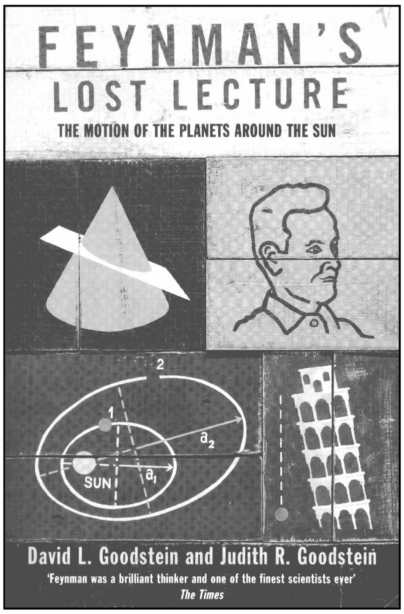
# De baan van de planeten rond de zon
## volgens Newton en Feynman

Michel Roelens (Michel.Roelens@ler.khlim.be)
Katholieke Hogeschool Limburg, Lerarenopleiding, Bachelor Secundair Onderwijs, Diepenbeek, België
Maria Boodschaplyceum, Brussel, België
Tijdschrift Uitwiskeling




Op 14 maart 1964 gaf de wereldberoemde natuurkundige en Nobelprijswinnaar Richard Feynman (1918-1988) voor een publiek van eerstejaarsstudenten een opmerkelijke lezing over 'de beweging van de planeten rond de zon'. In deze lezing toonde Feynman aan *dat de ellipsvorm van de baan van een planeet volgt uit de wetten van Newton en de aard van de gravitatiekracht*. Hierbij steunde hij enkel en alleen op Euclidische meetkunde; in het bewijs komen dus geen afgeleiden noch differentiaalvergelijkingen voor. Het gaat dus om een 'elementair' bewijs, wat echter niet wil zeggen dat de redenering eenvoudig is.

Terwijl de andere lezingen van Feynman uit dezelfde periode allemaal meteen gepubliceerd werden (zie [1]), geraakte deze lezing in de vergetelheid. Ongeveer dertig jaar later, na Feynmans dood, doken enkele slordige schetsen op die de spreker ter voorbereiding van die lezing had gemaakt, alsook een geluidsbandje. Op basis van dit materiaal slaagde het echtpaar Goodstein erin om de lezing te ontcijferen en gedetailleerd te reconstrueren. Dit gaf aanleiding tot het overheerlijk boekje [2].

Het boek begint met een – beknopt maar schitterend geschreven – hoofdstukje over de geschiedenis van de beschrijving van het zonnestelsel: van Aristoteles via Ptolemaios, Copernicus en Kepler tot Newton.

Kepler (begin 17$^{\text{de}}$ eeuw) leidde uit observatiegegevens af dat de baan van een planeet een ellips is met de zon in één van de brandpunten (1$^{\text{ste}}$ wet van Kepler). Bovendien stelde hij vast dat de snelheid van een planeet varieert afhankelijk van de afstand tot de zon (de 2$^{\text{de}}$ wet van Kepler of de 'perkenwet': de verbindingslijn van de planeet met de zon beschrijft in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakten) en dat er een mooi verband is tussen de omloopstijd van een planeet en de afstand van die planeet tot de zon (3$^{\text{de}}$ wet van Kepler).

Newton ([3], eind 17$^{\text{de}}$ eeuw) toonde de logische samenhang aan van deze wetten van Kepler met zijn gravitatietheorie (de gravitatiekracht die twee lichamen op elkaar uitoefenen is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tussen beide lichamen) en de wetten van de dynamica (namelijk: 1. zonder dat er een kracht inwerkt, blijft een lichaam rechtlijnig met een vaste snelheid bewegen; 2. kracht is massa maal versnelling; 3. actie is gelijk aan reactie). Hoewel Newton zelf de differentiaalrekening had uitgevonden, steunde hij hierbij niet op deze 'nieuwe' rekentechnieken. Feynmans bewijs van de perkenwet komt overeen met dat van Newton, maar om te bewijzen dat de planeet een ellipsbaan volgt, bedacht Feynman een andere redenering dan Newton.[1] Hieronder willen we Feynmans redenering samenvatten.

