Logische puzzels

Hans van Ditmarsch, University of Otago, New Zealand
hans@cs.otago.ac.nz
http://www.cs.otago.ac.nz/staffpriv/hans/

workshop bij de Nationale WiskundeDagen 2007

Logische puzzels

- opeenvolgende getallen
- wat is mijn getal?
- som en product
- honderd gevangenen en een gloeilamp

Opeenvolgende getallen

Anna en Bert krijgen ieder een natuurlijk getal te horen. De getallen zijn opvolgers van elkaar. Ze krijgen nu de getallen in hun oor gefluisterd. Ze zijn zich bewust van dit scenario. Stel Anna krijgt 2 te horen en Bert krijgt 3 te horen.
De volgende conversatie vindt nu plaats tussen Anna en Bert:

- Anna: “Ik weet jouw getal niet.”
- Bert: “Ik weet jouw getal niet.”
- Anna: “Ik weet jouw getal.”
- Bert: “Ik weet jouw getal.”

Waarom kunnen ze dit allemaal naar waarheid zeggen?

Opeenvolgende getallen — onzekerheid representeren

$\underline{(2,3)}$

Opeenvolgende getallen — onzekerheid representeren

$(2,1) - a - \underline{(2,3)}$

Opeenvolgende getallen — onzekerheid representeren

$$(2,1) - a - \underline{(2,3)} - b - (4,3)$$

Opeenvolgende getallen — onzekerheid representeren

$$(0{,}1) - b - (2{,}1) - a - \underline{(2{,}3)} - b - (4{,}3)$$

Opeenvolgende getallen — onzekerheid representeren

$$(0{,}1) - b - (2{,}1) - a - \underline{(2{,}3)} - b - (4{,}3) \text{———} \cdots$$

Opeenvolgende getallen — onzekerheid representeren

$$(1{,}0) - a - (1{,}2) - b - (3{,}2) - a - (3{,}4) \text{———} \cdots$$

$$(0{,}1) - b - (2{,}1) - a - \underline{(2{,}3)} - b - (4{,}3) \text{———} \cdots$$

Opeenvolgende getallen — onzekerheid representeren

$$(1,0) - a - (1,2) - b - (3,2) - a - (3,4) \text{———} \cdots$$

$$(0,1) - b - (2,1) - a - \underline{(2,3)} - b - (4,3) \text{———} \cdots$$

- Anna weet dat haar getal 2 is.
- Bert weet dat Anna's getal 2 of 4 is.
- Anna en Bert weten gemeenschappelijk dat Bert's getal even is.
- ...

Opeenvolgende getallen — bekendmakingen

$$(1{,}0) - a - (1{,}2) - b - (3{,}2) - a - (3{,}4) \text{———} \cdots$$

$$(0{,}1) - b - (2{,}1) - a - \underline{(2{,}3)} - b - (4{,}3) \text{———} \cdots$$

- Anna: "Ik weet jouw getal niet." ?

Opeenvolgende getallen — bekendmakingen

$$(1{,}0) - a - (1{,}2) - b - (3{,}2) - a - (3{,}4) \text{———} \cdots$$

$$(0{,}1) - b - (2{,}1) - a - \underline{(2{,}3)} - b - (4{,}3) \text{———} \cdots$$

- Anna: "Ik weet jouw getal niet." geëlimineerde toestanden

Opeenvolgende getallen — bekendmakingen

$$(1{,}0) - a - (1{,}2) - b - (3{,}2) - a - (3{,}4) \text{———} \cdots$$

$$(2{,}1) - a - \underline{(2{,}3)} - b - (4{,}3) \text{———} \cdots$$

- Anna: “Ik weet jouw getal niet.”

Opeenvolgende getallen — bekendmakingen

$$(1,0) - a - (1,2) - b - (3,2) - a - (3,4) \text{———} \cdots$$

$$(2,1) - a - \underline{(2,3)} - b - (4,3) \text{———} \cdots$$

- Anna: “Ik weet jouw getal niet.”
- Bert: “Ik weet jouw getal niet.” ?

