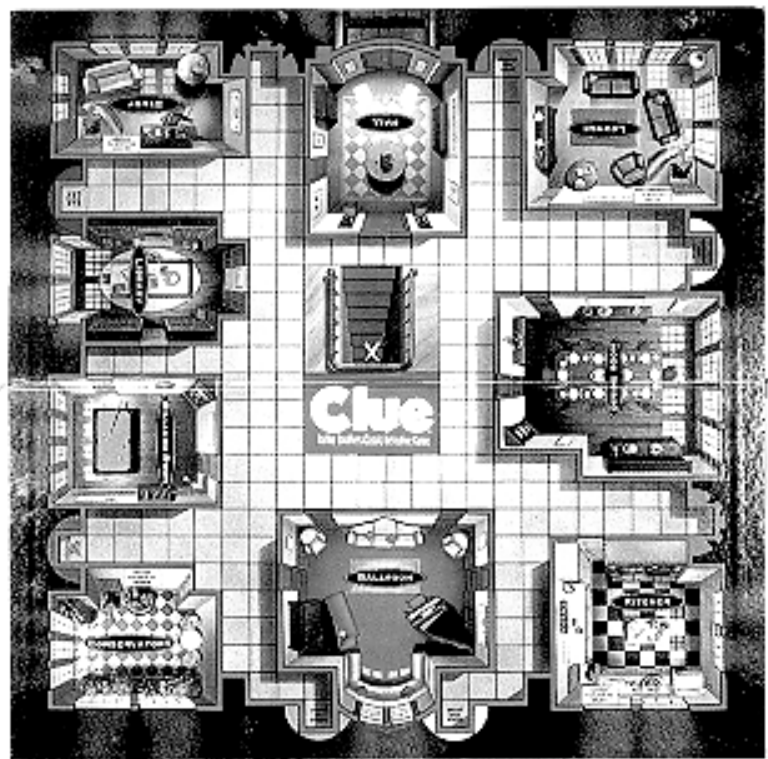


Hans P van Ditmarsch  
Department of Computer Science  
University of Otago  
PO box 56  
Dunedin, Nieuw Zeeland  
`hans@cs.otago.ac.nz`

Presentatie voor:

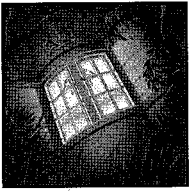
Nationale Wiskundedagen 2002  
wiskunde en speelgoed

februari 2002



**BALLROOM**

**EXTRA!  
MURDER**



**Ballroom**

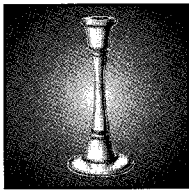
The servants reported that this room was always locked when it wasn't in use. However, upon inspection, the detectives found that it was open. Inside the room the curtains were still drawn and very little light shone through. At the back of the ballroom there is an old piano. The lid was up and there was sheet music in the stand! The only member of the party that is at all musical is Professor Plum!

*(The facts contained in this article are merely assumptions. It is for you to ascertain what is the real evidence!)*

**BALLROOM**

**CANDLESTICK**

**EXTRA!  
MURDER**



**Candlestick**


One of a pair, given to Dr Black by Mrs Peacock. Usually to be found in the lounge, both candlesticks were present on the dining room table at the time of the evening meal. The maids don't remember if they cleared both candlesticks away after dinner. Only one was on the table in the dining room after the crime, the other was found behind the curtains.

*(The facts contained in this article are merely assumptions. It is for you to ascertain what is the real evidence!)*

**CANDLESTICK**

**REVEREND GREEN**

**EXTRA!  
MURDER**



**Reverend Green**

An austere man, who came to the village two years ago. He was invited for the weekend at the request of Mrs White, who is very close to this reserved Reverend. Although he is not fond of parties, he accepted the invitation only because he knew his old friend Mrs White would be in attendance. The village church coffers are reported to be low on funds and could suggest another reason for the Reverend's interest.