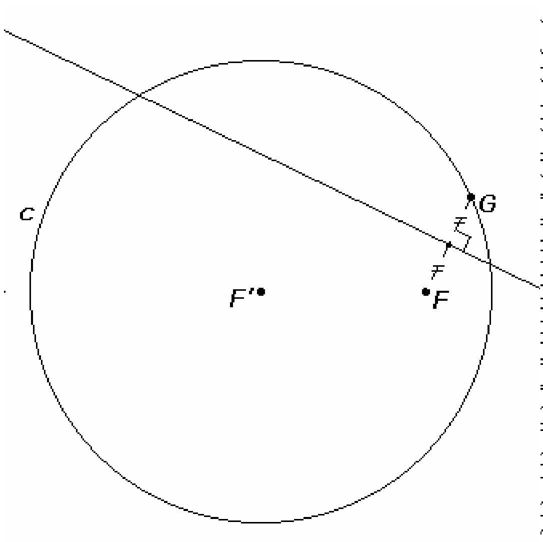
## *Verschillende manieren om een ellips te bepalen*

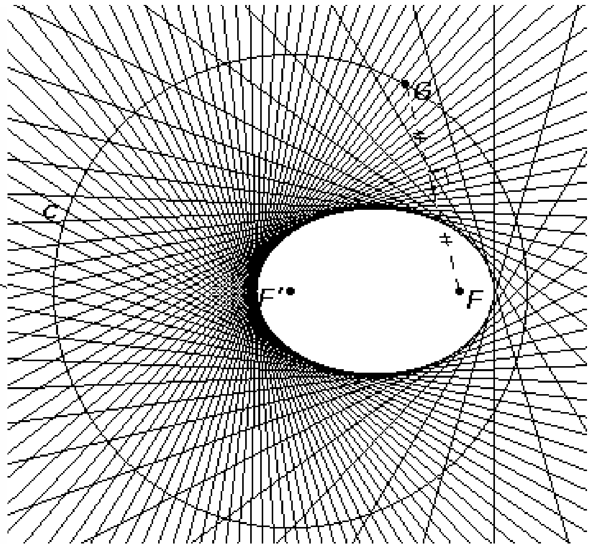
Je kunt een ellips definiëren als vlakke doorsnede van een kegel of als de verzameling (meetkundige plaats) van de punten $P$ waarvan de som van de afstanden tot twee vaste (brand)punten $F$ en $F'$ constant is. Maar het bewijs van Feynman steunt op een derde manier om een ellips te bepalen. Deze manier komt neer op het 'vouwen' van een ellips.

[1] Newton besteedde vooral aandacht aan de omgekeerde implicatie: als de planetenbanen ellipsen zijn, dan moet de gravitatiekracht omgekeerd evenredig zijn met het kwadraat van de afstand.

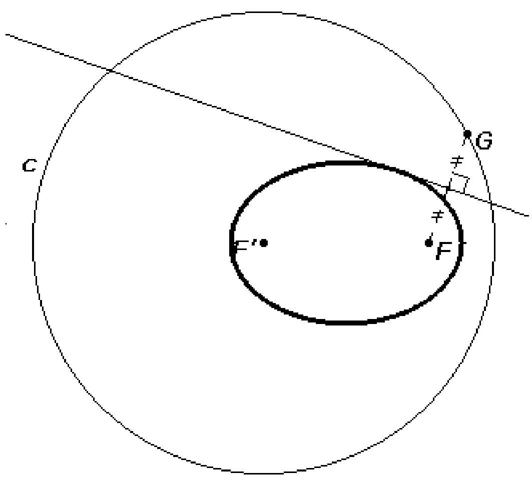
> Teken op een blad papier een cirkel met middelpunt F' en teken binnen de cirkel een punt F. Vouw nu het blad zo dat je een punt *G* van de cirkel met het punt *F* laat samenvallen. Leg het blad weer open en herhaal de vouwoperatie nog (minstens) een twintigtal keren, telkens met een ander punt *G* van de cirkel. Je krijgt een ellips te zien, waar alle vouwlijnen aan raken.

