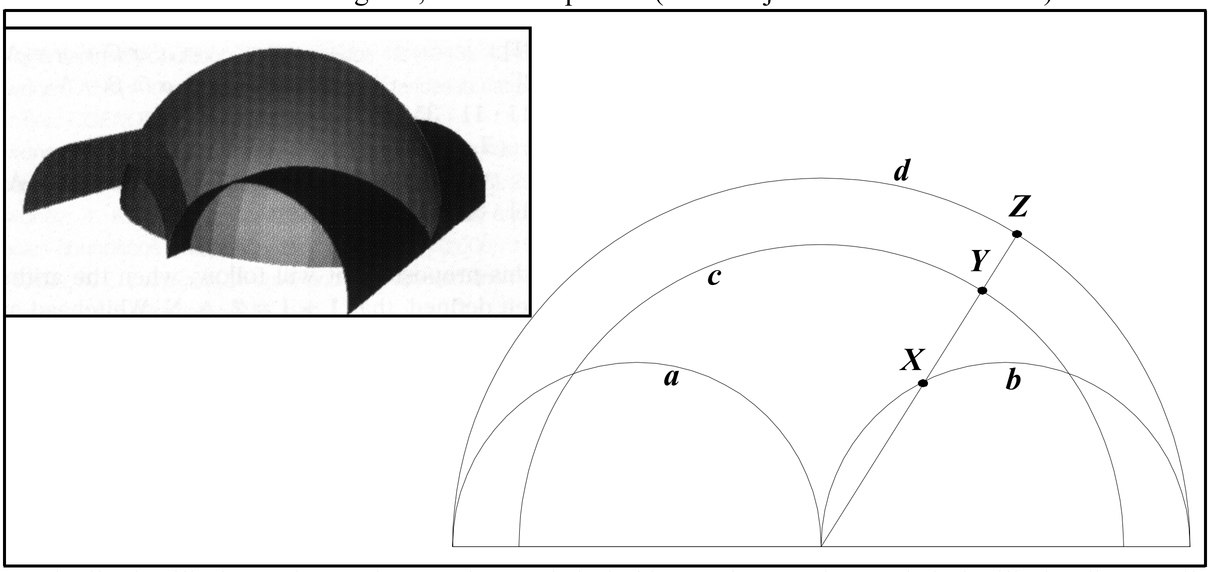
De bewering over de normaal op deze cycloide-achtigen kan intuitief begrepen worden. Van het rollende ding staat één punt, het contactpunt C, stil op de grond. Van vaste lengte VC beweegt V wel, maar C staat momentaan stil, V beweegt dan momentaan alsof het een cirkelbeweging met middelpunt C maakt. Dus is de bewegingsrichting van V loodrecht op VC.
Het doet er niet toe waarr we over afrollen: een rechte lijn of cirkel, iets anders, als het maar glad en sliplooos rolt. Ook hoeft het wiel geen topkwaliteit cirkel te zijn. De redenering maakt geen gebruik van de cirkelvorm van het wiel.



22 Maak de redenering exact door V en C als tijdafhankelijke punten te beschrijven, kortom als parameter.
VC is constant in lengte. Met een inproduct of met Pythagoras geeft je dat analytisch vorm.
Je kunt daaruit -analytisch- bewijzen dat de afgeleide van vector $V - C$ loodrecht staat op $V - C$ zelf.

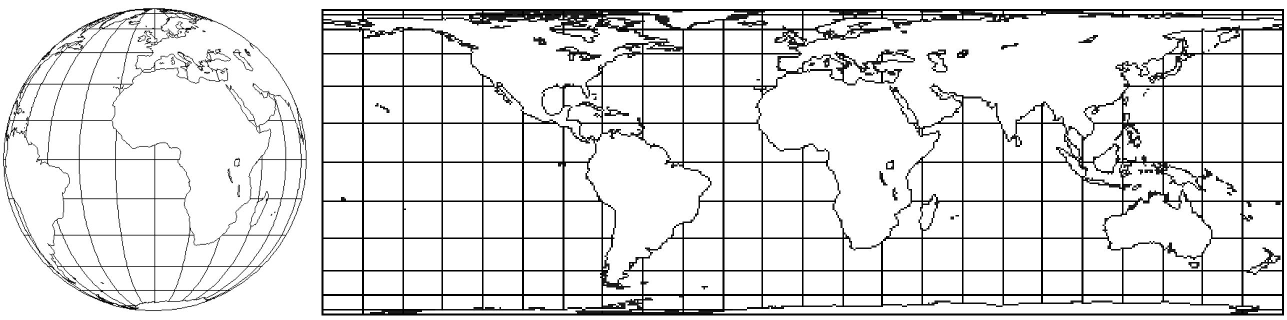
Nadere suggestie bij Viviani

Denk aan doorsneden van het geval, loodrecht op de as (de raaklijn van de twee cilinders).



a en b zijn de cilinders, c is een doorsnede van de bol, d is een doorsnede van de hulpcilinder die aan alle drie de objecten raakt.