*(The facts contained in this article are merely assumptions. It is for you to ascertain what is the real evidence!)*

**REVEREND GREEN**

De kaarten voor balzaal, kandelaar en groen

# Wie, waarmee en waar?

## Verdachten

<i>Nederlands</i>	<i>Engels</i>
Groen / Groenewoud	Green
Blauw / Blaauw van Draadt	Peacock
Paars / Pimpel	Plum
Rood / Rosa Roodhart	Scarlett
Geel / van Geelen	Mustard
Wit / de Wit	White

## Wapens

<i>Nederlands</i>	<i>Engels</i>
touw	rope
steeksleutel	wrench
revolver	gun
lodenpijp	leaden pipe
kandelaar	candle
dolk	knife

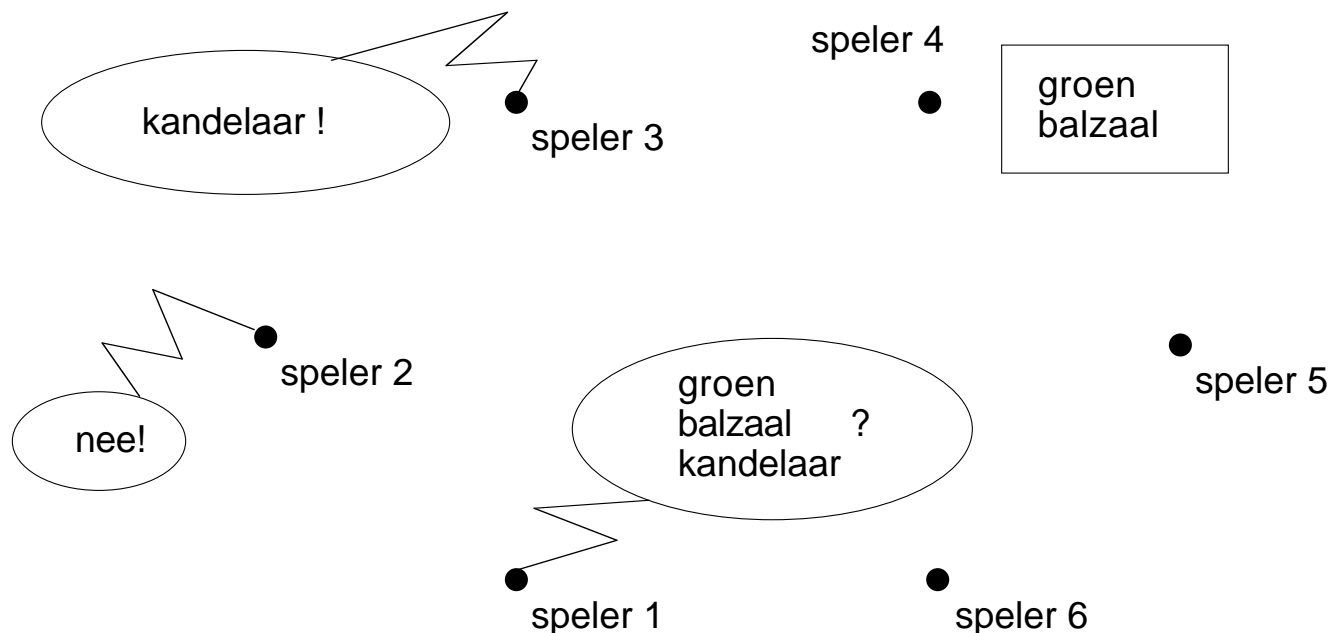
## Kamers

<i>Nederlands</i>	<i>Engels</i>
keuken	kitchen
zitkamer	lounge
bibliotheek	library
hall	hall
danszaal (balzaal)	ballroom
biljartzaal	billiard room
serre	conservatory
eetkamer	dining room
studeerkamer	study

# Spelregels van Cluedo

- De kaarten worden per type geschud.
- Een wapen, kamer- en verdachte-kaart worden getrokken en apart gelegd.
- Dit zijn de zogenaamde moordkaarten.
- De andere kaarten worden bij elkaar gedaan en opnieuw geschud.
- Ieder van de zes spelers krijgt nu drie kaarten.
- Om de beurt mogen spelers een *verdenking* uiten.
- Een verdenking bestaat uit drie kaarten, een van elk type.
- Voorbeeld: Groen heeft het gedaan, met een kandelaar, in de balzaal.
- De eerste speler die een van deze kaarten heeft toont deze (alleen) aan de vrager. (Indien meer: één kiezen.)
- Een speler mag nu ook nog een (definitieve) *beschuldiging* uiten.
- De beschuldiging wordt (niet hardop) getoetst aan de moordkaarten.
- Een beschuldiging mag maar één keer tijdens het spel gemaakt worden.
- Wie het eerst correct beschuldigt, wint.