Opeenvolgende getallen — bekendmakingen

$$(1{,}0) - a - (1{,}2) - b - (3{,}2) - a - (3{,}4) \text{———} \cdots$$

$$(2{,}1) - a - \underline{(2{,}3)} - b - (4{,}3) \text{———} \cdots$$

- Anna: “Ik weet jouw getal niet.”
- Bert: “Ik weet jouw getal niet.” geëlimineerde toestanden

Opeenvolgende getallen — bekendmakingen

$$(1,2) - b - (3,2) - a - (3,4) \text{———} \cdots$$

$$\underline{(2,3)} - b - (4,3) \text{———} \cdots$$

- Anna: “Ik weet jouw getal niet.”
- Bert: “Ik weet jouw getal niet.”

Opeenvolgende getallen — bekendmakingen

$$(1,2) - b - (3,2) - a - (3,4) \longrightarrow \cdots$$

$$\underline{(2,3)} - b - (4,3) \longrightarrow \cdots$$

- Anna: “Ik weet jouw getal niet.”
- Bert: “Ik weet jouw getal niet.”
- Anna: “Ik weet jouw getal.” ?

Opeenvolgende getallen — bekendmakingen

$$(1,2) - b - (3,2) - a - (3,4) \text{———} \cdots$$

$$\underline{(2,3)} - b - (4,3) \text{———} \cdots$$

- Anna: “Ik weet jouw getal niet.”
- Bert: “Ik weet jouw getal niet.”
- Anna: “Ik weet jouw getal.” geëlimineerde toestanden

Opeenvolgende getallen — bekendmakingen

(1,2)

(2,3)

- Anna: “Ik weet jouw getal niet.”
- Bert: “Ik weet jouw getal niet.”
- Anna: “Ik weet jouw getal.”

Opeenvolgende getallen — bekendmakingen

(1,2)

<u>(2,3)</u>

- Anna: “Ik weet jouw getal niet.”
- Bert: “Ik weet jouw getal niet.”
- Anna: “Ik weet jouw getal.”
- Bert: “Ik weet jouw getal.” ?

Opeenvolgende getallen — bekendmakingen

(1,2)

<u>(2,3)</u>

- Anna: “Ik weet jouw getal niet.”
- Bert: “Ik weet jouw getal niet.”
- Anna: “Ik weet jouw getal.”
- Bert: “Ik weet jouw getal.” reeds gemeenschappelijk bekend

Opeenvolgende getallen — bekendmakingen

(1,2)

<u>(2,3)</u>

- Anna: “Ik weet jouw getal niet.”
- Bert: “Ik weet jouw getal niet.”
- Anna: “Ik weet jouw getal.”
- Bert: “Ik weet jouw getal.”

Een iets andere weergave van het raadsel...

Anna en Bert krijgen ieder een natuurlijk getal te horen. De getallen zijn opvolgers van elkaar. Ze krijgen nu de getallen in hun oor gefluisterd. Ze zijn zich bewust van dit scenario. Stel Anna krijgt 2 te horen en Bert krijgt 3 te horen.

Anna en Bert hebben ieder een natuurlijk getal op het voorhoofd. De getallen zijn opvolgers van elkaar. Ze kunnen alleen het getal op het voorhoofd van de ander zien. Ze zijn zich bewust van dit scenario. Stel Anna heeft 3 op het voorhoofd en Bert heeft 2 op het voorhoofd.

Het maakt niet uit!

Wat is mijn getal?

Anna, Bert, en Cees hebben elk een positief geheel getal op het voorhoofd. Ze kunnen alleen de getallen op het voorhoofd van anderen zien. Een van de getallen is de som van de andere twee. Dit is allemaal gemeenschappelijk bekend. Ze doen nu achtereenvolgens de volgende bekendmakingen:

1. Anna: "Ik weet mijn getal niet."
2. Bert: "Ik weet mijn getal niet."
3. Cees: "Ik weet mijn getal niet."
4. Anna: "Ik weet mijn getal. Het is 50."