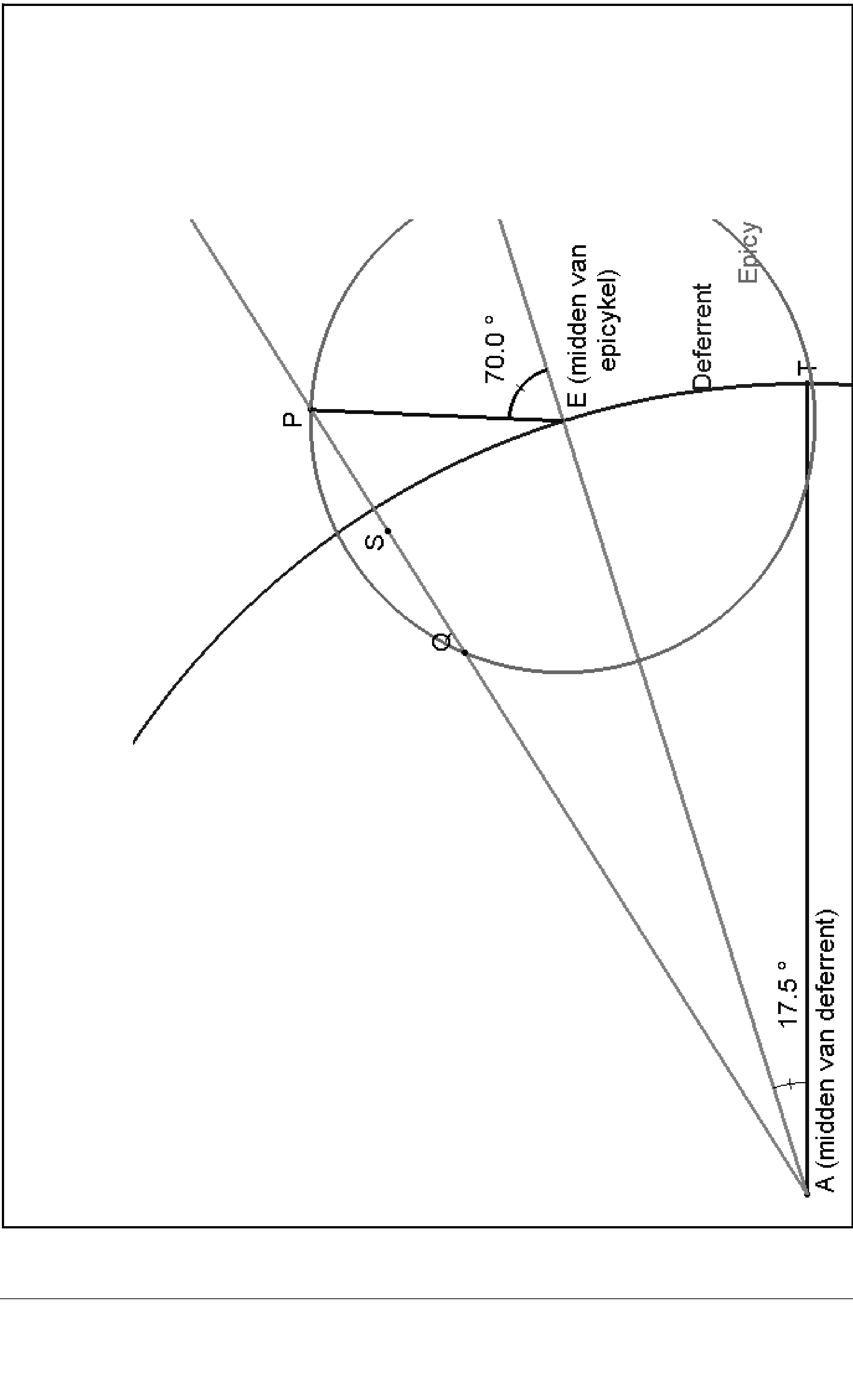
Breng de afbeelding Y >> Z in relatie met een bekende kaartprojectei: de oppervlakte trouwe cilinder projectie. Die ziet er zo uit als rechts.