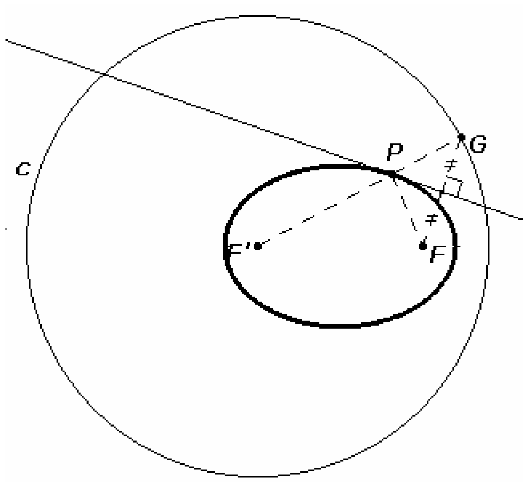
Dit 'vouwen' kan eenvoudig gesimuleerd worden in Cabri. Teken een cirkel *c* met middelpunt *F'*, teken een punt *F* binnen de cirkel en neem een punt *G* op de cirkel *c*. Als je *G* op *F* wilt vouwen, is de vouwlijn de middelloodlijn van [*FG*]. Voer nu een animatie uit waarbij die vouwlijn een spoor maakt en waarbij *G* op de cirkel *c* rondloopt.



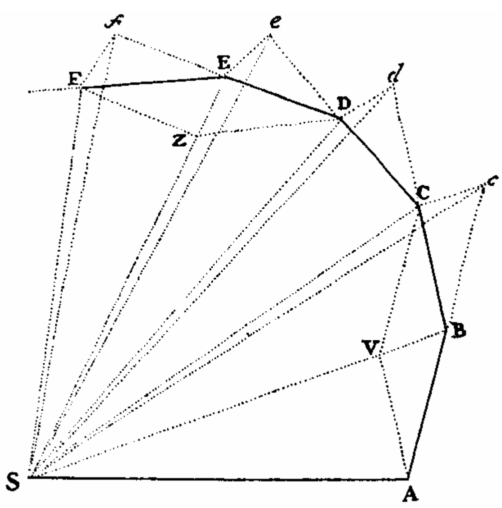

In plaats van die animatie kun je aan Cabri ook de meetkundige plaats van de vouwlijn laten tekenen (bepaald door de beweging van het punt *G* op de cirkel). Dan verschijnt de 'omhullende' van al die raaklijnen op het scherm en dat wordt de ellips. Op die figuur zien we dat het raakpunt van de vouwlijn aan de ellips niet het midden van [*FG*] is, maar wel het snijpunt van deze vouwlijn met *F'G*.




Nu zie je dat $|F'P| + |PF| = |F'G|$ en dit is de (vaste) straal van de cirkel *c*. Het punt *P* beweegt dus inderdaad op een ellips. Bovendien is de vouwlijn inderdaad de raaklijn in *P* aan deze ellips. Neem immers een ander punt *Q* op deze rechte. Dan geldt: $|F'Q| + |QF| = |F'Q| + |QG| > |F'G|$, zodat dit punt *Q* buiten de ellips ligt.

## *Bewijs van de perkenwet*



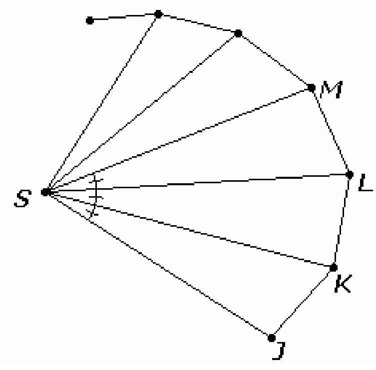

Een planeet beweegt rond de zon $S$. We veronderstellen dat de zon stil staat en we verwaarlozen de interactie met andere hemellichamen. We maken een 'discrete' benadering, dit wil zeggen dat we de beweging opdelen in *korte gelijke tijdsintervallen* en doen alsof de planeet in elk van die tijdsintervallen rechtlijnig beweegt. De planeet gaat in zo'n tijdsinterval van $A$ naar $B$ (zie figuur hiernaast, uit Newtons *Principia mathematica philosophiae naturalis* van 1687). Als we nu de duur van het tijdsinterval als tijds*eenheid* nemen, kunnen we $\overrightarrow{AB}$ bekijken als de snelheidsvector van de planeet in punt $A$. Als er geen kracht in het spel was, zou de planeet in het volgende tijdsinterval van $B$ naar $c$ gaan (eerste wet van Newton). Maar de zon trekt de planeet aan met een kracht gericht van $B$ naar $S$. De tweede wet van Newton zegt dat de kracht evenredig is met de versnelling, d.w.z. met de snelheids*verandering*. Bij de snelheidsvector $\overrightarrow{AB}$ wordt dus een vector $\overrightarrow{BV}$ bijgeteld richting zon (zie figuur), zodat de planeet niet naar $c$ maar naar $C$ gaat (immers: $\overrightarrow{Bc} + \overrightarrow{BV} = \overrightarrow{BC}$ ).