Wat zijn de andere getallen?

Math Horizons, november 2004, probleem 182.

Wat is mijn getal?

Wanneer weet Anna haar getal al aan het begin?

- Als de getallen $(2, 1, 1)$ waren geweest...

Wat is mijn getal?

Wanneer weet Anna haar getal al aan het begin?

- Als de getallen $(2, 1, 1)$ waren geweest...
- dan ziet Anna twee keer een 1.

Wat is mijn getal?

Wanneer weet Anna haar getal al aan het begin?

- Als de getallen $(2, 1, 1)$ waren geweest...
- dan ziet Anna twee keer een 1.
- Haar eigen getal is dus 2 of 0...

Wat is mijn getal?

Wanneer weet Anna haar getal al aan het begin?

- Als de getallen $(2, 1, 1)$ waren geweest...
- dan ziet Anna twee keer een 1.
- Haar eigen getal is dus 2 of 0...
- maar 0 mocht niet.

Wat is mijn getal?

Wanneer weet Anna haar getal al aan het begin?

- Als de getallen $(2, 1, 1)$ waren geweest...
- dan ziet Anna twee keer een 1.
- Haar eigen getal is dus 2 of 0...
- maar 0 mocht niet.
- *Anna weet dat haar getal 2 is.*

Wat is mijn getal? — de relationele structuur $\mathcal{T}$

- *domein* dat bestaat uit drietallen (x, y, z) zodat $x = y + z$ of $y = x + z$ of $z = x + y$
- *equivalentierelaties* voor de actoren zodat (voor Anna) $(x, y, z) \sim_a (x', y', z')$ dan en slechts dan als $y = y'$ en $z = z'$

$$\ldots$$
$$(65, 143, 78)$$
$$\text{a}$$
$$(221, 143, 78)$$
$$\text{b} \qquad\qquad \text{c}$$
$$(221, 299, 78) \qquad\qquad (221, 143, 364)$$
$$\ldots \qquad\qquad\qquad \ldots$$

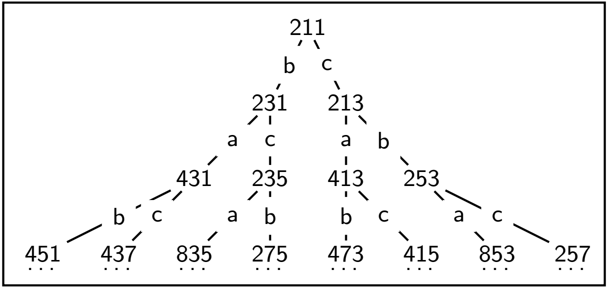
Wat is mijn getal? — een *abc*-equivalentieklasse

Dit beschrijft wat Anna, Bert, en Cees gemeenschappelijk weten.
Iedere vertakking in een *abc*-equivalentieklasse ziet er zo uit:

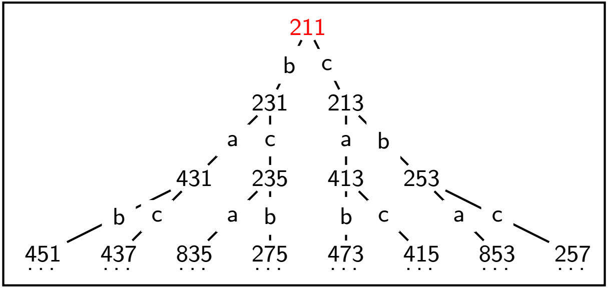
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \cdots & \\
 & (|x-y|, x, y) \arrow[d, dash, "\mathrm{a}"] & \\
 & (x+y, x, y) \arrow[dl, dash, "\mathrm{b}"'] \arrow[dr, dash, "\mathrm{c}"] & \\
(x+y, x+2y, y) & & (x+y, x, 2x+y) \\
\cdots & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Alle *abc*-equivalentieklasssen lijken op die met wortel $(2, 1, 1)$.