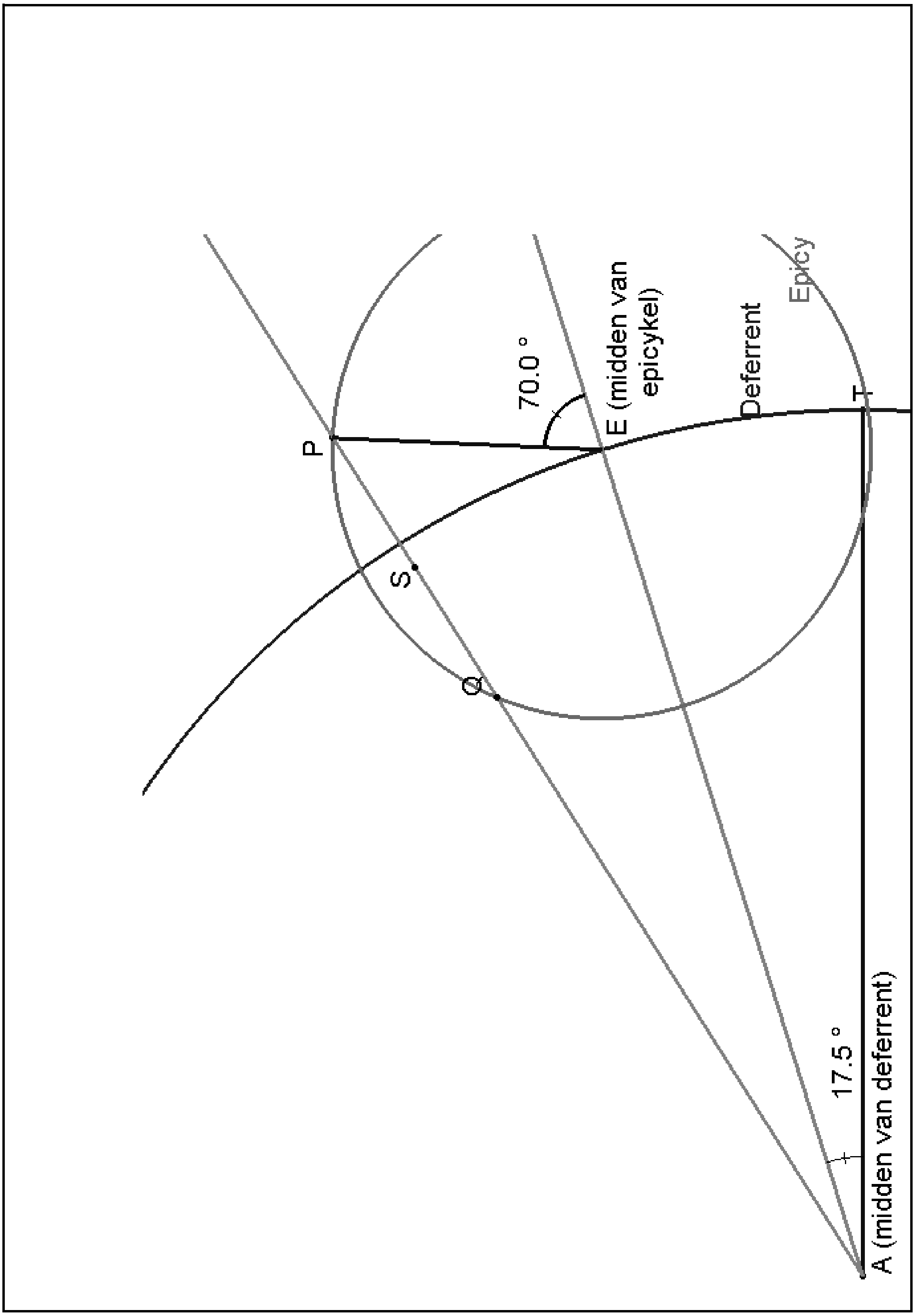
De figuur suggereert wel duidelijk hoe de afbeelding van bol naar kaart werkt.

Neem een strookjes tussen twee heeldicht bij elkaar liggende paralellen op de bol. Dat wordt een langere en iets dunnere strook op de bol. heffen rek en indrukking elkaar op?