Om nu de perkenwet ($2^{de}$ wet van Kepler) aan te tonen, moeten we gewoon bewijzen dat de driehoeken $SAB$ en $SBC$ dezelfde oppervlakte hebben. Maar dit is duidelijk het geval: ze hebben dezelfde basis [$SB$] en de hoogtes zijn gelijk ($A$ en $c$ en dus ook $A$ en $C$ liggen duidelijk even ver van de rechte $SB$).

## *Bewijs dat de baan ellipsvormig is*

Zet je schrap, lezer, want dit is toch een tikkeltje ingewikkelder.

Feynman maakt hier opnieuw een discrete benadering, maar deze keer deelt hij de beweging niet op in stukjes met gelijke *tijd*sintervallen, maar wel met gelijke *hoekjes* met de zon als hoekpunt. De planeet gaat dus van $J$ naar $K$, van $K$ naar $L$ enz. en de hoekjes in $S$ zijn gelijk.

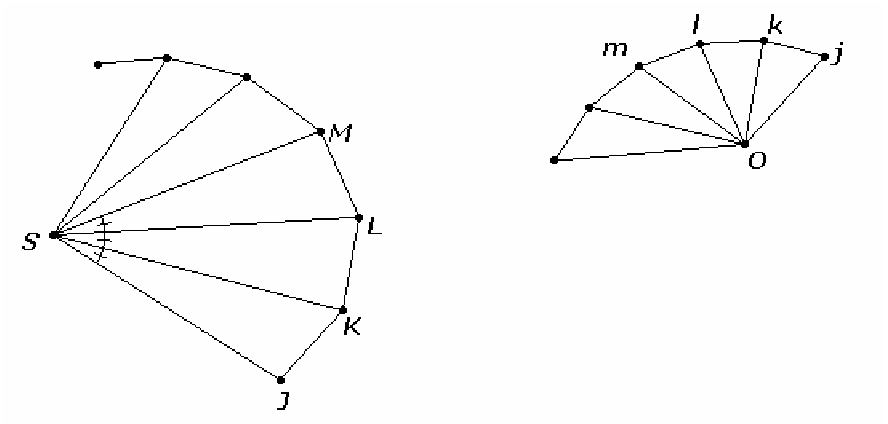



Nu zegt de tweede wet van Newton dat de kracht evenredig is met de versnelling, dus in onze discrete benadering met $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ (de snelheidstoename per tijdseenheid). De perkenwet zegt dat $\Delta t$ evenredig is met de oppervlakte van het driehoekje $SJK$, respectievelijk $SKL$, enz. Anderzijds is de gravitatiekracht omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot de zon. Dit geeft

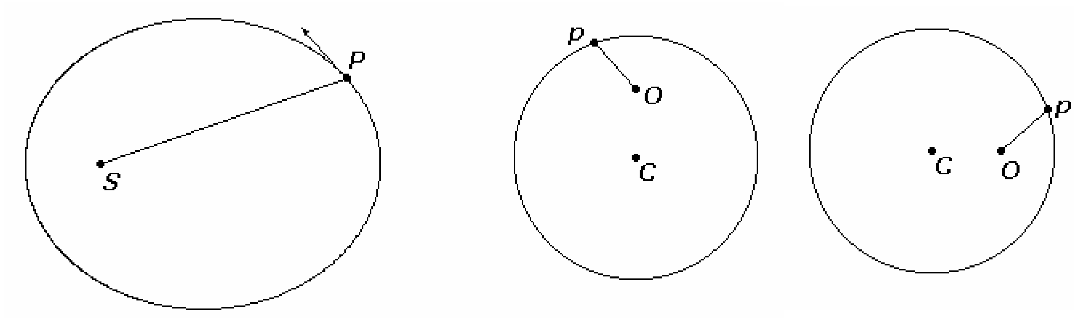
$$\frac{1}{\text{afstand}^2} \sim F \sim \frac{\Delta v}{\Delta t} \sim \frac{\Delta v}{\text{opp}}.$$

Als je nu kunt aantonen dat de oppervlakte van zo'n driehoekje evenredig is met het kwadraat van de afstand tot de zon (en we laten je dit zelf doen; vergeet niet dat de hoekjes in $S$ gelijk zijn…), dan volgt hieruit dat $\Delta v$ constant is!