# ‘Groen heeft het gedaan, met de kandelaar, in de balzaal’



Nadat 3 de kandelaar-kaart aan 1 heeft laten zien geldt:

3 heeft kandelaar	$c_3$
3 weet dat hij kandelaar heeft (3 ziet kandelaar)	$K_3 c_3$
4 weet dat 3 kandelaar ziet	$K_4 K_3 c_3$
maar 3 weet dat niet (van 4)	$\neg K_3 K_4 K_3 c_3$
1 weet dat 3 kandelaar ziet	$K_1 K_3 c_3$
3 weet dat 1 weet ...	$K_3 K_1 K_3 c_3$
1 en 3 weten gezamenlijk dat 3 kandelaar heeft	$C_{13} c_3$
iedereen weet gezamenlijk dat 3 groen, balzaal of kand. heeft	$C_{123456}(c_3 \vee g_3 \vee b_3)$

# Vereenvoudigingen

- We spelen zonder *speelbord*, en (dus) zonder dobbelstenen.
- Alle kaarten zijn van hetzelfde type, dus niet ‘wapen’, ‘kamer’, ...
- Wat houden we over? 21 kaarten, verdeeld over 7 ‘spelers’
- We maken de zetten eenvoudiger: niet meer ‘de ronde doen’ maar slechts naar één speler één verdenking uiten.
- We kijken (voorlopig) alleen naar zetten, en niet naar het hele spel ...

We houden een kaartspel over dat bestaat uit vragen en antwoorden.  
Het kan nog eenvoudiger, zonder dat het triviaal wordt:

*drie spelers en drie kaarten*

# Drie spelers en drie kaarten

Er zijn drie spelers.

De spelers heten 1, 2 en 3.

Iedere speler houdt een kaart vast.

De kaarten heten rood, wit en blauw.

## Vragen

- speler 2 vraagt speler 1: toon mij je kaart.
- speler 2 vraagt speler 1: heb je de rode of de blauwe kaart.
- speler 2 vraagt speler 1: heb je de rode kaart.

## Antwoorden

- speler 1 antwoordt 'ja'.
- speler 1 toont (alleen) aan speler 2 de rode kaart.
- speler 1 toont iedereen de rode kaart.  
(legt de rode kaart op tafel)
- player 1 zegt 'nee'.

Andere antwoorden zijn niet interessant voor (eerlijke) spelen.



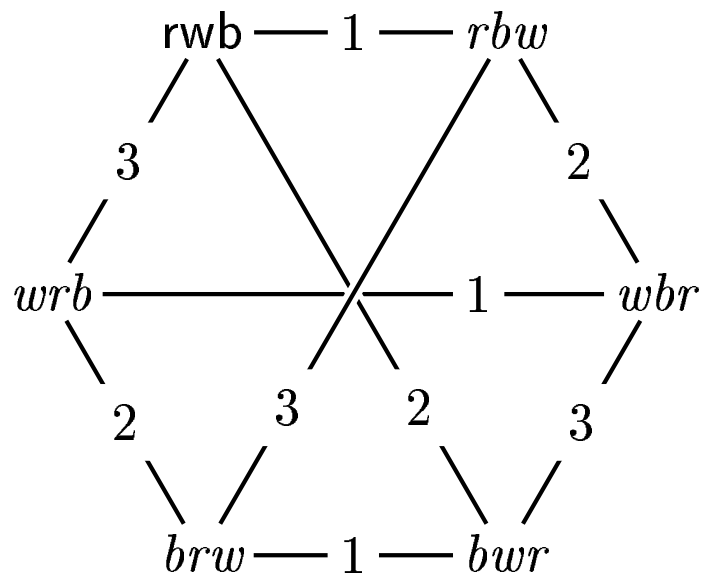
# De (spel)toestand voor kaartverdeling *rw**b*

Drie spelers 1, 2 en 3 houden drie kaarten vast.

Speler 1 houdt de rode kaart vast, speler 2 de witte, speler 3 de blauwe.

Dit wordt beschreven door de kaartverdeling *rw**b*.

Om de kennis van de spelers weer te geven moeten we ook refereren aan andere (voorstelbare) kaartverdelingen:



In wereld *rw**b* van dit model gelden de volgende beweringen:

$$K_1 r_1 \quad \neg K_2 r_1 \quad K_1 \neg K_2 r_1 \quad C_{123}(r_1 \vee w_1 \vee b_1)$$

De atomaire bewering  $r_1$  staat voor ‘speler 1 houdt rood vast’.

We schrijven  $rw b \models K_1 r_1$  voor ‘in *rw**b* geldt  $K_1 r_1$ ’.