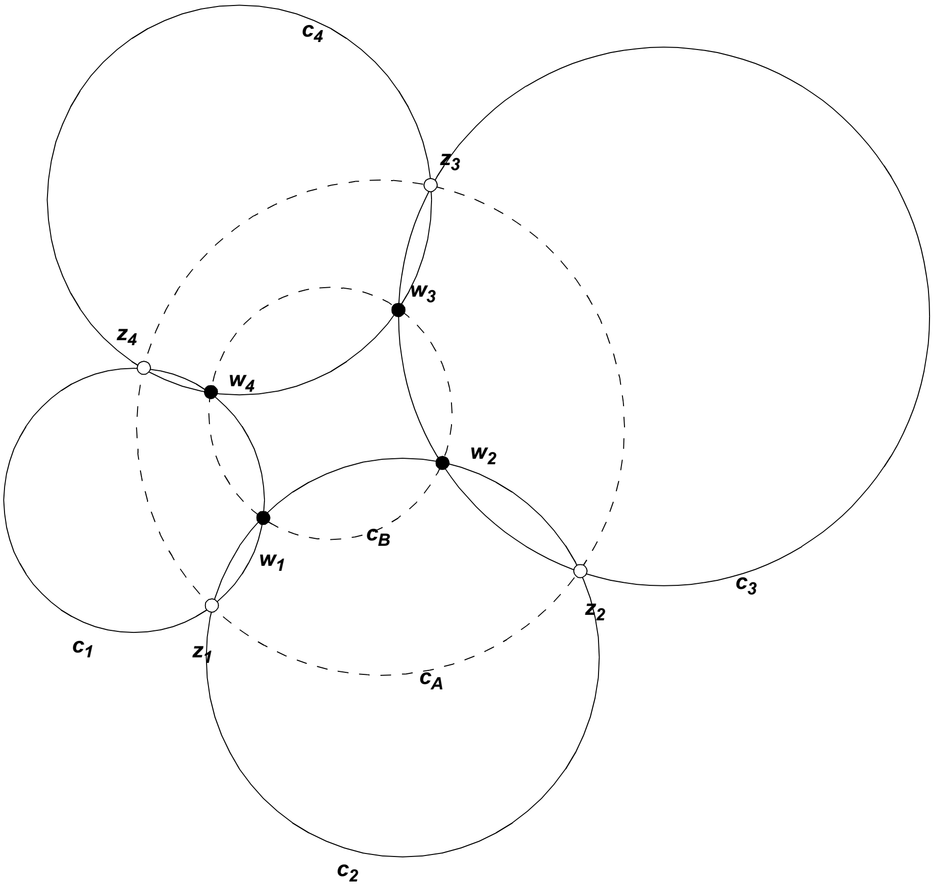
EXTRA FIGUREN

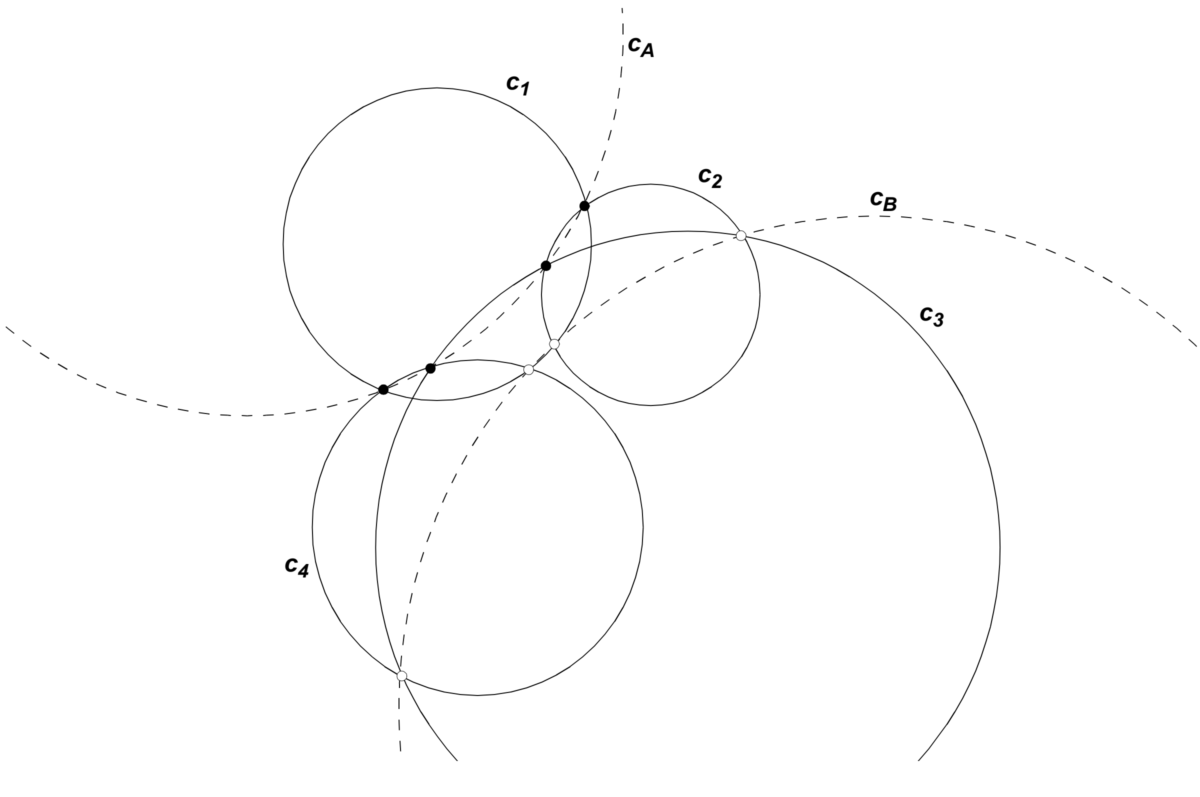


EXTRA FIGUREN



EXTRA FIGUREN





EXTRA FIGUREN