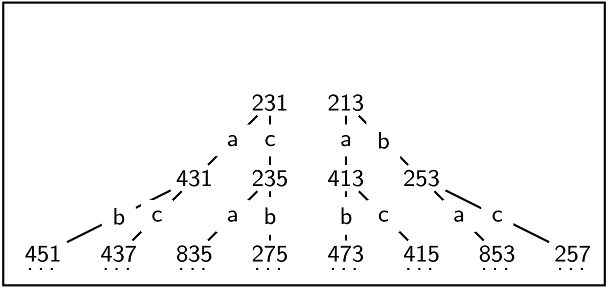
Onwetendheid bekendmaken



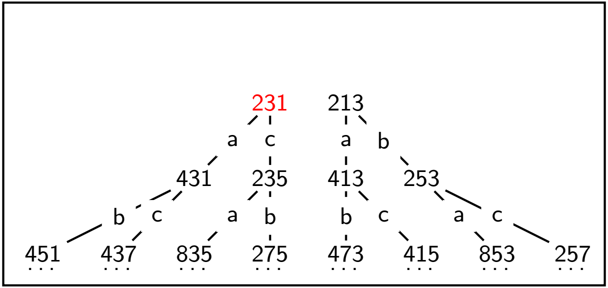
Onwetendheid bekendmaken



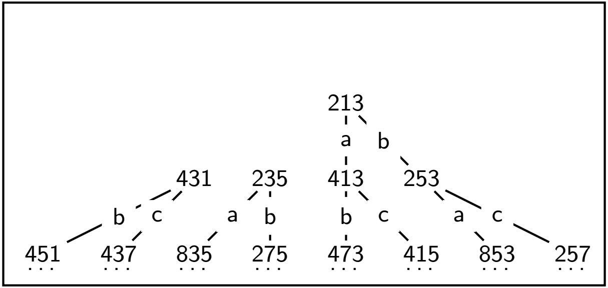
Onwetendheid bekendmaken



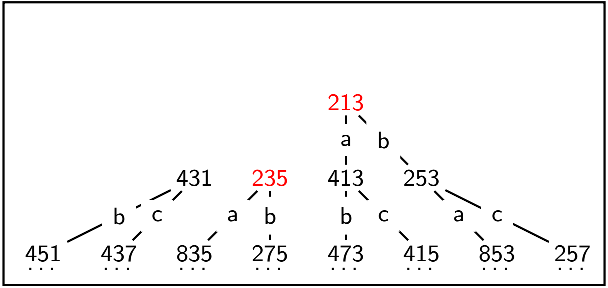
Onwetendheid bekendmaken



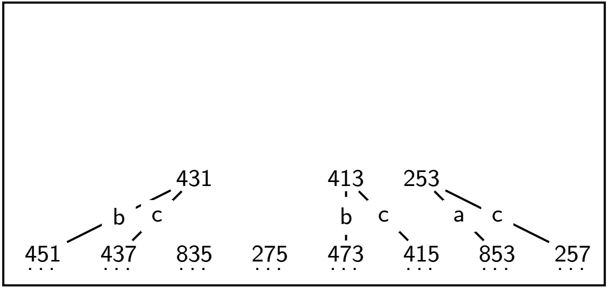
Onwetendheid bekendmaken



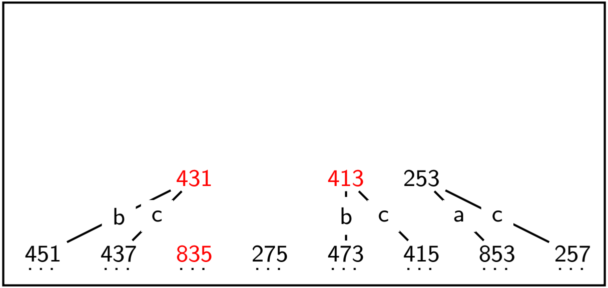
Onwetendheid bekendmaken



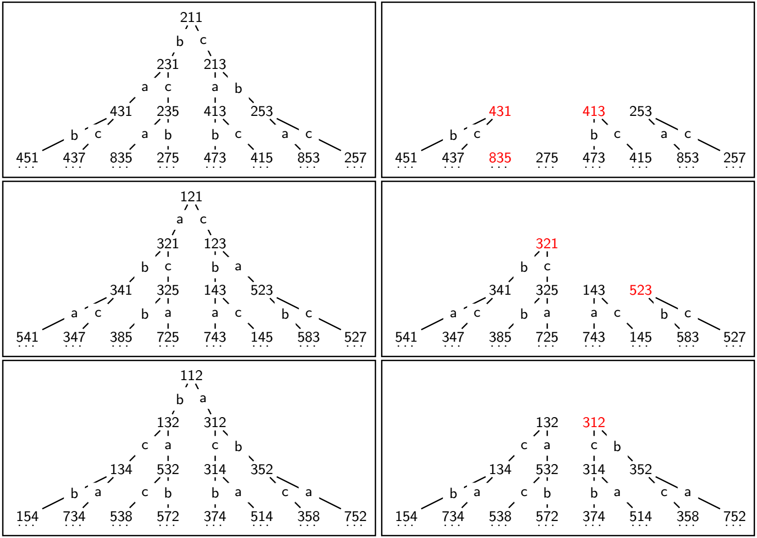
Onwetendheid bekendmaken



Onwetendheid bekendmaken



Wanneer Anna het weet na de drie bekendmakingen



Wat is mijn getal? — anders verwoord

1. Anna: “Ik weet mijn getal niet.”
2. Bert: “Ik weet mijn getal niet.”
3. Cees: “Ik weet mijn getal niet.”
4. Anna: “Ik weet mijn getal. Het is 50.”

Wat zijn de andere getallen?

Wat is mijn getal? — anders verwoord

