Reken mee met ABC
Hendrik Lenstra

Mathematisch Instituut,
Universiteit Leiden

Department of Mathematics,
University of California, Berkeley

Nationale Wiskunde Dagen 2004

Voorkennis:

optellen: $+$
vermenigvuldigen: $\times$

Optellen:

$a + b = c$

Voorbeeld:

$$\begin{array}{rr} a = & 4820607 \\ b = & \underline{19490416} \; + \\ c = & 24311023 \end{array}$$

Vermenigvuldigen:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
2	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**
3	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**	**21**
4	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**	**28**
5	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**
6	**12**	**18**	**24**	**30**	**36**	**42**
7	**14**	**21**	**28**	**35**	**42**	**49**
8	**16**	**24**	**32**	**40**	**48**	**56**
9	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**
10	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**

Priemgetallen:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, . . .

A *priemgetal* is een getal dat in de vermenigvuldigtafel wel bij de *cursieve* staat maar niet bij de **vetgedrukte**.

Priemfactorontbinding:

$$\begin{aligned} 4820607 &= 3 \times 3 \times 3 \times 11 \times 16231 \\ &= 3^3 \cdot 11 \cdot 16231 \end{aligned}$$

$$19490416 = 2^4 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 73$$

Hoe help ik de wiskunde verder, in vijf stappen.

Stap 1. Kies twee getallen, zeg a en b.

Voorbeeld:

$a = 4820607$
$b = 19490416$

Stap 2. Zorg ervoor dat a en b geen priemfactor gemeen hebben.

Voorbeeld:
$4820607 = 3^3 \cdot 11 \cdot 16231$
$19490416 = 2^4 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 73$
hebben een factor 11 gemeen.

Wat te doen?

Wat te doen als a en b een priemfactor gemeen hebben?

Methode 1.
Gooi a en b weg, en begin opnieuw met Stap 1.

Stelling.
Als a en b willekeurig gekozen zijn, dan hebben ze met kans

$$6 : \pi^2 \doteq 60{,}7927\,\%$$

geen priemfactor gemeen.

Hier is π de verhouding van omtrek en middellijn van een cirkel:

$$\pi \doteq 3{,}14159$$

Methode 2.
Verwijder de gemene priemfactoren.

Voorbeeld: vervang

$4820607 = 3^3 \cdot 11 \cdot 16231$
$19490416 = 2^4 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 73$

door

$4820607/11 = 438237$
$19490416/11 = 1771856$

Merk op:

$438237 = 3^3 \cdot 16231$
$1771856 = 2^4 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 73$

Stap 3. Tel a en b op:

$$a + b = c$$

Voorbeeld:

$$\begin{array}{rr} a = & 438237 \\ b = & \underline{1771856} + \\ c = & 2210093 \\ & = 23 \cdot 307 \cdot 313 \end{array}$$

Stap 4. Bereken het *radicaal.*

Het radicaal is het product van de verschillende priemfactoren van a, b en c.

Voorbeeld: voor

$$\begin{aligned} a &= 438237 \\ &= 3^3 \cdot 16231 \\ b &= 1771856 \\ &= 2^4 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 73 \\ c &= 2210093 \\ &= 23 \cdot 307 \cdot 313 \end{aligned}$$

is het radicaal r gelijk aan

$3 \cdot 16231 \cdot 2 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 73 \cdot 23 \cdot 307 \cdot 313$,

en dat is

$$23835\,019857\,401418.$$

Hoe kleiner het radicaal, des te beter!

Stap 5. Stel de uitslag vast.

Je wint als het radicaal kleiner is dan c:

$$r < c.$$

Anders verlies je.

Als zelfs geldt $r^2 < c$:

laat mij direct weten!

(hwl@math.leidenuniv.nl)

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} a &= 438237 \\ b &= 1771856 \\ c &= 2210093 \\ r &= 23835\,019857\,401418 \end{aligned}$$

Pech!

Stap 1. Kies twee getallen.

Stap 2. Verwijder gemene priemfactoren.

Stap 3. Tel ze op.

Stap 4. Bereken het radicaal.

Stap 5. Stel de uitslag vast.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} a &= 338 = 2 \cdot 13^2 \\ b &= 390625 = 5^8 \\ c &= 390963 = 3 \cdot 19^4 \\ r &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 = 7410 \end{aligned}$$

Gewonnen!

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} a &= 225 = 3^2 \cdot 5^2 \\ b &= 12544 = 2^8 \cdot 7^2 \\ c &= 12769 = 113^2 \\ r &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 113 = 23730 \end{aligned}$$

Verloren!

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} a &= 17146\,080000 \\ &= 2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \\ b &= 128\,014538\,551201 \\ &= 113^2 \cdot 223^2 \cdot 449^2 \\ c &= 128\,031684\,631201 \\ &= 13^3 \cdot 3877^3 \\ r &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 113 \cdot 223 \cdot 449 \\ &= 119\,753466\,997710 \end{aligned}$$

Gewonnen!

Wie kan het beste *abc*-drietal maken?

De *kwaliteit* q van zo'n drietal is bepaald door

$$r^q = c$$

Hoe hoger de kwaliteit, des te beter.

Voorbeelden:

$c = 2210093$
$r = 23835\,019857\,401418$
$q \doteq 0{,}387393$

$c = 390963$
$r = 7410$
$q \doteq 1{,}445064$

$c = 12769$
$r = 23730$
$q \doteq 0{,}938486$

$c = 128\,031684\,631201$
$r = 119\,753466\,997710$
$q \doteq 1{,}002062$

Je wint als q groter dan 1 is,
en anders verlies je.