In een volgende stap tekent Feynman een *hodograaf*: de verschillende snelheidsvectoren in de punten $J$, $K$, $L$ … laat hij in een zelfde punt $O$ aangrijpen. De snelheidsvector $Oj$ is evenwijdig met $JK$, $Ok$ is evenwijdig met $KL$, enz. Omdat we gelijke hoekjes genomen hebben en geen gelijke tijdsintervallen, kunnen we niet zeggen dat de lengten van deze vectoren evenredig zijn met de lengten $|JK|$, $|KL|$, enz. bij de baan. De eindpunten van de hodograaf bepalen een veelhoek $jklm$…. De zijden van deze veelhoek zijn de snelheidsveranderingen (bv. $\overrightarrow{jk} = \overrightarrow{Ok} - \overrightarrow{Oj} = \vec{v}_K - \vec{v}_J$ ). Omdat $\Delta v$ constant is (dat is hierboven aangetoond) zijn de zijden van deze veelhoek allemaal even lang. En omdat de hoeken in *S* bij de baan gelijk genomen waren en *kj* // *KS*, *kl* // *LS*, … (de snelheidsveranderingen wijzen naar zon) zijn de hoeken van deze veelhoek ook allemaal even groot. De veelhoek *jklm…* is dus een regelmatige veelhoek! Merk op dat het punt *O* niet het middelpunt *C* is van deze regelmatige veelhoek. In dit punt *C* vinden we dezelfde hoekjes terug als in *S* op de linkse figuur (de middelpuntshoeken van een regelmatige veelhoek zijn gelijk aan de buitenhoeken).




Nu maakt Feynman de gelijke hoekjes in *S* kleiner en kleiner zodat de baan *JKLM…* van de planeet een kromme wordt (de kandidaat-ellips) en de regelmatige veelhoek *jklm…* een cirkel (figuur hieronder in het midden). Als de planeet *P* rond de zon *S* draait, blijft de raaklijn aan de baan in *P* op elk moment evenwijdig met *Op* vermits $\overrightarrow{Op}$ de snelheidsvector voorstelt. Bovendien is de middelpuntshoek $O\hat{C}P$ gelijk aan de hoek die *SP* maakt met een horizontale as door *S* (op de figuur hieronder links). Vervolgens draait Feynman de hodograaf over 90° in wijzerzin (figuur hieronder rechts). De raaklijn aan de kromme in *P* staat nu op elk moment *loodrecht* op *Op*.




Maar de gedraaide hodograaf is dezelfde figuur als de allereerste van deze bespreking (*C* en *O* heetten toen *F'* en *F*)! De middelloodlijn van [*Op*] is die vouwlijn; voor elke positie van *p* op de cirkel krijg je een raaklijn aan een ellips met *C* en *O* als brandpunten! Bijgevolg moet ook de baan van *P* op de linkse figuur een ellips zijn, want met de richting van de snelheid op elk moment (of liever: voor elke waarde van de hoek in *S*) ligt de vorm van de baan vast!

Deze laatste stap is volgens mij de zwakste schakel in de redenering van Feynman. In feite komt deze stap neer op de uniciteit van de oplossing van een differentiaalvergelijking als de beginpositie gegeven is. Ik vraag mij af of deze stap even 'elementair' is als de andere stappen van de redenering.

## Bibliografie

[1] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman lectures on fysics*, 3 volumes, Addison-Wesley (Reading), 1963-1965.

[2] D.L. Goodstein, J.R. Goodstein, *Feynman's lost lecture. The motion of the planets around the sun*, V,intage (London), 1997, besproken in Uitwiskeling 19/3 (mei 2003). De bespreking in Uitwiskeling vormde de basis voor deze tekst.

[3] I. S. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londen, 1686.

[4] http://www.lostlecture.host.sk/LostLecture.htm (webstek van de Slovaakse uitgave, met applets!)