1. Anna: "Ik weet mijn getal niet."
2. Bert: "Ik weet mijn getal niet."
3. Cees: "Ik weet mijn getal niet."
4. ~~Anna: "Ik weet mijn getal. Het is 50.~~"

~~Wat zijn de andere getallen?~~
Wat zijn de getallen, als Anna ze nu weet en ze allemaal priem zijn?

Wat is mijn getal? — als 0 ook mag...

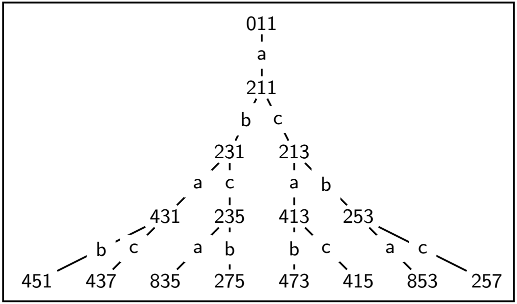
Anna, Bert, en Cees hebben elk een ~~positief geheel getal~~ **natuurlijk getal** op het voorhoofd. Ze kunnen alleen de getallen op het voorhoofd van anderen zien. Een van de getallen is de som van de andere twee. Dit is allemaal gemeenschappelijk bekend. Ze doen nu achtereenvolgens de volgende bekendmakingen:

1. Anna: “Ik weet mijn getal niet.”
2. Bert: “Ik weet mijn getal niet.”
3. Cees: “Ik weet mijn getal niet.”
4. Anna: “Ik weet mijn getal. Het is 50.”