Men kan q berekenen uit

$$q = \frac{\log c}{\log r}$$

Als c groot is, dan is q
bij benadering gelijk aan

$$\frac{\text{aantal cijfers van } c}{\text{aantal cijfers van } r}$$

Het wereldrecord

$a = 2$
$b = 6436341 = 3^{10} \cdot 109$
$c = 6436343 = 23^5$
$r = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 109 = 15042$
$q \doteq 1{,}629912$

Dit voorbeeld werd in 1987
door Eric Reyssat ontdekt.

Niemand kent een drietal
met een hogere kwaliteit.

Niemand weet of er een grens
is gesteld aan de kwaliteit,
maar men vermoedt van wel.

Hulp bij het maken van
goede abc-drietallen:

- Pythagoras
- Fermat
- Pascal
- Pell
- Catalan
- eigen fantasie

Pythagoras

$x^2 + y^2 = z^2$

Fermat

$x^n + y^n = z^n$

Pascal

$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Pell

$x^2 = dy^2 + 1$

Catalan

$x^n + 1 = y^m$

Eigen fantasie (1)

Laat een computer lopen!

De 15 kleinste winnende drietallen:

a	b	c	r	q
1	8	9	6	1,226294
5	27	32	30	1,018975
1	48	49	42	1,041242
1	63	64	42	1,112694
1	80	81	30	1,292030
??	??	??	42	1,175719
4	121	125	110	1,027196
3	125	128	30	1,426565
1	224	225	210	1,012903
1	242	243	66	1,311101
2	243	245	210	1,028829
7	243	250	210	1,032607
13	243	256	78	1,272790
81	175	256	210	1,037042
?	???	289	???	1,225181

Eigen fantasie (2)

$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$

Steeds $r \leq n \cdot (2n+1) \cdot (n+1)$.

Als $2n+1 = 3^k$, dan
$r \leq n \cdot 3 \cdot (n+1)$

Als ook $n = 11^2 \cdot m$, dan
$r \leq (n/11) \cdot 3 \cdot (n+1) < (n+1)^2$

Kun je k zo kiezen dat het
getal $n = (3^k - 1)/2$ deelbaar
is door 11^2?

Ja: als k deelbaar is door 5,
dan is $(3^k - 1)/2$ deelbaar
door $(3^5 - 1)/2 = 121 = 11^2$.

Dat geeft oneindig veel winnende *abc*-drietallen:

$11^4 + 3^5 = 2^2 \cdot 61^2$,
$2^4 \cdot 11^4 \cdot 61^2 + 3^{10} = 5^4 \cdot 1181^2$,
$11^4 \cdot 13^2 \cdot 4561^2 + 3^{15} =$
$2^2 \cdot 7^2 \cdot 31^2 \cdot 61^2 \cdot 271^2$,
enzovoort!

Kwaliteit respectievelijk
$q \doteq 1{,}157522$,
$q \doteq 1{,}212075$,
$q \doteq 1{,}042919$,
enzovoort.

Nog een oneindige reeks:

a	b	c	r
1	8	9	6
1	80	81	30
1	728	729	546
1	6560	6561	1230
1	59048	59049	4026
1	531440	531441	199290
1	4782968	4782969	3587226
1	43046720	43046721	4035630
1	387420488	387420489	290565366
1	3486784400	3486784401	23773530
1	$9^n - 1$	9^n	$< \frac{3}{4} 9^n$

We kunnen oneindig veel drietallen maken met kwaliteit $q > 1$.

Kunnen we ook oneindig veel drietallen maken met $q > 1{,}1$?

a	c	r	q
1	9	6	1,226294
1	81	30	1,292030
1	729	546	1,045863
1	6561	1230	1,235303
1	59049	4026	1,323545
1	531441	199290	1,080379
1	4782969	3587226	1,019061
1	43046721	4035630	1,155623
1	387420489	290565366	1,014763
1	3486784401	23773530	1,293696
1	...	...	1,012046
1	...	...	1,067792
1	...	...	1,010174
1	...	...	1,032935
1	...	...	1,088713
1	...	...	1,095349
1	...	...	1,007762
1	...	...	1,025430
1	...	...	1,006939
1	...	...	1,148480

Er is geen enkele methode bekend die gegarandeerd oneindig veel drietallen produceert met $q > 1{,}1$.

Als je het *abc*-vermoeden gelooft, bestaat zo'n methode ook niet.

Hetzelfde geldt ook voor 1,01, voor 1,001, voor 1,0001, voor 1,00001, enzovoort.

abc-vermoeden:
als Q een willekeurig getal groter dan 1 is, dan hebben maar eindig veel drietallen kwaliteit tenminste Q.

Het abc-vermoeden werd in 1985 door David Masser en Joseph Oesterlé geformuleerd.

Totnogtoe kan niemand het bewijzen of weerleggen, maar de meeste getaltheoretici denken dat het waar is.

Het is de Heilige Graal van de moderne getaltheorie.

Als je het vermoeden wilt *weerleggen*, moet je oneindig veel drietallen met kwaliteit duidelijk groter dan 1 maken.

Beloning: directe roem, en teleurstelling bij alle getaltheoretici.

Als je het vermoeden wilt *bewijzen*, dan moet je
- wiskunde gaan studeren,
- een briljant idee krijgen.

Beloning: eeuwige roem, dankbaarheid alom, en oplossingen voor vele problemen.

Meer lezen:

- over getaltheorie:
H. Davenport, *The higher arithmetic*, Londen, 1952 (en vele latere drukken)
- over het abc-vermoeden:
www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html