We berekenen  $rw b \models K_1 r_1$  d.m.v.  $rw b \models r_1$  and  $rb w \models r_1$

# Speler 1 legt de rode kaart op tafel

*Speler 2 vraagt speler 1 zijn kaart.*

*Speler 1 legt als antwoord rood op tafel.*

*Noem de actie zeg-rood.*

$rw b \text{ --- } 1 \text{ --- } rb w$

Beweringen die gelden in wereld  $rw b$  van deze toestand:

$K_2 r_1$

$K_3 r_1$

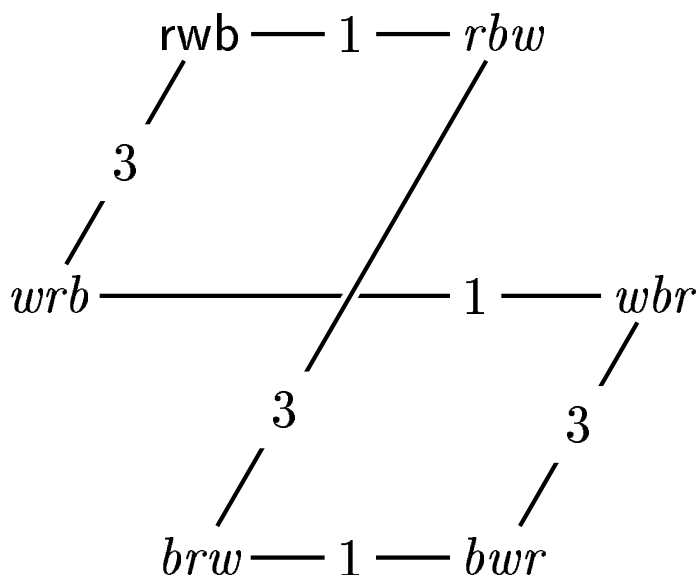
$\neg K_1 w_2$

$C_{23} r_1$

## Speler 1 toont rood aan speler 2.

Speler 2 vraagt speler 1 zijn kaart. Speler 1 laat alleen speler 2 rood zien, dat wil zeggen: speler 3 ziet niet welke kaart het is, maar ziet wel dat er een kaart getoond wordt. Dit is gemeenschappelijke kennis voor alle spelers. Deze actie noemen we **toon-rood**.

De speltoestand die resulteert na deze actie:



Beweringen die gelden in wereld *rwb* van deze toestand:

$$K_2 r_1 \quad C_{123}(K_2 r_1 \vee K_2 w_1 \vee K_2 b_1)$$

Hoe berekenen we ‘gemeenschappelijke kennis’:

$$rwb \models C_{123}(K_2 r_1 \vee K_2 w_1 \vee K_2 b_1)$$

$\Leftrightarrow$

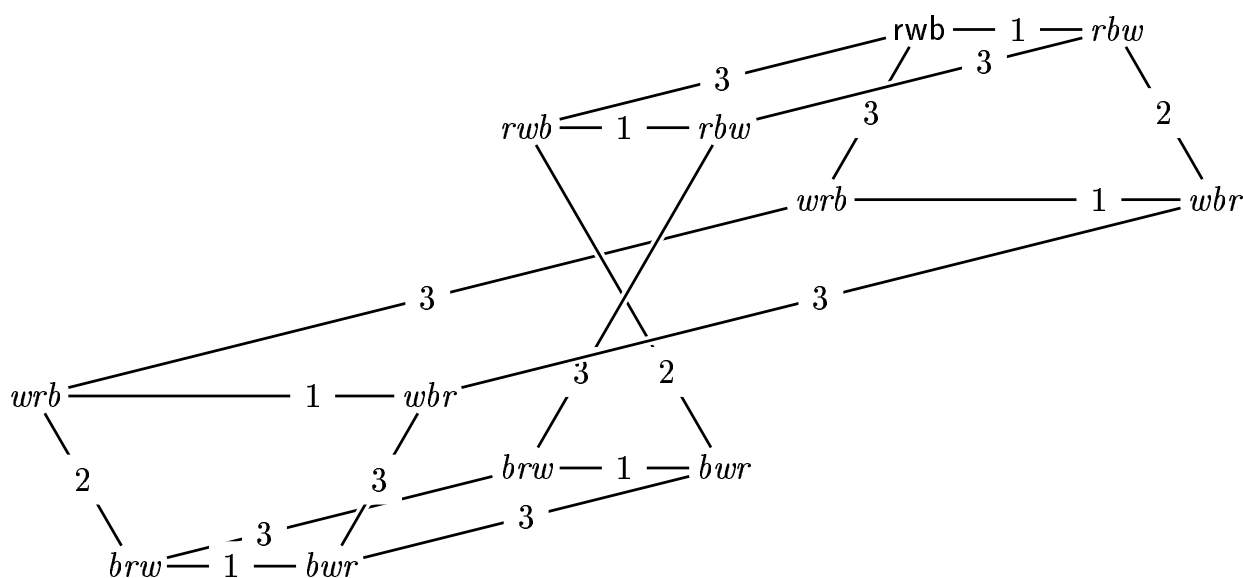
voor alle ‘bereikbare’  $w : w \models K_2 r_1$  of  $w \models K_2 w_1$  of ...