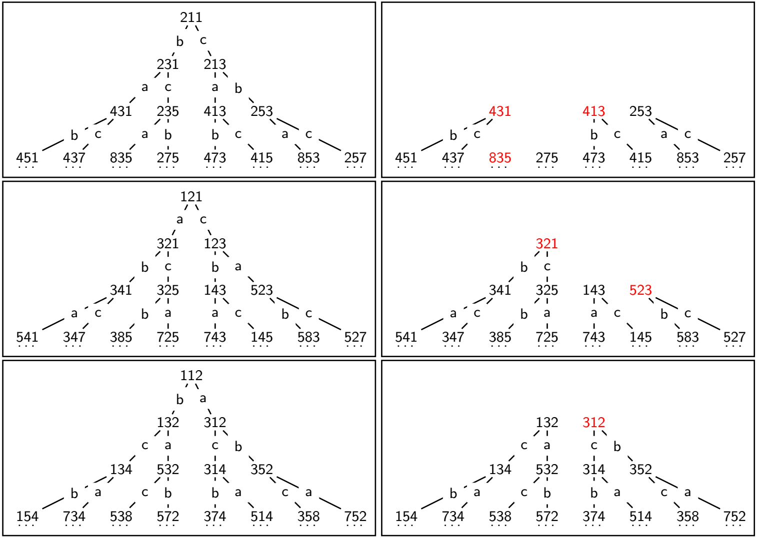
Wat zijn de andere getallen?

Dit is niet meer te bepalen! Waarom?

Wat is mijn getal? — als 0 ook mag...



Wanneer Anna het weet na de drie bekendmakingen



Som en Product

No. 223. A zegt tot S en P: Ik heb twee gehele getallen x, y gekozen met $1 < x < y$ en $x + y \leqslant 100$. Straks deel ik $s = x + y$ aan S alleen mee, en $p = xy$ aan P alleen. Deze mededelingen blijven geheim. Maar jullie moeten je inspannen om het paar (x, y) uit te rekenen.

Hij doet zoals aangekondigd. Nu volgt dit gesprek:

1. P zegt: Ik weet het niet.
2. S zegt: Dat wist ik al.
3. P zegt: Nu weet ik het.
4. S zegt: Nu weet ik het ook.

Bepaal het paar (x, y).

(*H. Freudenthal*).

Som en Product — hoe je de oplossing kunt vinden

- als het paar $(2, 3)$ was, dan kan P het afleiden uit hun product.
- als het allebei priemgetallen zijn, dan kan P het afleiden uit hun product, want dit heeft slechts één factorontbinding.
- als het paar $(14, 16)$ was, dan is hun som 30 ook de som van 7 en 23; zodat S niet kan weten dat P de getallen niet weet.

Bekendmaking 2 is sterker dan bekendmaking 1.
Bekendmakingen 3 en 4 zijn ook informatief.

Honderd gevangenen en een gloeilamp

Een groep van 100 gevangenen, gezamenlijk in de gevangeniskantine, wordt medegedeeld dat ze allemaal in isolatiecellen geplaatst zullen worden en daarna één voor één ondervraagd, in een kamer met een lamp met een aan-uitschakelaar. De gevangenen kunnen met elkaar communiceren door de lamp aan of uit te doen (en dat is de enige manier waarop ze kunnen communiceren). De lamp is aan het begin uit. Er is geen vaste volgorde van ondervraging, er is geen standaard tijdsduur tussen de ondervragingen, en dezelfde gevange kan best meerdere keren achter elkaar ondervraagd worden. Als een gevangene ondervraagd wordt, kan deze: niets doen, de lamp uitdoen, de lamp aandoen, of verklaren dat iedereen (ten minste een keer) ondervraagd is. Als dit waar is, worden alle gevangenen vrijgelaten. Anders worden ze allemaal opgehangen. Kunnen de gevangenen, zolang ze nog bij elkaar zijn in de kantine en niet naar de isolatiecellen gebracht zijn, een protocol overeenkomen waardoor ze vrijgelaten worden?