# Speler 1 fluistert 'ik heb blauw niet'

Nog één stap ingewikkelder:

*Speler 2 vraagt speler 1 hem een kaart in het oor te fluisteren die hij niet heeft. Speler 1 fluistert in het oor van speler 2: "Ik heb blauw niet". Deze actie noemen we fluister-nietblauw.*

De speltoestand die resulteert na deze actie:



Ook nu geldt dat 2 de kaart van 1 weet.

Speler 1 kon echter kiezen.

Dit blijkt omdat *rwb* tweemaal in de figuur voorkomt.

In de 'voorste' *rwb* weet 2 niet de kaart van 1.

Daar heeft 1 gefluisterd dat hij niet wit heeft.

En dat wist 2 al.

*Speler 1 kan kiezen!*

*De speltoestand is ingewikkelder geworden!*

# Dynamische epistemische logica

In onze taal hebben we al operatoren zoals  $K_1$  voor kennis, en operatoren zoals  $C_{12}$  and  $C_{123}$  voor gemeenschappelijke kennis. We voegen nu operatoren toe zoals [zeg-rood], [toon-rood] en [fluister-nietblauw].

Speler 2 weet dat 1 rood heeft nadat 1 de rode kaart aan 2 heeft getoond:

$$rwb \models [\text{toon-rood}]K_2r_1$$

Speler 3 weet dat speler 2 de kaart van speler 1 weet:

$$rwb \models [\text{toon-rood}]K_3(K_2r_1 \vee K_2w_1 \vee K_2b_1)$$

In deze taal wordt de actie **toon-rood** eigenlijk als volgt beschreven:

$$L_{123}(!L_{12}?r_1 \cup L_{12}?w_1 \cup L_{12}?b_1)$$

Dit staat voor:

*1, 2 en 3 leren dat een van de volgende drie alternatieven is uitgevoerd: (1 en 2 leren dat 1 rood heeft) of (1 en 2 leren dat 1 wit heeft) of (1 en 2 leren dat 1 blauw heeft); en het werkelijk uitgevoerde alternatief is (1 en 2 leren dat 1 rood heeft)*

Net zoals *kennis* een relatie is *tussen werelden* in een speltoestand, is een *actie* een relatie *tussen speltoestanden*.

We kunnen een actie zelf ook zien als een Kripke-model: het uitvoeren van een actie in een speltoestand is dan het *vermenigvuldigen* van twee Kripke-modellen.

# Andere acties in Cluedo.

Behalve 'een kaart tonen' zijn er nog andere acties in Cluedo.

Overzicht:

- **showcard**

Een kaart tonen

*Als antwoord op een vraag naar een van drie kaarten, toont een speler een kaart aan (alleen) een andere speler.*

- **nocard**

Zeggen dat je een kaart niet hebt

*Als antwoord op een vraag naar een van drie kaarten, zegt een speler dat hij geen van alle heeft.*

- **endmove**

Je beurt afsluiten

*Een speler besluit zijn beurt zonder een beschuldiging te uiten.*

- **win**

Het spel winnen

*Een speler uit een correcte beschuldiging.*

Een typische zet in Cluedo bestaat uit:

- een aantal **nocard** acties
- gevolgd door een **showcard** actie
- en daarna door een **endmove** actie

Elk van deze acties leidt dus mogelijk tot informatiewinst!

**endmove** acties zijn niet triviaal.

Voorbeeld: wat kun je afleiden als in de eerste zet niemand een kaart kan laten zien, maar de speler aan zet niet wint?

# Speltheorie en Cluedo

We hebben nu precieze beschrijvingen van zetten in Cluedo.

We hebben eveneens precieze beschrijvingen van speltoestanden in Cluedo.

We kunnen nu bijvoorbeeld uitrekenen dat de complexiteit van speltoestanden bij Cluedo niet toe- maar afneemt, anders dan in het voorbeeld van **fluister-nietblauw**.

We kunnen nog niet tussen verschillende mogelijke verdenkingen kiezen. Een antwoord op het laatste is niet mogelijk zonder het eerste.

We kunnen ook nog niet het goede moment voor een beschuldiging bepalen:

in de laatste rondes van het spel twijfelen spelers vaak, of ze een gokje zullen wagen naar de moordkaarten, of een volgende beurt afwachten.

Die twijfel is gegrond.

Een antwoord kan alleen worden gevonden in de *speltheorie*.

# Harry Potter 'Het Geheim van Zweinstein'

Onlangs is een nieuwe variant op Cluedo verschenen:

Harry's Potter's 'Mystery at Hogwarts' (Het Geheim van Zweinstein).

Het spelbord is uitgebreider, en speelt een grotere rol tijdens het spel.

Het gaat hier niet om een *moord*, maar om een *betovering*.

Door wie, in welke zaal van Zweinstein, en met welke toverspreuk?

De zetten in dit spel zijn ook 'logisch' echt anders dan die in Cluedo: dit biedt weer nieuwe uitdagingen voor de wetenschap!

Andere logische zetten zijn:

- **fluffy**

*Een beschuldiging uiten.*

Dit mag niet (meer) aan het eind van iedere beurt, maar alleen door op het spelbord naar Fluffy te gaan.

Ook is de beschuldiging hardop.

- **ghost**

*Een speler met de 'ghost'-pion van het bord duwen.*

Op het spelbord mag je een andere speler 'terug naar af' duwen met de 'ghost'. Die speler toont jou dan een kaart van een type naar (jouw) keuze.

- **hogwarts**

Een soort kanskaarten, met *nog andere* logische zetten...



# Maar hoe win je nu echt Cluedo???

Door goed boekhouden!

Barteld	revolver, studeerkamer, mustard
Niels	steeksleutel, keuken, danszaal
Fer-Jan & Freeke	peacock, biljartzaal, kandelaar
Linda	touw, eetkamer, serre
Esther	scarlett, zitkamer, hall
Masha	green, white, dolk
table	bibliotheek, lodenpijp, plum

De eerste twee zetten:

1	vraag	Barteld	green, touw, danszaal
	antwoord	Niels	danszaal
2	vraag	Niels	white, revolver, zitkamer
	antwoord	Esther	zitkamer

# De kennis van Masha

De begintoestand: Masha heeft green, white en dolk:

	B	N	F	L	E	M	t
green	0	0	0	0	0	1	0
mustard						0	
peacock						0	
plum						0	
scarlett						0	
white	0	0	0	0	0	1	0
kandelaar						0	
revolver						0	
dolk	0	0	0	0	0	1	0
lodenpijp						0	
touw						0	
steeksle						0	
danszaal						0	
biljartk						0	
serre						0	
eetkamer						0	
hall						0	
keuken						0	
biblioth						0	
zitkamer						0	
studeerk						0	

Zet 1: Barteld vraagt danszaal, touw, green. Niels antwoordt danszaal.

	B	N	F	L	E	M	t
green	0	0	0	0	0	1	0
mustard						0	
peacock						0	
plum						0	
scarlett						0	
white	0	0	0	0	0	1	0
kandelaar						0	
revolver						0	
dolk	0	0	0	0	0	1	0
lodenpijp						0	
touw		2				0	
steeksle						0	
danszaal		2				0	
biljartk						0	
serre						0	
eetkamer						0	
hall						0	
keuken						0	
biblioth						0	
zitkamer						0	
studeerk						0	

Zet 2: Niels vraagt: white, revolver, zitkamer. Esther antwoordt: zitkamer.

	B	N	F	L	E	M	t
green	0	0	0	0	0	1	0
mustard						0	
peacock						0	
plum						0	
scarlett						0	
white	0	0	0	0	0	1	0
kandelaar						0	
revolver			0	0	2	0	
dolk	0	0	0	0	0	1	0
lodenpijp						0	
touw		2				0	
steeksle						0	
danszaal		2				0	
biljartk						0	
serre						0	
eetkamer						0	
hall						0	
keuken						0	
biblioth						0	
zitkamer			0	0	2	0	
studeerk						0	

Enzovoort... Succes gegarandeerd.